सत्यमेव जयते

ভারতের সংবিধান

প্রস্তাবনা

“আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্ররূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক, ন্যায়বিচার, চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার স্বাধীনতা, সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব গড়ে ওঠে তার জন্য সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে, আমাদের গণপরিষদে আজ ১৯৪৯ সালের ২৬ নভেম্বর, এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।”

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

গণিত

দশম শ্রেণির পাঠ্যবই

প্রস্তুতকরণ

জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, নতুন দিল্লি।

অনুবাদ ও অভিযোজন

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা সরকার।

এন সি ই আর টি
অনুমোদিত
বাংলা সংস্করণ

প্রথম প্রকাশ :
মার্চ, ২০২০

গণিত
দশম শ্রেণির পাঠ্যবই
(এন সি ই আর টি-র **MATHEMATICS**
পাঠ্যবইয়ের ২০১৭ সালের অনূদিত সংস্করণ)

প্রকাশক : অধিকর্তা,
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা
ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা

মূল্য : ১৬০ টাকা মাত্র

প্রচ্ছদ ও অক্ষর বিন্যাস
প্রিয়াংকা দেবনাথ

মুদ্রণ : সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ
ইন্ডাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড
১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২

ভূমিকা

২০০৬ সাল থেকে রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ প্রথম থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত প্রাথমিক ও উচ্চপ্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ ও প্রকাশের দায়িত্ব পালন করে আসছে।

রাজ্যের বিদ্যালয়স্তরে উন্নত ও সমৃদ্ধতর পাঠ্যক্রম চালু করার লক্ষ্যে ত্রিপুরা রাজ্য শিক্ষা দপ্তরের প্রচেষ্টায় প্রথম থেকে অষ্টম, নবম ও একাদশ শ্রেণির জন্য ২০১৯ শিক্ষাবর্ষ থেকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের (এন সি ই আর টি) পাঠ্যপুস্তকসমূহ গ্রহণ করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০১৯ সালে প্রথম প্রকাশ করা হয় এবং এ বছর ওইসব পুস্তকগুলোর পুনর্মুদ্রণ করা হল। পাশাপাশি দশম ও দ্বাদশ শ্রেণির বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০২০ শিক্ষাবর্ষে প্রথম প্রকাশ করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, বাংলা বিষয়ে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশনার দায়িত্বও রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ পালন করে আসছে।

বিশাল এই কর্মকাণ্ডে যেসব শিক্ষক-শিক্ষিকা, অধ্যাপক-অধ্যাপিকা, শিক্ষাবিদ, অনুবাদক, অনুলেখক, মুদ্রণকর্মী ও শিল্পীরা আমাদের সঙ্গে থেকে নিরলসভাবে অক্লান্ত পরিশ্রমে এই উদ্যোগ বাস্তবায়িত করেছেন তাদের সবাইকে সকৃতজ্ঞ ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

প্রকাশিত এই পাঠ্যপুস্তকটির উৎকর্ষ ও সৌন্দর্য বৃদ্ধির জন্য শিক্ষানুরাগী ও গুণীজনের মতামত ও পরামর্শ বিবেচিত হবে।

আগরতলা
মার্চ, ২০২০

উত্তম কুমার চাকমা
অধিকর্তা
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা

উপদেষ্টা

ড. অর্ণব সেন, সহঅধ্যাপক, এন ই আর আই ই, শিলং

ড. অরূপ কুমার সাহা, সহঅধ্যাপক, আর আই ই, ভুবনেশ্বর

পাঠ্যপুস্তকটি যাঁরা অনুবাদ করেছেন :

শ্রী মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক

শ্রী জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক

শ্রী সোমেন দেবনাথ, শিক্ষক

শ্রী প্রশান্ত সরকার, শিক্ষক

শ্রী প্রদীপ দেবনাথ, শিক্ষক

শ্রী অমরেশ দেবনাথ, শিক্ষক

শ্রী সুমন দাস, শিক্ষক

শ্রী বিদুর দেবনাথ, শিক্ষক

শ্রী লিটন দত্ত, শিক্ষক

শ্রী রাজেশ সাহা, শিক্ষক

ভাষা-পরিমার্জনায়

শ্রী সুপ্রিয় চক্রবর্তী

শ্রী গৌতম রুদ্র পাল

শ্রীমতী এমেলী নাগ

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers

contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
15 November 2006

Preface

Through the years, from the time of the Kothari Commission, there have been several committees looking at ways of making the school curriculum meaningful and enjoyable for the learners. Based on the understanding developed over the years, a National Curriculum Framework (NCF) was finalised in 2005. As part of this exercise, a National Focus Group on Teaching of Mathematics was formed. Its report, which came in 2005, highlighted a constructivist approach to the teaching and learning of mathematics.

The essence of this approach is that children already know, and do some mathematics very naturally in their surroundings, before they even join school. The syllabus, teaching approach, textbooks etc., should build on this knowledge in a way that allows children to enjoy mathematics, and to realise that mathematics is more about a way of reasoning than about mechanically applying formulae and algorithms. The students and teachers need to perceive mathematics as something natural and linked to the world around us. While teaching mathematics, the focus should be on helping children to develop the ability to particularise and generalise, to solve and pose meaningful problems, to look for patterns and relationships, and to apply the logical thinking behind mathematical proof. And, all this in an environment that the children relate to, without overloading them.

This is the philosophy with which the mathematics syllabus from Class I to Class XII was developed, and which the textbook development committee has tried to realise in the present textbook. More specifically, while creating the textbook, the following broad guidelines have been kept in mind.

- The matter needs to be linked to what the child has studied before, and to her experiences.
- The language used in the book, including that for 'word problems', must be clear, simple and unambiguous.
- Concepts/processes should be introduced through situations from the children's environment.
- For each concept/process give several examples and exercises, but not of the same kind. This ensures that the children use the concept/process again and again, but in varying contexts. Here 'several' should be within reason, not overloading the child.
- Encourage the children to see, and come out with, diverse solutions to problems.

- As far as possible, give the children motivation for results used.
- All proofs need to be given in a non-didactic manner, allowing the learner to see the flow of reason. The focus should be on proofs where a short and clear argument reinforces mathematical thinking and reasoning.
- Whenever possible, more than one proof is to be given.
- Proofs and solutions need to be used as vehicles for helping the learner develop a clear and logical way of expressing her arguments.
- All geometric constructions should be accompanied by an analysis of the construction and a proof for the steps taken to do the required construction. Accordingly, the children would be trained to do the same while doing constructions.
- Add such small anecdotes, pictures, cartoons and historical remarks at several places which the children would find interesting.
- Include optional exercises for the more interested learners. These would not be tested in the examinations.
- Give answers to all exercises, and solutions/hints for those that the children may require.
- Whenever possible, propagate constitutional values.

As you will see while studying this textbook, these points have been kept in mind by the Textbook Development Committee. The book has particularly been created with the view to giving children space to explore mathematics and develop the abilities to reason mathematically. Further, two special appendices have been given — Proofs in Mathematics, and Mathematical Modelling. These are placed in the book for interested students to study, and are only optional reading at present. These topics may be considered for inclusion in the main syllabi in due course of time.

As in the past, this textbook is also a team effort. However, what is unusual about the team this time is that teachers from different kinds of schools have been an integral part at each stage of the development. We are also assuming that teachers will contribute continuously to the process in the classroom by formulating examples and exercises contextually suited to the children in their particular classrooms. Finally, we hope that teachers and learners would send comments for improving the textbook to the NCERT.

PARVIN SINCLAIR
G.P. DIKSHIT
Chief Advisors
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor,* Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, *Professor* of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head* (Retd.)*,* DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, *PGT,* DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, *Professor* and *Head,* DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, *Professor,* RIE, Mysore

Jayanti Datta, *PGT,* Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, *Professor* (Retd.) & *Consultant,* DESM, NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, *Teacher* and *Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, *TGT,* Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, *Professor,* DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, *TGT,* Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, *TGT,* Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, *TGT,* D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, *TGT,* Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, *TGT,* Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, *TGT,* Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, *Lecturer,* Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, *Emeritus Professor*, IIT, New Delhi; Monika Singh, *Lecturer,* Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, *TGT,* Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, *TGT,* S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, *Head* (Retd.)*,* DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge,* Computer Station; Purnendu Kumar Barik, *Copy Editor;* Naresh Kumar and Nargis Islam, *D.T.P. Operators;* Yogita Sharma, *Proof Reader*.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

সূচিপত্র

বাস্তব সংখ্যা 1

(REAL NUMBERS)

1.1 ভূমিকা

তোমরা নবম শ্রেণিতে, বাস্তব সংখ্যা জগতের অন্বেষণ শুরু করেছ এবং অমূলদ সংখ্যাসমূহের সম্মুখীন হয়েছ। এ অধ্যায়ে আমরা বাস্তব সংখ্যা নিয়ে আলোচনা জারি রাখব। আমরা 1.2 এবং 1.3 অনুচ্ছেদে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার দুটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ধর্মাবলি নিয়ে চর্চা শুরু করব, এগুলো হল ইউক্লিডের ভাগ কলনবিধি (Euclid's division algorithm) এবং পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Arithmetic)।

ইউক্লিডের ভাগ কলন বিধি নামকরণটি অখণ্ড সংখ্যাসমূহের বিভাজ্যতার সাথে সম্বন্ধযুক্ত। এটি সহজে বিবৃত করে, যে-কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a কে অপর একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b দিয়ে এরূপে ভাগ করা যেতে পারে যেখানে ভাগশেষ r হয়, যা b থেকে ক্ষুদ্রতর হয়। তোমরা অনেকেই সম্ভবত এটিকে দীর্ঘ ভাগ-প্রক্রিয়া (long division process) রূপে জানো। যদিও এই পরিণামটি বলতে এবং বুঝতে খুবই সহজ কিন্তু অখণ্ড সংখ্যাসমূহের বিভাজ্যতা সম্পর্কিত ধর্মাবলির উপর এটির অনেক প্রয়োগ আছে। আমরা এসব ধর্মের কয়েকটির উপর আলোকপাত করব এবং দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গ.সা.গু. নির্ণয়ে মূলত এর প্রয়োগ করব।

অপরপক্ষে, পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গুণনের সাথে সম্পর্কিত। ইতোমধ্যে তোমরা জেনেছ যে, প্রতিটি যৌগিক সংখ্যাকে অনন্যরূপে মৌলিক সংখ্যাসমূহের গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। এই গুরুত্বপূর্ণ তথ্যটিই হল পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য। আবার, এই পরিণামটি যদিও বিবৃত করা এবং বোঝা সহজ। কিন্তু গণিতের ক্ষেত্রে এর খুবই গভীর এবং তাৎপর্যপূর্ণ প্রয়োগ আছে। এখানে আমরা পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের দুটি মুখ্য প্রয়োগ করব। প্রথমত, সংখ্যাসমূহের যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{5}$. -এর অমূলদ সত্তা প্রমাণে এর প্রয়োগ করব, যা তোমরা নবম শ্রেণিতে অধ্যয়ন করেছ। দ্বিতীয়ত, আমরা এ উপপাদ্যটি কোনো মূলদ সংখ্যা, ধরো $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ -এর দশমিক বিস্তার সসীম নতুবা অসীম আবৃত্ত হওয়ার যথাযথ অন্বেষণে প্রয়োগ করব। আমরা এর জন্য $\frac{p}{q}$ এর হর q এর মৌলিক উৎপাদকীকরণের দিকে নজর দেবো। তোমরা দেখতে পাবে যে, q-এর মৌলিক উৎপাদকীকরণে $\frac{p}{q}$ এর দশমিক বিস্তারের প্রকৃতি পুরোপুরি প্রকাশ পায়।

সুতরাং, চলো আমাদের অন্বেষণ শুরু করি।

1.2 ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য (Euclid's Division Lemma)

নীচের গ্রাম্য ধাঁধা (folk Puzzle) টি লক্ষ করো।*

একজন বিক্রেতা সড়কপথে চলতে চলতে ডিম বিক্রি করছিলেন। একজন অলস ব্যাক্তি যার কোনো কাজ ছিল না যে ওই বিক্রেতার সাথে তর্ক শুরু করল। কথা বাড়তে বাড়তে অবশেষে হাতাহাতিতে পরিণত হওয়ার পরে লোকটি ডিম বিক্রেতার ঝুড়িটিকে টেনে পাকা রাস্তার উপর ফেলে দিল। এতে ডিম ভেঙে গেল। ডিম বিক্রেতা পঞ্চায়েতে আবেদন করল যাতে ওই অলস লোকটি তার ভেঙে যাওয়া ডিমের দাম মিটিয়ে দেয়। পঞ্চায়েত ওই বিক্রেতাকে জিজ্ঞেস করল — কতগুলো ডিম ভেঙেছে? তার উত্তর ছিল নিম্নরূপ :

জোড়ায় জোড়ায় গুনলে, একটি থাকে বাকি;
তিনটি করে গুনলে, দুটি থাকে বাকি;
চারটি করে গুনলে, তিনটি থাকে বাকি;
পাঁচটি করে গুনলে, চারটি থাকে বাকি;
ছয়টি করে গুনলে, পাঁচটি থাকে বাকি;
সাতটি করে গুনলে, কিছুই থাকে না বাকি;
আমার ঝুড়িতে 150 টির বেশি ডিম রাখা যায় না।

সুতরাং, ঝুড়িতে কতগুলো ডিম ছিল? চলো আমরা এই ধাঁধাটির সমাধানের চেষ্টা করি। ধরো, ডিমের সংখ্যা a। তবে উল্টোক্রমে এগোলে, আমরা দেখি যে, a-এর মান 150 বা তা থেকে কম।

সাতটি করে গুনলে, কিছু থাকে না বাকি যা প্রকাশ করে, $a = 7p + 0$, যেখানে p হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা। যদি ছয়টি করে গোনা হয়, তবে $a = 6q + 5$, যেখানে q হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

পাঁচটি করে গুনলে, চারটি থাকে বাকি, যা প্রকাশ করে $a = 5w + 4$, যেখানে w হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

চারটি করে গুনলে, তিনটি থাকে বাকি, যা প্রকাশ করে $a = 4s + 3$, যেখানে s হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

তিনটি করে গুনলে, দুটি থাকে বাকি, যা প্রকাশ করে $a = 3t + 2$, যেখানে t হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

জোড়ায় জোড়ায় গুনলে, একটি থাকে বাকি, যা প্রকাশ করে $a = 2u + 1$, যেখানে u হল কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

* A. Rampal এবং অন্যান্য লেখকের রচিত 'Numeracy Counts!'-এর একটি ধাঁধার পরিবর্তিত রূপ।

অর্থাৎ, উপরোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে আমাদের কাছে দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a এবং b (আমাদের উদাহরণে b-এর মান যথাক্রমে 7, 6, 5, 4, 3 এবং 2) আছে, যেখানে a কে b দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ r (আমাদের উদাহরণে r এর মান যথাক্রমে 0, 5, 4, 3, 2 এবং 1) হয়, অর্থাৎ b থেকে ছোটো হয়। যখন আমরা এরূপ সমীকরণ লিখি তখন আমরা ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্যটি প্রয়োগ করি, যা উপপাদ্য 1.1-এ দেওয়া হয়েছে।

পুনরায় ধাঁধাটিতে ফিরে গিয়ে এর সমাধানের কোনো ধারণা তোমাদের কাছে আছে কি? হ্যাঁ! তোমরা অবশ্যই 7-এর এরূপ গুণনীয়কগুলো লক্ষ করো, যেগুলো সকল প্রদত্ত শর্তগুলো মেনে চলে। প্রচেষ্টা ও ভ্রান্তি পদ্ধতির প্রয়োগে (ল.সা.গু.-এর ধারণা ব্যবহার করে) তোমরা পাবে যে, ডিম বিক্রেতার নিকট 119টি ডিম ছিল।

ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্যটিকে অনুধাবন করার জন্য নীচের অখণ্ড জোড়গুলো বিচার করো :

17, 6; 5, 12; 20, 4

এমন প্রতিটি জোড়ার ক্ষেত্রে আমরা নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলো লিখতে পারি যা আমরা উদাহরণে আলোচনা করেছি :

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17তে 6 দুইবার যায় এবং 5 বাকি থাকে)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (এ সম্পর্কটি এজন্য সঠিক হয় যেহেতু 12, 5 অপেক্ষা বৃহত্তর)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (20 তে 4 পাঁচবার যায় এবং কিছুই বাকি থাকে না)

অর্থাৎ প্রতিজোড়া ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a ও b -এর জন্য আমরা সমগ্র সংখ্যা q ও r পাই, যারা

$a = bq + r, 0 \leq r < b$ — সম্পর্কটি মেনে চলে।

লক্ষ করো যে q বা r -এর মান শূন্যও হতে পারে।

এখন তোমরা নিম্নলিখিত অখণ্ড জোড় a ও b -এর জন্য অখণ্ড সংখ্যা q ও r নির্ণয়ের চেষ্টা কেন করবে না?

(i) 10, 3; (ii) 4, 19; (iii) 81, 3

q ও r অনন্য কিনা তোমরা লক্ষ করেছ কি? এগুলো হল একমাত্র অখণ্ড সংখ্যা যারা $a = bq + r$, যেখানে $0 \leq r < b$ -কে সিদ্ধ করে। তোমরা আরও অনুধাবন করলে যে, এটি দীর্ঘ ভাগ পদ্ধতির একটি অনুরূপ বিবৃতি, যা তোমরা পূর্ববর্তী বিভিন্ন বছরগুলোতে সম্পন্ন করে আসছ। এখানে, অখণ্ড সংখ্যা q ও r -কে যথাক্রমে *ভাগফল* এবং *ভাগশেষ* বলা হয়।

এই ফলাফলে একটি বিধিসম্মত বিবৃতি নিম্নরূপ :

উপপাদ্য 1.1 (ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য) : *প্রদত্ত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a ও b-এর জন্য দুটি অনন্য অখণ্ড সংখ্যা q ও r -এর অস্তিত্ব থাকে, যেখানে $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ হয়।*

এই পরিণামটি হয়তো বহুকাল পূর্বেই জ্ঞাত ছিল। কিন্তু এটি প্রথমে ইউক্লিডের এলিমেন্টস (Elements) পুস্তক VII-তে নথিভুক্ত হয়। ইউক্লিডের ভাগ কলন বিধির ভিত্তি হল এই সহায়ক উপপাদ্য।

একটি **কলনবিধি (algorithm)** হল সুসংজ্ঞাত ধাপসমূহের একটি শ্রেণি যা এক প্রকার সমস্যা সমাধানে একটি বিশেষ প্রক্রিয়া প্রদান করে।

নবম শতকের পার্সিয়ান গণিতবিদ al-Khwarizmi-এর নাম থেকে *algorithm* শব্দটির উদ্ভব হয়। প্রকৃতপক্ষে 'algebra' শব্দটিও তাঁর লেখা *Hisab al-jabr w'al-muqabala* পুস্তক থেকে সৃষ্টি হয়।

একটি **সহায়ক উপপাদ্য (lemma)** হল একটি প্রমাণিত বিবৃতি যা অপর একটি বিবৃতির প্রমাণে সহায়তা করে।

মহম্মদ ইবন মুসা-অল-খোয়ারিজমি (780 – 850 খ্রীস্টাব্দে)

ইউক্লিডের ভাগ কলন বিধি হল দুটি প্রদত্ত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু.) নির্ণয়ের একটি কৌশল। তোমরা স্মরণ করে দেখো যে, দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a ও b-এর গ.সা.গু. হল একটি গরিষ্ঠ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা d যা দিয়ে a এবং b উভয়েই বিভাজ্য।

চলো, প্রথমে আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখি কীভাবে কলনবিধি কার্য সম্পাদন করে। ধরে নাও, আমাদের অখণ্ড সংখ্যা 455 এবং 42 -এর গ.সা.গু. নির্ণয় করা প্রয়োজন। আমরা বৃহত্তর অখণ্ড সংখ্যা অর্থাৎ 455 দিয়ে শুরু করি। তাহলে ইউক্লিডের সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে আমরা পাই —

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

এখন ভাজক 42 এবং ভাগশেষ 35 কে বিবেচনা করে এবং ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে পাই

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

এখন ভাজক 35 এবং ভাগশেষ 7 কে বিবেচনা করে এবং ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে পাই

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

লক্ষ করো যে, এই পর্যায়ে ভাগশেষ শূন্য হয়েছে, তাই আমরা আর অগ্রসর হতে পারি না। অতএব **আমরা বলতে পারি** যে, এই পর্যায়ের ভাজক অর্থাৎ 7 হল 455 এবং 42-এর গ.সা.গু.। 455 এবং 42-এর সবগুলো উৎপাদক তালিকাবদ্ধ করে তোমরা এটি সহজে যাচাই করতে পারো। কেন এই নিয়ম কাজ করে? এটি নিম্নলিখিত ফলটির কারণে কাজ করে।

চলো, আমরা **ইউক্লিডের ভাগ কলন বিধি** স্পষ্টভাবে বিবৃত করি।

দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, ধরো c এবং d, সঙ্গে $c > d$, এর গ.সা.গু. নির্ণয়ে নীচের ধাপগুলো অনুসরণ করো :

ধাপ 1 : c এবং d-এর ক্ষেত্রে ইউক্লিডের ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে, আমরা সমগ্র সংখ্যা q এবং r নির্ণয় করি যেখানে $c = dq + r, 0 \leq r < d$ হয়।

ধাপ 2 : যদি $r = 0$ হয়, তবে c এবং d এর গ.সা.গু. হল d। যদি $r \neq 0$ হয় তবে d এবং r এর জন্য ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করো।

ধাপ 3 : এই প্রক্রিয়া ততক্ষণই চলবে যতক্ষণ না শূন্য পাওয়া যায়, এই পর্যায়ের ভাজক হবে নির্ণেয় গ.সা.গু.।

এই কলনবিধি কার্য সম্পন্ন করে কেন না গ.সা.গু. (c, d) = গ.সা.গু. (d, r), যেখানে গ.সা.গু. (c, d) সংকেতটি নির্দেশ করে c এবং d এর গ.সা.গু. ইত্যাদি।

উদাহরণ 1 : ইউক্লিডের কলনবিধি প্রয়োগে 4052 এবং 12576-এর গ.সা.গু. নির্ণয় করো।

সমাধান :

ধাপ 1 : যেহেতু $12576 > 4052$, তবে 12576 এবং 4052 কে নিয়ে ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে পাই

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ধাপ 2 : যেহেতু ভাগশেষ $420 \neq 0$, তবে 4052 এবং 420-এর উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে আমরা পাই

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ধাপ 3 : আমরা এখন নতুন ভাজক 420 এবং নতুন ভাগশেষ 272 কে বিবেচনায় আনব এবং এদের উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে পাই

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

এখন আমরা নতুন ভাজক ও ভাগশেষ যথাক্রমে 272 এবং 148 এর উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

এরপর নতুন ভাজক ও ভাগশেষ যথাক্রমে 148 ও 124-এর উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে পাই

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

এবার নতুন ভাজক ও ভাগশেষ যথাক্রমে 124 এবং 24-এর উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

তারপর নতুন ভাজক ও ভাগশেষ যথাক্রমে 24 ও 4-এর উপর ভাগ সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

এখন ভাগশেষ শূন্য হয়েছে, সুতরাং এখানেই প্রক্রিয়ার সমাপ্তি। যেহেতু এই পর্যায়ে ভাজক হল 4, অতএব 12576 এবং 4052 -এর গ.সা.গু. হল 4 ।

লক্ষ করো যে, 4 = গ.সা.গু. (24, 4) = গ.সা.গু. (124, 24) = গ.সা.গু. (148, 124) = গ.সা.গু. (272, 148) = গ.সা.গু. (420, 272) = গ.সা.গু. (4052, 420) = গ.সা.গু. (12576, 4052)।

ইউক্লিডের ভাগ কলন বিধি শুধুমাত্র বড়ো সংখ্যাসমূহের গ.সা.গু. নির্ণয়েই ব্যবহৃত হয়, তা নয়। অধিকন্তু এটি একটি প্রাচীন কলনবিধির উদাহরণ যা কম্পিউটার প্রোগ্রাম পরিচালনায় সর্বপ্রথম ব্যবহৃত হয়।

মন্তব্য :

1. ইউক্লিডের ভাগ সহায়ক উপপাদ্য এবং কলনবিধি পরস্পর এতটাই ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত যে লোকেরা প্রায়ই প্রথমটিকেও কলনবিধি হিসেবে অভিহিত করে।

2. যদিও ইউক্লিডের ভাগ কলনবিধি শুধুমাত্র ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার ক্ষেত্রে বিবৃত হয়েছে, কিন্তু এটিকে সকল অশূন্য অখণ্ড সংখ্যার ক্ষেত্রেও, সম্প্রসারণ করা যেতে পারে অর্থাৎ $b \neq 0$। অবশ্য, এই ধারণাটি এখানে আমরা আলোচনায় আনব না।

সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ইউক্লিডের ভাগ সহায়ক উপপাদ্য/কলনবিধির কয়েকটি প্রয়োগ আছে। এই প্রয়োগগুলোর কিছু উদাহরণ নীচে দেওয়া হল :

উদাহরণ 2 : দেখাও যে, প্রতিটি ধনাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার আকার হল $2q$ এবং প্রতিটি ধনাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার আকার হল $2q + 1$, যেখানে q হল যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : ধরি, a যে-কোনো অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা এবং $b = 2$। তাহলে ইউক্লিডের কলনবিধি অনুসারে $a = 2q + r$, যেখানে কোনো অখণ্ড সংখ্যা $q \geq 0$ এবং $r = 0$ বা $r = 1$, কারণ $0 \leq r < 2$। সুতরাং, $a = 2q$ বা $2q + 1$।

যদি a এর আকার $2q$ হয়, তবে a হবে একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। আবার, একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় যুগ্ম অথবা অযুগ্ম হয়ে থাকে। তাই, যে-কোনো ধনাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার আকার হবে $2q + 1$ ।

উদাহরণ 3 : দেখাও যে, কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $4q + 1$ বা $4q + 3$ আকারের হয়, যেখানে q যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : চলো আমরা a-কে নিয়ে শুরু করি, যেখানে a একটি ধনাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। আমরা a এবং $b = 4$ -কে নিয়ে ভাগ কলনবিধি প্রয়োগ করব।

যেহেতু $0 \leq r < 4$, তাই সম্ভাব্য ভাগশেষগুলো হবে $0, 1, 2$ এবং 3 ।

অর্থাৎ a হতে পারে $4q$, বা $4q + 1$, বা $4q + 2$, বা $4q + 3$, যেখানে q হল ভাগফল। যেহেতু a অযুগ্ম, তাই a -এর আকার $4q$ বা $4q + 2$ হতে পারে না (কারণ উভয়েই 2 দিয়ে বিভাজ্য হয়)।

অতএব, যে-কোনো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $4q + 1$ বা $4q + 3$ আকারের হয়।

উদাহরণ 4 : একজন মিষ্টি বিক্রেতার নিকট 420 টি *কাজু বরফি* এবং130 টি *বাদাম বরফি* আছে। সে এগুলোকে এরূপে স্তূপীকৃত করতে চায় যেন প্রতিটি স্তূপে সমসংখ্যক বরফি থাকে এবং এগুলো যেন ট্রে (tray)-এর ন্যূনতম জায়গা দখল করে। এর জন্যে প্রতিটি স্তূপে কত সংখ্যক বরফি রাখতে হবে?

সমাধান : এটি প্রচেস্টা ও ভ্রান্তি পদ্ধতি প্রয়োগে করা যেতে পারে। কিন্তু এটি করতে নিয়মানুযায়ী আমরা গ.সা.গু. (420, 130) নির্ণয় করি। তখন এ সংখ্যাটি হবে প্রতিটি স্তূপের সর্বাধিক *বরফি* সংখ্যা এবং এক্ষেত্রে স্তূপের সংখ্যা হবে সর্বনিম্ন। তাহলে ট্রে-র ব্যবহৃত জায়গা সবচেয়ে কম হবে।

এখন, চলো আমরা গ.সা.গু. নির্ণয়ে ইউক্লিডের কলনবিধি প্রয়োগ করি। আমরা পাই :

$$420 = 130 \times 3 + 30$$

$$130 = 30 \times 4 + 10$$

$$30 = 10 \times 3 + 0$$

সুতরাং, 420 এবং 130 -এর গ.সা.গু. হল 10।

অতএব, মিষ্টি বিক্রেতা উভয় প্রকার *বরফি*-এর 10 টি করে স্তূপ তৈরি করতে পারেন।

অনুশীলনী 1.1

1. ইউক্লিডের ভাগ কলনবিধি প্রয়োগে গ.সা.গু. নির্ণয় করো :

   (i) 135 এবং 225 (ii) 196 এবং 38220 (iii) 867 এবং 255

2. দেখাও যে, কোনো ধনাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $6q+1$, বা $6q+3$, বা $6q+5$ আকারের হয়, যেখানে q যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

3. একটি কুচকাওয়াজে (parade) 616 সদস্যের একটি সৈন্যদল 32 সদস্যের এক আর্মিব্যান্ড-এর পেছনে অংশগ্রহণ করেছিল। দুটি দল সমসংখ্যক সারিতে মার্চ করবে। তাহলে সবচেয়ে কত বেশি সংখ্যক সারি নিয়ে তারা মার্চ করতে পারবে?

4. ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগে দেখাও যে, কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার বর্গ $3m$ বা $3m+1$ আকারের হয়, যেখানে m হল কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

   [**ইঙ্গিত :** ধরো x যে-কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তাহলে এর আকার $3q$, $3q+1$ বা $3q+2$ হবে। এখন এগুলোর প্রতিটির বর্গ করো এবং দেখাও যে এদেরকে $3m$ বা $3m+1$-এর আকারে লেখা যেতে পারে]

5. ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে, কোনো ধনত্মক অখণ্ড সংখ্যার ঘন $9m$, $9m+1$ বা $9m+8$ আকারের হয়।

1.3 পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে দেখেছ যে, কোনো স্বাভাবিক সংখ্যাকে এর মৌলিক উৎপাদকের গুণফলরূপে লেখা যেতে পারে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$, এবং এরূপ। এখন চলো, স্বাভাবিক সংখ্যাগুলোকে অন্য দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করার চেষ্টা করি। অর্থাৎ মৌলিক সংখ্যাগুলোর গুণফলে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা পাওয়া যায় কিনা? চলো যাচাই করে দেখা যাক।

ধরে নাও, মৌলিক সংখ্যার কোনো একটি সংগ্রহ 2, 3, 7, 11 এবং 23 । যদি আমরা এদের কয়েকটি বা সবগুলোকে নিয়ে ইচ্ছামত বহুবার পুনরাবৃত্তি করে গুণ করে থাকি তবে আমরা একটি বিশাল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সংগ্রহ পেতে পারি (প্রকৃতপক্ষে, অসীম সংখ্যক)। চলো এদের কয়েকটির তালিকা করি :

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\quad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

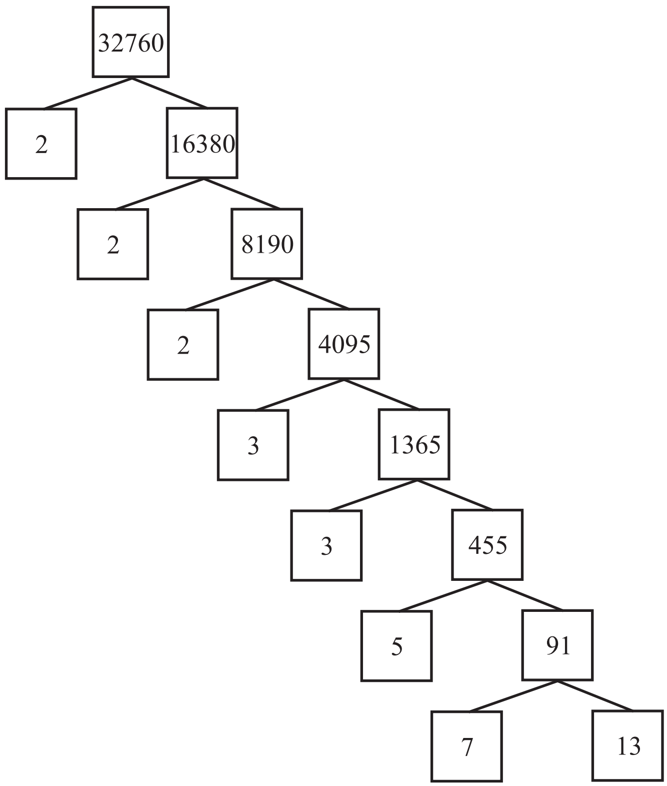
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\quad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$

ইত্যাদি

এখন ধরা যাক, সকল সম্ভাব্য মৌলিক সংখ্যাসমূহ হল তোমার মৌলিক সংখ্যার সংগ্রহ। এই সংগ্রহের আকার (size) সম্পর্কে তোমার কী অনুমান হবে? এই সংগ্রহটি কী সসীম হবে নাকি অসীম সংখ্যক হবে? প্রকৃতপক্ষে অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে। যদি আমরা এদের সবগুলোকে সম্ভাব্য সব রকমে যুক্ত করি তবে আমরা সংখ্যার অসীম সংগ্রহ সব মৌলিক সংখ্যা এবং সকল মৌলিক সংখ্যার সম্ভাব্য গুণফলসমূহ পাব। প্রশ্ন হল- সমস্ত যৌগিক সংখ্যাগুলোকে কি এভাবে আমরা তৈরি করতে পারি? তোমাদের কী মনে হয়? তোমরা কি ভাবতে পারো যে এমন একটি যৌগিক সংখ্যা হতে পারে যাকে মৌলিক সংখ্যাসমূহের ঘাতের গুণফলরূপে প্রকাশ করা যায় না? এটির উত্তর করার আগে, চলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি, অর্থাৎ যা আমরা আগে করেছিলাম এর উল্টো প্রক্রিয়া।

আমরা এখন উৎপাদক বৃক্ষ (factortree) ব্যবহার করব যার সাথে তোমরা সবাই পরিচিত। ধরো কোনো একটি বড়ো সংখ্যা, যেমন 32760 এবং এর উৎপাদক বিশ্লেষণ নীচে দেখানো হল :



অতএব, 32760 -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে মৌলিক সংখ্যার গুণফলে লেখা যায় $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ অর্থাৎ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ যা হল মৌলিক সংখ্যাসমূহের ঘাতের গুণফল। চলো অপর একটি সংখ্যা 123456789 কে নিয়ে চেষ্টা করা যাক। এটাকে লেখা যেতে পারে $3^2 \times 3803 \times 3607$ এরূপে। অবশ্যই তোমাদের যাচাই করতে হবে যে, 3803 এবং 3607 মৌলিক সংখ্যা! (এভাবে আরও কিছু স্বাভাবিক সংখ্যা নিয়ে তোমরা চর্চা করো)। এটি একটি অনুমান (conjecture)কে প্রভাবিত করে যে প্রতিটি যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যাসমূহের ঘাতের গুণফলরূপে লেখা যায়। বস্তুত, এই বিবৃতিটি সত্য এবং এটি **পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Arithmetic)** রূপে পরিচিত। কেননা অখণ্ড সংখ্যা অধ্যয়নে এটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভিত্তি। চলো আমরা এখন উপপাদ্যটিকে বিধিসম্মতরূপে বিবৃত করি।

উপপাদ্য 1.2 (পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য) : *প্রতিটি যৌগিক সংখ্যাকে একাধিক মৌলিক সংখ্যার গুণফলরূপে (উৎপাদক বিশ্লেষণে) প্রকাশ করা যেতে পারে এবং মৌলিক উৎপাদকগুলোর ক্রম নিরপেক্ষতার সাপেক্ষে এই উৎপাদকীকরণ অনন্য (factorisation is unique)।*

পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য হিসেবে পরিচিতির পূর্বে উপপাদ্য 1.2 -এর সমতুল্য কথন সম্ভবত প্রথমে ইউক্লিডের এলিমেন্ট পুস্তক IX-এর প্রস্তাবনা 14 তে বর্ণিত হয়েছিল। যদিও কার্ল ফ্রেডরিক গাউস তাঁর *Disquisitiones Arithmeticae* পুস্তকে সর্বপ্রথম এটির নির্ভুল প্রমাণ করেছিলেন।

কার্ল ফ্রেডরিক গাউসকে ‘গণিতজ্ঞদের রাজকুমার’ (Prince of Mathematicians) হিসেবে মানা হয় এবং সর্বকালের শ্রেষ্ঠ তিনজন গণিতজ্ঞ আর্কিমিদিস ও নিউটনের সাথে বিবেচনা করা হয়। তিনি গণিত এবং বিজ্ঞান উভয় শাখাতেই মৌলিক অবদান রেখে গেছেন।

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস
(Carl Friedrich Gauss)
(1777 – 1855)

পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য থেকে বলা যায় যে প্রতিটি যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকের গুণফল হিসেবে পাওয়া যায়। বাস্তবে এটি আরও কিছু ব্যক্ত করে। প্রদত্ত কোনো যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যার গুণফলরূপে **‘অদ্বিতীয়’ (unique)** ভাবে মৌলিক সংখ্যাসমূহের ক্রম নিরপেক্ষতায় প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ প্রদত্ত কোনো যৌগিক সংখ্যাকে একটি এবং কেবলমাত্র একটি প্রকারে মৌলিক সংখ্যাসমূহের গুণফলরূপে লেখা যায়। যেখানে মৌলিক সংখ্যাগুলোর অবস্থানের কোনো বিশেষ ক্রম বিচার করা হয় না। উদাহরণস্বরূপ, আমরা $2 \times 3 \times 5 \times 7$ -কে $3 \times 5 \times 7 \times 2$ -এর সমান মনে করি, বা এই মৌলিক সংখ্যাগুলোর গুণফলের সম্ভাব্য অন্যরকম কোনো ক্রমকে একই ধরা হয়। এই বিষয়টিকে নিম্নলিখিতরূপে বিবৃত করা যেতে পারে :

একটি স্বাভাবিক সংখ্যার উৎপাদকগুলোর ক্রম ব্যাতিরেকে মৌলিক উৎপাদকীকরণ অনন্য হয়।

সাধারণভাবে, প্রদত্ত একটি যৌগিক সংখ্যা x-এর উৎপাদকে বিশ্লেষণে আমরা পাই, $x = p_1 p_2 \dots p_n$, যেখানে $p_1, p_2, \dots, p_n$ হল মৌলিক সংখ্যা এবং এদের ঊর্ধ্বক্রমে লেখা হয়েছে, অর্থাৎ $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$ । যদি আমরা একই মৌলিক সংখ্যাসমূহ যুক্ত করি, তবে এ থেকে মৌলিক সংখ্যাসমূহের ঘাত পেয়ে থাকি। উদাহরণস্বরূপ,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

একবার যদি এটি স্থির করা হয় যে ক্রম আরোহী হবে তবে সংখ্যাটির উৎপাদকীকরণ অনন্য হবে।

পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের গণিত এবং অন্যান্য ক্ষেত্রগুলোর উভয়ের মধ্যে ব্যাপক প্রয়োগ আছে। চলো আমরা কয়েকটি উদাহরণ লক্ষ করি।

উদাহরণ 5 : ধরো সংখ্যাগুলো 4^n, যেখানে n যে-কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা। n-এর যে-কোনো মানের জন্য 4^n-এর শেষ অঙ্কটি শূন্য হয় কিনা যাচাই করো।

সমাধান : যে-কোনো n-এর জন্য 4^n সংখ্যাটি শূন্য দিয়ে শেষ হতে হলে, এটি 5টি দিয়ে বিভাজ্য হবে। অর্থাৎ 4^n-এর মৌলিক উৎপাদকীকরণে মৌলিক সংখ্যা 5 উৎপাদক হিসেবে থাকবে। এটা সম্ভব নয়,

কারণ $4^n = (2)^{2n}$; সুতরাং 4^n এর মৌলিক উৎপাদক হল শুধুমাত্র 2 । অতএব, পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের অনন্যতা এটা নিশ্চিত করে যে 4^n-এর অপর কোনো মৌলিক উৎপাদক থাকবে না। সুতরাং, এমন কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n নেই যার জন্য 4^n -এর শেষ অঙ্ক শূন্য দিয়ে শেষ হয়।

তোমরা ইতোমধ্যে পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের উপলব্ধি না করে এর প্রয়োগে দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গ.সা.গু. এবং ল.সা.গু. নির্ণয় শিখেছ। এই পদ্ধতিটিকে *মৌলিক উৎপাদকীকরণ পদ্ধতি* (*prime factorisation method*) ও বলা হয়। চলো আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে এই পদ্ধতির স্মৃতিচারণ করি।

উদাহরণ 6 : মৌলিক উৎপাদকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগে 6 এবং 20-এর ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা লিখতে পারি : $6 = 2^1 \times 3^1$ এবং $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$.

তোমরা পাবে গ.সা.গু. (6, 20) = 2 এবং ল.সা.গু. (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$, যা তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে করেছ।

লক্ষ করো গ.সা.গু. (6, 20) = 2^1 = **সংখ্যাগুলোতে প্রতিটি সাধারণ মৌলিক উৎপাদকের ক্ষুদ্রতম ঘাতের গুণফল**

ল.সা.গু. (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **সংখ্যাগুলোতে যুক্ত প্রতিটি মৌলিক উৎপাদকের বৃহত্তম ঘাতের গুণফল**

উপরের উদাহরণটিতে তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে, গ.সা.গু. (6, 20) × ল.সা.গু. (6, 20) = 6 × 20। প্রকৃতপক্ষে আমরা যাচাই করতে পারি যে, **যে-কোনো দুটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা a এবং b এর জন্য গ.সা.গু. (a, b) × ল.সা.গু. $(a, b) = a \times b$**। যদি দুটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যার গ.সা.গু. আগে থেকেই জানা থাকে, তবে এই ফলাফলটি ব্যবহার করে দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার ল.সা.গু. নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ 7 : মৌলিক উৎপাদকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগে 96 এবং 404 -এর গ.সা.গু. নির্ণয় করো। অতঃপর এদের ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

সমাধান : 96 এবং 404-এর মৌলিক উৎপাদকীকরণে পাই :

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

অতএব, এই অখণ্ড সংখ্যা দুটির গ.সা.গু. $2^2 = 4$.

আবার, $$\text{ল.সা.গু.}\ (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{গ.সা.গু.}\ (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

উদাহরণ 8 : মৌলিক উৎপাদকীকরণ পদ্ধতির মাধ্যমে 6, 72 এবং 120-এর গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা পাই,

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2,\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

এখানে, সাধারণ উৎপাদক 2 এবং 3-এর ক্ষুদ্রতম ঘাত যথাক্রমে 2^1 এবং 3^1।

সুতরাং, $$\text{গ.সা.গু.}\ (6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$$

তিনটি সংখ্যার উৎপাদক বিশ্লেষণের সাথে যুক্ত মৌলিক উৎপাদকগুলো 2, 3 এবং 5-এর বৃহত্তম ঘাতগুলো হল যথাক্রমে $2^3, 3^2$ এবং 5^1 ।

সুতরাং, ল.সা.গু. $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

মন্তব্য : লক্ষ করো, $6 \times 72 \times 120 \neq$ গ.সা.গু. $(6, 72, 120) \times$ ল.সা.গু. $(6, 72, 120)$। সুতরাং, তিনটি সংখ্যার ক্ষেত্রে, তাদের গুণফল এদের ল.সা.গু. ও গ.সা.গু.-এর গুণফলের সমান হয় না।

অনুশীলনী 1.2

1. প্রতিটি সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকের গুণফলে প্রকাশ করো :

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. নীচের অখণ্ড সংখ্যার জোড়গুলোর ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. নির্ণয় করো এবং যাচাই করো যে, ল.সা.গু. $\times$ গ.সা.গু. $=$ সংখ্যা দুটির গুণফল।

(i) 26 এবং 91 (ii) 510 এবং 92 (iii) 336 এবং 54

3. মৌলিক উৎপাদকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগে নীচের অখণ্ড সংখ্যাগুলোর ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. নির্ণয় করো।

(i) 12, 15 এবং 21 (ii) 17, 23 এবং 29 (iii) 8, 9 এবং 25

4. দেওয়া আছে গ.সা.গু. $(306, 657) = 9$, তবে ল.সা.গু. $(306, 657)$ নির্ণয় করো।

5. যে-কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য 6^n এর শেষ অঙ্কটি শূন্য হবে কিনা পরীক্ষা করে দেখো।

6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ এবং $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ যৌগিক সংখ্যা কেন ব্যাখ্যা করো।

7. একটি খেলার মাঠের চারদিকে একটি বৃত্তাকার পথ আছে। সোনিয়া মাঠটি একবার ঘুরে আসতে 18 মিনিট সময় নেয়, রবির সময় লাগে 12 মিনিট। ধরে নেওয়া যাক, উভয়েই একই সাথে একই জায়গা থেকে একই সময়ে রওনা হল এবং একই দিকে গেল। কত মিনিট পর তারা পুনরায় প্রারম্ভিক স্থলে মিলিত হবে?

1.4 অমূলদ সংখ্যাগুলোকে পুনরায় পরিদর্শন (Revisiting Irrational Numbers)

তোমরা নবম শ্রেণিতে অমূলদ সংখ্যাসমূহ এবং এদের ধর্মাবলির সাথে পরিচিত হয়েছ। তোমরা এদের অস্তিত্ব এবং কীভাবে মূলদ ও অমূলদ সংখ্যাগুলো একসাথে বাস্তব সংখ্যা গঠন করে তা পড়েছ। সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যার অবস্থান সম্পর্কেও তোমরা অধ্যয়ন করেছ। যদিও আমরা প্রমাণ করিনি যে তারা অমূলদ। এই অনুচ্ছেদে আমরা প্রমাণ করব যে, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ এবং সাধারণভাবে, $\sqrt{p}$ অমূলদ সংখ্যা, যেখানে p একটি মৌলিক সংখ্যা। আমরা এই প্রমাণে একটি উপপাদ্যের সাহায্য নেব, তা হল পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য।

পুনরায়, স্মৃতিতে এনে দেখ, একটি সংখ্যা 's' -কে *অমূলদ* বলা হয় যদি একে $\dfrac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা

না যায়, যেখানে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$। নিম্নে কয়েকটি অমূলদ সংখ্যার উদাহরণ দেওয়া হল যেগুলোর সাথে তোমরা পূর্বেই পরিচিত ছিলে :

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ইত্যাদি।}$$

$\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা প্রমাণের পূর্বে আমরা নীচে একটি উপপাদ্যের সাহায্য নেব যার ভিত্তি হল পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য।

উপপাদ্য 1.3 : *ধরা যাক p একটি মৌলিক সংখ্যা। যদি p দিয়ে a^2 বিভাজ্য হয়, তবে p দিয়ে a-ও বিভাজ্য হয়, যেখানে a একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।*

***প্রমাণ :** ধরো a-এর মৌলিক উৎপাদকীকরণ নিম্নরূপ :

$a = p_1p_2\ldots p_n$, যেখানে $p_1, p_2, \ldots, p_n$ মৌলিক সংখ্যা, এরা ভিন্ন নাও হতে পারে।

অতএব, $a^2 = (p_1p_2\ldots p_n)(p_1p_2\ldots p_n) = p_1^2p_2^2\ldots p_n^2$ ।

এখন, আমাদের দেওয়া আছে p দিয়ে a^2 বিভাজ্য। সুতরাং, পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য অনুযায়ী a^2-এর মৌলিক উৎপাদকগুলোর একটি হল p । যদিও, পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্যের অনন্যতার শর্তানুযায়ী, আমরা উপলব্ধি করি যে a^2 -এর শুধুমাত্র মৌলিক উৎপাদকগুলো হল $p_1, p_2, \ldots, p_n$। অতএব $p_1, p_2, \ldots, p_n$-এদের একটি হল p ।

এখন, যেহেতু $a = p_1p_2\ldots p_n$, তাই p দিয়ে a অবশ্যই বিভাজ্য।
আমরা এখন প্রমাণ করব $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

প্রমাণটি ‘বিরোধ উক্তির মাধ্যমে প্রমাণ’ (Proof by Contradiction)-এই কৌশলের উপর ভিত্তি করে সম্পন্ন করা হবে। (এই কৌশলটি পরিশিষ্ট 1-এ বিস্তৃত আলোচিত হয়েছে)।

উপপাদ্য 1.4 : *$\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।*

প্রমাণ : মনে করা যাক, বিপরীতভাবে $\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

সুতরাং, আমরা দুটি অখণ্ড সংখ্যা r এবং s $(\neq 0)$ নির্ণয় করতে পারব, এরূপে যে, $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$.

ধরো r এবং s এর 1 ছাড়া একটি সাধারণ উৎপাদক আছে। তারপর ওই সাধারণ উৎপাদক দিয়ে ভাগ করে আমরা পাই $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, যেখানে a ও b পরস্পর মৌলিক।

সুতরাং, $b\sqrt{2} = a$.

উভয়দিকে বর্গ করে এবং সাজিয়ে পাই, $2b^2 = a^2$। অতএব, 2 দিয়ে a^2 বিভাজ্য হয়।

* এটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত নয়।

এখন, উপপাদ্য 1.3 অনুযায়ী 2 দিয়ে a-ও বিভাজ্য হবে।

সুতরাং, আমরা লিখতে পারি, $a = 2c$, c কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

a -এর মান বসিয়ে, আমরা পাই $2b^2 = 4c^2$ অর্থাৎ $b^2 = 2c^2$।

এটি থেকে বোঝা যায়, 2 দিয়ে b^2 বিভাজ্য হয়, সুতরাং 2 দিয়ে b-ও বিভাজ্য হয় (পুনরায়, উপপাদ্য 1.3-তে $p = 2$ প্রয়োগে)।

অতএব, a এবং b -এর কমপক্ষে একটি সাধারণ উৎপাদক 2 আছে।

কিন্তু এটি a ও b -এর মাঝে 1 ছাড়া অন্য কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই — এ বিষয়টির বিরোধিতা করে।

$\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা - এই ভ্রান্ত ধারণার কারণে এই কল্পনা বিরুদ্ধ পরিস্থিতির সৃষ্টি হয়েছে।

সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ 9 : প্রমাণ করো যে, $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : চলো আমরা এটির বিপরীতে ধরে নিই যে, $\sqrt{3}$ সংখ্যাটি মূলদ।

অতএব, আমরা এখন অখণ্ড সংখ্যা a এবং $b\ (\neq 0)$ পেতে পারি যাতে $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ হয়।

ধরা যাক a ও b -এর 1 ছাড়া অন্য একটি সাধারণ উৎপাদক আছে। তাহলে আমরা ওই সাধারণ উৎপাদক দিয়ে ভাগ করে লিখতে পারি, $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ যেখানে a এবং b পরস্পর মৌলিক।

সুতরাং, $b\sqrt{3} = a\cdot$

উভয় পক্ষকে বর্গ করে এবং সাজিয়ে লিখে আমরা পাই, $3b^2 = a^2$.

অতএব, a^2, 3 দিয়ে বিভাজ্য এবং উপপাদ্য 1.3 অনুসারে 3 দিয়ে a ও বিভাজ্য।

সুতরাং, আমরা লিখতে পারি $a = 3c$, যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা c -এর জন্য।

a -এর মান বসিয়ে আমরা পাই, $3b^2 = 9c^2$ অর্থাৎ $b^2 = 3c^2$.

এটির অর্থ হল b^2, 3 দিয়ে বিভাজ্য এবং এজন্য 3 দিয়ে b ও বিভাজ্য (উপপাদ্য 1.3 প্রয়োগে $p = 3$ ধরে) হবে।

অতএব, a ও b-এর ন্যূনতম একটি সাধারণ উৎপাদক 3 আছে।

কিন্তু এটি, a ও b যে পরস্পর মৌলিক, এর বিরোধিতা করে।

$\sqrt{3}$ সংখ্যাটি যে মূলদ - আমাদের এই ভ্রান্ত ধারণার কারণে এই বিরুদ্ধ পরিস্থিতির সৃষ্টি হয়েছে। সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, $\sqrt{3}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

নবম শ্রেণিতে আমরা উল্লেখ করেছি যে,

- একটি মূলদ এবং একটি অমূলদ সংখ্যার সমষ্টি বা অন্তরফল অমূলদ হয় এবং
- একটি অশূন্য মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার গুণফল ও ভাগফল অমূলদ হয়।

আমরা এখানে কিছু বিশেষ ক্ষেত্র প্রমাণ করব।

উদাহরণ 10 : দেখাও যে, $5-\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : চলো আমরা এর বিপরীতে কল্পনা করি যে, $5-\sqrt{3}$ হল মূলদ।

অতএব, আমরা এমন পরস্পর মৌলিক a ও b $(b \neq 0)$ পেতে পারি যে, $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ হয়।

অতএব, $5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}\cdot$

সমীকরণটিকে সাজিয়ে আমরা পাই, $\sqrt{3}=5-\frac{a}{b}=\frac{5b-a}{b}\cdot$

যেহেতু a এবং b অখণ্ড সংখ্যা, আমরা পাই $5-\frac{a}{b}$ হল মূলদ সংখ্যা এবং তাই $\sqrt{3}$ হল মূলদ সংখ্যা।
কিন্তু এটি $\sqrt{3}$ অমূলদ সংখ্যা, এই সত্যের বিরোধিতা করে।

এই বিরুদ্ধ পরিস্থিতির উদ্ভব হয়েছে তার কারণ হল আমাদের ভ্রান্ত ধারণা যে $5-\sqrt{3}$ সংখ্যাটি মূলদ।

সুতরাং, আমরা সিদ্ধান্তে উপনীত হলাম যে $5-\sqrt{3}$ সংখ্যাটি অমূলদ।

উদাহরণ 11 : দেখাও যে, $3\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সমাধান : চলো আমরা এর বিপরীতে কল্পনা করি যে, $3\sqrt{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

অর্থাৎ, আমরা এমন পরস্পর মৌলিক সংখ্যা a ও b $(b \neq 0)$ পেতে পারি যেখানে $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ হয়।

সাজিয়ে লিখে আমরা পাই, $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}\cdot$

যেহেতু, 3, a এবং b হল অখণ্ড সংখ্যা, তাই $\frac{a}{3b}$ মূলদ হবে এবং তাই $\sqrt{2}$ হল মূলদ।

কিন্তু এটি এই সত্যের বিরোধিতা করে যে, $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

সুতরাং, আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, $3\sqrt{2}$ হল অমূলদ সংখ্যা।

অনুশীলনী 1.3

1. প্রমাণ করো যে, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
2. প্রমাণ করো যে, $3+2\sqrt{5}$ সংখ্যাটি অমূলদ।
3. প্রমাণ করো যে, নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলো অমূলদ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

1.5 মূলদ সংখ্যা এবং তাদের দশমিক বিস্তারকে পুনরায় ফিরে দেখা (Revisiting Rational Numbers and Their Decimal Expansions)

নবম শ্রেণিতে তোমরা অধ্যয়ন করেছ যে, মূলদ সংখ্যাসমূহের বিস্তৃতি হয় সসীম দশমিক বিস্তৃতি (terminating decimal expansion) নতুবা অসীম আবৃত্ত দশমিকে বিস্তৃতি (non-terminating repeating decimal expansion)। এই অনুচ্ছেদে আমরা একটি মূলদ সংখ্যা, ধরো $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ এর বিচার করব। অর্থাৎ যথার্থ রূপে বিশ্লেষণ করব কখন $\frac{p}{q}$ -এর দশমিক বিস্তৃতি সসীম হয় এবং কখন এটি অসীম আবৃত্ত (বা পৌনঃপুনিক) হয়। আমরা কিছু উদাহরণ নিয়ে এটি করব।

এসো নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যাগুলো বিচার করি :

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408.

এখন, (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

যা থেকে যে-কোনো একজন অনুমান করতে পারেন, সে সব সংখ্যাগুলোকে মূলদ সংখ্যার আকারে প্রকাশ করা যায় যাদের হরগুলো হল 10-এর কোনো একটি ঘাত। চলো আমরা লব ও হরের মধ্যে অবস্থিত সাধারণ উৎপাদকগুলো বর্জন করার চেষ্টা করি এবং দেখি আমরা কী পাই :

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

তোমরা কি কোনো নমুনা দেখেছ? এটি প্রকাশ পায় যে, আমরা একটি বাস্তব সংখ্যা যার দশমিক বিস্তৃতির অবসান ঘটে তাকে একটি $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যায় রূপান্তরিত করতে পারি যেখানে p ও q পরস্পর মৌলিক এবং হরের (অর্থাৎ, q) মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণে শুধুমাত্র 2-এর ঘাত, অথবা 5-এর ঘাত, অথবা উভয়ই থাকে। যেহেতু 10-এর ঘাত শুধুমাত্র 2 ও 5 এর ঘাতসমূহের উৎপাদকে থাকে, তাই আমরা হরকে এইরূপে প্রত্যাশা করব।

যদিও আমরা কিছু সংখ্যক উদাহরণ নিয়ে কাজ করেছি, তোমরা দেখবে যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা যার দশমিক বিস্তার সসীম তাকে একটি মূলদ সংখ্যার আকারে প্রকাশ করা যায়, যার হর হল 10-এর একটি ঘাত। আবার 10-এর মৌলিক উৎপাদক হল কেবল 2 এবং 5 । সুতরাং, লব ও হরের মধ্যে অবস্থিত সাধারণ উৎপাদকসমূহ বর্জন করে আমরা পাই যে, এই বাস্তব সংখ্যাটি হল একটি $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যা, যেখানে q -এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণের আকার হল 2^n5^m, যেখানে n, m হল কোনো অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

চলো আমরা প্রাপ্ত ফলাফলটি নিয়মানুসারে লিপিবদ্ধ করি :

উপপাদ্য 1.5 : *ধরো x একটি মূলদ সংখ্যা যার দশমিক বিস্তৃতি সসীম। তাহলে x কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p এবং q হল পরস্পর মৌলিক এবং q -এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণের আকার হল 2^n5^m, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।*

তোমরা সম্ভবত অবাক হচ্ছ যে, উপপাদ্য 1.5-এর বিপরীতে গেলে কী হবে? অর্থাৎ যদি আমাদের কাছে $\frac{p}{q}$ আকারের একটি মূলদ সংখ্যা থাকে এবং q-এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণের আকার 2^n5^m হয়, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তাহলে কি $\frac{p}{q}$ এর একটি সসীম দশমিক বিস্তৃতি থাকবে?

চলো আমরা দেখি, এটি কেন সঠিক, তার কিছু স্পষ্ট কারণ আছে। তোমরা অবশ্যই একমত হবে যে, $\frac{a}{b}$ আকারের কোনো মূলদ সংখ্যা, যেখানে b হল 10-এর একটি ঘাত, এর একটি সসীম দশমিক বিস্তৃতি থাকবে। সুতরাং এটি এই অর্থ প্রকাশ করে যে, $\frac{p}{q}$ আকারের, যেখানে q এর আকার 2^n5^m, একটি মূলদ সংখ্যাকে একটি সমতুল্য মূলদ সংখ্যায় পরিবর্তিত করা যায়, যার আকার হবে $\frac{a}{b}$ যেখানে b হল 10-এর একটি ঘাত। চলো আমরা উপরের উদাহরণগুলোতে ফিরে যাই এবং বিপরীত দিক থেকে কাজ করি।

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{375}{10^3} = 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{104}{10^3} = 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5} = \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{875}{10^4} = 0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4} = \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4} = \frac{233408}{10^4} = 23.3408$

সুতরাং, এই উদাহরণগুলো আমাদের দেখাচ্ছে যে, কীভাবে আমরা $\frac{p}{q}$ আকারের একটি মূলদ সংখ্যা, যেখানে q-এর আকার হল 2^n5^m, তাকে সমতুল্য মূলদ সংখ্যা $\frac{a}{b}$ আকারে পরিবর্তিত করতে পারি যেখানে b-হল 10-এর একটি ঘাত। অতএব, এ ধরনের মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তারের সমাপ্তি ঘটে। চলো আমরা প্রাপ্ত ফলাফলটি রীতি অনুযায়ি লিপিবন্ধ করি।

উপপাদ্য 1.6 : *ধরো $x = \frac{p}{q}$ হল এমন একটি মূলদ সংখ্যা যাতে q -এর আকার হল 2^n5^m, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে x-এর একটি দশমিক বিস্তৃতি থাকে যা সসীম হয়।*

এখন আমরা ওই মূলদ সংখ্যার দিকে অগ্রসর হওয়ার জন্য প্রস্তুত হয়েছি যার দশমিক বিস্তৃতি অসীম এবং আবৃত্ত। আরও একবার, চলো আমরা একটি উদাহরণ লক্ষ করি এটিতে কী হচ্ছে। আমরা তোমাদের নবম শ্রেণির পাঠ্যবই-এর অধ্যায় 1 এর উদাহরণ 5 নিচ্ছি, অর্থাৎ $\frac{1}{7}$ । এখানে ভাগশেষগুলো হল 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . এবং ভাজক হল 7।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
\hline
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

লক্ষ করো, এখানে হর অর্থাৎ 7 স্পষ্টতই 2^n5^m আকারের নয়। অতএব, উপপাদ্য 1.5 এবং 1.6 থেকে আমরা জানি যে, $\frac{1}{7}$ এর একটি সসীম দশমিক বিস্তৃতি থাকবে না। তাই ভাগশেষ 0 দেখা যাবে না (কেন?), এবং একটি নির্দিষ্ট ধাপের পর ভাগশেষের পুনরাবৃত্তি শুরু হয়। সুতরাং, আমরা $\frac{1}{7}$ -এর ভাগফলে একটি অঙ্কগুচ্ছ (block of digits) পাব, যথা 142857, যার পুনরাবৃত্তি ঘটে।

$\frac{1}{7}$ -এর ক্ষেত্রে আমরা যা দেখেছি, এটি সত্য হয় যে-কোনো মূলদ সংখ্যার জন্য যা উপপাদ্য 1.5 এবং 1.6 -এর অন্তর্গত নয়। এই সংখ্যাগুলোর জন্য আমরা পাই :

উপপাদ্য 1.7 : *ধরো $x = \frac{p}{q}$ হল এমন একটি মূলদ সংখ্যা যার q-এর আকার 2^n5^m নয়, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে x-এর একটি দশমিক বিস্তৃতি থাকবে যা হবে অসীম আবৃত্ত (পুনরাবৃত্ত)।*

উপরের আলোচনা থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, *প্রত্যেক মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তৃতি হয় সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত।*

অনুশীলনী 1.4

1. প্রকৃত দীর্ঘ ভাগ প্রক্রিয়া না করে নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যাগুলোর দশমিক বিস্তৃতি একটি সসীম দশমিক বিস্তৃতি না একটি অসীম আবৃত্ত দশমিক বিস্তৃতি হবে তা বলো :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. উপরের 1 নং প্রশ্নের যেসব মূলদ সংখ্যার সসীম দশমিক বিস্তৃতি আছে তাদের দশমিক বিস্তৃতি লেখো।

3. নিম্নলিখিত বাস্তব সংখ্যাসমূহের দশমিক বিস্তৃতি নীচে দেওয়া হল। প্রতিক্ষেত্রে নির্ধারণ করো যে, এ সংখ্যাগুলো মূলদ কিনা। যদি এগুলো মূলদ হয় এবং $\frac{p}{q}$ আকারের হয়, তবে তুমি q-এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ সম্পর্কে কী বলতে পারো?

(i) 43.123456789　　(ii) 0.120120012000120000...　　(iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য (Euclid's division lemma) :
প্রদত্ত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a এবং b-এর ক্ষেত্রে এমন সমগ্র সংখ্যা q এবং r-এর অস্তিত্ব আছে, যেখানে $a = bq + r, 0 \le r < b$.

2. ইউক্লিডের ভাগ কলনবিধি (Euclid's division algorithm) : এটির ভিত্তি হল ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য। এই কলনবিধি অনুযায়ী, যে-কোনো দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a এবং b, যেখানে $a > b$, এর গ.সা.গু. নিম্নলিখিত ধাপে পাওয়া যায় :

ধাপ 1 : q এবং r নির্ণয়ের জন্য ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করো, যেখানে $a = bq + r, 0 \le r < b$।

ধাপ 2 : যদি $r = 0$ হয়, তবে গ.সা.গু. হল b। যদি $r \ne 0$হয়, তবে b এবং r এর উপর ইউক্লিডের সহায়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করো।

ধাপ 3 : এই প্রক্রিয়াটি চলতে থাকবে যতক্ষণ না ভাগশেষ শূন্য হয়। এই ধাপে ভাজকটি হবে গ.সা.গু. (a, b)। আবার, গ.সা.গু. (a, b) = গ.সা.গু. (b, r)।

3. পাটিগণিতের মৌলিক উপপাদ্য (The Fundamental Theorem of Arithmetic) :
প্রতিটি যৌগিক সংখ্যাকে একাধিক মৌলিক সংখ্যার গুণফলরূপে (উৎপাদক বিশ্লেষণে) প্রকাশ করা যেতে পারে এবং মৌলিক উৎপাদকসমূহ নির্ণয়ের ক্রম নিরপেক্ষতার সাপেক্ষে এই উৎপাদকীকরণ অনন্য (factorisation is unique) হয়।

4. যদি p একটি মৌলিক সংখ্যা হয় এবং p দিয়ে a^2 বিভাজ্য হয়, তবে p দিয়ে a ও বিভাজ্য হবে, যেখানে a একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

5. $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ অমূলদ সংখ্যা প্রমাণ করা।

6. ধরো x একটি মূলদ সংখ্যা যার দশমিক বিস্তৃতি সসীম। তাহলে আমরা x কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করতে পারি যেখানে p ও q হল পরস্পর মৌলিক এবং q-এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণের আকার হয় 2^n5^m, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

7. ধরো $x = \frac{p}{q}$ এমন একটি মূলদ সংখ্যা যেখানে q-এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণের আকার হয় 2^n5^m, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে x-এর একটি দশমিক বিস্তৃতি থাকে যা সসীম হয়।

8. ধরো $x = \frac{p}{q}$ এমন একটি মূলদ সংখ্যা যেখানে q-এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ $2^n\, 5^m$ আকারের নয়, যেখানে n, m হল অ-ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে x-এর একটি দশমিক বিস্তৃতি থাকে যা অসীম আবৃত্ত (পৌনঃপুনিক) হয়।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

তোমরা দেখেছ যে :

গ.সা.গু. $(p, q, r) \times$ ল.সা.গু. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, যেখানে p, q, r ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (উদাহরণ ৪ দেখো)। কিন্তু, তিনটি সংখ্যা p, q এবং r এর ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত ফলাফলগুলো সঠিকভাবে প্রযোজ্য হয় :

$$\text{ল.সা.গু.}\,(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{ গ.সা.গু}\,(p, q, r)}{\text{গ.সা.গু}\,(p, q) \cdot \text{গ.সা.গু}\,(q, r) \cdot \text{গ.সা.গু}\,(p, r)}$$

$$\text{গ.সা.গু.}\,(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{ ল.সা.গু.}(p, q, r)}{\text{ল.সা.গু.}(p, q) \cdot \text{ল.সা.গু.}(q, r) \cdot \text{ল.সা.গু.}(p, r)}$$

বহুপদ রাশিমালা (POLYNOMIALS) 2

2.1 ভূমিকা

তোমরা ইতিপূর্বেই নবম শ্রেণিতে এক চলরাশিবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাসমূহ এবং তাদের মাত্রা সম্পর্কে পরিচিত হয়েছ। স্মরণ করো যে, যদি $p(x)$, x-এর একটি বহুপদ রাশিমালা হয় তবে $p(x)$-এ, x-এর সর্বোচ্চ ঘাতকে **বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ -এর মাত্রা (degree) বলা হয়।** উদাহরণস্বরূপ, $4x + 2$ হল একটি x-চলরাশি বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা যার মাত্রা 1, $2y^2 - 3y + 4$ হল একটি y-চলরাশি বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা যার মাত্রা 2, $5x^3 - 4x^2 + x - \sqrt{2}$ হল একটি x-চলরাশি বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা যার মাত্রা 3 এবং $7u^6 - \frac{3}{2}u^4 + 4u^2 + u - 8$ হল একটি u-চলরাশি বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা যার মাত্রা 6। রাশিমালাসমূহ যেমন $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x} + 2$, $\frac{1}{x^2 + 2x + 3}$ ইত্যাদি বহুপদ রাশিমালা নয়।

1-মাত্রাবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাকে **রৈখিক বহুপদ রাশিমালা (linear polynomial)** বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ, $2x - 3$, $\sqrt{3}x + 5$, $y + \sqrt{2}$, $x - \frac{2}{11}$, $3z + 4$, $\frac{2}{3}u + 1$ ইত্যাদি সবগুলো হল রৈখিক বহুপদ রাশিমালা। অপরপক্ষে, $2x + 5 - x^2$, $x^3 + 1$ ইত্যাদি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা নয়।

2-মাত্রাবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাকে **দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা (quadratic polynomial)** বলা হয়। এখানে ‘কোয়াড্রেটিক’ (quadratic) শব্দটি ‘কোয়াড্রেট’ (quadrate) শব্দ থেকে এসেছে যার অর্থ হল ‘বর্গ’। $2x^2 + 3x - \frac{2}{5}$, $y^2 - 2$, $2 - x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{u}{3} - 2u^2 + 5$, $\sqrt{5}v^2 - \frac{2}{3}v$, $4z^2 + \frac{1}{7}$ ইত্যাদি হল দ্বিঘাত রাশিমালা সমূহের কিছু উদাহরণ (যাদের সহগসমূহ হল বাস্তব সংখ্যা)। সাধারণভাবে, x-চলরাশি বিশিষ্ট যে-কোনো দ্বিঘাত রাশিমালাকে $ax^2 + bx + c$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে a, b, c হল বাস্তব সংখ্যাসমূহ এবং $a \neq 0$। আবার, 3-মাত্রাবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাকে **ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা (cubic polynomial)** বলা

হয়। ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার কিছু উদাহরণ হল $2-x^3, x^3, \sqrt{2}\,x^3,\ 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$ ইত্যাদি। বাস্তবে, ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার সাধারণ আকার হল

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

যেখানে, a, b, c, d হল বাস্তব সংখ্যাসমূহ এবং $a \neq 0$।

এখন বহুপদ রাশিমালা $p(x)=x^2-3x-4$ বিবেচনা করি এবং এই বহুপদ রাশিমালায় $x=2$ বসিয়ে, আমরা পাই $p(2)=2^2-3\times 2-4=-6$ ।x^2-3x-4 তে x-কে 2 দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে প্রাপ্ত মান '-6'কে বলা হয় $x=2$ তে x^2-3x-4 এর মান। অনুরূপে, $p(0)$ হল $x=0$ তে $p(x)$ এর মান, যা হল -4।

যদি $p(x)$, x-এর একটি বহুপদ রাশিমালা এবং k যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $p(x)$-এ, x-কে k দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে প্রাপ্ত মানকে বলা হয় $x=k$ তে $p(x)$-এর মান এবং এটিকে $p(k)$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

$x=-1$ এ $p(x)=x^2-3x-4$ এর মান কত?

আমরা পাই :

$$p(-1)=(-1)^2-\{3\times(-1)\}-4=0$$

আরও, লক্ষ করো $\quad p(4)= \ 4^2-(3\times 4)-4=0.$

যেহেতু $p(-1)=0$ এবং $p(4)=0$, তাহলে -1 এবং 4 কে দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা x^2-3x-4 এর শূন্য বলা হয়। সাধারণভাবে, একটি বাস্তব সংখ্যা k কে **একটি বহুপদ রাশিমালা $p(x)$-এর একটি শূন্য** বলা হবে, যদি $p(k)=0$ হয়।

তোমরা ইতিপূর্বেই নবম শ্রেণিতে পড়েছ, কীভাবে কোনো রৈখিক বহুপদ রাশিমালার শূন্য বের করা হয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি $p(x)=2x+3$ এর একটি শূন্য k হয়, তবে $p(k)=0$ হবে, অর্থাৎ $2k+3=0$ বা $k=-\dfrac{3}{2}$

সাধারণভাবে, যদি $p(x)=ax+b$ এর একটি শূন্য k হয়, তবে $p(k)=ak+b=0$ হবে, অর্থাৎ, $k=\dfrac{-b}{a}$ ।
অতএব, রৈখিক বহুপদ রাশিমালা $ax+b$ এর শূন্য হল $\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-\text{(ধ্রুবক পদ)}}{x\text{-এর সহগ}}$ ।

সুতরাং, একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালার শূন্য তার সহগগুলোর সাথে সম্পর্কিত। এই ধর্ম কি অন্য বহুপদ রাশিমালার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য? উদাহরণস্বরূপ, দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্যগুলো কি তার সহগগুলোর সাথে সম্পর্কিত?

এই অধ্যায়ে আমরা উপরোক্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দেওয়ার চেষ্টা করব। আমরা বহুপদ রাশিমালার জন্য ভাগের কলনবিধিরও অধ্যয়ন করব।

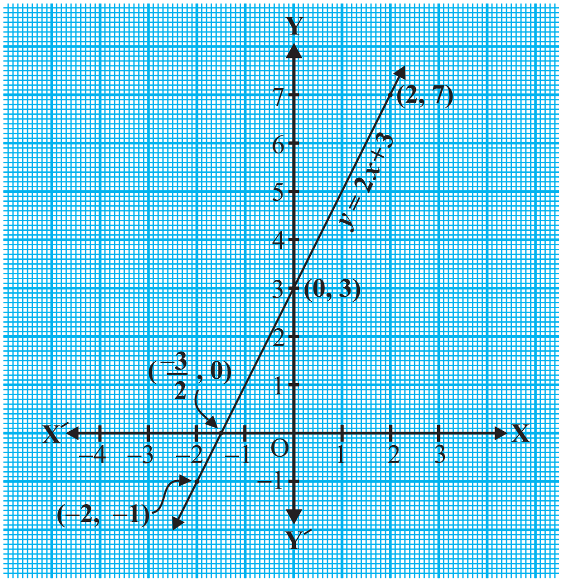
2.2 কোনো বহুপদ রাশিমালার শূন্যসমূহের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

তোমরা জান যে, একটি বাস্তব সংখ্যা k, বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ এর শূন্য হবে যদি $p(k)=0$ হয়। কিন্তু বহুপদ রাশিমালার শূন্যগুলো কেন এত গুরুত্বপূর্ণ? এর উত্তর দেওয়ার জন্য, প্রথমে আমরা রৈখিক ও দ্বিঘাত রাশিমালা সমূহের **জ্যামিতিক** উপস্থাপনা এবং এদের শূন্যগুলোর জ্যামিতিক অর্থ দেখব।

প্রথমে একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা $ax + b, a \neq 0$ বিবেচনা করি। তোমরা নবম শ্রেণিতে পড়েছ যে, $y = ax + b$ এর লেখচিত্র একটি সরলরেখা হয়। উদাহরণস্বরূপ, $y = 2x + 3$ এর লেখচিত্র একটি সরলরেখা যা $(-2, -1)$ এবং $(2, 7)$ বিন্দুগামী।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

চিত্র 2.1 তে তোমরা দেখতে পাচ্ছ যে, $y = 2x + 3$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে $x = -1$ এবং $x = -2$ এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তোমরা আরও জান যে, $2x + 3$ এর শূন্য হল $-\frac{3}{2}$।
সুতরাং, বহুপদ রাশিমালা $2x + 3$ এর শূন্য হল ঐ বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক যেখানে $y = 2x + 3$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করে।



চিত্র 2.1

সাধারণভাবে, একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা $ax + b, a \neq 0$ এর জন্য $y = ax + b$ এর লেখচিত্র হল একটি সরলরেখা যা x-অক্ষকে ঠিক একটি বিন্দুতে ছেদ করে যা হল $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$। সুতরাং, রৈখিক বহুপদ রাশিমালা $ax + b, a \neq 0$, এর ঠিক একটি শূন্য আছে যা ঐ বিন্দুটির x-স্থানাঙ্ককে নির্দেশ করে যে বিন্দুতে $y = ax + b$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করে।

এখন, চলো আমরা একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্যের জ্যামিতিক অর্থ বোঝার চেষ্টা করি। এজন্য একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $x^2 - 3x - 4$ ধরে নিই। চলো দেখি $y = x^2 - 3x - 4$ এর লেখচিত্র* দেখতে কি রকম। এখন আমরা x-এর কিছু মানের জন্য $y = x^2 - 3x - 4$ এর অনুরূপ কিছু মান নিই যা সারণি 2.1-এ দেওয়া আছে।

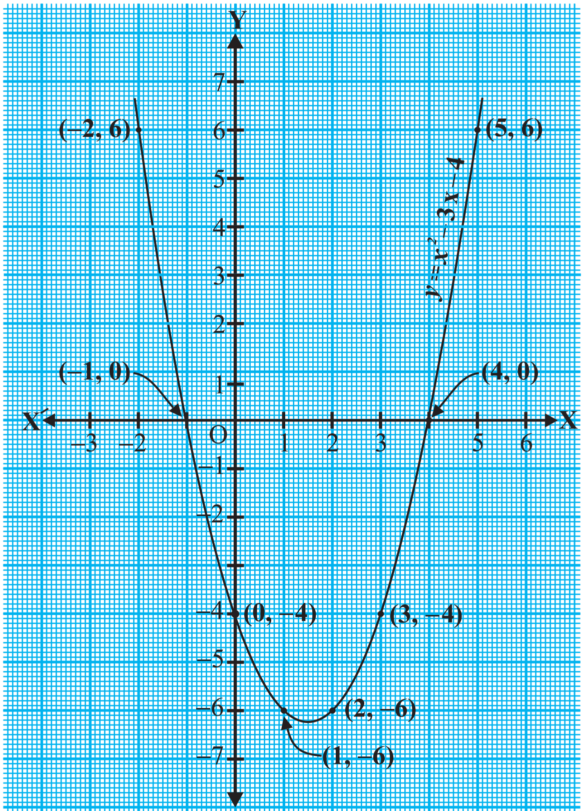
* দ্বিঘাত অথবা ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার লেখচিত্র অঙ্কন করা শিক্ষার্থীদের জন্য অভিপ্রেত নয় অথবা এগুলো মূল্যায়ন সম্বন্ধিত নয়।

সারণি 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

যদি আমরা উপরোক্ত বিন্দুগুলোকে একটি ছক কাগজের উপর স্থাপন করে যুক্ত করি তবে লেখচিত্রটির আকৃতি দেখতে চিত্র 2.2এর মতো হবে।

প্রকৃতপক্ষে, যে-কোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ এর জন্য অনুরূপ সমীকরণ $y = ax^2 + bx + c$ এর লেখচিত্রের আকার হবে  -এর মতো উপরের দিকে খোলা অথবা  এর মতো নীচের দিকে খোলা। এটি হয় $a > 0$ নতুবা $a < 0$ এর উপর নির্ভর করে। (এই বক্র রেখাগুলোকে **অধিবৃত্ত** বলা হয়।)



চিত্র 2.2

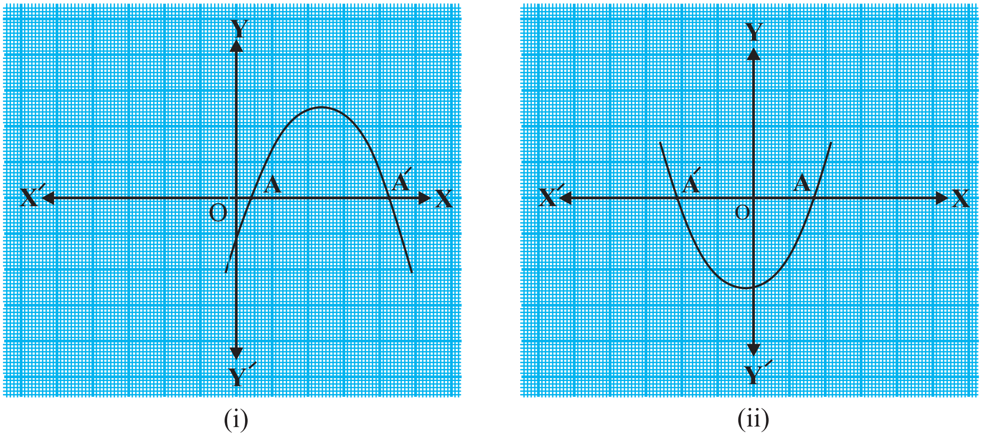
সারণি 2.1 তে তোমরা দেখতে পাচ্ছ যে, দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্যগুলো হল -1 এবং 4 । চিত্র 2.2 হতে আরও লক্ষ করো যে, -1 এবং 4 হল ওই বিন্দুগুলোর x-স্থানাঙ্ক যেখানে $y = x^2 - 3x - 4$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে। সুতরাং, দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $y = x^2 - 3x - 4$ এর শূন্যগুলো হল ঐ সকল বিন্দুসমূহের x-স্থানাঙ্ক যেখানে $y = x^2 - 3x - 4$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে।

এই তথ্য যে-কোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার জন্য সত্য, অর্থাৎ, দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ এর শূন্যগুলো সঠিকভাবে ওই সকল বিন্দুগুলোর x-স্থানাঙ্ককে নির্দেশ করে যেখানে $y = ax^2 + bx + c$ দিয়ে প্রকাশিত অধিবৃত্ত x-অক্ষকে ছেদ করে।

$y = ax^2 + bx + c$ এর লেখচিত্রের আকার সম্পর্কিত পর্যবেক্ষণ থেকে নিম্নের তিনটি ক্ষেত্র হতে পারে :

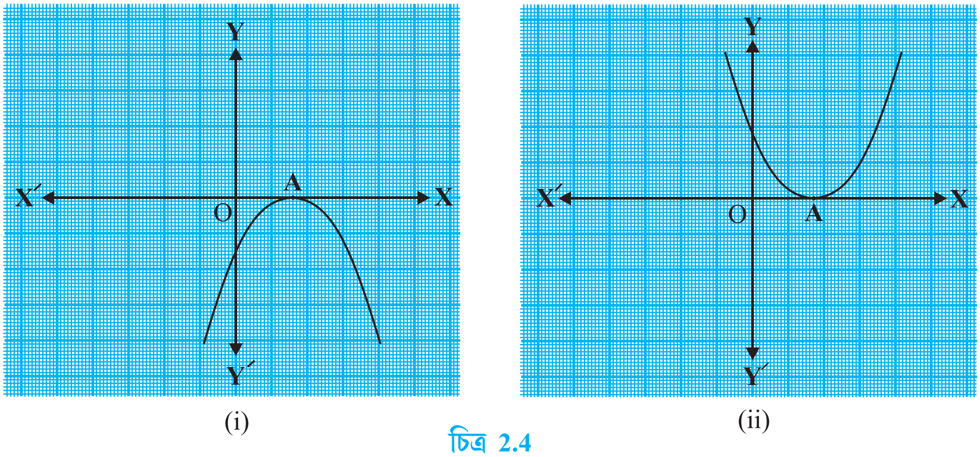
ক্ষেত্র (i) : এখানে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে A এবং A′ দুটি পৃথক বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এইক্ষেত্রে, A এবং A′ এর x-স্থানাঙ্ক দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ এর **দুটি শূন্য** হবে (চিত্র 2.3 দেখো)।



চিত্র 2.3

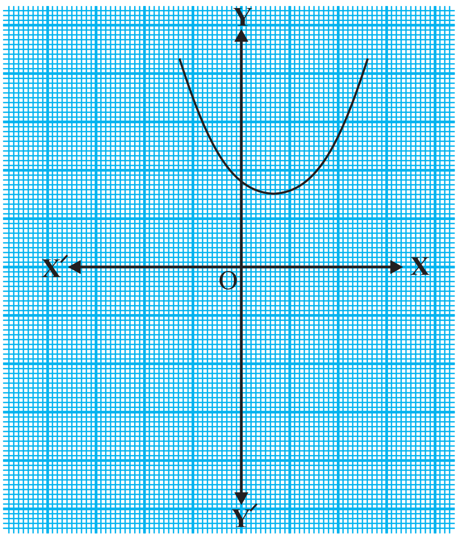
ক্ষেত্র (ii) : এখানে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে, অর্থাৎ দুটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করেছে। এজন্য, ক্ষেত্র (i) এর দুটি বিন্দু A ও A′ সমাপতিত হয়ে একটি বিন্দু A হয়ে যায় (চিত্র 2.4 দেখো)।



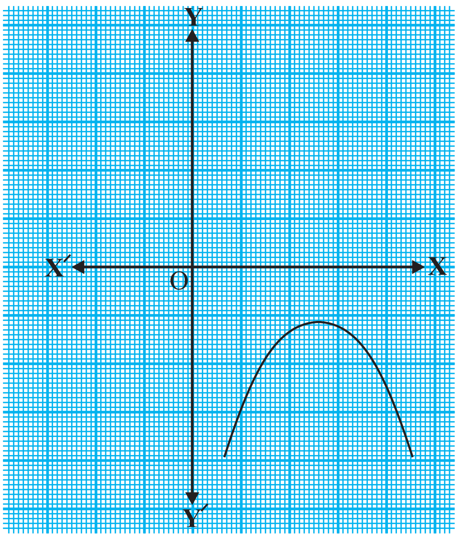
চিত্র 2.4

এইক্ষেত্রে, A এর x-স্থানাঙ্ক দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ এর **কেবলমাত্র একটি শূন্য হয়।**

ক্ষেত্র (iii) : এখানে, লেখচিত্রটি হয় সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের উপরে অথবা সম্পূর্ণরূপে x-অক্ষের নীচে থাকবে। এজন্য, এটি x-অক্ষকে কোনো বিন্দুতে ছেদ করবে না (চিত্র 2.5 দেখো)।



(i)



(ii)

চিত্র 2.5

অতএব, এক্ষেত্রে দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ এর **কোনো শূন্য থাকবে না**।

এভাবে, তোমরা জ্যামিতিক রূপে দেখতে পাও যে, একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার হয় দুটি ভিন্ন শূন্য অথবা দুটি সমান শূন্য (অর্থাৎ, একটি শূন্য), অথবা কোনো শূন্য নেই, এরূপ হতে পারে।

এখন, তুমি একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্যের জ্যামিতিক অর্থ সম্পর্কে কী প্রত্যাশা করতে পারো ? চলো আমরা খুঁজে বের করি। এজন্য একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $x^3 - 4x$ বিবেচনা করি। এখন, $y = x^3 - 4x$ এর লেখচিত্র দেখতে কী রকম জানার জন্য আমরা x-এর কিছু মানের জন্য অনুরূপ y -এর কিছু মান তালিকাবদ্ধ করি যা সারণি 2.2-তে দেখানো হল।

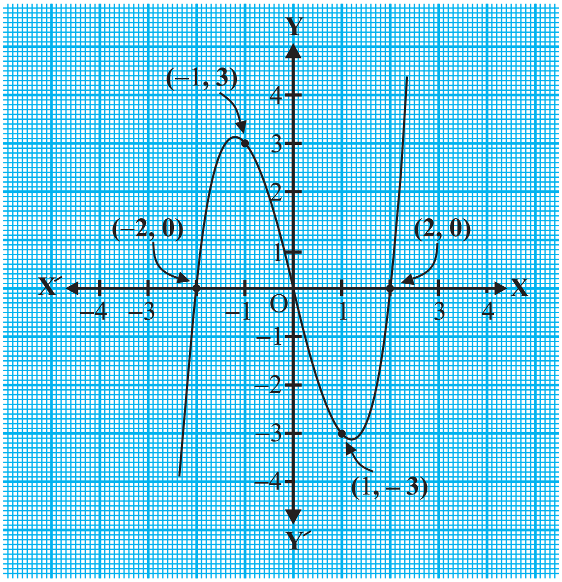
সারণি 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

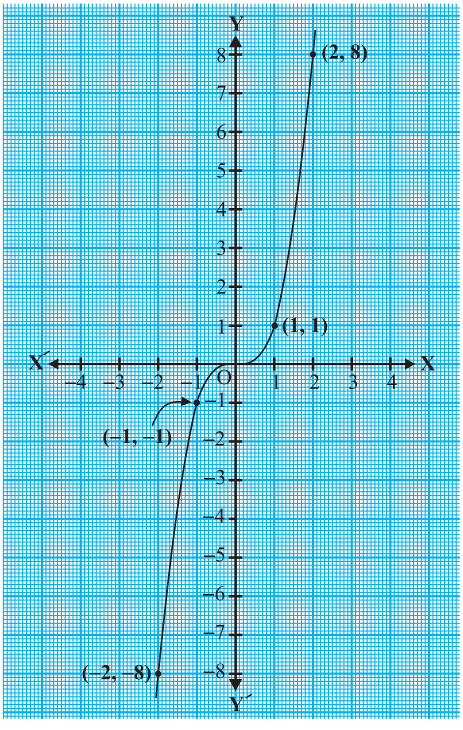
সারণির বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে, আমরা দেখতে পাই যে, $y = x^3 - 4x$ এর লেখচিত্র বাস্তবে দেখতে চিত্র 2.6 এর ন্যায়।

উপরের সারণি থেকে আমরা দেখি যে, ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $x^3 - 4x$ এর শূন্যগুলো হল $-2, 0$ এবং 2 । লক্ষ করো যে, $-2, 0$ এবং 2 হল আসলে ঐ বিন্দুগুলোর x -স্থানাঙ্ক যেখানে $y = x^3 - 4x$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে। যেহেতু বক্রটি x-অক্ষকে কেবলমাত্র এই তিনটি বিন্দুতে ছেদ করেছে, তাই বহুপদ রাশিমালার শূন্য কেবলমাত্র এই বিন্দুগুলোর x-স্থানাঙ্ককেই নির্দেশ করে।

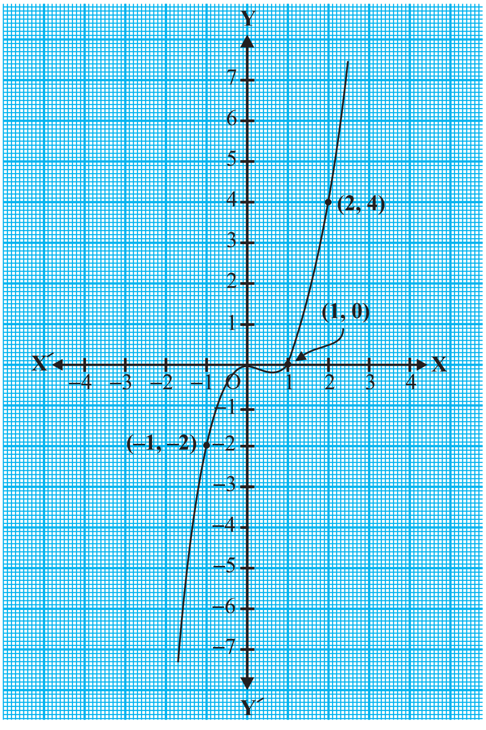
চলো আমরা আরও কিছু উদাহরণ নিই। এর জন্য ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা x^3 এবং $x^3 - x^2$. বিবেচনা করি। আমরা $y = x^3$ এবং $y = x^3 - x^2$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করি যেগুলো হল যথাক্রমে চিত্র 2.7 এবং চিত্র 2.8।



চিত্র 2.6



চিত্র 2.7



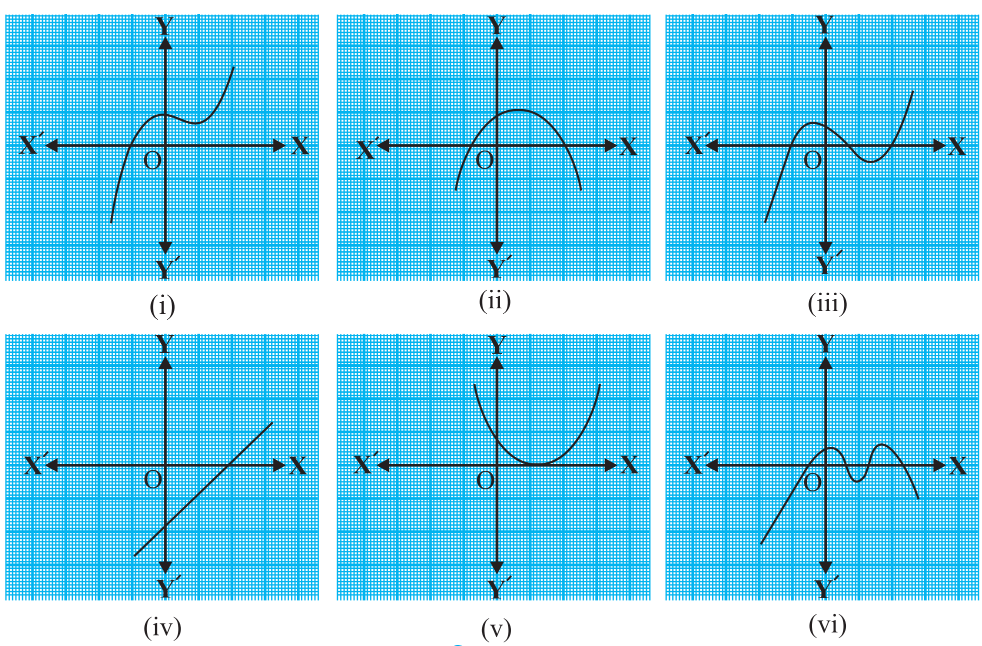
চিত্র 2.8

লক্ষ করো যে, 0 হল বহুপদ রাশিমালা x^3 এর কেবলমাত্র একটি শূন্য। চিত্র 2.7 থেকে তোমরা আরও দেখতে পাও যে, 0 হল ওই বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক, যে বিন্দুতে $y = x^3$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে। অনুরূপভাবে, যেহেতু $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, সুতরাং বহুপদ রাশিমালা $x^3 - x^2$ এর শূন্যগুলো হল কেবলমাত্র 0 এবং 1। চিত্র 2.8 থেকে আরও বলা যায় যে, এই মানগুলো কেবল ওই বিন্দুগুলোর x-স্থানাঙ্ক যেখানে $y = x^3 - x^2$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে।

উপরের উদাহরণগুলো থেকে আমরা দেখতে পাই যে, কোনো ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার সবচেয়ে বেশি 3টি শূন্য থাকতে পারে। অর্থাৎ যে-কোনো বহুপদ রাশিমালা যাদের মাত্রা 3 তাদের সর্বাধিক তিনটি শূন্য থাকতে পারে।

মন্তব্য : সাধারণভাবে, মাত্রা-n এর কোনো প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ অর্থাৎ $y = p(x)$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে সবচেয়ে বেশি n সংখ্যক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। সুতরাং, n মাত্রা বিশিষ্ট একটি বহুপদ রাশিমালা $p(x)$এর সর্বাধিক n সংখ্যক শূন্য আছে।

উদাহরণ 1 : চিত্র 2.9 তে দেওয়া নীচের লেখচিত্রগুলোর দিকে তাকাও। এদের প্রত্যেকটি হল $y = p(x)$ এর লেখচিত্র যেখানে $p(x)$ একটি বহুপদ রাশিমালা। প্রত্যেকটি লেখচিত্রের জন্য $p(x)$ এর শূন্য সংখ্যা বের করো।



চিত্র 2.9

সমাধান :

(i) শূন্য সংখ্যা হল 1 যেহেতু লেখচিত্রটি x-অক্ষকে শুধুমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(ii) শূন্য সংখ্যা হল 2 যেহেতু লেখচিত্রটি x-অক্ষকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(iii) শূন্য সংখ্যা হল 3 । (কেন?)

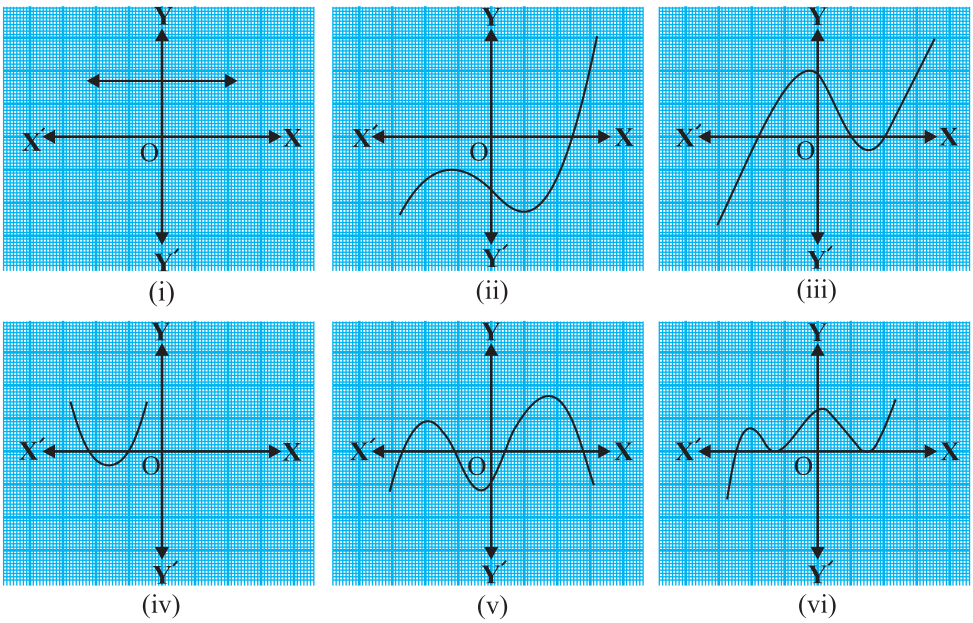
(iv) শূন্য সংখ্যা হল 1 ।(কেন?)

(v) শূন্য সংখ্যা হল 1 ।(কেন?)

(vi) শূন্য সংখ্যা হল 4 ।(কেন?)

অনুশীলনী 2.1

1. কিছু বহুপদ রাশিমালা $p(x)$-এর জন্য $y = p(x)$ এর লেখচিত্র নীচে চিত্র 2.10 তে দেওয়া আছে। প্রতিক্ষেত্রে $p(x)$ এর শূন্য সংখ্যা বের করো।



চিত্র 2.10

2.3 কোনো বহুপদ রাশিমালার শূন্য এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক (Relationship between Zeroes and Coefficients of a Polynomial)

তোমরা ইতোমধ্যে দেখেছ যে, রৈখিক বহুপদ রাশিমালা $ax + b$ এর শূন্য হল $-\dfrac{b}{a}$ । আমরা এখন কোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্য এবং সহগের মধ্যে সম্পর্ক সম্বন্ধিত প্রশ্নগুলোর উত্তর দেওয়ার চেষ্টা করব যা অনুচ্ছেদ 2.1 তে উত্থাপিত হয়েছে। এরজন্য চলো একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা ধরি $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$। নবম শ্রেণীতে তোমরা শিখেছ, কীভাবে দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয় মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে। এরজন্য এখানে আমরা মধ্যপদ '$-8x$' কে এমন দুটি পদের যোগফলে প্রকাশ করব যাদের গুণফল $6 \times 2x^2 = 12x^2$ হয়। তাই আমরা লিখতে পারি :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

সুতরাং, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ এর মান শূন্য (0) হবে যখন $x - 1 = 0$ অথবা $x - 3 = 0$ হয়, অর্থাৎ যখন $x = 1$ অথবা $x = 3$ হবে। তাই, $2x^2 - 8x + 6$ এর শূন্যগুলো (Zeroes) হল 1 এবং 3। লক্ষ করো :

$$\text{শূন্যগুলোর যোগফল} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ এর সহগ})}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

$$\text{শূন্যগুলোর গুণফল} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

চলো আমরা আরেকটি বহুপদ রাশিমালা যথা $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ নেই। মধ্যপদ বিশ্লেষণ পদ্ধতি দ্বারা,

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 2 &= 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2) \\ &= (3x-1)(x+2) \end{aligned}$$

সুতরাং, $3x^2 + 5x - 2$ এর মান শূন্য (0) হবে যখন, হয় $3x - 1 = 0$ অথবা $x + 2 = 0$, অর্থাৎ, যখন $x = \frac{1}{3}$ অথবা $x = -2$। তাই, $3x^2 + 5x - 2$ এর শূন্যগুলো (zeroes) হলো $\frac{1}{3}$ এবং -2। লক্ষ করো যে :

$$\text{শূন্যগুলোর যোগফল} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ এর সহগ})}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

$$\text{শূন্যগুলোর গুণফল} = \frac{1}{3} \times (-2) = \frac{-2}{3} = \frac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$$

সাধারণভাবে, যদি কোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ এর দুটি শূন্য $\alpha\beta$* হয় তবে তোমরা জানো যে, $p(x)$ এর দুটি উৎপাদক হবে $x - \alpha$ এবং $x - \beta$। সুতরাং,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= k(x-\alpha)(x-\beta), \text{ যেখানে } k \text{ একটি ধ্রুবক} \\ &= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta] \\ &= kx^2 - k(\alpha+\beta)x + k\alpha\beta \end{aligned}$$

উভয়পক্ষে x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ তুলনা করে, আমরা পাই

$$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta) \text{ এবং } c = k\alpha\beta.$$

এ থেকে লেখা যায়,

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = \frac{-b}{a}},$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

* α, β হল গ্রিক অক্ষর যাদের যথাক্রমে আলফা (alpha) এবং বিটা (beta) রূপে উচ্চারিত হয়। আমরা পরবর্তীতে আরও একটি অক্ষর 'γ' ব্যবহার করব যাকে উচ্চারণ করা হয় গামা (gamma) দিয়ে।

অর্থাৎ, শূন্যগুলোর যোগফল $= \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{-(x \text{ এর সহগ})}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

শূন্যগুলোর গুণফল $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

চলো আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 2 : দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $x^2 + 7x + 10$ এর শূন্যগুলো বের করো এবং শূন্য ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক যাচাই করো।

সমাধান : আমরা জানি,

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

তাহলে, $x^2 + 7x + 10$ এর মান শূন্য হবে যখন $x + 2 = 0$ অথবা $x + 5 = 0$ হয়, অর্থাৎ, যখন $x = -2$ অথবা $x = -5$। সুতরাং, $x^2 + 7x + 10$ এর শূন্যগুলো হল -2 এবং -5। এক্ষেত্রে

শূন্যগুলোর যোগফল $= -2 + (-5) = (-7) = \dfrac{-(7)}{1} = \dfrac{-(x \text{ এর সহগ})}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

শূন্যগুলোর গুণফল $= (-2) \times (-5) = 10 = \dfrac{10}{1} = \dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

উদাহরণ 3 : বহুপদ রাশিমালা $x^2 - 3$ এর শূন্যগুলো নির্ণয় করো এবং শূন্য ও সহগের মধ্যে সম্পর্ক যাচাই করো।

সমাধান : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ অভেদটিকে স্মরণ করো। এটি ব্যবহার করে, আমরা লিখতে পারি :

$$x^2 - 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$$

তাই, $x^2 - 3$ এর মান শূন্য হবে যখন $x = \sqrt{3}$ অথবা $x = -\sqrt{3}$ হয়।

সুতরাং, $x^2 - 3$ এর শূন্যগুলো হল $\sqrt{3}$ এবং $-\sqrt{3}$ ।

এখন,

শূন্যগুলোর যোগফল $= \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 = \dfrac{-(x \text{ এর সহগ})}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

শূন্যগুলোর গুণফল $= \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right) = -3 = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{\text{ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

উদাহরণ 4 : এমন একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করো যার শূন্যদ্বয়ের যোগফল ও গুণফল যথাক্রমে -3 এবং 2।

সমাধান : মনে করি, দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালাটি $ax^2 + bx + c$ এবং এর শূন্যগুলো হল α এবং β। আমরা জানি,

$$\alpha + \beta = -3 = \frac{-b}{a},$$

এবং
$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}.$$

যদি $a = 1$, তবে $b = 3$ এবং $c = 2$ হবে।

সুতরাং, একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা, যা প্রদত্ত শর্তগুলোকে সিদ্ধ করে, তা হল $x^2 + 3x + 2$।

তোমার যাচাই করে দেখতে পারো, অপর যে-কোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা যেসব প্রদত্ত শর্তগুলোকে সিদ্ধ করে এর আকার হবে $k(x^2 + 3x + 2)$ এর মতো, যেখানে k হল বাস্তব সংখ্যা।

চলো আমরা এখন একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার দিকে দৃষ্টিপাত করি। তোমরা কি মনে করো একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার শূন্য এবং এর সহগের মধ্যে অনুরূপ সম্পর্ক বজায় থাকে?

এর জন্য চলো আমরা $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ বিবেচনা করি।

তোমরা পরীক্ষা করে দেখতে পারো যে, $x = 4, -2, \frac{1}{2}$ এর জন্য $p(x) = 0$ হয়। যেহেতু $p(x)$ এর সবচেয়ে বেশি তিনটি শূন্য থাকতে পারে, এজন্য এগুলোই হল $2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ এর শূন্য।

এখন, শূন্যগুলোর যোগফল $= 4 + (-2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ এর সহগ})}{x^3 \text{ এর সহগ}}$,

শূন্যগুলোর গুণফল $= 4 \times (-2) \times \frac{1}{2} = -4 = \frac{-8}{2} = \frac{-(\text{ধ্রুবক পদ})}{x^3 \text{ এর সহগ}}$

কিন্তু, এখানে আরও একটি সম্পর্ক আছে। দুটি শূন্যকে একসাথে নিয়ে ওদের গুণফলের যোগ করে আমরা পাই,

$$\{4 \times (-2)\} + \left\{(-2) \times \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{1}{2} \times 4\right\}$$

$$= -8 - 1 + 2 = -7 = \frac{-14}{2} = \frac{x \text{ এর সহগ}}{x^3 \text{ এর সহগ}}.$$

সাধারণভাবে, এটি প্রমাণ করা যায় যে, যদি α, β, γ একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^3 + bx^2 + cx + d$ এর শূন্য হয়, তবে

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$
$$\alpha\,\beta\,\gamma = \frac{-d}{a}.$$

চলো আমরা একটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 5* : যাচাই করো যে, $3, -1, -\frac{1}{3}$ হল ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ এর শূন্য এবং তারপর শূন্য এবং সহগের মধ্যে সম্পর্কও যাচাই করো।

সমাধান : প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালাকে $ax^3 + bx^2 + cx + d$ এর সাথে তুলনা করে, আমরা পাই

$a = 3, b = -5, c = -11, d = -3$ ।এছাড়া

$p(3) = 3 \times 3^3 - (5 \times 3^2) - (11 \times 3) - 3 = 81 - 45 - 33 - 3 = 0,$

$p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 5 \times (-1)^2 - 11 \times (-1) - 3 = -3 - 5 + 11 - 3 = 0,$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 11 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 3,$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{5}{9} + \frac{11}{3} - 3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

সুতরাং, $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3$ এর শূন্যগুলো হল $3, -1$ এবং $-\frac{1}{3}$

অতএব, আমরা $\alpha = 3, \beta = -1$ এবং $\gamma = -\frac{1}{3}$ নিতে পারি।

এখন,

$$\alpha + \beta + \gamma = 3 + (-1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = \frac{-(-5)}{3} = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \times 3 = -3 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-11}{3} = \frac{c}{a},$$

$$\alpha\beta\gamma = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 = \frac{-(-3)}{3} = \frac{-d}{a}.$$

* এটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্ভুক্ত নয়।

অনুশীলনী 2.2

1. নিম্নলিখিত দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালাগুলোর শূন্যগুলো নির্ণয় করো এবং শূন্য ও সহগের মধ্যে সম্পর্কের সত্যতা যাচাই করো।

   (i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4s^2 - 4s + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$
   (iv) $4u^2 + 8u$ (v) $t^2 - 15$ (vi) $3x^2 - x - 4$

2. প্রতিটি ক্ষেত্রে একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করো, যার শূন্যগুলোর যোগফল ও গুণফল যথাক্রমে নিম্নে দেওয়া সংখ্যাগুলো :

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$
   (iv) $1, 1$ (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) $4, 1$

2.4 বহুপদ রাশিমালার ভাগ কলনবিধি (Division Algorithm for Polynomials)

তোমরা জানো যে একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার সবচেয়ে বেশি তিনটি শূন্য আছে। কিন্তু, যদি তোমাকে কেবলমাত্র একটি শূন্য দেওয়া হয়, তবে তুমি কি অন্য দুটি শূন্য নির্ণয় করতে পারবে? এজন্য, চলো আমরা একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $x^3 - 3x^2 - x + 3$ বিবেচনা করি। যদি আমরা তোমাদের বলে দিই যে, এটির একটি শূন্য হল 1, তবে তোমরা এ থেকে জানবে যে $x - 1$ হল $x^3 - 3x^2 - x + 3$ -এর একটি উৎপাদক। তাই, তোমরা $x^3 - 3x^2 - x + 3$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $x^2 - 2x - 3$ পাবে, যা তোমরা নবম শ্রেণিতে শিখেছ।

এরপর, তোমরা $x^2 - 2x - 3$ এর উৎপাদকগুলো পেতে পার, $x^2 - 2x - 3$ এর মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে যা হল $(x + 1)(x - 3)$ অর্থাৎ

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - x + 3 &= (x - 1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 3) \end{aligned}$$

অতএব, ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার সবগুলো অর্থাৎ তিনটি শূন্য তোমাদের জানা আছে এবং শূন্যগুলো হল $1, -1$ এবং 3।

চলো আমরা এখন একটি বহুপদ রাশিমালাকে অন্য একটি বহুপদ রাশিমালা দিয়ে ভাগ করার পদ্ধতি সম্পর্কে কিছু বিস্তারিত আলোচনা করি। বিধিবদ্ধ ধাপগুলো অনুধাবন করার আগে একটি উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

উদাহরণ 6 : $2x^2 + 3x + 1$ কে $x + 2$ দিয়ে ভাগ করো।

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 1 \\ \hline x + 2 & 2x^2 + 3x + 1 \\ & \underline{\overset{-}{2x^2} \overset{-}{+ 4x}} \\ & \quad -x + 1 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-x} \overset{+}{- 2}} \\ & \qquad 3 \end{array}$$

সমাধান : লক্ষ করো যে, যখন ভাগশেষ শূন্য হয় অথবা এর মাত্রা ভাজকের মাত্রার চেয়ে কম হয় তখন আমরা বিভাজন প্রক্রিয়াটি সমাপ্ত করি। তাই, এখানে ভাগফল হল $2x - 1$ এবং ভাগশেষ হল 3। এছাড়াও,

$(2x - 1)(x + 2) + 3 = 2x^2 + 3x - 2 + 3 = 2x^2 + 3x + 1$

অর্থাৎ, $2x^2 + 3x + 1 = (x + 2)(2x - 1) + 3$

সুতরাং, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

এখন আমরা এই প্রক্রিয়াটিকে কোনো বহুপদ রাশিমালাকে একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা দিয়ে ভাগ করার জন্য প্রসারিত করব।

উদাহরণ 7 : $3x^3 + x^2 + 2x + 5$ কে $1 + 2x + x^2$ দিয়ে ভাগ করো।

সমাধান : আমরা প্রথমে ভাজ্য ও ভাজকের পদগুলোকে তাদের মাত্রার অধঃক্রমে সাজাব। স্মরণ করো যে, বহুপদ রাশিমালার পদগুলোকে এই ক্রমে সাজানোকে বলা হয় বহুপদ রাশিমালার আদর্শরূপে লিখন। এই উদাহরণে, ভাজ্য ইতোমধ্যে আদর্শ আকারে আছে এবং ভাজকের আদর্শ আকার হল $x^2 + 2x + 1$।

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad 3x - 5 \\
\hline
x^2 + 2x + 1 & 3x^3 + x^2 + 2x + 5 \\
 & 3x^3 + 6x^2 + 3x \\
 & \underline{- \quad\; - \quad\; -} \\
 & \quad -5x^2 - x + 5 \\
 & \quad -5x^2 - 10x - 5 \\
 & \quad \underline{+ \quad\; + \quad\; +} \\
 & \quad\quad\quad 9x + 10
\end{array}
$$

ধাপ 1 : ভাগফলের প্রথম পদ পাওয়ার জন্য, ভাজ্যের সবচেয়ে বেশি মাত্রার পদকে (অর্থাৎ, $3x^3$) ভাজকের সবচেয়ে বেশি মাত্রার পদ (অর্থাৎ, x^2) দিয়ে ভাগ করো। এর ফলে ভাগফলের প্রথম পদটি পাওয়া গেল $3x$। অতপর, ভাগ প্রক্রিয়াটি সম্পন্ন করার পর অবশিষ্ট রইল $-5x^2 - x + 5$।

ধাপ 2 : এখন ভাগফলের দ্বিতীয় পদটি নির্ণয় করার জন্য, নতুন ভাজ্যের সবচেয়ে বেশি মাত্রার পদটিকে (অর্থাৎ, $-5x^2$) ভাজকের সবচেয়ে বেশি মাত্রার পদ (অর্থাৎ, x^2) দিয়ে ভাগ করো। এর ফলে ভাগফলের দ্বিতীয় পদটি পাওয়া গেল -5 । পুনরায় $-5x^2 - x + 5$ এর সাথে ভাগ প্রক্রিয়াটি সম্পন্ন করো।

ধাপ 3 : সবশেষে অবশিষ্ট রইল $9x + 10$। এখন দেখো $9x + 10$ এর মাত্রা, ভাজক $x^2 + 2x + 1$ এর মাত্রার চেয়ে কমে গেছে। তাই, আমরা ভাগ প্রক্রিয়াটি আর চালিয়ে যেতে পারব না।

এজন্য, ভাগফল হল $3x - 5$ এবং ভাগশেষ হল $9x + 10$। এছাড়া,

$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10 \\
&= 3x^3 + x^2 + 2x + 5
\end{aligned}
$$

এখানে আমরা পুনরায় দেখতে পাই যে,

ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

আমরা এখানে যে কলনবিধির প্রয়োগ করেছি সেটি ইউক্লিডের ভাগ কলনবিধির অনুরূপ যা তোমরা অধ্যায় 1-এ পড়েছ।

এটি থেকে বলা যায় যে,

যদি $p(x)$ এবং $g(x)$ যে-কোনো দুটি বহুপদ রাশিমালা হয় যেখানে $g(x) \neq 0$, তবে আমরা দুটি বহুপদ রাশিমালা $q(x)$ এবং $r(x)$ এমনভাবে নির্ণয় করতে পারি যে,

$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$ হয়।

যেখানে $r(x) = 0$ অথবা $r(x)$ এর মাত্রা < $g(x)$ এর মাত্রা।

এই ফলাফল বহুপদ রাশিমালাগুলোর জন্য **ভাগ কলনবিধি** নামে পরিচিত।

এটির ব্যবহার ব্যাখ্যা করার জন্য, চলো আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ কে $x - 1 - x^2$ দিয়ে ভাগ করো এবং ভাগ কলনবিধির সত্যতা যাচাই করো।

সমাধান : লক্ষ করো যে, প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালাগুলো আদর্শ আকারে সাজানো নেই। ভাগ প্রক্রিয়াটি সম্পন্ন করার জন্য, আমরা প্রথমে ভাজ্য এবং ভাজকের পদগুলোকে মাত্রার অধঃক্রমে সাজিয়ে লিখব।

সুতরাং, ভাজ্য $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ এবং

ভাজক $= -x^2 + x - 1$.

ডান দিকে ভাগ প্রক্রিয়াটি দেখানো হয়েছে।

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \underline{+ \quad - \quad +} \\ & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & \underline{- \quad + \quad -} \\ & 3 \end{array}$$

আমরা এখানে থেমেছি, কারণ 3-এর মাত্রা $= 0 < 2 = (-x^2 + x - 1)$-এর মাত্রা।

সুতরাং, ভাগফল $= x - 2$, ভাগশেষ $= 3$

এখন,

$$\begin{aligned} & \text{ভাজক} \times \text{ভাগফল} + \text{ভাগশেষ} \\ =\ & (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ =\ & -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\ =\ & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ =\ & \text{ভাজ্য} \end{aligned}$$

এভাবে, ভাগ-কলনবিধির সত্যতা যাচাই করা হল।

উদাহরণ 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ এর সবগুলো শূন্য নির্ণয় করো, যদি তুমি জান যে, এর দুটি শূন্য হল $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$.

সমাধান : যেহেতু দুটি শূন্য হল $\sqrt{2}$ এবং $-\sqrt{2}$, এজন্য $\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = x^2 - 2$ হল প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালার একটি উৎপাদক। এখন, চলো আমরা প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালাকে $x^2 - 2$ দিয়ে ভাগ করি।

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\ & 2x^4 \qquad\quad - 4x^2 \\ & \underline{- \qquad\qquad\quad +} \\ & -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\ & -3x^3 \qquad + 6x \\ & \underline{+ \qquad\qquad -} \\ & x^2 \qquad - 2 \\ & x^2 \qquad - 2 \\ & \underline{- \qquad\quad +} \\ & 0 \end{array}$$

ভাগফলের প্রথম পদ হল $\dfrac{2x^4}{x^2} = 2x^2$

ভাগফলের দ্বিতীয় পদ হল $\dfrac{-3x^3}{x^2} = -3x$

ভাগফলের তৃতীয় পদ হল $\dfrac{x^2}{x^2} = 1$

সুতরাং, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

এখন, $-3x$ কে ভেঙে, আমরা $2x^2 - 3x + 1$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে পাব $(2x - 1)(x - 1)$। এজন্য, এর অপর দুটি শূন্য হল $x = \frac{1}{2}$ এবং $x = 1$। সুতরাং, প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালার শূন্যগুলো হল $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$ এবং 1।

অনুশীলনী 2.3

1. নিম্নে প্রতিটি ক্ষেত্রে বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ কে বহুপদ রাশিমালা $g(x)$ দিয়ে ভাগ করো এবং ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় করো :

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3, \quad g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5, \quad g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6, \quad g(x) = 2 - x^2$

2. প্রথম বহুপদ রাশিমালাটি দ্বিতীয় বহুপদ রাশিমালার একটি উৎপাদক কিনা তা দ্বিতীয়টিকে প্রথমটি দিয়ে ভাগ করে যাচাই করো :

(i) $t^2 - 3, 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1, 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1, x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ এর অন্য সবগুলো শূন্য বের করো যদি এর দুটি শূন্য $\sqrt{\frac{5}{3}}$ এবং $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ হয়।

4. $x^3 - 3x^2 + x + 2$ কে একটি বহুপদ রাশিমালা $g(x)$ দিয়ে ভাগ করলে যদি ভাগফল এবং ভাগশেষ যথাক্রমে $x - 2$ এবং $-2x + 4$ হয়, তবে $g(x)$ নির্ণয় করো।

5. বহুপদ রাশিমালাসমূহ $p(x), g(x), q(x)$ এবং $r(x)$ এর এমন উদাহরণ দাও, যেগুলো ভাগ কলনবিধিকে সিদ্ধ করে এবং

(i) $p(x)$ এর মাত্রা $= q(x)$ এর মাত্রা (ii) $q(x)$এর মাত্রা $= r(x)$ এর মাত্রা

(iii) $r(x)$ এর মাত্রা $= 0$ হয়।

অনুশীলনী 2.4 (ঐচ্ছিক)*

1. যাচাই করো যে, নিম্নে ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালাগুলোর পাশে দেওয়া সংখ্যাগুলো এদের শূন্য হবে। প্রতিটি ক্ষেত্রে শূন্য এবং সহগের মধ্যে সম্পর্কের সত্যতাও যাচাই করো :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করো, যার শূন্যগুলোর যোগফল, দুটি শূন্যকে একসাথে নিয়ে তাদের গুণফলের যোগফল ও শূন্যগুলোর গুণফল যথাক্রমে $2, -7, -14$ হয়।

*এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ের বর্হিভূত।

3. যদি বহুপদ রাশিমালা $x^3 - 3x^2 + x + 1$ এর শূন্যগুলো $a - b, a, a + b$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় করো।

4. যদি বহুপদ রাশিমালা $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ এর দুটি শূন্য $2 \pm \sqrt{3}$ হয়, তবে অপর শূন্যগুলো নির্ণয় করো।

5. যদি বহুপদ রাশিমালা $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ কে অপর একটি বহুপদ রাশিমালা $x^2 - 2x + k$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ $x + a$ হয়, তবে k এবং a এর মান নির্ণয় করো।

2.5 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত তথ্যগুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. 1, 2 এবং 3 মাত্রাবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাগুলোকে যথাক্রমে রৈখিক, দ্বিঘাত এবং ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা বলা হয়।

2. বাস্তব সহগবিশিষ্ট x-এর একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার আকার হল $ax^2 + bx + c$, যেখানে a, b, c হল বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$।

3. একটি বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ এর শূন্যগুলো হল প্রকৃতপক্ষে ওই বিন্দুগুলোর x-স্থানাঙ্ক, যেখানে $y = p(x)$ এর লেখচিত্র x-অক্ষকে ছেদ করেছে।

4. একটি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার সবচেয়ে বেশি 2টি শূন্য এবং একটি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার সবচেয়ে বেশি 3টি শূন্য থাকতে পারে।

5. যদি দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ এর দুটি শূন্য α এবং β হয়, তবে

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ হবে।}$$

6. যদি ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা $ax^3 + bx^2 + cx + d$ এর তিনটি শূন্য α, β ও γ হয়, তবে

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a},$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a},$$

এবং $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} \text{ হবে।}$$

7. ভাগ-কলনবিধি অনুযায়ী প্রদত্ত কোনো বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ এবং কোনো অ-শূন্য বহুপদ রাশিমালা $g(x)$ এর জন্য দুটি বহুপদ রাশিমালা $q(x)$ এবং $r(x)$ পাওয়া যায়, যেখানে

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

এখানে $r(x) = 0$ অথবা $r(x)$ এর মাত্রা $<$ $g(x)$ এর মাত্রা।

দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগল

(PAIR OF LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

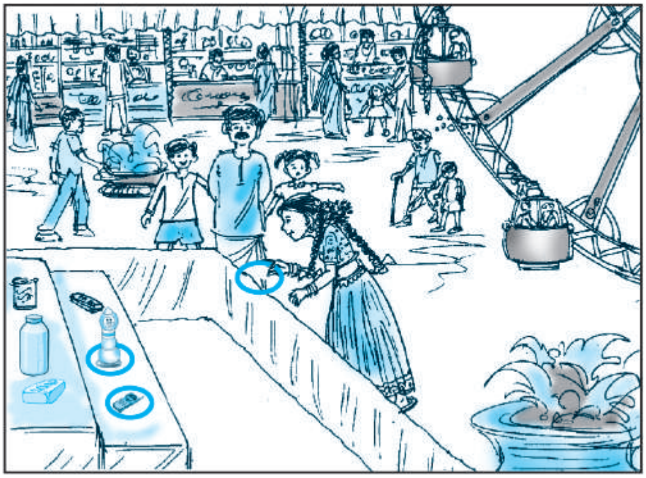
3

3.1 ভূমিকা

তোমরা এরকম পরিস্থিতির সম্মুখীন অবশ্যই হয়েছ যা নীচে দেওয়া হল :

অখিলা তার গ্রামের একটি মেলাতে গিয়েছিল। সেখানে সে একটি চড়কা (Giant Wheel) চড়তে চেয়েছিল এবং হুপলা (Hoopla) [একটি খেলা যেখানে তোমরা একটি স্টলে রাখা কোনো বস্তুর উপর একটি বলয় (ring) নিক্ষেপ করবে এবং যদি বলয়টি বস্তুটিকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করে তবে তোমরা ওই বস্তুটি পাবে] খেলতে চেয়েছিল। যতবার সে চড়কা চড়েছিল এর অর্ধেক বার সে হুপলা খেলেছিল। যদি প্রতিবার চড়কা চড়তে খরচ 3 টাকা এবং হুপলা খেলার জন্য খরচ 4 টাকা হয়, তবে তোমরা কীভাবে বের করবে যে সে কতবার চড়কা চড়েছিল এবং কতবার হুপলা খেলেছিল এই শর্তে যে সে মোট 20 টাকা খরচ করেছিল?

সম্ভবত তোমরা পৃথক পৃথক পরিস্থিতি নিয়ে এটি বের করার চেষ্টা করবে। যদি সে একবার চড়কা চড়ে, এটি কি সম্ভব? এটিও কি সম্ভব যে সে দু-বার চড়কা চড়ে? ইত্যাদি। অথবা তোমরা নবম শ্রেণির জ্ঞান ব্যবহার করে এসব পরিস্থিতিগুলোকে দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণে উপস্থাপন করতে পারো।



চলো আমরা এটি বোঝার চেষ্টা করি।

যদি অখিলার চড়কা চড়ার সংখ্যাকে x এবং ওর হুপলা খেলার সংখ্যাকে y দিয়ে বোঝানো হয়, তবে প্রদত্ত পরিস্থিতিকে নীচের দুটি সমীকরণের সাহায্যে উপস্থাপন করা যাবে :

$$y = \frac{1}{2}x \tag{1}$$

$$3x + 4y = 20 \tag{2}$$

আমরা কি এই সমীকরণযুগলের সমাধান বের করতে পারব? এগুলো সমাধান করার বিভিন্ন পদ্ধতি আছে যা আমরা এই অধ্যায়ে আলোচনা করব।

3.2 দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগল (Pair of Linear Equations in Two Variables)

নবম শ্রেণি থেকে স্মরণ করো যে, নীচের সমীকরণগুলো হল দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের উদাহরণ :

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

এবং $$x - 0y = 2, \text{ অর্থাৎ, } x = 2$$

তোমরা আরও জান যে একটি সমীকরণ যাকে $ax + by + c = 0$ আকারে লেখা যায়, যেখানে a, b ও c হল বাস্তব সংখ্যা এবং **a ও b উভয়ই শূন্য নয়,** একে দুটি চল x এবং y এর একটি রৈখিক সমীকরণ বলা হয়। (আমরা প্রায়ই a ও b উভয়ই শূন্য নয় শর্তটিকে $a^2 + b^2 \neq 0$ দিয়ে প্রকাশ করি)। তোমরা আরও পড়েছ যে, এরকম সমীকরণের একটি সমাধান হল একজোড়া মান, যেখানে একটি x-এর জন্য এবং অন্যটি y-এর জন্য, যাদের জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণস্বরূপ, চলো আমরা সমীকরণ $2x + 3y = 5$ এর বাঁ দিকে (LHS) $x = 1$ এবং $y = 1$ বসাই। তখন

$$\text{বামপক্ষ} = 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5,$$

যা সমীকরণের ডানপক্ষের (RHS) সমান।

অতএব, $x = 1$ এবং $y = 1$ হল সমীকরণ $2x + 3y = 5$ এর একটি সমাধান।

এখন চলো আমরা সমীকরণ $2x + 3y = 5$ এর বাঁ দিকে $x = 1$ এবং $y = 7$ বসাই। তখন

$$\text{বামপক্ষ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

যা ডানপক্ষের সমান নয়।

সুতরাং, $x = 1$ এবং $y = 7$ কে সমীকরণ $2x + 3y = 5$ এর একটি সমাধান বলা যায় **না**।

জ্যামিতিকভাবে, এটির অর্থ কী? এটির অর্থ এই যে, $(1, 1)$ বিন্দুটি সমীকরণ $2x + 3y = 5$ দ্বারা প্রকাশিত রেখার উপর অবস্থিত, এবং $(1, 7)$ বিন্দুটি এই রেখার উপর অবস্থিত নয়। সুতরাং, **কোনো সমীকরণের প্রতিটি সমাধান, এটি দিয়ে প্রকাশিত রেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু।**

প্রকৃতপক্ষে, এটি যে-কোনো রৈখিক সমীকরণের জন্য সত্য, অর্থাৎ, **দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এর প্রতিটি সমাধান (x, y), এই সমীকরণকে নির্দেশ করে এমন রেখার উপর অবস্থিত একটি অনুরূপ বিন্দুকে বোঝায় এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য।**

এখন, উপরে প্রদত্ত সমীকরণগুলো যথা (1) এবং (2) বিবেচনা করি। এই সমীকরণগুলোকে **একসাথে নিয়ে** আমরা অখিলার মেলা সম্বন্ধিত তথ্য বর্ণনা করতে পারি।

এই দুটি রৈখিক সমীকরণ **অনুরূপ দুটি চল x এবং y যুক্ত হয়**। এরকম সমীকরণগুলোকে *দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগল বলা হয়।*

চলো আমরা দেখি এরকম জোড়াগুলোর বীজগাণিতিক রূপ কেমন হয়।

x এবং y এই দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগলের সাধারণ আকার হল

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

এবং

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

যেখানে $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ হল বাস্তব সংখ্যা এবং $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ।

দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগলের কিছু উদাহরণ হল :

$2x + 3y - 7 = 0$ এবং $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ এবং $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ এবং $17 = y$

তোমরা কি জান, জ্যামিতিকভাবে এরা দেখতে কীরূপ?

নবম শ্রেণি থেকে তোমরা স্মরণ করো যে, দুটি চল বিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণের জ্যামিতিক (অর্থাৎ লৈখিক) উপস্থাপনা হল একটি সরলরেখা। তোমরা কি এখন বলতে পারো, দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগলের জ্যামিতিক উপস্থাপনা কীরূপ হবে? এটি হবে দুটি সরলরেখা, যাদের একসাথে বিবেচনা করা হবে।

তোমরা নবম শ্রেণিতে আরও অধ্যয়ন করেছ যে, একটি তলে যদি দুটি রেখা অবস্থিত হয় তবে নীচের ঘটনাগুলোর মধ্যে শুধুমাত্র একটি ঘটনা সংঘটিত হতে পারে :

(i) দুটি রেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করবে।

(ii) দুটি রেখা ছেদ করবে না, অর্থাৎ এরা সমান্তরাল হবে।

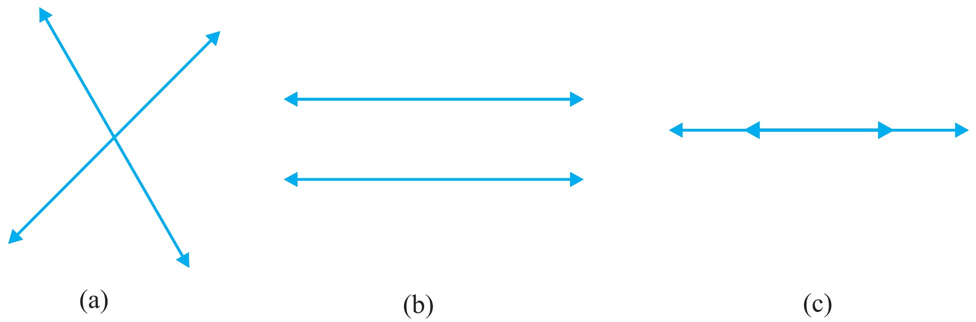
(iii) দুটি রেখা সমাপতিত হবে।

এসব ঘটনাগুলোকে আমরা চিত্র 3.1-তে দেখাব :

চিত্র 3.1 (a) তে, এরা ছেদ করবে।

চিত্র 3.1 (b) তে, এরা সমান্তরাল হবে।

চিত্র 3.1 (c) তে, এরা সমপাতিত হবে।



চিত্র 3.1

বীজগাণিতিক ও জ্যামিতিক উভয় পদ্ধতিতে রৈখিক সমীকরণযুগলের উপস্থাপনা একে অপরের সাথে হাতে হাত মিলিয়ে চলে। চলো আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 1 : চলো আমরা অনুচ্ছেদ 3.1 তে দেওয়া উদাহরণটি নিই। অখিলা একটি মেলায় ₹ 20 নিয়ে গেল এবং সেখানে তার চড়কা চড়া ও হুপলা খেলার ইচ্ছে হল। এই পরিস্থিতিতে বীজগাণিতিক এবং লৈখিক (জ্যামিতিক) উভয় পদ্ধতিতে উপস্থাপন করো।

সমাধান : গঠিত সমীকরণযুগল হল :

$$y = \frac{1}{2}x$$

অর্থাৎ,
$$x - 2y = 0 \quad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \quad (2)$$

চলো আমরা এই সমীকরণগুলোকে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে উপস্থাপন করি। এরজন্য, আমাদের প্রতিটি সমীকরণের কমপক্ষে দুটি সমাধানের প্রয়োজন হবে। এই সমাধানগুলোকে সারণি 3.1-তে দেওয়া হল।

সারণি 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

(i)

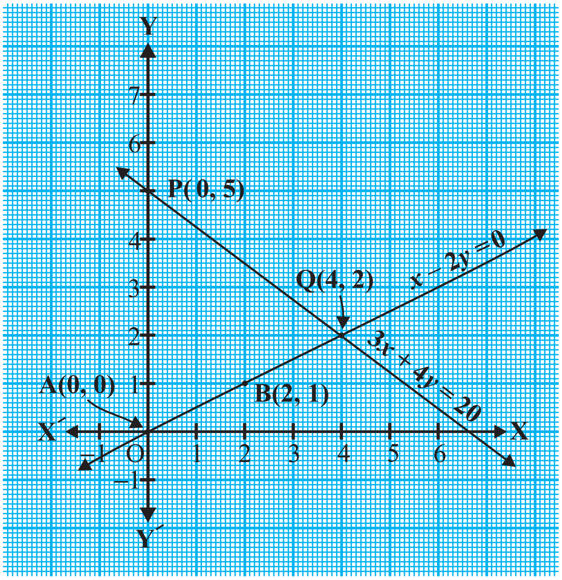
x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

নবম শ্রেণি থেকে স্মরণ করো যে, প্রত্যেক রৈখিক সমীকরণের অসীম সংখ্যক সমাধান (infinitely many solutions) আছে। অতএব, যে সমাধানগুলো আমরা নিয়েছি এগুলো ছাড়া তোমরা অন্য যে-কোনো দুটি সমাধান পছন্দ করতে পারো। তোমরা কি অনুমান করতে পারো, কেন তোমরা প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় সমীকরণেই $x = 0$ পছন্দ করেছি? যখন দুটির মধ্যে একটি চল শূন্য হয়, তখন সমীকরণটি একটি এক-চল

বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণে পরিণত হয় এবং এর ফলে সমীকরণটি সহজেই সমাধান করা যায়। উদাহরণ হিসাবে সমীকরণ (2)-এ $x = 0$ বসিয়ে, আমরা পাই $4y = 20$, অর্থাৎ, $y = 5$। অনুরূপভাবে, সমীকরণ(2)-এ $y = 0$ বসিয়ে, আমরা পাই $3x = 20$, অর্থাৎ, $x = \frac{20}{3}$। কিন্তু $\frac{20}{3}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা নয়, এজন্য এটিকে লেখ কাগজে যথাযথভাবে স্থাপন করা সহজ হবে না। তাই আমরা $y = 2$ পছন্দ করি যার জন্য $x = 4$ হবে এবং এটি একটি অখণ্ড সংখ্যা।

সারণি 3.1 এর সমাধানগুলোর অনুরূপ বিন্দুগুলো যথা A(0, 0), B(2, 1) এবং P(0, 5), Q(4, 2) লেখ কাগজে স্থাপন করে রেখাদ্বয় AB এবং PQ অঙ্কন করি এবং এই রেখাদ্বয় যথাক্রমে সমীকরণ $x - 2y = 0$ এবং $3x + 4y = 20$ কে নির্দেশ করছে যা চিত্র 3.2-তে দেখানো হল।



চিত্র 3.2

চিত্র 3.2-তে লক্ষ করো যে, দুটি সমীকরণকে নির্দেশকারী রেখা দুটি পরস্পরকে (4, 2) বিন্দুতে ছেদ করেছে। এটির অর্থ সম্পর্কে আমরা পরবর্তী অনুচ্ছেদে আলোচনা করব।

উদাহরণ 2 : রোমিলা একটি স্টেশনারি দোকানে গেল এবং 9 টাকায় 2টি পেনসিল ও 3টি রবার কিনলো। তার বান্ধবী সোনালী রোমিলার কাছে নতুন ধরনের পেনসিল ও রবার দেখে 18 টাকায় এরকমের 4টি পেনসিল ও 6টি রবার কিনল। এই পরিস্থিতিকে বীজগাণিতিক ও লৈখিক (জ্যামিতিক) পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।

সমাধান : চলো আমরা 1টি পেনসিলের মূল্যকে x টাকা ও 1টি রবারের মূল্যকে y টাকা দিয়ে প্রকাশ করি। তাহলে সমস্যাটির বীজগাণিতীয় রূপটি নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর মাধ্যমে দেওয়া হল :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

এর সমতুল্য জ্যামিতিক রূপটি পাওয়ার জন্য, আমরা প্রত্যেক সমীকরণকে নির্দেশ করে এমন রেখার উপর দুটি বিন্দু নির্ণয় করব অর্থাৎ, আমরা প্রতিটি সমীকরণের দুটি সমাধান নির্ণয় করব।

এই সমাধানগুলো নিম্নে সারণি 3.2-তে দেওয়া হল :

সারণি 3.2

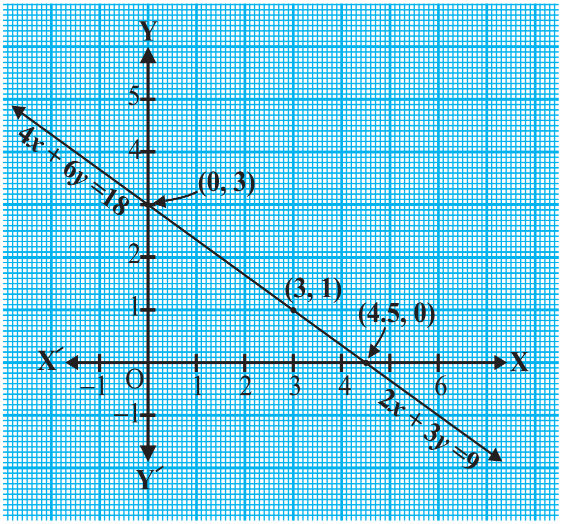
x	0	4.5
$y = \dfrac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \dfrac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

আমরা এই বিন্দুগুলোকে লেখ কাগজে স্থাপন করি এবং রেখা অঙ্কন করি। আমরা দেখতে পাই যে, উভয় রেখাই সমাপতিত হয় (চিত্র 3.3 দেখো)। এর কারণ হল, উভয় সমীকরণই সমতুল্য, অর্থাৎ, একটি থেকে অপরটি নির্ণয় করা যায়।



চিত্র 3.3

উদাহরণ 3 : দুটি রেলপথকে সমীকরণ $x + 2y - 4 = 0$ এবং $2x + 4y - 12 = 0$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে। এই পরিস্থিতিকে লৈখিক (জ্যামিতিক) রূপে ব্যাখ্যা করো।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হল :

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

উপরিউক্ত প্রতিটি সমীকরণের দুটি করে সমাধান সারণি 3.3-তে দেওয়া হল

সারণি 3.3

x	0	4
$y = \dfrac{4-x}{2}$	2	0

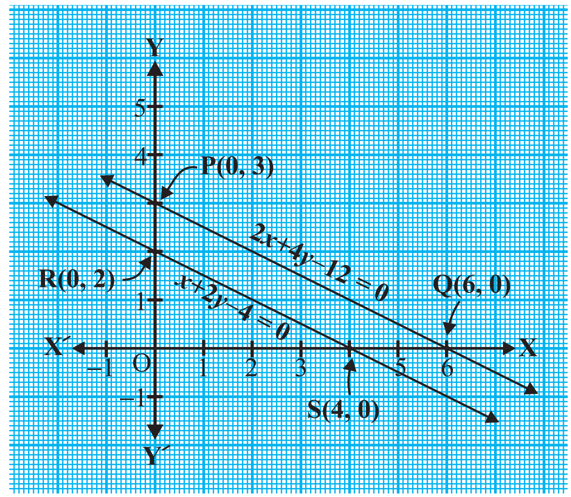
(i)

x	0	6
$y = \dfrac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

সমীকরণগুলোকে লৈখিকরূপে প্রকাশ করার জন্য, আমরা R(0, 2) এবং S(4, 0) বিন্দুদ্বয় লেখ কাগজে স্থাপন করে রেখা RS পাই এবং অনুরূপভাবে P(0, 3) এবং Q(6, 0) বিন্দুদ্বয় লেখ কাগজে স্থাপন করে রেখা PQ পাই।

চিত্র 3.4-তে আমরা লক্ষ করি যে, রেখাগুলো কোথাও পরস্পরকে ছেদ করে না, অর্থাৎ, এরা সমান্তরাল রেখা।



চিত্র 3.4

অতএব, আমরা কয়েকটি পরিস্থিতি পর্যবেক্ষণ করেছি যাদের রৈখিক সমীকরণযুগলের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। আমরা এদের বীজগাণিতিক ও জ্যামিতিক রূপও দেখেছি। পরবর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে আমরা আলোচনা করব যে, কীভাবে এধরনের উপস্থাপনা রৈখিক সমীকরণ যুগলের সমাধান নির্ণয় করতে ব্যবহৃত হয়।

অনুশীলনী 3.1

1. আফতাব তাঁর কন্যাকে বলেছে, “সাত বছর আগে আমি তোমার বয়সের সাতগুণ ছিলাম। আবার, এখন থেকে তিন বছর পর আমি তোমার বয়সের তিনগুণ হয়ে যাব”। (এটি কি আকর্ষণীয় নয়?) এই পরিস্থিতিকে বীজগাণিতিক ও লৈখিক (জ্যামিতিক) পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।
2. ক্রিকেট দলের একজন কোচ (coach) 3900 টাকায় 3টি ব্যাট ও 6টি বল ক্রয় করল। পরবর্তীতে সে একই প্রকারের আরেকটি ব্যাট ও আরও 3টি বল 1300 টাকায় কিনল। এই পরিস্থিতিকে বীজগাণিতিক ও লৈখিক (জ্যামিতিক) পদ্ধতিতে উপস্থাপন করো।
3. 2 কেজি আপেল ও 1 কেজি আঙুরের মূল্য কোনো একদিন 160 টাকা ছিল। এক মাস পর 4 কেজি আপেল ও 2 কেজি আঙুরের মূল্য হল 300 টাকা। এই পরিস্থিতিকে বীজগাণিতিক ও লৈখিক (জ্যামিতিক) পদ্ধতিতে উপস্থাপন করো।

3.3 রৈখিক সমীকরণযুগলের লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান (Graphical Method of Solution of a Pair of Linear Equations)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে তোমরা দেখেছ যে একটি রৈখিক সমীকরণযুগলকে লৈখিক পদ্ধতিতে কীভাবে দুটি রেখায় প্রকাশ করা যায়। তোমরা আরও দেখেছ যে, রেখাগুলো পরস্পরকে ছেদ করতে পারে অথবা সমান্তরাল হতে পারে অথবা সমাপতিত হতে পারে। প্রতিটি ক্ষেত্রে আমরা কি তাদেরকে সমাধান করতে পারি? এবং যদি করা যায়, তবে কীভাবে? আমরা এই প্রশ্নগুলোর উত্তর জ্যামিতিক দৃষ্টিভঙ্গির মাধ্যমে এই অনুচ্ছেদে দেওয়ার চেষ্টা করব।

চলো আমার এখন আগের উদাহরণগুলো একে একে দেখি।

- এই পরিস্থিতিতে উদাহরণ 1-এ অখিলা কতবার চড়কা চড়েছিল এবং কতবার হুপলা খেলেছিল তা নির্ণয় করো।

চিত্র 3.2-তে, তোমরা দেখেছ যে, এই পরিস্থিতির নির্দেশক সমীকরণগুলোকে লৈখিকভাবে দুটি

রেখা দ্বারা দেখানো হয়েছে এবং এরা পরস্পরকে (4, 2) বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, (4, 2) বিন্দুটি দুটি সমীকরণ $x - 2y = 0$ এবং $3x + 4y = 20$ কে প্রকাশ করে এরূপ রেখাদ্বয়ের উপর অবস্থিত এবং এটিই একমাত্র সাধারণ বিন্দু।

চলো আমরা বীজগাণিতীয় রূপে যাচাই করি যে, প্রদত্ত সমীকরণ যুগলের একটি সমাধান হল $x = 4, y = 2$ । প্রতিটি সমীকরণে x এবং y এর মানগুলো প্রতিস্থাপন করে, আমরা পাই $4 - 2 \times 2 = 0$ এবং $3(4) + 4(2) = 20$। অতএব, আমরা যাচাই করেছি যে, $x = 4, y = 2$ হল উভয় সমীকরণেরই একটি সমাধান। **যেহেতু (4, 2) উভয় সমীকরণের একমাত্র সাধারণ বিন্দু, এজন্য এই দ্বি-চল রৈখিক সমীকরণ যুগলের একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমাধান আছে।**

অতএব, অখিলা 4 বার চড়কা চড়েছিল এবং 2 বার হুপলা খেলেছিল।

- উদাহরণ 2-এর পরিস্থিতিতে, তোমরা কি প্রতিটি পেনসিল ও প্রতিটি রবারের দাম নির্ণয় করতে পার?

চিত্র 3.3-তে, অবস্থাটিকে লৈখিকরূপে একজোড়া সমাপতিত রেখার মাধ্যমে দেখানো হয়েছে। সমীকরণগুলোর সমাধানসমূহ এদের সাধারণ বিন্দুগুলোর (common points) দ্বারা পাওয়া যায়।

এই রেখাগুলোর কি আর কোনো সাধারণ বিন্দু আছে? লেখচিত্র থেকে আমরা দেখতে পাই যে এই রেখার উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ সমাধান। অতএব, সমীকরণদ্বয় $2x + 3y = 9$ এবং $4x + 6y = 18$ এর **অসীম সংখ্যক সমাধান** আছে। এর জন্য আমরা বিস্মিত হব না, কারণ যদি আমরা সমীকরণ $4x + 6y = 18$ কে 2 দিয়ে ভাগ করি, তবে আমরা পাই $2x + 3y = 9$, যা সমীকরণ (1) এর সদৃশ। অর্থাৎ, উভয় সমীকরণই সমতুল্য। লেখচিত্র থেকে, আমরা দেখি যে রেখার উপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু প্রতিটি পেনসিল ও প্রতিটি রবারের একটি সম্ভাব্য খরচ দেয়। উদাহরণস্বরূপ, প্রতিটি পেনসিল ও প্রতিটি রবারের খরচ যথাক্রমে 3 টাকা ও 1 টাকা হতে পারে। অথবা, প্রতিটি পেন্সিলের খরচ 3.75 টাকা ও প্রতিটি রবারের খরচ 0.50 টাকা হতে পারে, ইত্যাদি।

- উদাহরণ 3-এর পরিস্থিতিতে, দুটি রেলপথ কি পরস্পরকে অতিক্রম করতে পারে?

চিত্র 3.4-তে, অবস্থাটিকে লৈখিক রূপে দুটি সমান্তরাল রেখা দ্বারা বর্ণনা করা হয়েছে। যেহেতু রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করছে না, অতএব রেলপথ দুটি পরস্পরকে ছেদ করবে না। এটির অর্থ এই যে, সমীকরণদ্বয়ের কোনো সাধারণ সমাধান নেই।

একটি রৈখিক সমীকরণ যুগল যার কোনো সমাধান নেই এটিকে *অসংগত (inconsistent)* রৈখিক সমীকরণযুগল বলা হয়। অপরপক্ষে, দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণযুগল যার একটি সমাধান আছে এটিকে *সংগত (consistent)* রৈখিক সমীকরণযুগল বলা হয়। আবার, সমতুল্য রৈখিক সমীকরণযুগলের অসীম সংখ্যক সাধারণ সমাধান আছে। এধরনের যুগলকে দ্বি-চলবশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের পরস্পর *অধীন (dependent)* যুগল বলা হয়। লক্ষ করো যে, একটি রৈখিক সমীকরণের পরস্পর অধীন যুগল সর্বদা সংগত হয়।

আমরা এখন দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈরিখ সমীকরণ যুগলের নির্দেশক রেখাসমূহের আচরণ ও তাদের সমাধানের অস্তিত্ব সম্পর্কে নিম্নে সংক্ষেপে আলোচনা করব :

(i) রেখাদ্বয় পরস্পরকে একটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। এক্ষেত্রে, সমীকরণযুগলের একটি অনন্য

সমাধান আছে (সংগত সমীকরণ যুগল)।

(ii) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হতে পারে। এক্ষেত্রে সমীকরণদ্বয়ের কোনো সমাধান নেই (অসংগত সমীকরণযুগল)।

(iii) রেখাদ্বয় পরস্পর সমাপতিত হতে পারে। এক্ষেত্রে, সমীকরণদ্বয়ের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে [পরস্পর অধীন (সংগত) সমীকরণযুগল]।

চলো আমরা এখন উদাহরণ 1, 2, এবং 3-এ গঠিত রৈখিক সমীকরণ যুগলের দিকে ফিরে যাই এবং এরা জ্যামিতিকরূপে বা লৈখিকরূপে কী ধরনের যুগল বিচার করি।

(i) $x - 2y = 0$ এবং $3x + 4y - 20 = 0$ (রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করেছে)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ এবং $4x + 6y - 18 = 0$ (রেখাদ্বয় পরস্পর সমপাতিত)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ এবং $2x + 4y - 12 = 0$ (রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল)

চলো আমরা এখন তিনটি উদাহরণের সবগুলোতে $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ এবং $\frac{c_1}{c_2}$ এর মানগুলো লিখে রাখি ও তুলনা করি। এখানে, অনুচ্ছেদ 3.2-এ প্রদত্ত সাধারণ আকারের সমীকরণগুলোর সহগগুলোকে a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2 দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে।

সারণি 3.4

ক্রমিক সংখ্যা	রেখা জোড়া	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	অনুপাতের তুলনা	জ্যামিতিক রূপ	বীজগাণিতিক ব্যাখ্যা
1.	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	রেখাগুলো পরস্পরকে ছেদ করেছে	একটি মাত্র সমাধান (অনন্য)
2.	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	রেখাগুলো পরস্পর সমপাতিত	অসীম সংখ্যক সমাধান
3.	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	রেখাগুলো পরস্পর সমান্তরাল	কোনো সমাধান নেই

উপরোক্ত সারণি থেকে তোমরা দেখতে পাও যে, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সমীকরণযুগল দ্বারা উপস্থাপিত রেখাগুলো

(i) পরস্পরকে ছেদ করবে যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয়।

(ii) পরস্পর সমাপতিত হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

(iii) পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

প্রকৃতপক্ষে এর বিপরীত বিবৃতিটিও যে-কোনো রেখাযুগলের জন্য সত্য হবে। তোমরা নিজেরা কিছু উদাহরণ নিয়ে এটি যাচাই করতে পারো।

চলো আমরা এখন এটিকে স্পষ্টরূপে ব্যাখ্যা করার জন্য আরও কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 4 : লৈখিক রূপে যাচাই করো

$$x + 3y = 6 \quad (1)$$

এবং

$$2x - 3y = 12 \quad (2)$$

সমীকরণযুগল সংগত কিনা। যদি সংগত হয় তবে তাদেরকে লৈখিক রূপে সমাধান করো।

সমাধান : চলো আমরা প্রথমে সমীকরণ (1) এবং (2) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। এজন্য, আমরা প্রতিটি সমীকরণের দুটি করে সমাধান বের করব যা নিম্নে সারণি 3.5-তে দেওয়া হল।

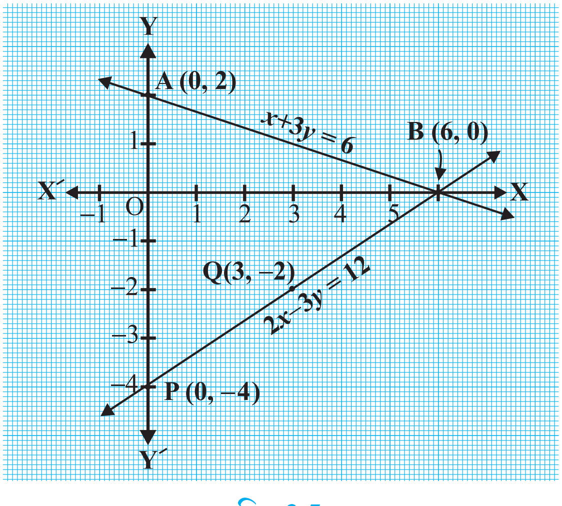
সারণি 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	– 4	–2

একটি লেখ কাগজের উপর A(0, 2), B(6, 0), P(0, – 4) এবং Q(3, – 2) বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং তাদেরকে যুক্ত করে AB এবং PQ রেখা গঠন করা হল যা চিত্র 3.5-তে দেখানো হয়েছে।

আমরা চিত্র 3.5-তে দেখতে পাই যে, AB এবং PQ উভয় রেখারই একটি সাধারণ বিন্দু হল B (6, 0) । তাই, এই রৈখিক সমীকরণযুগলের একটি সমাধান হল $x = 6$ এবং $y = 0$, অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণ জোড়া সংগত হবে।



চিত্র 3.5

উদাহরণ 5 : লৈখিক রূপে নির্ণয় করো যে, নিম্নের সমীকরণযুগলের কোনো সমাধান নেই কিনা, অনন্য সমাধান আছে কিনা অথবা সীমাহীন রূপে অসংখ্য সমাধান আছে কিনা :

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

সমাধান : সমীকরণ (2)-কে $\frac{5}{3}$ দিয়ে গুণ করে, আমরা পাই

$$5x - 8y + 1 = 0$$

কিন্তু, ইহা সমীকরণ (1) এর সদৃশ। সুতরাং, সমীকরণ (1) এবং (2) দ্বারা উপস্থাপিত রেখাদ্বয় পরস্পর সমাপতিত হবে। অতএব, সমীকরণ (1) এবং (2) এর সীমাহীনরূপে অসংখ্য সমাধান আছে।

লেখ কাগজে আরও কিছু বিন্দু স্থাপন করো ও নিজে যাচাই করো।

উদাহরণ 6 : চম্পা একটি ‘সেল’-এ কিছু প্যান্ট ও ঘাগরা (skirt) কিনতে গিয়েছিল। যখন তাঁর বান্ধবীরা তাকে জিজ্ঞেস করল যে প্রত্যেক প্রকারের সে কয়টি করে কিনেছিল তখন সে উত্তর দিল, “ঘাঘরার সংখ্যা হল ক্রয় করা প্যান্টের সংখ্যার দ্বিগুণের চেয়ে দুই কম। আবার ঘাঘরার সংখ্যা হল ক্রয় করা প্যান্টের সংখ্যার চারগুণের চেয়ে চার কম”। চম্পা কয়টি প্যান্ট ও ঘাঘরা কিনেছিল, তা জানার জন্য তার বান্ধবীদের সাহায্য করো।

সমাধান : চলো আমরা প্যান্টের সংখ্যাকে x এবং ঘাগরার সংখ্যাকে y দিয়ে প্রকাশ করি। এর থেকে যে সমীকরণগুলো আমরা তৈরি করতে পারি, এগুলো হল :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

এবং

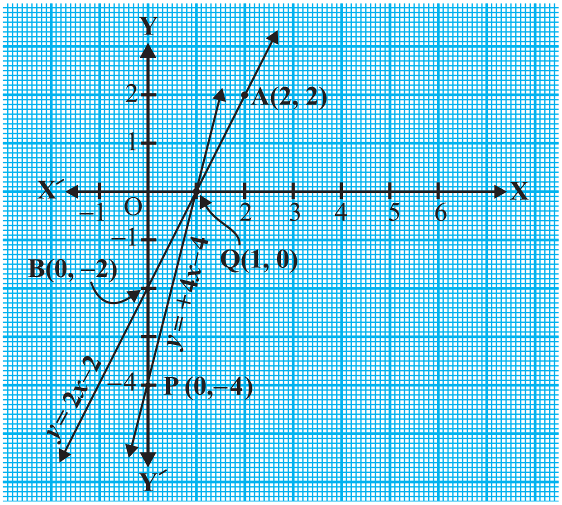
$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

এখন আমরা সমীকরণ (1) এবং (2) প্রতিটির জন্য দুটি করে সমাধান বের করে তাদের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমাধানগুলো নিম্নে সারণি 3.6-তে দেওয়া হল।

সারণি 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



চিত্র 3.6

বিন্দুগুলোকে লেখ কাগজের উপর স্থাপন ও যুক্ত করে সমীকরণযুগলের প্রতিনিধিত্বকারী রেখাগুলো অঙ্কণ করা হল যা চিত্র 3.6-তে দেখানো হয়েছে।

দুটি রেখা পরস্পরকে $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, $x = 1, y = 0$ হল রৈখিক সমীকরণযুগলের নির্ণেয় সমাধান। অর্থাৎ সে একটি প্যান্ট কিনেছিল কিন্তু সে কোনো ঘাঘরা ক্রয় করেনি।

প্রদত্ত সমস্যার শর্তগুলোকে উত্তরটি সিদ্ধ করে কিনা তা **যাচাই** করো।

অনুশীলনী 3.2

1. নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোর জন্য রৈখিক সমীকরণ যুগল গঠন করো এবং লৈখিক রূপে তাদের সমাধান নির্ণয় করো।

   (i) দশম শ্রেণির 10 জন শিক্ষার্থী একটি গণিত ক্যুইজে (quiz) অংশগ্রহণ করেছিল। যদি বালিকার সংখ্যা বালকের সংখ্যার থেকে 4 জন বেশি হয়, তবে কতজন বালক ও কতজল বালিকা ক্যুইজে অংশগ্রহণ করেছিল তা নির্ণয় করো।

   (ii) 5টি পেনসিল ও 7টি কলমের দাম একত্রে 50 টাকা, পক্ষান্তরে 7টি পেনসিল ও 5 টি কলমের দাম একত্রে 46 টাকা। একটি পেনলিল ও একটি কলমের দাম নির্ণয় করো।

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ অনুপাতগুলো তুলনা করে, নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণযুগলের নির্দেশক রেখাগুলো পরস্পরকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে, পরস্পর সমান্তরাল, অথবা পরস্পর সমাপতিত কিনা নির্ণয় করো।

   (i) $5x - 4y + 8 = 0$
   $7x + 6y - 9 = 0$

   (ii) $9x + 3y + 12 = 0$
   $18x + 6y + 24 = 0$

   (iii) $6x - 3y + 10 = 0$
   $2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ও $\frac{c_1}{c_2}$ অনুপাতগুলো তুলনা করে, নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণযুগল সংগত অথবা অসংগত কিনা নির্ণয় করো :

   (i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

   (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

   (iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

   (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

   (v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. নিম্নলিখিত কোন্ রৈখিক সমীকরণযুগল সংগত / অসংগত? যদি সংগত হয় তবে লৈখিকরূপে সমাধান নির্ণয় করো :

(i) $x+y=5,\quad 2x+2y=10$
(ii) $x-y=8,\quad 3x-3y=16$
(iii) $2x+y-6=0,\quad 4x-2y-4=0$
(iv) $2x-2y-2=0,\quad 4x-4y-5=0$

5. একটি আয়তক্ষেত্রাকার বাগানের অর্ধ পরিসীমা 36 মি, যার দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে 4 মি বেশি। বাগানটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

6. একটি রৈখিক সমীকরণ $2x + 3y - 8 = 0$ দেওয়া আছে। দ্বি-চল বিশিষ্ট অপর একটি রৈখিক সমীকরণ লেখো যাতে গঠিত সমীকরণদ্বয়ের জ্যামিতিক উপস্থাপনা নিম্নরূপ হয় :

(i) রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে। (ii) রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয়।
(iii) রেখাদ্বয় পরস্পর সমাপতিত হয়।

7. সমীকরণদ্বয় $x-y+1=0$ এবং $3x+2y-12=0$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করো। এই রেখাগুলো এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো, এবং ত্রিভুজাকার অঞ্চলটি ছায়াবৃত (shade) করো।

3.4 একটি রৈখিক সমীকরণযুগল সমাধানের বীজগাণিতিক পদ্ধতি (Algebraic Methods of Solving a Pair of Linear Equations)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, আমরা আলোচনা করেছিলাম যে কীভাবে একটি রৈখিক সমীকরণ যুগলের সমাধান লৈখিক রূপে নির্ণয় করা যায়। কিন্তু লৈখিক পদ্ধতি ওইসব ক্ষেত্রে সুবিধাজনক হবে না যখন রৈখিক সমীকরণগুলোর সমাধান নির্দেশকারী বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক অখণ্ড সংখ্যা হয় না, যেমন $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right)$, $(-1.75, 3.3)$, $\left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ইত্যাদি। এ ধরনের বিন্দুগুলোর প্রতিস্থাপনে পরিমাপ করার সময় ভুল হওয়ার সবরকমের সম্ভাবনা থাকে। সমাধান নির্ণয় করার অন্য কোনো বিকল্প পদ্ধতি আছে কি? এর কয়েকটি বীজগাণিতীক পদ্ধতি আছে, যেগুলো আমরা এখন আলোচনা করব।

3.4.1 পরিবর্ত পদ্ধতি (Substitution Method) : কিছু উদাহরণ নিয়ে আমরা পরিবর্ত পদ্ধতি ব্যাখ্যা করব।

উদাহরণ 7 : পরিবর্ত পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত সমীকরণযুগলের সমাধান করো :

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$
$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

সমাধান :

ধাপ 1 : প্রথমে আমরা যে-কোনো একটি সমীকরণ নিই ও একটি চলকে অপর চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে লিখি। চলো আমরা সমীকরণ (2) বিবেচনা করি :

$$x + 2y = 3$$

এবং এটিকে $x = 3 - 2y$ আকারে লিখি। (3)

ধাপ 2 : x-এর মান সমীকরণ (1)-এ প্রতিস্থাপন করে, আমরা পাই

$$7(3-2y)-15y = 2$$

অর্থাৎ, $$21-14y-15y = 2$$

অর্থাৎ, $$-29y = -19$$

সুতরাং, $$y = \frac{19}{29}$$

ধাপ 3 : y-এর এই মান সমীকরণ (3)-এ বসিয়ে, আমরা পাই

$$x = 3-2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

অতএব সমাধান হল $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$.

সত্য প্রতিপাদন : $x = \frac{49}{29}$ এবং $y = \frac{19}{29}$ কে প্রতিস্থাপন করে, তোমরা যাচাই করতে পারো যে, সমীকরণ (1) এবং (2) উভয়ই সিদ্ধ হয়।

পরিবর্ত পদ্ধতিটি আরও স্পষ্টভাবে বোঝার জন্য, চলো আমরা এটিকে ধাপে ধাপে বিবেচনা করি :

ধাপ 1 : একটি চল-এর মান, ধরো y-কে অপর চলের আকারে নির্ণয় করো অর্থাৎ যে-কোনো সমীকরণ থেকে x নির্ণয় করো, যেটি সুবিধাজনক হয়।

ধাপ 2 : y-এর মান অপর সমীকরণে প্রতিস্থাপন করো ও একটিকে একচল বিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত করো, অর্থাৎ, x-এর আকারে প্রকাশ করো যা সমাধান করা যায়। কখনো কখনো, যেমন নিম্নে উদাহরণ 9 ও 10-এ আছে, তোমরা কোনো চল ব্যতীত বিবৃতি পেতে পার। যদি এই বিবৃতিটি সত্য হয়, তবে তোমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পার যে, রৈখিক সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। যদি বিবৃতিটি মিথ্যা হয়, তবে রৈখিক সমীকরণযুগল অসংগত হবে।

ধাপ 3 : ধাপ 2-এ প্রাপ্ত x (অথবা y) এর মান ধাপ 1-এ ব্যবহৃত সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে অন্য চলের মান পাওয়া যায়।

মন্তব্য : আমরা একটি চলের মান অন্য চলের আকারে প্রকাশ করে, রৈখিক সমীকরণযুগলের সমাধান নির্ণয় করার জন্য **প্রতিস্থাপিত** করি। এই কারণে এই পদ্ধতিকে *পরিবর্ত পদ্ধতি* বলা হয়।

উদাহরণ 8 : অনুশীলনী 3.1-এর 1 নং প্রশ্ন পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করো।

সমাধান : ধরি, আফতাব ও তাঁর কন্যার বয়স (বছরে) যথাক্রমে s এবং t । তবে ওই পরিস্থিতিকে উপস্থাপন করার জন্য রৈখিক সমীকরণযুগল হল :

$s-7 = 7(t-7)$, অর্থাৎ, $s-7t+42 = 0$ (1)

এবং $s+3 = 3(t+3)$, অর্থাৎ, $s-3t = 6$ (2)

সমীকরণ (2) ব্যবহার করে, আমরা পাই : $s = 3t + 6$.

সমীকরণ (1)-এ s এর এই মান বসিয়ে, আমরা পাই :

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0,$$

অর্থাৎ, $4t = 48$, যা থেকে পাওয়া যায় $t = 12$.

সমীকরণ (2)-এ t এর এই মান বসিয়ে, আমরা পাই :

$$s = 3\,(12) + 6 = 42$$

সুতরাং, আফতাব ও তাঁর কন্যার বয়স হল যথাক্রমে 42 বছর এবং 12 বছর।

পরীক্ষা করে এই উত্তরটির সত্যতা যাচাই করো, যে এটি প্রদত্ত সমস্যার শর্তাবলিকে সিদ্ধ করে কিনা।

উদাহরণ 9 : চলো আমরা অনুচ্ছেদ 3.3-এর উদাহরণ 2 বিবেচনা করি, অর্থাৎ, 2টি পেনসিল ও 3 টি রবারের দাম 9 টাকা এবং 4 টি পেনসিল ও 6 টি রবারের দাম 18 টাকা। প্রতিটি পেনসিল ও প্রতিটি রবারের মূল্য নির্ণয় করো।

সমাধান : : যে রৈখিক সমীকরণযুগল গঠিত হয়েছিল, তা হল :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

আমরা প্রথমে সমীকরণ $2x + 3y = 9$ থেকে, x-এর মান y-এর আকারে প্রকাশ করে, পাওয়া যায়

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

এখন x-এর এই মান সমীকরণ (2)-এ বসিয়ে, পাওয়া যায় :

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

অর্থাৎ, $18 - 6y + 6y = 18$

অর্থাৎ, $18 = 18$

এই বিবৃতিটি y-এর সকল মানের জন্য সত্য। যদিও, y-এর কোনো নির্দিষ্ট মান সমাধান রূপে আমরা পাই না। সুতরাং, আমরা x-এর কোনো নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করতে পারি না। এই পরিস্থিতি উৎপন্ন হওয়ার কারণ হল এখানে দেওয়া উভয় সমীকরণই সদৃশ। অতএব, সমীকরণ (1) এবং (2) এর *অসীম সংখ্যক সমাধান* আছে। লক্ষ করো যে, সমীকরণদ্বয়ের এরকম সমাধান আমরা লৈখিকরূপেও পেয়েছি। (অনুচ্ছেদ 3.2-এর চিত্র 3.3 অনুসারে) আমরা একটি পেনসিল ও একটি রবারের কেবলমাত্র একটি মূল্য নির্ণয় করতে পারি না, কারণ প্রদত্ত পরিস্থিতিতে তাদের অসংখ্য সাধারণ সমাধান আছে।

উদাহরণ 10 : চলো আমরা অনুচ্ছেদ 3.2-এর উদাহরণ 3 বিবেচনা করি। রেলপথগুলো কি পরস্পরকে ছেদ করবে?

সমাধান : যে রৈখিক সমীকরণযুগল গঠিত হয়েছিল, তা হল :

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$
$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে x কে y-এর আকারে প্রকাশ করে, আমরা পাই

$$x = 4 - 2y$$

এখন, আমরা x-এর এই মান সমীকরণ (2)-এ প্রতিস্থাপন করে পাই

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

অর্থাৎ, $8 - 12 = 0$

অর্থাৎ, $-4 = 0$

যা একটি মিথ্যা বিবৃতি।

সুতরাং, সমীকরণগুলোর কোনো সাধারণ সমাধান নেই। অতএব, দুটি রেলপথ পরস্পরকে কখনো ছেদ করবে না।

অনুশীলনী 3.3

1. নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণযুগলকে পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করো।

(i) $x + y = 14$, $x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$, $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$, $9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$, $0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$, $\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ এবং $2x - 4y = -24$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করো এবং অতঃপর 'm'-এর ওই মান নির্ণয় করো যার জন্য $y = mx + 3$।

3. নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোর জন্য রৈখিক সমীকরণ যুগল গঠন করো এবং পরিবর্ত পদ্ধতিতে তাদের সমাধান নির্ণয় করো।

(i) দুটি সংখ্যার মধ্যে পার্থক্য হল 26 এবং একটি সংখ্যা অন্যটির তিনগুণ। সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

(ii) দুটি সম্পূরক কোণের মধ্যে বড়ো কোণটি ছোটো কোণটির চেয়ে 18 ডিগ্রি বেশি। কোণগুলো নির্ণয় করো।

(iii) ক্রিকেট দলের একজন কোচ 3800 টাকায় 7টি ব্যাট ও 6টি বল কিনল। পরবর্তী সময়ে তিনি 1750 টাকায় 3টি ব্যাট ও 5টি বল কিনল। প্রতিটি ব্যাট ও প্রতিটি বলের মূল্য নির্ণয় করো।

(iv) কোনো এক শহরের ট্যাক্সি ভাড়াতে, একটি নির্দিষ্ট ভাড়ার সাথে যে দূরত্ব অতিক্রম করে সেটির ভাড়া যুক্ত করা হয়। 10 কিমি দূরত্ব-এর জন্য ভাড়া 105 টাকা ও 15 কিমি ভ্রমণের জন্য ভাড়া 155 টাকা দিতে হয়। নির্দিষ্ট ভাড়া ও প্রতি কিমি-এ ভাড়া কত? এক ব্যক্তিকে 25 কিমি ভ্রমণের জন্য কত টাকা দিতে হবে?

(v) কোনো এক ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি হয় $\frac{9}{11}$। যদি, ভগ্নাংশটির লব ও হর উভয়ের সাথে 3 যোগ করা হয়, তবে এটি হবে $\frac{5}{6}$। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করো।

(vi) পাঁচ বছর পরে জ্যাকবের বয়স তাঁর পুত্রের বয়সের চেয়ে তিনগুণ বেশি হবে। পাঁচ বছর আগে, জ্যাকবের বয়স তাঁর পুত্রের বয়সের চেয়ে সাতগুণ বেশি ছিল। তাদের বর্তমান বয়স কত?

3.4.2 অপনয়ন পদ্ধতি (Elimination Method)

এখন, চলো আমরা একটি চলের অপনয়নের (অর্থাৎ অপসারণ) জন্য অপর একটি পদ্ধতি বিবেচনা করি। এটি কখনো কখনো পরিবর্ত পদ্ধতির চেয়ে অধিক উপযুক্ত। চলো আমরা দেখি এই পদ্ধতিটি কীভাবে প্রয়োগ করা হয়।

উদাহরণ 11 : দু-জন ব্যক্তির আয়ের অনুপাত হল 9 : 7 এবং তাদের ব্যয়ের অনুপাত হল 4 : 3। যদি তাদের প্রত্যেকে প্রতি মাসে 2000 টাকা সঞ্চয় করে, তবে তাদের মাসিক আয় নির্ণয় করো।

সমাধান : চলো আমরা দুজন ব্যক্তির আয়কে যথাক্রমে $9x$ টাকা এবং $7x$ টাকা দ্বারা এবং তাদের ব্যয়কে যথাক্রমে $4y$ টাকা এবং $3y$ টাকা দ্বারা প্রকাশ করি। তবে, এই পরিস্থিতিতে গঠিত সমীকরণগুলো হল :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

এবং

$$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

ধাপ 1 : y-এর সহগগুলো সমান করার জন্য সমীকরণ (1) কে 3 দিয়ে এবং সমীকরণ (2) কে 4 দিয়ে গুণ করো। তবে আমরা নিম্নের সমীকরণগুলো পাই :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

ধাপ 2 : y-কে *অপসারণ* করার জন্য সমীকরণ (4) থেকে সমীকরণ (3) বিয়োগ করো, যেহেতু y-এর সহগগুলো সমান আছে। অতএব, আমরা পাই

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

অর্থাৎ,

$$x = 2000$$

ধাপ 3 : x-এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে, আমরা পাই :

$$9(2000) - 4y = 2000$$

অর্থাৎ,

$$y = 4000$$

সুতরাং, সমীকরণগুলোর সমাধান হল $x = 2000, y = 4000$। অতএব, দুজন ব্যক্তির মাসিক আয় হল যথাক্রমে 18,000 টাকা এবং 14,000 টাকা।

সত্য প্রতিপাদন : $18000 : 14000 = 9 : 7$।

আবার, তাদের ব্যয়ের অনুপাত হল $= 18000 - 2000 : 14000 - 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3$

মন্তব্য :

1. উপরের উদাহরণ সমাধান করার জন্য যে পদ্ধতি ব্যবহৃত হয়েছে এটিকে *অপনয়ন* পদ্ধতি বলা হয়, কারণ আমরা একটি চলকে অপসারণ করে একচল বিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণ পেয়েছি। উপরিউক্ত উদাহরণে, আমরা y কে অপসারিত করেছি। আমরা x-কেও অপসারিত করতে পারি। ওই পদ্ধতিতে এটিকে সমাধান করার চেষ্টা করো।
2. এই সমস্যাটিকে সমাধান করার জন্য তোমরা পরিবর্ত পদ্ধতি, অথবা লৈখিক পদ্ধতিও ব্যবহার করতে পার। এই পদ্ধতিতে সমাধান করার চেষ্টা করো এবং দেখো কোন্ পদ্ধতিটি সবচেয়ে বেশি সুবিধাজনক।

   চলো আমরা এখন অপনয়ন পদ্ধতির বিভিন্ন ধাপগুলো নিম্নে আলোচনা করি :

ধাপ 1 : প্রথমে কোনো একটি চল (x অথবা y)-এর সহগগুলো সাংখ্যিকভাবে সমান করার জন্য উভয় সমীকরণকে কিছু উপযুক্ত অ-শূন্য ধ্রুবক দিয়ে গুণ করো।

ধাপ 2 : তারপর সমীকরণ দুটিকে যোগ বা বিয়োগ করো যাতে একটি চল অপসারিত হয়। যদি তোমরা একচল বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পেয়ে যাও তবে ধাপ 3-তে যাও।

ধাপ 2-তে, যদি আমরা কোনো চল রাশিহীন একটি সত্য বিবৃতি পেয়ে থাকি, তবে মূল সমীকরণযুগলের অসংখ্য সমাধান পাওয়া যায়।

ধাপ 2-তে যদি কোনো চল রাশিহীন একটি মিথ্যা বিবৃতি পেয়ে থাকি, তবে মূল সমীকরণযুগলের কোনো সমাধান থাকে না, অর্থাৎ এটি অসংগত হবে।

ধাপ 3 : এইভাবে প্রাপ্ত এক চল (x অথবা y) বিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করো এবং এর মান বের করো।

ধাপ 4 : x (বা y) এর এই মান মূল সমীকরণগুলোর যে-কোনো একটিতে প্রতিস্থাপন করে অপর চলের মান নির্ণয় করো।

এখন এটিকে স্পষ্টভাবে বোঝানোর জন্য আমরা আরো কিছু উদাহরণের সমাধান করব।

উদাহরণ 12 : অপনয়ন পদ্ধতি ব্যবহার করে, নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলের সকল সম্ভাব্য সমাধানগুলো নির্ণয় করো :

$$2x + 3y = 8 \tag{1}$$
$$4x + 6y = 7 \tag{2}$$

সমাধান :

ধাপ 1 : x-এর সহগগুলো সমান করার জন্য, সমীকরণ (1) কে 2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে 1 দিয়ে গুণ করো। অতঃপর, আমরা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলো পাই:

$$4x + 6y = 16 \tag{3}$$

$$4x + 6y = 7 \tag{4}$$

ধাপ 2 : সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে, আমরা পাই :

$$(4x-4x)+(6y-6y) = 16-7$$

অর্থাৎ, $0 = 9$, যা একটি মিথ্যা বিবৃতি।

সুতরাং, সমীকরণ যুগলের কোনো সমাধান নেই।

উদাহরণ 13 : কোনো একটি দুই অঙ্কের সংখ্যা ও অঙ্ক দুটির স্থান পরিবর্তন করে গঠিত সংখ্যার যোগফল হল 66। যদি সংখ্যাটির অঙ্ক দুটির অন্তর 2 হয়, তবে সংখ্যাটি নির্ণয় করো। এরকম কয়টি সংখ্যা আছে?

সমাধান : মনে করো, প্রথম সংখ্যাটির দশকের স্থানের অঙ্ক ও এককের স্থানের অঙ্ক যথাক্রমে x এবং y। অতএব, প্রথম সংখ্যাটিকে বিস্তৃতরূপে $10x+y$ লেখা যায় [উদাহরণস্বরূপ, $56 = 10(5)+6$]।

যখন অঙ্কগুলো স্থান পরিবর্তন করা হয় অর্থাৎ এককের স্থানে x ও দশকের স্থানে y, তখন এই সংখ্যাটির বিস্তৃত রূপ হবে $10y + x$ [উদাহরণস্বরূপ, যখন 56 কে উল্টানো হয়, তখন আমরা পাই $65 = 10(6) + 5$]।

প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী,

$$(10x+y)+(10y+x) = 66$$

অর্থাৎ, $11(x+y) = 66$

অর্থাৎ, $x+y = 6$ (1)

আরও দেওয়া আছে যে, অঙ্কগুলোর অন্তর 2, অর্থাৎ,

হয় $x-y = 2$ (2)

নতুবা $y-x = 2$ (3)

যদি $x-y=2$ হয়, তবে অপনয়ন পদ্ধতিতে (1) ও (2) সমাধান করে, আমরা পাই $x=4$ ও $y=2$ ।

এইক্ষেত্রে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হল 42 ।

যদি $y-x=2$ হয়, তবে অপনয়ন পদ্ধতিতে (1) ও (3) সমাধান করে, আমরা পাই $x=2$ ও $y=4$ ।

এইক্ষেত্রে, দুই অঙ্কের সংখ্যাটি হল 24 ।

অর্থাৎ, এরকম দুটি দুই অঙ্কের সংখ্যা 42 ও 24 আছে।

সত্য প্রতিপাদন : এখানে $42+24=66$ এবং $4-2=2$ । আবার, $24+42=66$ এবং $4-2=2$ ।

অনুশীলনী 3.4

1. নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলগুলোকে অপনয়ন পদ্ধতি ও পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাধান করো:

(i) $x+y=5$ এবং $2x-3y=4$

(ii) $3x+4y=10$ এবং $2x-2y=2$

(iii) $3x-5y-4=0$ এবং $9x=2y+7$

(iv) $\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=-1$ এবং $x-\frac{y}{3}=3$

2. নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোর ক্ষেত্রে রৈখিক সমীকরণ যুগল গঠন করো এবং অপনয়ন পদ্ধতিতে তাদের সমাধান (যদি অস্তিত্ব থাকে) নির্ণয় করো :

(i) যদি আমরা কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে 1 যোগ করি ও হর থেকে 1 বিয়োগ করি তবে ভগ্নাংশটি পরিবর্তিত হয়ে 1 হয়। যদি শুধু হরের সাথে 1 যোগ করা হয়, তবে ভগ্নাংশটি হবে $\frac{1}{2}$ । ভগ্নাংশটি কত ?

(ii) পাঁচ বছর পূর্বে, নুরির বয়স সনুর বয়সের তিনগুণ ছিল। দশ বছর পর, নুরির বয়স সনুর বয়সের তুলনায় দ্বিগুণ হবে। নুরি ও সনুর বয়স কত ?

(iii) কোনো দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল হল 9। আবার, এই সংখ্যার নয়গুণ, সংখ্যাটির অঙ্কগুলোর স্থান পরিবর্তন করে গঠিত সংখ্যার দ্বিগুণের সমান। সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

(iv) মীনা 2000 টাকা তোলার জন্য একটি ব্যাংকে গেল। সে কোষাধ্যক্ষকে শুধুমাত্র 50 টাকা ও 100 টাকার নোট দেওয়ার জন্য বলল। মীনা সব মিলিয়ে মোট 25 টি নোট পেল। সে 50 টাকা ও 100 টাকার কয়টি করে নোট পেয়েছিল নির্ণয় করো।

(v) বই ভাড়া দেওয়া হয় এমন একটি গ্রন্থাগারে প্রথম তিনদিনের জন্য একটি নির্দিষ্ট মূল্য ধার্য করা আছে এবং তারপর প্রতিটি অতিরিক্ত দিনের জন্য আলাদাভাবে মূল্য ধার্য করা আছে। সরিতা একটি বই সাতদিন রাখার জন্য 27 টাকা দিল, যেখানে সুসি একটি বই পাঁচদিন রাখার জন্য 21 টাকা দিল। নির্দিষ্ট ধার্য্য মূল্য ও প্রত্যেক অতিরিক্ত দিনের জন্য ধার্য মূল্য নির্ণয় করো।

3.4.3 বজ্রগুণন পদ্ধতি (Cross - Multiplication Method)

এ পর্যন্ত, তোমরা শিখেছ দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ যুগলের সমাধান লৈখিক, পরিবর্ত ও অপনয়ন পদ্ধতিতে কীভাবে করা হয়। এখানে আমরা একটি রৈখিক সমীকরণ যুগলের সমাধান করার জন্য আরও একটি বীজগাণিতিক পদ্ধতির সাথে পরিচিত হবো, যা অনেক ক্ষেত্রে এই সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য খুবই প্রয়োজনীয়। আরও অগ্রসর হওয়ার পূর্বে, চলো আমরা নিম্নলিখিত অবস্থাটি বিবেচনা করি।

5 টি কমলালেবু ও 3 টি আপেলের মূল্য 35 টাকা এবং 2 টি কমলালেবু ও 4 টি আপেলের মূল্য 28 টাকা। চলো আমরা একটি কমলালেবু ও একটি আপেলের মূল্য নির্ণয় করি।

এরজন্য, একটি কমলালেবুর মূল্যকে x টাকা ও একটি আপেলের মূল্যকে y টাকা দিয়ে প্রকাশ করি। অতএব, গঠিত সমীকরণগুলো হল :

$$5x + 3y = 35, \text{ অর্থাৎ, } 5x + 3y - 35 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y = 28, \text{ অর্থাৎ, } 2x + 4y - 28 = 0 \quad (2)$$

চলো আমরা অপনয়ন পদ্ধতি ব্যবহার করে এই সমীকরণগুলো সমাধান করি।

সমীকরণ (1) কে 4 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে 3 দিয়ে গুণ করে, আমরা পাই :

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \quad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \quad (4)$$

সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে, আমরা পাই :

$[(5)(4)-(3)(2)]x+[(4)(3)-(3)(4)]y+[4(-35)-(3)(-28)]=0$

সুতরাং, $$x=\frac{-[(4)(-35)-(3)(-28)]}{(5)(4)-(3)(2)}$$

অর্থাৎ, $$x=\frac{(3)(-28)-(4)(-35)}{(5)(4)-(2)(3)} \qquad (5)$$

যদি সমীকরণ (1) এবং (2) কে যথাক্রমে $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ আকারে লেখা হয়, তবে আমরা পাই :

$a_1=5,\ b_1=3,\ c_1=-35,\ a_2=2,\ b_2=4,\ c_2=-28.$

তবে সমীকরণ (5) কে এরূপ লেখা যায় : $$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

অনুরূপভাবে, $$y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

সমীকরণ (5) কে সরল করে, আমরা পাই :

$$x=\frac{-84+140}{20-6}=4$$

অনুরূপভাবে, $$y=\frac{(-35)(2)-(5)(-28)}{20-6}=\frac{-70+140}{14}=5$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণ যুগলের সমাধান হল $x=4, y=5$ ।

অর্থাৎ, একটি কমলালেবুর দাম 4 টাকা ও একটি আপেলের দাম 5 টাকা।

সত্য প্রতিপাদন : 5 টি কমলালেবুর মূল্য + 3 টি আপেলের মূল্য = 20 টাকা + 15 টাকা = 35 টাকা।

2 টি কমলালেবুর মূল্য + 4 টি আপেলের মূল্য = 8 টাকা + 20 টাকা = 28 টাকা।

চলো এখন দেখি এই পদ্ধতি কীভাবে কোনো দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ যুগল

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \qquad (1)$$

এবং $$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

এ সম্পন্ন করা হয়।

উপরে প্রদর্শিত x ও y এর পাওয়ার অর্জন করার জন্য আমরা নিম্নলিখিত ধাপগুলো অনুসরণ করব :

ধাপ 1 : সমীকরণ (1) কে b_2 দিয়ে ও সমীকরণ (2) কে b_1 দিয়ে গুণ করে, আমরা পাই :

$$b_2a_1x+b_2b_1y+b_2c_1=0 \qquad (3)$$
$$b_1a_2x+b_1b_2y+b_1c_2=0 \qquad (4)$$

ধাপ 2 : সমীকরণ (3) থেকে সমীকরণ (4) বিয়োগ করে, আমরা পাই :

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

অর্থাৎ, $$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

অতএব, $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ এই শর্তে যে } a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \qquad (5)$$

ধাপ 3 : x-এর এই মান (1) অথবা (2)-এ বসিয়ে, আমরা পাই :

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (6)$$

এখন, দুটি ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় :

ক্ষেত্র 1 : যখন $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ হয়। এক্ষেত্রে $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ । তখন রৈখিক সমীকরণযুগলের একটি অনন্য সমাধান থাকে।

ক্ষেত্র 2 : যখন $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ হয়। এইক্ষেত্রে যদি আমরা লিখি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, তবে $a_1 = k\,a_2$, $b_1 = k\,b_2$ হবে।

a_1 ও b_1 এর মানগুলো সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে, আমরা পাই :

$$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0. \qquad (7)$$

এটি লক্ষ করা যায় যে, (7) এবং (2) সমীকরণগুলো উভয়ই সিদ্ধ হবে কেবলমাত্র যদি $c_1 = k\,c_2$, অর্থাৎ, $\frac{c_1}{c_2} = k$ হয়।

যদি $c_1 = k\,c_2$ হয়, তবে সমীকরণ (2)-এর যে-কোনো সমাধান সমীকরণ (1) কে সিদ্ধ করবে এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য। অতএব, যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ হয়, তবে (1) এবং (2) দ্বারা নির্দেশিত রৈখিক সমীকরণযুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে।

যদি $c_1 \neq k\,c_2$ হয়, তবে সমীকরণ (1)-এর যে-কোনো সমাধান সমীকরণ (2) কে সিদ্ধ করবে না এবং বিপরীতক্রমেও এটি সত্য। সুতরাং, এই যুগলের কোনো সমাধান নেই।

(1) এবং (2) দ্বারা নির্দেশিত রৈখিক সমীকরণ যুগল সম্পর্কিত উপরিউক্ত আলোচনাকে আমরা সংক্ষেপে নিম্নরূপে প্রকাশ করতে পারি :

(i) যখন $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তখন আমরা একটি অনন্য সমাধান পাই।

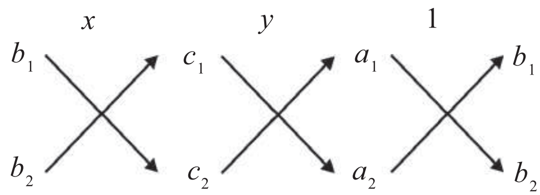
(ii) যখন $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়, তখন আমরা অসীম সংখ্যক সমাধান পাই।

(iii) যখন $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয়, তখন আমরা কোনো সমাধান পাই না।

লক্ষ করো যে, (5) এবং (6) সমীকরণগুলো থেকে প্রাপ্ত সমাধানকে তোমরা নিম্নলিখিত রূপে লিখতে পারো :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

উপরিউক্ত ফলাফলটিকে মনে রাখার জন্য, নীচের চিত্রটি তোমাদের জন্য উপযোগী হতে পারে :



দুটি সংখ্যার মধ্যবর্তী তির চিহ্ন সূচিত করে যে সংখ্যাগুলোকে গুণ করতে হবে ও দ্বিতীয় গুণফলটিকে প্রথম গুণফল থেকে বিয়োগ করতে হবে।

এই পদ্ধতিতে রৈখিক সমীকরণ যুগল সমাধান করার জন্য, আমরা নিম্নলিখিত ধাপগুলো অনুসরণ করব :

ধাপ 1 : প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে (1) এবং (2) এর আকারে লেখো।

ধাপ 2 : উপরিউক্ত চিত্রের সাহায্য নিয়ে, (8)-এ দেওয়া সমীকরণগুলো লেখো।

ধাপ 3 : x ও y নির্ণয় করো, এই শর্তে যে, $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ হয়।

উপরিউক্ত ধাপ 2 তোমাদেরকে ইঙ্গিত করে যে কেন এই পদ্ধতিকে **বজ্রগুণন পদ্ধতি** বলা হয়।

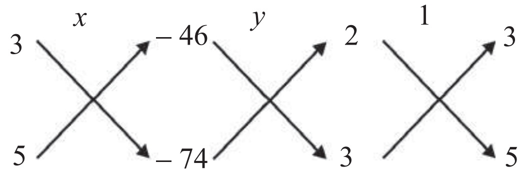
উদাহরণ 14 : ব্যাঙ্গালোর-এর একটি বাস স্ট্যান্ড থেকে যদি আমরা দুটি টিকিট মল্লেশ্বরম ও তিনটি টিকিট যশবন্তপুর-এর জন্য ক্রয় করি, তবে টিকিট বাবদ মোট খরচ হবে 46 টাকা। কিন্তু যদি আমরা তিনটি টিকিট মল্লেশ্বরম ও পাঁচটি টিকিট যশবন্তপুর-এর জন্য ক্রয় করি তবে টিকিট বাবদ মোট খরচ হবে 74 টাকা। বাস স্ট্যান্ড থেকে মল্লেশ্বরম ও বাস স্ট্যান্ড থেকে যশবন্তপুর-এর বাস ভাড়া নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরি, ব্যাঙ্গালোরের বাস স্ট্যান্ড থেকে মল্লেশ্বরম-এর বাস ভাড়া x টাকা ও যশবন্তপুর-এর বাস ভাড়া y টাকা। প্রদত্ত তথ্য থেকে, আমরা জানি :

$$2x + 3y = 46, \text{ অর্থাৎ, } 2x + 3y - 46 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ অর্থাৎ, } 3x + 5y - 74 = 0 \qquad (2)$$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে এই সমীকরণগুলোকে সমাধান করার জন্য, আমরা চিত্র অঙ্কন করি যা নিম্নে দেওয়া হল।



অতএব, $$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

অর্থাৎ, $$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

অর্থাৎ, $$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

অর্থাৎ, $$\frac{x}{8} = \frac{1}{1} \text{ এবং } \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

অর্থাৎ, $$x = 8 \text{ এবং } y = 10$$

সুতরাং, ব্যাঙ্গালোরের বাস স্ট্যান্ড থেকে, মল্লেশ্বরম-এর বাস ভাড়া 8 টাকা ও যশবন্তপুর-এর বাস ভাড়া 10 টাকা।

সত্য প্রতিপাদন : তোমরা সমস্যাটি থেকে পরীক্ষা করতে পারো যে, আমরা যে সমাধান পেয়েছি সেটি সঠিক।

উদাহরণ 15 : p এর কোন্ মানের জন্য নিচের সমীকরণযুগলের অনন্য সমাধান আছে?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

সমাধান : এখানে $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$.

এখন, প্রদত্ত যুগলের অনন্য সমাধানের জন্য, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হবে

অর্থাৎ, $$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

অর্থাৎ, $$p \neq 4$$

সুতরাং, 4 ব্যতীত p এর সকল মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণ যুগলের একটি অনন্য সমাধান আছে।

উদাহরণ 16 : k এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণযুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে?

$$kx + 3y - (k-3) = 0$$
$$12x + ky - k = 0$$

সমাধান : এখানে, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$

রৈখিক সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান এর জন্য : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

সুতরাং, আমরা পাই $$\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$$

অথবা, $$\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$$

যা থেকে পাওয়া যায়, $k^2 = 36$, অর্থাৎ, $k = \pm 6$.

আরো, $$\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$$

এ থেকে পাওয়া যায়, $3k = k^2 - 3k$, অর্থাৎ, $6k = k^2$। যার অর্থ $k = 0$ অথবা $k = 6$।

সুতরাং, k-এর যে মান উভয় শর্তকে সিদ্ধ করে তা হল $k = 6$। এই মানের জন্য, প্রদত্ত রৈখিক সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে।

অনুশীলনী 3.5

1. নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলগুলোর মধ্যে কোনোটির অনন্য সমাধান আছে, কোনোটির কোনো সমাধান নেই অথবা কোনোটির অসীম সংখ্যক সমাধান আছে। অনন্য সমাধানের ক্ষেত্রে, যুগলটিকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো।

(i) $x - 3y - 3 = 0$
$3x - 9y - 2 = 0$

(ii) $2x + y = 5$
$3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$
$6x - 10y = 40$

(iv) $x - 3y - 7 = 0$
$3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) a এবং b এর কোন্ মানগুলোর জন্য, নিচের রৈখিক সমীকরণ যুগলের অসীম সংখ্যক সমাধান আছে?

$2x + 3y = 7$

$(a - b)\,x + (a + b)\,y = 3a + b - 2$

(ii) k-এর কোন্ মানের জন্য নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলের কোনো সমাধান নেই?

$3x + y = 1$

$(2k - 1)\,x + (k - 1)\,y = 2k + 1$

3. নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলকে পরিবর্ত ও বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করো :

$8x + 5y = 9$

$3x + 2y = 4$

4. নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোর জন্য রৈখিক সমীকরণ যুগল গঠন করো ও তাদের সমাধান (যদি অস্তিত্ব থাকে) যে-কোনো বীজগাণিতিক পদ্ধতি প্রয়োগে নির্ণয় করো :

(i) একটি ছাত্রাবাসের মাসিক খরচের একটি অংশ নির্দিষ্ট আছে এবং অবশিষ্ট অংশ একজন শিক্ষার্থী কতদিনের খাবার খেয়েছে তার উপর নির্ভর করে। একজন শিক্ষার্থী A-কে, 20 দিন খাওয়ার জন্য 1000 টাকা ছাত্রাবাসের খরচ হিসেবে দিতে হবে, পক্ষান্তরে আরেকজন শিক্ষার্থী B-কে, 26 দিন খাওয়ার জন্য 1180 টাকা ছাত্রাবাসের খরচ হিসেবে দিতে হবে। নির্দিষ্ট খরচ ও প্রতিদিনের খাবার খরচ নির্ণয় করো।

(ii) একটি ভগ্নাংশ $\frac{1}{3}$ হবে যখন এর লব থেকে 1 বিয়োগ করা হয় এবং এটি $\frac{1}{4}$ হবে যখন এর হরের সাথে 8 যোগ করা হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করো।

(iii) যশ একটি পরীক্ষায় 40 নম্বর পেল, যেখানে সে প্রতিটি সঠিক উত্তরের জন্য 3 নম্বর পায় ও প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 1 নম্বর হারায়। যদি তাকে প্রতিটি সঠিক উত্তরের জন্য 4 নম্বর দেওয়া হত ও প্রতিটি ভুল উত্তরের জন্য 2 নম্বর কাটা হত, তবে যশ পরীক্ষায় 50 নম্বর অর্জন করত। পরীক্ষায় কয়টি প্রশ্ন ছিল?

(iv) একটি সড়কপথের উপর দুটি স্থান A এবং B 100 কিমি দূরে অবস্থিত। একটি গাড়ি A থেকে এবং আরেকটি গাড়ি B থেকে একই সময়ে চলতে শুরু করল। যদি গাড়ি দুটি ভিন্নতর গতিবেগে একই দিকে গমন করে তবে তারা 5 ঘণ্টা পরে মিলিত হয়। যদি গাড়ি দুটি একে অপরের অভিমুখে গমন করে তবে তারা 1 ঘণ্টা পরে মিলিত হয়। গাড়ি দুটির গতিবেগ কত?

(v) যদি একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 একক কমানো হয় এবং প্রস্থ 3 একক বাড়ানো হয়, তবে এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গএকক কমে যায়। যদি আমরা এর দৈর্ঘ্য 3 একক এবং প্রস্থ 2 একক বর্ধিত করি, তবে ক্ষেত্রফল 67 বর্গএকক বেড়ে যায়। আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

3.5 দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ যুগলে পরিবর্তনযোগ্য সমীকরণসমূহ (Equations Reducible to a Pair of Linear Equations in Two Variables)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা এমন সমীকরণযুগলসমূহ সম্পর্কে আলোচনা করব যেগুলো রৈখিক নয় কিন্তু কিছু উপযুক্ত প্রতিস্থাপন দ্বারা তাদেরকে রৈখিক আকারে পরিবর্তিত করা যায়। আমরা এখন কিছু উদাহরণের মাধ্যমে এই পদ্ধতিটি বর্ণনা করব।

উদাহরণ 17 : নিম্নের সমীকরণ যুগলটি সমাধান করো : $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

সমাধান : চলো আমরা প্রদত্ত সমীকরণ যুগলটি নিম্নের আকারে লিখি :

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

এই সমীকরণগুলো $ax + by + c = 0$ আকারে নেই। কিন্তু, যদি আমরা সমীকরণ (1) এবং (2)-এ, $\frac{1}{x} = p$ ও $\frac{1}{y} = q$ প্রতিস্থাপন করি, তবে আমরা পাই :

$$2p + 3q = 13 \tag{3}$$
$$5p - 4q = -2 \tag{4}$$

এইভাবে, আমরা প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে রৈখিক সমীকরণযুগলে প্রকাশ করেছি। এখন, তোমরা এই সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য যে-কোনো পদ্ধতি ব্যবহার করতে পারো। তারপর এদের সমাধান করে আমরা পাই, $p = 2, q = 3$ ।

তোমরা জান যে, $p = \frac{1}{x}$ এবং $q = \frac{1}{y}$ ।

p ও q এর মানগুলো প্রতিস্থাপন করে, আমরা পাই :

$$\frac{1}{x} = 2\text{, অর্থাৎ, } x = \frac{1}{2} \text{ এবং } \frac{1}{y} = 3 \text{ অর্থাৎ, } y = \frac{1}{3}.$$

সত্য প্রতিপাদন : প্রদত্ত সমীকরণগুলোতে $x = \frac{1}{2}$ এবং $y = \frac{1}{3}$ প্রতিস্থাপন করে, আমরা দেখি যে, উভয় সমীকরণ-ই সিদ্ধ হয়।

উদাহরণ 18 : নিম্নলিখিত সমীকরণ যুগলকে রৈখিক সমীকরণ যুগলে পরিবর্তিত করে সমাধান করো :

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$
$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

সমাধান : চলো আমরা প্রদত্ত সমীকরণ যুগলে $\frac{1}{x-1} = p$ এবং $\frac{1}{y-2} = q$ বসাই। তখন, প্রদত্ত সমীকরণ যুগল

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \tag{1}$$

এবং

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \tag{2}$$

কে

$$5p + q = 2 \tag{3}$$

ও

$$6p - 3q = 1 \tag{4}$$

আকারে লেখা যায়।

সমীকরণ (3) ও (4) , সাধারণরূপে একটি রৈখিক সমীকরণ যুগল গঠন করে। এখন, তোমরা এই সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য যে-কোনো বীজগাণিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করতে পার। এদের সমাধান করে আমরা পাই $p = \frac{1}{3}$ এবং $q = \frac{1}{3}$।

এখন p-এর জন্য $\frac{1}{x-1}$ প্রতিস্থাপন করে, আমরা পাই :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3},$$

অর্থাৎ, $x - 1 = 3$, অর্থাৎ, $x = 4$.

অনুরূপভাবে, q-এর জন্য $\frac{1}{y-2}$ প্রতিস্থাপন করে, আমরা পাই :

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

অর্থাৎ, $3 = y - 2$, অর্থাৎ, $y = 5$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণ যুগলের নির্ণেয় সমাধান হল $x = 4, y = 5$।

সত্য প্রতিপাদন : (1) এবং (2) -এ $x = 4$ এবং $y = 5$ বসিয়ে যাচাই করে দেখ, যে এরা সিদ্ধ হয় কিনা।

উদাহরণ 19 : একটি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 কিমি ও স্রোতের অনুকূলে 44 কিমি যায়। 13 ঘণ্টায়, নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে 40 কিমি ও স্রোতের অনুকূলে 55 কিমি যেতে পারে। স্রোতের গতি ও স্থির জলে নৌকার গতি নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরি, স্থির জলে নৌকার গতি হল x কিমি/ঘণ্টা ও স্রোতের গতি হল y কিমি/ঘণ্টা। তখন, স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতি $(x + y)$ কিমি/ঘণ্টা ও স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার গতি $(x - y)$ কিমি/ঘণ্টা হবে।

আবার, $$\text{সময়} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{গতি}}$$

প্রথমক্ষেত্রে, যখন নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে 30 কিমি যায়, তখন প্রয়োজনীয় সময়কে t_1 ঘণ্টা ধরি। তাহলে

$$t_1 = \frac{30}{x-y}$$

ধরি, নৌকাটি t_2 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 44 কিমি যায়। তখন, $t_2 = \frac{44}{x+y}\cdot$ মোট সময়, $t_1 + t_2$ হল 10 ঘন্টা।

সুতরাং, আমরা সমীকরণটি পাই :

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \qquad (1)$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে 40 কিমি ও স্রোতের অনুকূলে 55 কিমি যেতে পারে। এক্ষেত্রে আমরা সমীকরণটি পাই :

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \qquad (2)$$

ধরি, $$\frac{1}{x-y} = u \text{ এবং } \frac{1}{x+y} = v \qquad (3)$$

সমীকরণ (1) এবং (2)-এ এই মানগুলো প্রতিস্থাপন করে, আমরা রৈখিক সমীকরণ যুগল পাই:

$$30u + 44v = 10 \quad \text{অথবা} \quad 30u + 44v - 10 = 0 \qquad (4)$$

$$40u + 55v = 13 \quad \text{অথবা} \quad 40u + 55v - 13 = 0 \qquad (5)$$

বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

অর্থাৎ, $$\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

অর্থাৎ, $$u = \frac{1}{5}, \quad v = \frac{1}{11}$$

এখন, u ও v এর এই মানগুলো সমীকরণ (3)-এ বসিয়ে, আমরা পাই

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{5} \text{ এবং } \frac{1}{x+y} = \frac{1}{11}$$

অর্থাৎ, $$x - y = 5 \text{ এবং } x + y = 11 \qquad (6)$$

এই সমীকরণগুলোকে যোগ করে, আমরা পাই

$$2x = 16$$

অর্থাৎ, $$x = 8$$

(6)-এর সমীকরণগুলো বিয়োগ করে, আমরা পাই

$$2y = 6$$

অর্থাৎ, $$y = 3$$

সুতরাং, স্থির জলে নৌকার গতি হল 8 কিমি/ঘণ্টা ও স্রোতের গতি হল 3 কিমি/ঘণ্টা।

সত্য প্রতিপাদন : যাচাই করে দেখ যে সমাধানটি সমস্যার শর্তগুলোকে সিদ্ধ করে।

অনুশীলনী 3.6

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ যুগলগুলোকে রৈখিক সমীকরণ যুগলে পরিবর্তিত করে সমাধান করো :

(i) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 2$

$\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = \dfrac{13}{6}$

(ii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$

$\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

(iii) $\dfrac{4}{x} + 3y = 14$

$\dfrac{3}{x} - 4y = 23$

(iv) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$

$\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

(v) $\dfrac{7x-2y}{xy} = 5$

$\dfrac{8x+7y}{xy} = 15$

(vi) $6x + 3y = 6xy$

$2x + 4y = 5xy$

(vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$

$\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$

(viii) $\dfrac{1}{3x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = \dfrac{-1}{8}$

2. নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোকে সমীকরণ যুগলের আকারে যথাযথভাবে প্রকাশ করো এবং অতঃপর তাদের সমাধান নির্ণয় করো :

(i) রিতু স্রোতের অনুকূলে 2 ঘণ্টায় 20 কিমি নৌকা চালাতে পারে ও স্রোতের প্রতিকূলে 2 ঘণ্টায় 4 কিমি নৌকা চালাতে পারে। স্থির জলে নৌকার গতি ও স্রোতের গতি নির্ণয় করো।

(ii) 2 জন মহিলা ও 5 জন পুরুষ একসঙ্গো একটি সেলাইয়ের কাজ 4 দিনে শেষ করতে পারে। আবার 3 জন মহিলা ও 6 জন পুরুষ এটিকে 3 দিনে শেষ করতে পারে। এই কাজটিকে 1 জন মহিলার একা শেষ করতে কতদিন সময় লাগবে এবং এটিকে 1 জন পুরুষের একা শেষ করতে কত দিন সময় লাগবে নির্ণয় করো।

(iii) রুহি 300 কিমি দূরে অবস্থিত তার ঘরে পৌঁছানোর জন্য কিছু অংশ ট্রেনে ও কিছু অংশ বাসে গমন করে। যদি সে 60 কিমি ট্রেনে ও অবশিষ্ট দূরত্ব বাসে গমন করে তবে তাঁর সময় লাগে 4 ঘণ্টা। আবার, যদি সে 100 কিমি ট্রেনে ও অবশিষ্ট দূরত্ব বাসে গমন করে তবে তাঁর 10 মিনিট বেশি সময় লাগে। ট্রেনের গতি ও বাসের গতি আলাদাভাবে নির্ণয় করো।

অনুশীলনী 3.7 (ঐচ্ছিক)*

1. দুই বন্ধু অনি ও বিজু-এর বয়সের পার্থক্য হল 3 বছর। অনির বাবা ধরমের বয়স অনির বয়সের দ্বিগুণ আবার বিজুর বয়স তার বোন কেথির বয়সের দ্বিগুণ। কেথি ও ধরমের বয়সের পার্থক্য হল 30 বছর। অনি ও বিজু-এর বয়স নির্ণয় করো।

2. একজন বলল, “বন্ধু, আমাকে একশো টাকা দাও ! আমি তাহলে তোমার চেয়ে দ্বিগুণ ধনবান হব।” অন্য একজন উত্তর দিল, “যদি তুমি আমাকে দশ টাকা দাও, তবে আমি তোমার চেয়ে ছয়গুণ ধনবান হব”। আমাকে বল তাদের নিজ নিজ মূলধনের পরিমাণ কত ? (ভাস্কর II বীজগণিত থেকে গৃহীত) [**ইঙ্গিত :** $x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$].

3. একটি ট্রেন কোনো এক নির্দিষ্ট দূরত্ব সমান গতিতে অতিক্রম করে। যদি ট্রেনটি 10 কিমি/ঘণ্টা দ্রুত চলে তবে এর পূর্ব নির্ধারিত সময়ের তুলনায় 2 ঘণ্টা সময় কম লাগে। আবার, যদি ট্রেনটি 10 কিমি/ঘণ্টা ধীরে চলে তবে এর পূর্ব নির্ধারিত সময়ের তুলনায় 3 ঘণ্টা সময় বেশি লাগে। ট্রেনটি যে দূরত্ব অতিক্রম করেছিল তা নির্ণয় করো।

4. কোনো এক শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সারিবদ্ধভাবে দাঁড় করানো হল। যদি একটি সারিতে 3 জন করে শিক্ষার্থী বেশি হয় তবে সারির সংখ্যা 1 কমে যায়। আবার, যদি একটি সারিতে 3 জন শিক্ষার্থী কম হয় তবে সারির সংখ্যা 2 বেশি হয়। শ্রেণিতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা নির্ণয় করো।

5. কোনো একটি ΔABC-তে, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ হলে, ত্রিভুজটির তিনটি কোণ নির্ণয় করো।

6. $5x - y = 5$ এবং $3x - y = 3$ সমীকরণগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন করো। এই রেখাগুলো ও y-অক্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

7. নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণ যুগলগুলোর সমাধান করো :

   (i) $px + qy = p - q$
   $qx - py = p + q$

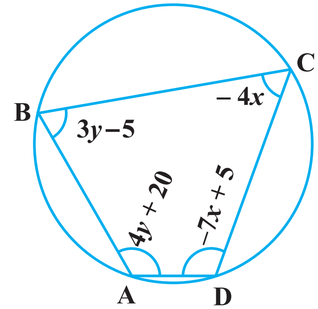
   (ii) $ax + by = c$
   $bx + ay = 1 + c$

   (iii) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$
   $ax + by = a^2 + b^2$.

   (iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
   $(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

   (v) $152x - 378y = -74$
   $-378x + 152y = -604$

8. ABCD হল একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (চিত্র 3.7 দেখো)। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলো নির্ণয় করো।



চিত্র 3.7

* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয় বর্হিভূত।

3.6 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিতগুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একই রকম দুটি চল যুক্ত রৈখিক সমীকরণ জোড়াকে দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ যুগল বলা হয়। রৈখিক সমীকরণ যুগলের সাধারণ রূপ হল :

   $$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
   $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

   যেখানে $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ হল বাস্তব সংখ্যা এবং $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0.$

2. দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ যুগলকে নিম্নে উল্লেখিত পদ্ধতিতে উপস্থাপন ও সমাধান করা যায়:
   (i) লৈখিক পদ্ধতি
   (ii) বীজগাণিতিক পদ্ধতি

3. লৈখিক পদ্ধতি

   দ্বি-চল বিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণ যুগলের লেখচিত্র দুটি রেখা দ্বারা উপস্থাপন করা হয়।
   (i) যদি রেখা দুটি পরস্পরকে একটি ব্দিুতে ছেদ করে, তবে ওই বিন্দুটি সমীকরণ দুটির একটি অনন্য সমাধান হবে। এই ক্ষেত্রে, সমীকরণ যুগল হবে **সংগত**।
   (ii) যদি রেখাগুলো পরস্পর সমাপতিত হয়, তবে তাদের অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে অর্থাৎ, রেখার উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুই হবে তাদের একটি সমাধান। এইক্ষেত্রে, সমীকরণ জোড়া পরস্পর **নির্ভরশীল (সংগত)** হবে।
   (iii) যদি রেখাগুলো পরস্পর সমান্তরাল হয়, তবে তাদের কোনো সমাধান থাকবে না। এইক্ষেত্রে, সমীকরণ জোড়া **অসংগত** হবে।

4. বীজগাণিতিক পদ্ধতিসমূহ : রৈখিক সমীকরণ যুগলের সমাধান নির্ণয়ের জন্য আমরা নিম্নলখিত পদ্ধতিগুলো আলোচনা করেছিলাম :
   (i) পরিবর্ত পদ্ধতি
   (ii) অপনয়ন পদ্ধতি
   (iii) বজ্রগুণন পদ্ধতি

5. যদি একটি রৈখিক সমীকরণ যুগলকে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়, তবে নিম্নলিখিত পরিস্থিতিগুলোর উদ্ভব হতে পারে :

   (i) $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_1}$: এক্ষেত্রে, রৈখিক সমীকরণ যুগল সংগত হবে।
   (ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$: এক্ষেত্রে, রৈখিক সমীকরণ যুগল অসংগত হবে।
   (iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$: এক্ষেত্রে, রৈখিক সমীকরণ যুগল পরস্পর নির্ভরশীল ও সংগত হবে।

6. এরকম কিছু পরিস্থিতি আছে যাদেরকে প্রথমে আমরা গাণিতিকরূপে রৈখিক হিসেবে প্রকাশ করতে পারি না। কিন্তু পরবর্তীতে আমরা এদেরকে এরূপে পরিবর্তন করি যাতে এগুলো রৈখিক সমীকরণযুগলে রূপান্তরিত করা যায়।

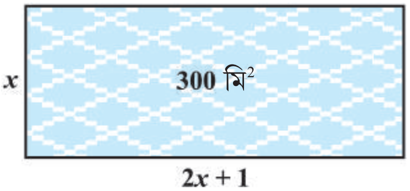
দ্বিঘাত সমীকরণ

(QUADRATIC EQUATIONS)

4

4.1 ভূমিকা

অধ্যায় 2-এ, তোমরা বিভিন্ন ধরনের বহুপদ রাশিমালা নিয়ে অধ্যয়ন করেছ। এদের একটি প্রকার ছিল দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা যার আকার $ax^2 + bx + c, a \neq 0$। যখন এই বহুপদ রাশিমালাকে আমরা শূন্য-এর সাথে সমান করি, তখন আমরা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাই। বিভিন্ন বাস্তব সমস্যা সমাধানে আমরা দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ করে থাকি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, ধরো একটি ধর্মীয় ট্রাস্ট 300 বর্গমিটার মেঝের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি প্রার্থনাগৃহ নির্মাণে মনস্থ করেছে যার দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে এক মিটার বেশি হবে। ওই প্রার্থনা গৃহের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত হওয়া উচিত? ধরে নেওয়া যাক গৃহের প্রস্থ x মিটার। তাহলে দৈর্ঘ্য $(2x + 1)$ মিটার হওয়া উচিত।



চিত্র 4.1

আমরা এই তথ্যটির চিত্রাকার রূপদান চিত্র 4.1 অনুযায়ী করতে পারি।

এখন, প্রার্থনা গৃহের ক্ষেত্রফল = $(2x + 1).\, x$ মি^{2} = $(2x^2 + x)$ মি^{2}

সুতরাং, $2x^2 + x = 300$ (প্রদত্ত)

অতএব, $2x^2 + x - 300 = 0$

সুতরাং, প্রার্থনা গৃহের প্রস্থ $2x^2 + x - 300 = 0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে যা হল একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

অনেকেই বিশ্বাস করেন যে, ব্যাবিলনীয়রা সর্বপ্রথম দ্বিঘাত সমীরণসমূহের সমাধান জানতেন। দৃষ্টান্তস্বরূপ, দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার যোগফল এবং গুণফল দেওয়া থাকলে তা থেকে কিভাবে ওই সংখ্যা দুটি নির্ণয় করা যায় এটি তাঁরা জানতেন এবং এটাই হল $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণের সমাধানের সমতুল্য সমস্যা। গ্রিক গণিতজ্ঞ ইউক্লিড দৈর্ঘ্যসমূহ নির্ণয়ে জ্যামিতিক ধারণার অবতারণা করেন যা দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানে বর্তমান যুগের পরিভাষা হিসেবে বিবেচিত। দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপের সমাধানের কৃতিত্ব অনেকটাই প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞদের দেওয়া হয়। প্রকৃতপক্ষে, ব্রহ্মগুপ্ত (598–665 খৃঃ) $ax^2 + bx = c$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণের

সমাধানে স্পষ্ট সূত্র প্রদান করেন। পরবর্তীকালে, শ্রীধর আচার্য (1025 খ্রিঃ) একটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করেন, যা বর্তমানে দ্বিঘাত সূত্র (ভাস্কর II-এর দেওয়া নামানুসারে) হিসেবে পরিচিত, যেটি দিয়ে পূর্ণবর্গ গঠনের মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করা হয়। একজন আরব গণিতজ্ঞ আল-খোয়ার্জমি (প্রায় 800 খ্রিঃ), তিনিও দ্বিঘাত সমীকরণের বিভিন্ন ধরন নিয়ে অধ্যয়ন করেছেন। আব্রাহাম বার হিইয়া হা-নেসি তাঁর রচিত 'লিবার অ্যাম্বাডোরাম' পুস্তকে বিভিন্ন ধরনের দ্বিঘাত সমীকরণের পূর্ণ সমাধান 1145 খৃষ্টাব্দে ইউরোপে প্রকাশ করেছিলেন।

এ অধ্যায়ে তোমরা দ্বিঘাত সমীকরণসমূহ এবং এদের বীজগুলো নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি শিখবে। তোমরা বাস্তব জীবন পরিস্থিতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ দেখতে পাবে।

4.2 দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations)

x চলরাশি যুক্ত একটি দ্বিঘাত সমীকরণের আকার হল $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা, $a \neq 0$। উদাহরণস্বরূপ, $2x^2 + x - 300 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। অনুরূপে, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ এবং $1 - x^2 + 300 = 0$ এগুলোর প্রতিটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

প্রকৃতপক্ষে, $p(x) = 0$ আকারের কোনো সমীকরণ হল দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে $p(x)$ হল 2-ঘাত বিশিষ্ট একটি বহুপদ রাশিমালা। কিন্তু যখন আমরা $p(x)$-কে ঘাতের অধঃক্রমে লিখি, তবে সমীকরণটির আদর্শ আকার পাই। অর্থাৎ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ কে বলা হয় **দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার**।

এই দুনিয়ায় আমাদের চারপাশে এবং গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণের প্রয়োগ হয়। চলো কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে বিবেচনা করা যাক।

উদাহরণ 1 : নীচের পরিস্থিতিগুলোকে গাণিতিকরূপে উপস্থাপন করো :

(i) জন এবং জীবন্তীর কাছে মোট 45টি মার্বেল আছে। তাদের উভয়েই 5টি করে মার্বেল হারিয়ে ফেলল এবং এখন তাদের হাতে থাকা মার্বেলগুলোর গুণফল 124। শুরুতে তাদের কাছে কতগুলো মার্বেল ছিল তা আমরা নির্ণয় করতে চাই।

(ii) একটি কুটির শিল্পে প্রতিদিন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক খেলনা তৈরি হয়। প্রতিটি খেলনার উৎপাদন খরচ (টাকায়) দেখা গেল 55 থেকে দৈনিক তৈরি খেলনার সংখ্যার বিয়োগফল। কোনো একটি দিনে খেলনার মোট উৎপাদন খরচ 750 টাকা। আমরা ওই দিনটিতে খেলনা তৈরির সংখ্যা নির্ণয় করতে চাই।

সমাধান :

(i) ধরা যাক, জনের মার্বেল সংখ্যা হল x

তাহলে জীবন্তীর মার্বেল সংখ্যা $= 45 - x$ (কেন?)

5 টি মার্বেল হারিয়ে যাওয়ার পর জনের বাকি মার্বেল সংখ্যা $= x - 5$

5 টি মার্বেল হারানোর পর জীবন্তীর বাকি মার্বেল সংখ্যা $= 45 - x - 5$

$= 40 - x$

অতএব, এগুলোর গুণফল $=(x-5)(40-x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

সুতরাং, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (প্রদত্ত গুণফল $= 124$)

অর্থাৎ, $-x^2 + 45x - 324 = 0$

অর্থাৎ, $x^2 - 45x + 324 = 0$

অতএব, $x^2 - 45x + 324 = 0$ সমীকরণটি জনের কাছে থাকা মার্বেল সংখ্যা দিয়ে সিদ্ধ হয়; এটিই হল সমস্যাটির গাণিতিকরূপে নির্ণেয় উপস্থাপন।

(ii) মনে করি ওই দিনে খেলনা তৈরির সংখ্যা হল x ।

অতএব, প্রতিটি খেলনার উৎপাদন খরচ (টাকায়) $= 55 - x$

সুতরাং, ওই দিনে মোট উৎপাদন খরচ (টাকায়) $= x(55 - x)$

অতএব, $x(55 - x) = 750$

অর্থাৎ, $55x - x^2 = 750$

অর্থাৎ, $-x^2 + 55x - 750 = 0$

অর্থাৎ, $x^2 - 55x + 750 = 0$

সুতরাং, প্রতিদিনে উৎপাদিত খেলনার সংখ্যা

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যা হল সমস্যাটির গাণিতিকরূপে নির্ণেয় উপস্থাপন।

উদাহরণ 2 : নিম্নলিখিতগুলো দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা যাচাই করো।

(i) $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x+1) + 8 = (x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3) = x^2 + 1$ (iv) $(x+2)^3 = x^3 - 4$

সমাধান :

(i) বামপক্ষ $= (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

অতএব, $(x-2)^2 + 1 = 2x - 3$ -কে আবার লেখা যায়

$$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$$

অর্থাৎ, $x^2 - 6x + 8 = 0$

এটি $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের হল।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ii) যেহেতু $x(x+1)+8=x^2+x+8$ এবং $(x+2)(x-2)=x^2-4$

অতএব, $x^2+x+8 = x^2-4$

অর্থাৎ, $x+12 = 0$

এটি $ax^2+bx+c=0$ আকারের নয়।

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

(iii) এখানে, বামপক্ষ $= x(2x+3) = 2x^2+3x$

সুতরাং, $x(2x+3) = x^2+1$ -কে লেখা যায়

$2x^2+3x = x^2+1$

অতএব, আমরা পাই $x^2+3x-1 = 0$

এটি $ax^2+bx+c=0$ আকারের হয়।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

(iv) এখানে, বামপক্ষ $= (x+2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

অতএব, $(x+2)^3 = x^3-4$ -কে লেখা যায়,

$x^3+6x^2+12x+8 = x^3-4$

অর্থাৎ, $6x^2+12x+12 = 0$ or, $x^2+2x+2=0$

এটি $ax^2+bx+c=0$ আকারের হয়।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

মন্তব্য : সতর্ক থাকবে! উপরে প্রদত্ত (ii) নং সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণের মতো মনে হলেও কিন্তু এটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

উপরোক্ত (iv) সমীকরণটি ত্রিঘাত সমীকরণের (3-ঘাত যুক্ত সমীকরণ) মতো মনে হয় এবং দ্বিঘাত সমীকরণ মনে হয় না। কিন্তু এটিকে দ্বিঘাত সমীকরণে রূপান্তর করা সম্ভব। তোমরা দেখেছ যে প্রদত্ত সমীকরণটি দ্বিঘাত কিনা এটি স্থির করার আগে এর সরলীকরণ করা প্রয়োজন।

অনুশীলনী 4.1

1. নিম্নলিখিতগুলো দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা যাচাই করো :

(i) $(x+1)^2=2(x-3)$ (ii) $x^2-2x=(-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1)=(x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1)=x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3)=(x+5)(x-1)$ (vi) $x^2+3x+1=(x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$ (viii) $x^3-4x^2-x+1=(x-2)^3$

2. নিম্নলিখিত পরিস্থিতিগুলোকে দ্বিঘাত সমীকরণে উপস্থাপন করো :

(i) একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 528 মি^{2}। জমিটির দৈর্ঘ্য (মিটারে) প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে এক বেশি। আমরা জমিটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করতে চাই।

(ii) পরপর দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গুণফল হল 306। আমরা অখণ্ড সংখ্যাগুলো নির্ণয় করতে চাই।

(iii) রোহণের মা তার চেয়ে 26 বছর বড়ো। তিন বছর পর তাদের বয়সের (বছরে) গুণফল হবে 360। আমরা রোহণের বর্তমান বয়স নির্ণয় করতে চাই।

(iv) একটি ট্রেন সমগতিতে 480 কিমি দূরত্ব অতিক্রম করে। যদি ট্রেনের গতি 8 কিমি/ঘণ্টা কম হত তবে একই দূরত্ব অতিক্রমে এর 3 ঘণ্টা সময় বেশি লাগত। আমরা ট্রেনটির গতি নির্ণয় করতে চাই।

4.3 উৎপাদকীকরণের মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution of a Quadratic Equation by Factorisation)

ধরো দ্বিঘাত সমীকরণটি হল $2x^2 - 3x + 1 = 0$। সমীকরণের বামপক্ষে x এর পরিবর্তে 1 বসিয়ে আমরা পাই, $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = সমীকরণের ডানপক্ষ। আমরা বলতে পারি যে, 1 দ্বিঘাত সমীকরণটির একটি বীজ। এই বিষয়টি এটিও বোঝায় যে, $2x^2 - 3x + 1 = 0$ বহুপদ রাশিমালার একটি শূন্য হল 1।

সাধারণভাবে, একটি বাস্তব সংখ্যা α-কে $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ দ্বিঘাত সমীব্করণের একটি বীজ বলা হবে যদি $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ হয়। আমরা এছাড়াও বলতে পারি যে, **$x = \alpha$ দ্বিঘাত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।** লক্ষ করো যে, **$ax^2 + bx + c$ দ্বিঘাত রাশিমালার শূন্যদ্বয় হল, $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়।**

অধ্যায় 2-এ তোমরা লক্ষ করেছ যে, একটি দ্বিঘাত রাশিমালার সর্বাধিক দুটি শূন্য থাকে। সুতরাং যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বাধিক দুটি বীজ থাকতে পারে।

তোমরা নবম শ্রেণিতে শিখেছ, কীভাবে একটি দ্বিঘাত রাশিমালার মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে উৎপাদকীকরণ হয়। আমরা এই জ্ঞান কাজে লাগিয়ে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করব। চলো দেখা যাক, কীভাবে হয়।

উদাহরণ 3 : উৎপাদকীকরণের মাধ্যমে $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় করো।

সমাধান : চলো প্রথমে আমরা মধ্যপদ $-5x$ -কে $-2x - 3x$ এরূপে বিশ্লেষণ করি [কারণ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

সুতারাং, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

এখন, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ -কে আবার লেখা যায় $(2x - 3)(x - 1) = 0$.

সুতরাং, x-এর যে মানের জন্য $2x^2 - 5x + 3 = 0$ হয়, একই মানে $(2x - 3)(x - 1) = 0$, অর্থাৎ, হয় $2x - 3 = 0$ বা, $x - 1 = 0$.

এখন $2x - 3 = 0$ থেকে $x = \frac{3}{2}$ এবং $x - 1 = 0$ থেকে $x = 1$ পাই,

সুতরাং, $x = \frac{3}{2}$ এবং $x = 1$ হল সমীকরণটির বীজ।

অন্যভাবে, 1 এবং $\frac{3}{2}$ হল $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণটির বীজ।

যাচাই করে দেখো যে এগুলো হল প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

লক্ষ করো যে, $2x^2-5x+3$-কে দুটি রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণে এবং প্রতিটি উৎপাদককে শূন্যের সাথে সমানের মাধ্যমে আমরা $2x^2-5x+3=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় নির্ণয় করেছি।

উদাহরণ 4 : দ্বিঘাত সমীকরণ $6x^2-x-2=0$ -এর বীজদ্বয় নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা পাই

$$\begin{aligned}6x^2-x-2 &= 6x^2+3x-4x-2\\ &= 3x(2x+1)-2(2x+1)\\ &= (3x-2)(2x+1)\end{aligned}$$

$6x^2-x-2=0$-এর বীজগুলো হল x-এর যে মানের জন্য $(3x-2)(2x+1)=0$ হয়।

অতএব, $3x-2=0$ বা $2x+1=0$ ।

অর্থাৎ, $x=\frac{2}{3}$ বা $x=-\frac{1}{2}$

অতএব, $6x^2-x-2=0$ -এর বীজগুলো হল $\frac{2}{3}$ এবং $-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$ এবং $-\frac{1}{2}$ সমীকরণ $6x^2-x-2=0$ কে সিদ্ধ করে কিনা তা পরীক্ষার মাধ্যমে আমরা যাচাই করতে পারি।

উদাহরণ 5 : $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান :

$$\begin{aligned}3x^2-2\sqrt{6}x+2 &= 3x^2-\sqrt{6}x-\sqrt{6}x+2\\ &= \sqrt{3}\,x\left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)\\ &= \left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

সুতরাং, সমীকরণটির বীজগুলো হল x-এর যে মানের জন্য

$$\left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\,x-\sqrt{2}\right)=0$$

এখন, $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$ হয় $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ এর জন্য।

সুতরাং, $\sqrt{3}x-\sqrt{2}$ উৎপাদকটি দুইবার থাকার জন্য, বীজগুলোর দুইবার পুনরাবৃত্তি ঘটেছে।

অতএব, $3x^2-2\sqrt{6}x+2=0$ সমীকরণের বীজগুলো হল $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

উদাহরণ 6 : 4.1 নং অনুচ্ছেদে আলোচিত প্রার্থনাগৃহের মাত্রাগুলো (dimensions) নির্ণয় করো।

সমাধান : 4.1 নং অনুচ্ছেদে আমরা দেখেছি যদি প্রার্থনা গৃহের প্রস্থ x মি, তাহলে $2x^2 + x - 300 = 0$ সমীকরণটি x দিয়ে সিদ্ধ হয়। উৎপাদকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগে, আমরা লিখতে পারি

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$
$$2x(x-12) + 25(x-12) = 0$$

অর্থাৎ,
$$(x-12)(2x+25) = 0$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলো হল $x = 12$ অথবা $x = -12.5$। যেহেতু x হল প্রার্থনাগৃহের প্রস্থ, এটি ঋণাত্মক হতে পারে না।

অতএব, প্রার্থনাগৃহের প্রস্থ 12 মি.। এটির দৈর্ঘ্য $= 2x + 1 = 25$ মি.।

অনুশীলনী 4.2

1. উৎপাদকীকরণের মাধ্যমে নিম্নোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর বীজদ্বয় নির্ণয় করো :
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$
   (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
   (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. উদাহরণ 1-এ প্রদত্ত সমস্যার সমাধান করো।
3. দুটি সংখ্যা নির্ণয় করো যাদের যোগফল 27 এবং গুণফল হল 182।
4. পরপর দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নির্ণয় করো, যাদের বর্গের সমষ্টি হল 365 ।
5. একটি সমকোণী ত্রিভুজের উচ্চতা ভূমির চেয়ে 7 সেমি কম। যদি অতিভূজ 13 সেমি হয়, তবে অপর দুটি বাহু নির্ণয় করো।
6. একটি কুটির শিল্প এক দিনে মাটির কিছু জিনিসপত্র তৈরি করে। লক্ষ্য করে দেখা গেছে যে, প্রতিটি জিনিসের উৎপাদন মূল্য (টাকায়) ওই দিনে উৎপাদিত জিনিসের সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 বেশি। যদি ওই দিনে মোট উৎপাদন খরচ 90 টাকা হয়, তবে ওই দিনে উৎপাদিত জিনিসের সংখ্যা এবং প্রতিটি জিনিসের উৎপাদন মূল্য নির্ণয় করো।

4.4 বর্গগঠনের মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান (Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square)

পূর্বের অনুচ্ছেদে, তোমরা দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি সম্পর্কে শিখেছ। এই অনুচ্ছেদে, আমরা অপর একটি পদ্ধতি নিয়ে অধ্যয়ন করব।

নিম্নের পরিস্থিতি সম্পর্কে ভেবে দেখো :

দুইবছর আগে সুনীতার বয়স (বছরে) এবং 4 বছর পর সুনীতার বয়সের গুণফল, তার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণের চেয়ে 1 বেশি হলে, তার বর্তমান বয়স কত ?

এটির উত্তরের জন্য, ধরা যাক তার বর্তমান বয়স x বছর। তাহলে দুই বছর আগে এংব চার বছর পরে তার বয়সের গুণফল হবে $(x-2)(x+4)$।

অতএব, $(x-2)(x+4) = 2x+1$

অর্থাৎ, $x^2+2x-8 = 2x+1$

অর্থাৎ, $x^2-9 = 0$

সুতরাং, সুনীতার বর্তমান বয়স $x^2-9=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

আমরা এটিকে $x^2=9$ আকারে লিখতে পারি। বর্গমূল করে পাই, $x=3$ বা $x=-3$। যেহেতু বয়স একটি ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তাই $x=3$।

সুতরাং, সুনীতার বর্তমান বয়স হল 3 বছর।

এখন ধরা যাক দ্বিঘাত সমীকরণটি হল $(x+2)^2-9=0$। এটির সমাধানে, আমরা লিখতে পারি, $(x+2)^2=9$। বর্গমূল করে পাই, $x+2=3$ বা $x+2=-3$।

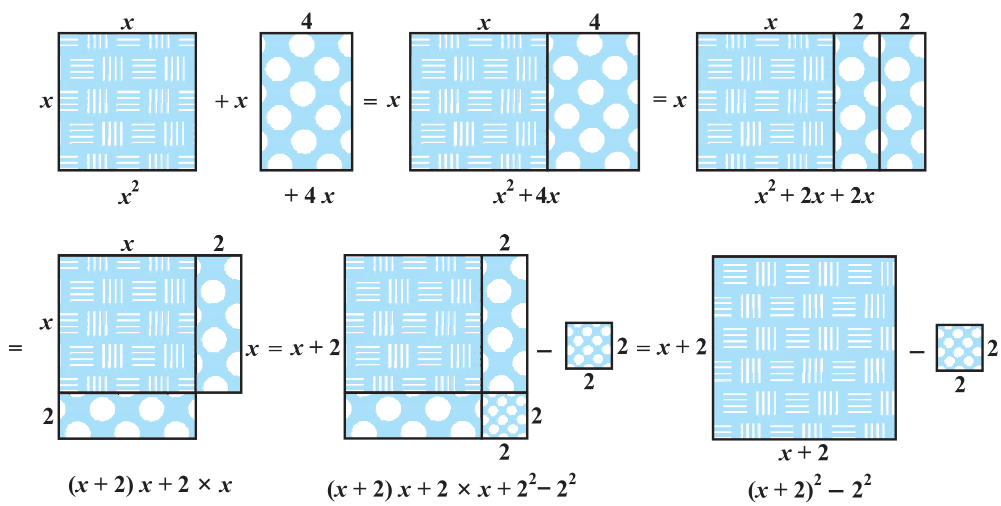
অতএব, $x=1$ বা, $x=-5$

সুতরাং, $(x+2)^2-9=0$ সমীকরণের বীজগুলো হল 1 এবং -5।

উপরের উভয় উদাহরণেই, x যুক্ত পদটি পুরোপুরি একটি সম্পূর্ণ বর্গ এবং বর্গমূল করে সহজে আমরা বীজগুলো পেয়েছি। কিন্তু, যখন আমাদেরকে $x^2+4x-5=0$ সমীকরণটি সমাধানের কথা বলা হবে তখন কী হবে? আমরা এটিকে সম্ভবত উৎপাদকে বিশ্লেষণের মাধ্যমে অথবা (অন্য কোনো ভাবে!) ভাবতে পারি যে, $x^2+4x-5=(x+2)^2-9$।

সুতরাং, $x^2+4x-5=0$ -এর সমাধান $(x+2)^2-9=0$-এর সমাধানের সমতুল্য, যার সমাধান আমরা খুব দ্রুত হতে দেখেছি। প্রকৃতপক্ষে, যে-কোনো দ্বিঘাত সমীকরণকে $(x+a)^2-b^2=0$ আকারে আমরা রূপান্তর করতে পারি এবং তারপর খুব সহজে এর বীজগুলো নির্ণয় করতে পারি। যদি এটি করা সম্ভব হয় চলো দেখি। চিত্র 4.2 লক্ষ করো।

এই চিত্রে, আমরা দেখতে পারি x^2+4x কীভাবে $(x+2)^2-4$- এর রূপান্তরিত হয়।



চিত্র 4.2

প্রক্রিয়াটি নিম্নরূপে সম্পন্ন হয় :

$$x^2 + 4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

সুতরাং, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

অতএব, $x^2 + 4x - 5 = 0$ কে পূর্ণ বর্গকরণের প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $(x + 2)^2 - 9 = 0$ রূপে লেখা যেতে পারে। এটিই **বর্গগঠনের পদ্ধতি** হিসেবে পরিচিত।

সংক্ষেপে, এটিকে নিম্নরূপে দেখানো যায় :

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

সুতরাং, $x^2 + 4x - 5 = 0$ কে আবার লেখা যায়

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

অর্থাৎ, $(x + 2)^2 - 9 = 0$

এখন ধরা যাক, $3x^2 - 5x + 2 = 0$। লক্ষ করো x^2 এর সহগ পূর্ণবর্গ নয়। সুতরাং, পুরো সমীকরণটিকে 3 দিয়ে গুণ করে আমরা পাই

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

এখন, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

সুতরাং, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ কে লেখা যায়

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

অর্থাৎ, $$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

অতএব, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ এর সমাধান $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ -এর সমাধানের সমান হয়।

অর্থাৎ, $$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ বা } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(আমরা এটিকে $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$, রূপেও লিখতে পারি, যেখানে '$\pm$' নির্দেশ করে 'প্লাস মাইনাস'।)

সুতরাং, $$3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \text{ or } 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

অতএব, $$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \text{ বা } x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

তাহলে, $$x = 1 \text{ বা } x = \frac{4}{6}$$

অর্থাৎ, $$x = 1 \text{ বা } x = \frac{2}{3}$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলো হল 1 এবং $\frac{2}{3}$ ।

মন্তব্য : এই পদ্ধতিকে অন্যরূপে নীচে দেখানো হল :

প্রদত্ত সমীকরণ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ কে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

এখন, $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

সুতরাং, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ এর সমাধানগুলো $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ এর সমাধানের সমান, যেগুলো হল $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$, অর্থাৎ, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ এবং $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ।

উপরোক্ত পদ্ধতির বর্ণনার আরও কয়েকটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

উদাহরণ 7 : বর্গগঠন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে উদাহরণ 3-এ প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান করো।

সমাধান : $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণটি $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ সমীকরণের সমান।

এখন, $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

অতএব, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ কে $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ আকারে লেখা যায়।

সুতরাং, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের বীজগুলো পুরোপুরি $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ সমীকরণের বীজগুলোর সমান। এখন, $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ মানে $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

অতএব, $$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

অর্থাৎ, $$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

অর্থাৎ, $$x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{বা} \quad x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

অর্থাৎ, $$x = \frac{3}{2} \quad \text{বা} \quad x = 1$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানগুলো হল $x=\frac{3}{2}$ এবং 1 ।

চলো সমাধানগুলোকে **যাচাই** করা যাক।

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণে $x=\frac{3}{2}$ বসিয়ে আমরা পাই $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right)+3=0$, যা সঠিক।

অনুরূপে, তোমরা যাচাই করে দেখতে পার যে, $x = 1$ ও প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

উদাহরণ 7-এ আমরা $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ কে পাওয়ার জন্য, $2x^2-5x+3=0$ সমীকরণটিকে সর্বত্র 2 দিয়ে ভাগ করি, যাতে প্রথম পদটি পূর্ণবর্গে রূপান্তরিত হয় এবং অতঃপর বর্গ গঠন করা যায় এর পরিবর্তে সম্পূর্ণ সমীকরণকে 2 দিয়ে গুণ করতে পারি যার ফলে প্রথম পদ $4x^2=(2x)^2$ হয় এবং তারপর বর্গগঠন করতে পারি।

এই পদ্ধতিটি পরবর্তী উদাহরণে বর্ণিত হল।

উদাহরণ 8 : বর্গ গঠন পদ্ধতি প্রয়োগে $5x^2-6x-2=0$ সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটিকে 5 দিয়ে পুরোপুরি গুণ করে পাই,

$$25x^2-30x-10=0$$

এটির অনুরূপ সমীকরণ হল

$$(5x)^2-2\times(5x)\times 3+3^2-3^2-10=0$$

অর্থাৎ, $$(5x-3)^2-9-10=0$$

অর্থাৎ, $$(5x-3)^2-19=0$$

অর্থাৎ, $$(5x-3)^2=19$$

অর্থাৎ, $$5x-3=\pm\sqrt{19}$$

অর্থাৎ, $$5x=3\pm\sqrt{19}$$

সুতরাং, $$x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$$

অতএব, বীজগুলো হল $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ এবং $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$.

যাচাই করে দেখ যে, বীজগুলো হল $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ এবং $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ ।

উদাহরণ 9 : বর্গ গঠন পদ্ধতি প্রয়োগে $4x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের বীজগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান : লক্ষ করো $4x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের অনুরূপ

সমীকরণ হল, $$(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

অর্থাৎ, $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

অর্থাৎ, $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

অর্থাৎ, $$\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{16} < 0$$

কিন্তু x-এর যে-কোনো বাস্তব মানের জন্য $\left(2x + \frac{3}{4}\right)^2$ ঋণাত্মক হতে পারে না (কেন?)। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে এমন x-এর কোনো বাস্তব মান নেই। অতএব, প্রদত্ত সমীকরণের কোনো *বাস্তব বীজ (real roots)* নেই।

এতক্ষণ, তোমরা বর্গগঠন পদ্ধতির মাধ্যমে সমাধানের বেশ কয়েকটি উদাহরণ দেখেছ। চলো আমরা এই পদ্ধতিটি সাধারণভাবে আলোচনা করি।

ধরো, দ্বিঘাত সমীকরণটি হল $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$। সমীকরণটিকে সর্বত্র a দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

এর অনুরূপ হল $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

অর্থাৎ, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের বীজগুলো $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0,$

অর্থাৎ, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

এর বীজগুলোর সমান।

যদি $b^2 - 4ac \geq 0$ হয়, তবে (1) নং -এর বর্গমূল নিয়ে পাই

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অতএব,
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

সুতরাং, $ax^2 + bx + c = 0$ -এর বীজগুলো হল $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, যদি $b^2 - 4ac \geq 0$ হয়। যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়, তবে সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই। (কেন?)

অতএব, যদি $b^2 - 4ac \geq 0$ হয়, তবে $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলো হল $\boldsymbol{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

একটি দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয়ের এই সূত্রটি **দ্বিঘাত সূত্র (quadratic formula)** হিসেবে পরিচিত।

চলো দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা যাক।

উদাহরণ 10 : দ্বিঘাত সূত্র ব্যবহারে 4.1 নং অনুশীলনীর Q. 2(i) -এর সমাধান করো।

সমাধান : ধরি, আয়তাকার জমির প্রস্থ x মিটার। তাহলে দৈর্ঘ্য হবে $(2x + 1)$ মিটার। এখন আমাদেরকে দেওয়া হয়েছে $x(2x + 1) = 528$, অর্থাৎ, $2x^2 + x - 528 = 0$।

এটি $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের, যেখানে $a = 2, b = 1, c = -528$।

সুতরাং, দ্বিঘাত সূত্র থেকে সমাধান পাওয়া যায়, যথা-

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)(528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

অর্থাৎ, $x = \frac{64}{4}$ বা $x = \frac{-66}{4}$

অর্থাৎ,
$$x = 16 \quad \text{বা} \quad x = -\frac{33}{2}$$

যেহেতু মাত্রা x ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই জমিটির প্রস্থ 16 মিটার এবং দৈর্ঘ্য 33 মিটার। এই মানগুলো সমস্যাটির বিভিন্ন শর্তগুলোকে সিদ্ধ করে কিনা তোমাদের তা যাচাই করে দেখা উচিত।

উদাহরণ 11 : দুটি পর পর ধনাত্মক বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা নির্ণয় করো যাদের বর্গের সমষ্টি 290 হয়।

সমাধান : ধরি, পর পর দুটি ধনাত্মক বিজোড় অখণ্ড সংখ্যার ক্ষুদ্রতরটি হল x। তাহলে অপর অখণ্ড সংখ্যাটি হবে $x+2$।

প্রশ্নানুসারে, $x^2+(x+2)^2=290$

অর্থাৎ, $x^2+x^2+4x+4=290$

অর্থাৎ, $2x^2+4x-286=0$

অর্থাৎ, $x^2+2x-143=0$

যা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে আমরা পাই,

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+572}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{576}}{2}=\frac{-2\pm 24}{2}$$

অর্থাৎ, $x=11$ or $x=-13$

কিন্তু x হল ধনাত্মক বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা। অতএব, $x\neq-13, x=11$ ।

অতএব, পরপর বিজোড় অখণ্ড সংখ্যা দুটি হল 11 এবং 13 ।

যাচাই (Check) : $11^2+13^2=121+169=290$ ।

উদাহরণ 12 : এরূপ একটি আয়তাকার উদ্যান তৈরি করতে হবে যার প্রস্থ, এর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 3 মিটার কম। উদ্যানটির ক্ষেত্রফল একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের (চিত্র 4.3 দেখো) ক্ষেত্রফল অপেক্ষা 4 বর্গএকক অধিক, যেখানে ত্রিভুজটির ভূমি উদ্যানের প্রস্থ বরাবর এবং উচ্চতা 12 মিটার যা পূর্বেই নির্মিত ছিল। এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরি উদ্যানের প্রস্থ x মি।

সুতরাং, এর দৈর্ঘ্য $=(x+3)$ মি।

অতএব, আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল $=x(x+3)$ মি$^2=(x^2+3x)$ মি^{2}।

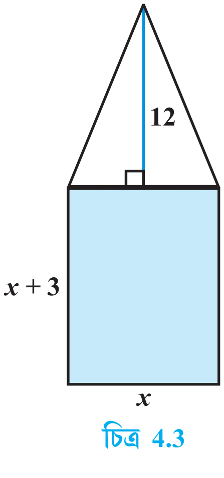
এখন, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি $=x$ মি।

অতএব, এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times x\times 12=6x$ মি^{2}।

প্রশ্নানুসারে,

$$x^2+3x=6x+4$$

অর্থাৎ, $x^2-3x-4=0$



চিত্র 4.3

দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে, আমরা পাই

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ বা } -1$$

কিন্তু $x \neq -1$ (কেন?)। অতএব, $x = 4$ ।

সুতরাং, উদ্যানের প্রস্থ $= 4$ মি এবং এর দৈর্ঘ্য হবে 7 মি।

সত্য প্রতিপাদন : আয়তাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল $= 28$ মি^{2}

ত্রিভুজাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল $= 24$ মি$^2 = (28 - 4)$ মি^{2}

উদাহরণ 13 : দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে, যদি অস্তিত্ব থাকে তবে নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর বীজদ্বয় নির্ণয় করো:

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

সমাধান :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$। এখানে, $a = 3, b = -5, c = 2$। সুতরাং, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0.$

অতএব, $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$, অর্থাৎ, $x = 1$ বা $x = \frac{2}{3}$

সুতরাং, বীজগুলো হল $\frac{2}{3}$ এবং 1.

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$। এখানে, $a = 1, b = 4, c = 5$। সুতরাং, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0.$

যেহেতু, কোনো একটি বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হয় না, সুতরাং $\sqrt{b^2 - 4ac}$ -এর কোনো বাস্তব মান থাকবে না।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$। এখানে, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1.$

সুতরাং, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$

অতএব, $x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$, অর্থাৎ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

সুতরাং, বীজগুলো হল $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ।

উদাহরণ 14 : নিচের সমীকরণগুলোর বীজদ্বয় নির্ণয় করো :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3,\ x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0, 2$

সমাধান :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$, সর্বত্র x দিয়ে গুণ করে আমরা পাই,

$$x^2 + 1 = 3x$$

অর্থাৎ, $x^2 - 3x + 1 = 0$, যা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

এখানে, $a = 1, b = -3, c = 1$

সুতরাং, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

অতএব, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (কেন?)

সুতরাং, বীজগুলো হল $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ এবং $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3,\ x \neq 0,\ 2$ ।

যেহেতু $x \neq 0, 2$, সমীকরণটিকে $x(x-2)$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণটির আকার হয় $3x^2 - 6x + 2 = 0$, যা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

এখানে, $a = 3, b = -6, c = 2$. সুতরাং, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

অতএব, $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$.

সুতরাং, বীজগুলো হল $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ এবং $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

উদাহরণ 15 : একটি মোটর চালিত নৌকা যার গতি স্থির জলে 18 কিমি/ঘণ্টা, স্রোতের প্রতিকূলে 24 কিমি যেতে যে সময় লাগে তা স্রোতের অনুকূলে পুনরায় একই স্থানে ফিরে আসার সময়ের চেয়ে 1 ঘণ্টা সময় বেশি লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরো, স্রোতের গতিবেগ x কিমি/ঘণ্টা।

সুতরাং, স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার গতিবেগ $=(18-x)$ কিমি/ঘণ্টা এবং স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতিবেগ $=(18+x)$ কিমি/ঘণ্টা।

স্রোতের প্রতিকূলে সময় লাগে $= \dfrac{\text{দূরত্ব}}{\text{গতিবেগ}} = \dfrac{24}{18-x}$ ঘণ্টা।

অনুরূপে, স্রোতের অনুকূলে সময় লাগে $= \dfrac{24}{18+x}$ ঘণ্টা।

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

অর্থাৎ,
$$24(18+x)-24(18-x) = (18-x)(18+x)$$

অর্থাৎ,
$$x^2+48x-324 = 0$$

দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে, আমরা পাই

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2+1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ বা } -54$$

যেহেতু x স্রোতের বেগ, তাই এটি ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং, $x = -54$ বীজটিকে আমরা অগ্রাহ্য করি। অতএব, $x = 6$ যা থেকে স্রোতের গতিবেগ পাওয়া যায় 6 কিমি/ঘণ্টা।

অনুশীলনী 4.3

1. বর্গ গঠনের পদ্ধতি প্রয়োগে নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর বীজদ্বয়ের যদি অস্তিত্ব থাকে নির্ণয় করো:

(i) $2x^2-7x+3=0$ (ii) $2x^2+x-4=0$

(iii) $4x^2+4\sqrt{3}x+3=0$ (iv) $2x^2+x+4=0$

2. দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে উপরের প্রশ্ন 1-এর দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর বীজদ্বয় নির্ণয় করো।

3. নীচের সমীকরণগুলোর বীজদ্বয় নির্ণয় করো :

(i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. রহমানের 3 বছর আগের বয়স (বছরে)-এর অন্যোন্যক এবং 5 বছর পরের বয়সের অনোন্যক এর সমষ্টি $\frac{1}{3}$। ওর বর্তমান বয়স নির্ণয় করো।

5. ক্লাসের একটি পরীক্ষায় শেফালীর গণিত এবং ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বরের সমষ্টি 30। যদি সে গণিতে 2 নম্বর বেশি এবং ইংরেজিতে 3 নম্বর কম পেত, তবে তার প্রাপ্ত নম্বরের গুণফল 210 হত। তার দুটি বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বর নির্ণয় করো।

6. একটি আয়তাকার মাঠের কর্ণের দৈর্ঘ্য, এর ক্ষুদ্রতর বাহুর চেয়ে 60 মিটার বেশি। যদি দীর্ঘতর বাহুর দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর বাহুর দৈর্ঘ্যের চেয়ে 30 মিটার বেশি হয়, তবে মাঠটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

7. দুটি সংখ্যার বর্গের পার্থক্য 180। ছোটোটির বর্গ বড়োটির 8 গুণ। সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

8. একটি রেলগাড়ি সমগতিতে 360 কিমি পথ অতিক্রম করে। যদি এর গতি ঘণ্টায় 5 কিমি বেশি হত তবে একই দূরত্বের জন্য এটির 1 ঘণ্টা সময় কম লাগত। রেলগাড়িটির গতি নির্ণয় করো।

9. দুটি জলের নল একসাথে খোলা থাকলে $9\frac{3}{8}$ ঘণ্টায় একটি জলাধার পূর্ণ করে। বৃহত্তর ব্যাসযুক্ত জলের নলটি পৃথকভাবে ক্ষুদ্রতর ব্যাসের নলটির চেয়ে জলাধারটি পূর্ণ করতে 10 ঘণ্টা কম সময় নেয়। পৃথকভাবে নল দুটির প্রতিটি দিয়ে জলাধারটি পূর্ণ করার সময় নির্ণয় করো।

10. মাইশুর এবং ব্যাঙ্গালোরের মধ্যবর্তী 132 কিমি পথ ভ্রমণে একটি এক্সপ্রেস রেলগাড়ি একটি যাত্রীবাহী রেলগাড়ির চেয়ে 1 ঘণ্টা কম সময় নেয় (মধ্যবর্তী স্টেশনগুলোতে থামানোর সময় উপেক্ষা করে)। যদি এক্সপ্রেস রেলগাড়ির গড় গতি যাত্রিবাহী রেলগাড়ির চেয়ে 11 কিমি/ঘণ্টা বেশি হয়, তবে রেলগাড়ি দুটির গড় গতি নির্ণয় করো।

11. দুটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 468 মি^{2}। যদি এদের পরিসীমার অন্তর 24 মি হয়, তবে বর্গক্ষেত্র দুটির প্রতিটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

4.5 বীজের প্রকৃতি (Nature of Roots)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে তোমরা দেখেছ, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজগুলো হল

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয়, তবে আমরা দুটো ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব বীজ $-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ পাই।

যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়, তবে $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$ অর্থাৎ, $x = -\frac{b}{2a}$ অথবা, $-\frac{b}{2a}$

সুতরাং, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের উভয় বীজই হল $-\frac{b}{2a}$ ।

অতএব, এক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান।

যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়, তবে এমন কোনো বাস্তব সংখ্যা নেই যার বর্গ হয় $b^2 - 4ac$ ।অতএব, এক্ষেত্রে প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

যেহেতু, দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$-এর বীজগুলো বাস্তব হবে, নাকি হবে না তা $b^2 - 4ac$ নিরূপণ করে, তাই $b^2 - 4ac$ কে এই দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক (discriminant)** বলে।

সুতরাং, একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ -এর

(i) বীজদুটি বাস্তব ও অসমান হবে, যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয়।

(ii) বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে, যদি $b^2 - 4ac = 0$ হয়।

(iii) কোনো বাস্তব বীজ থাকবে না, যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।

চলো কয়েকটি উদাহরণ বিবেচনা করা যাক।

উদাহরণ 16 : $2x^2 - 4x + 3 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক নির্ণয় করো এবং অতঃপর বীজগুলোর প্রকৃতি নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণটি $ax^2 + bx + c = 0$ আকারের, যেখানে $a = 2$, $b = -4$ এবং $c = 3$ ।সুতরাং, নিরূপক

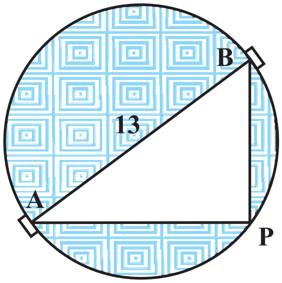
$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$$

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ নেই।

উদাহরণ 17 : 13 মি ব্যাস যুক্ত একটি বৃত্তাকার উদ্যানের পরিসীমার উপর একটি বিন্দুতে একটি খুঁটি এমনভাবে পোঁতা হল যাতে ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুতে অবস্থিত A এবং B দুটি সদর দরজা থেকে খুঁটিটির দূরত্বের পার্থক্য 7 মিটার হয়। এটা করা কি সম্ভবপর হবে ? যদি সম্ভব হয় তবে দুটি সদর দরজা থেকে খুঁটিটির দূরত্ব কত ?

সমাধান : চলো আমরা প্রথমে চিত্র এঁকে নিই (চিত্র 4.4 দেখো)।

মনে করা যাক, P হল খুঁটিটির নির্ণেয় অবস্থান। ধরি, B দরজা থেকে খুঁটির দূরত্ব x মি. অর্থাৎ, BP = x মি। এখন দুটি সদর দরজা থেকে খুঁটিটির দূরত্বের পার্থক্য = AP – BP (অথবা, BP – AP) = 7 মি। অতএব, AP = $(x + 7)$ মি।



চিত্র 4.4

এখন, AB = 13 মি, এবং যেহেতু AB হল একটি ব্যাস,

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(কেন?)}$$

সুতরাং, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে)

অর্থাৎ, $(x+7)^2 + x^2 = 13^2$

অর্থাৎ, $x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

অর্থাৎ, $2x^2 + 14x - 120 = 0$

সুতরাং, B দরজা থেকে খুঁটির দূরত্ব 'x'

$x^2 + 7x - 60 = 0$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

যদি সমীকরণটির বীজগুলো বাস্তব হয়, তবে খুঁটিটিকে স্থাপন করা সম্ভব হবে। এটিকে যাচাই এর জন্য চলো আমরা এর নিরূপক বিবেচনা করি। এখানে নিরূপক হল

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0.$$

সুতরাং, প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির দুটি বাস্তব বীজ আছে এবং তাই খুঁটিটি বৃত্তাকার উদ্যানের পরিসীমার উপর কোনো বিন্দুতে পোঁতা সম্ভব হবে।

দ্বিঘাত সূত্র প্রয়োগে, $x^2 + 7x - 60 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করে আমরা পাই

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

অতএব, $x = 5$ অথবা -12 ।

যেহেতু, x খুঁটি ও দরজা B-এর মধ্যবর্তী দূরত্বকে প্রকাশ করে, তাই এটি অবশ্যই ধনাত্মক হবে। অতএব, $x = -12$ অগ্রাহ্য হবে। সুতরাং, $x = 5$ ।

অতএব, খুঁটিটিকে বৃত্তাকার উদ্যানের পরিসীমার উপর B সদর দরজা থেকে 5 মি এবং A সদর দরজা থেকে 12 মি দূরত্বে পোঁতা হবে।

উদাহরণ 18 : $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ সমীকরণটির নিরূপক বের করো এবং তারপর বীজগুলোর প্রকৃতি নির্ণয় করো। যদি এরা বাস্তব হয় তবে এদের নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে $a = 3, b = -2$ এবং $c = \frac{1}{3}$ ।

অতএব, নিরূপক $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0.$

অতএব, প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান।

বীজগুলো হল $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ অর্থাৎ, $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ অর্থাৎ, $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ।

অনুশীলনী 4.4

1. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করো। যদি বাস্তব বীজের অস্তিত্ব থাকে, তবে এদের নির্ণয় করো :

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. নীচের দ্বিঘাত সমীকরণগুলোর প্রতিটির ক্ষেত্রে k -এর মান নির্ণয় করো, যাতে এদের বীজ দুটি সমান হয়।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx\,(x - 2) + 6 = 0$

3. এমন একটি আয়তাকার আমবাগান তৈরি করা কি সম্ভবপর হবে যার দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং এর ক্ষেত্রফল 800 বর্গমিটার হবে? যদি সম্ভব হয়, তবে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

4. নিম্নলিখিত পরিস্থিতি কি সম্ভবপর হবে? যদি হয়, তবে তাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় করো।

   দুই বন্ধুর বয়সের সমষ্টি 20 বছর। চার বছর আগে তাদের বয়সের গুণফল 48 বছর ছিল।

5. এমন একটি আয়তাকার উদ্যানের রূপদান করা কি সম্ভবপর হবে, যার পরিসীমা 80 মি এবং ক্ষেত্রফল 400 বর্গমিটার? যদি হয়, তবে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো।

4.6 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. x চলরাশিযুক্ত একটি দ্বিঘাত সমীকরণের আকার হল $ax^2 + bx + c = 0$, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$।
2. একটি বাস্তব সংখ্যা α কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের একটি বীজ বলা হবে যদি $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ হয়। দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ -এর শূন্যগুলো, $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলোর সমান হয়।
3. যদি আমরা $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ কে দুটি রৈখিক উৎপাদকের গুণফলে বিশ্লেষণ করতে পারি, তবে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় উৎপাদক দুটির প্রতিটিকে শূন্যের সমান করে পাওয়া যায়।
4. একটি দ্বিঘাত সমীকরণকে পূর্ণবর্গ গঠনের মাধ্যমেও সমাধান করা যায়।
5. দ্বিঘাত সূত্র : দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজগুলো পাওয়া যায় $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এর সাহায্যে, যেখানে $b^2 - 4ac \geq 0$ ।

6. একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর

(i) বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে যদি, $b^2 - 4ac > 0$ হয়,

(ii) বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হয় (অর্থাৎ বীজদ্বয় সমাপতিত হয়), যদি $b^2 - 4ac = 0$ এবং

(iii) কোনো বাস্তব বীজ থাকে না, যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয়।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

বিবরণ মূলক সমস্যা (word problems) সমাধানে প্রাপ্ত সমাধানগুলোকে সর্বদা মূল সমাধানে প্রদত্ত শর্তগুলোর সাথে যাচাই করে নেওয়া উচিত এবং এই যাচাইকরণ যেন গঠিত সমীকরণের সাথে না করা হয় (অধ্যায় 3-এর 11, 13, 19 এবং অধ্যায় 4-এর 10, 11, 12 উদাহরণগুলো দেখো)।

সমান্তর প্রগতি
(ARITHMETIC PROGRESSIONS)

5

5.1 ভূমিকা

তোমরা অবশ্যই লক্ষ করেছ যে, প্রকৃতিতে অনেক বস্তুই একটি নির্দিষ্ট নমুনা (pattern) অনুসরণ করে, যেমন একটি সূর্যমুখী ফুলের পাপড়িসমূহ, একটি মৌচাকের ঘরসমূহ, একটি ভুট্টার দানাগুলো, একটি আনারস ও একটি পাইন কোন (pine cone)-এর উপর সর্পিল ইত্যাদি।

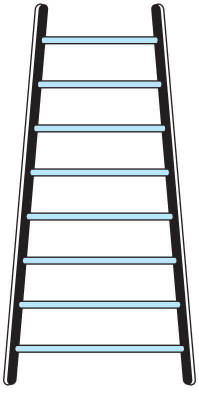
এখন আমরা কিছু নমুনায় দৃষ্টিপাত করব যা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ঘটে। এরূপ কিছু উদাহরণ হল:

(i) রীনা একটি চাকুরির জন্য আবেদন করল এবং নির্বাচিত হল। তাকে এই কাজের জন্য প্রারম্ভিক বেতন মাসিক 8000 টাকা সাথে 500 টাকা বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি হিসাবে নিযুক্তি দেওয়া হল। তার বেতন (টাকায়) প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... বছরগুলোতে হবে যথাক্রমে

$$8000, \quad 8500, \quad 9000, \ldots.$$

(ii) একটি মইয়ের ধাপগুলোর দৈর্ঘ্য নীচ থেকে উপর পর্যন্ত সমভাবে 2 সেমি করে কমতে থাকে (চিত্র 5.1 দেখো)। সর্বনিম্ন ধাপটির দৈর্ঘ্য 45 সেমি। নীচ থেকে উপর পর্যন্ত প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., অষ্টম ধাপের দৈর্ঘ্য (সেমি-এ) হল যথাক্রমে :

$$45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31$$



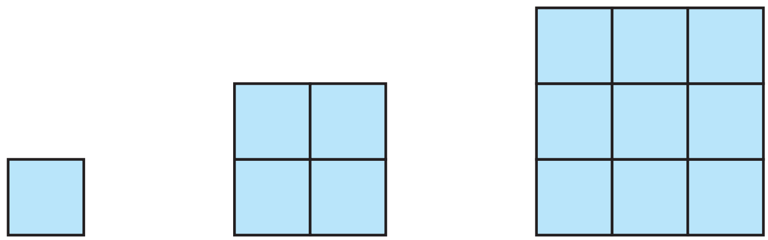
চিত্র 5.1

(iii) একটি জমা প্রকল্পে, প্রত্যেক 3 বছর পর আসল তার নিজের $\frac{5}{4}$ গুণ হয়। 8000 টাকা জমা দিয়ে 3, 6, 9 এবং 12 বছর পরে মেয়াদপূর্তি পরিমাণ (টাকায়) হবে যথাক্রমে :

$$10000, \quad 12500, \quad 15625, \quad 19531.25$$

(iv) 1, 2, 3, . . . একক বাহু দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্রের মধ্যে একক বর্গের সংখ্যা হবে (চিত্র 5.2 দেখো) যথাক্রমে:

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots$



চিত্র 5.2

(v) শাকিলা তার মেয়ের টাকার বাক্সে 100 টাকা রেখেছিল যখন তার বয়স এক বছর ছিল এবং প্রতি বছর 50 টাকা করে টাকার পরিমাণ বৃদ্ধি করেছিল। প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, ... জন্মদিনে বাক্সে রাখা অর্থের পরিমাণ (টাকায়) হল যথাক্রমে

100, 150, 200, 250, . . .

(vi) এক জোড়া খরগোস এতই ছোটো ছিল যে প্রথম মাসে তাদের পক্ষে বাচ্চা প্রসব সম্ভব ছিল না। দ্বিতীয় এবং পরবর্তী প্রতিটি মাসে তারা নতুন এক জোড়া করে বাচ্চা দেয়। খরগোসের প্রতিটি নতুন জোড়া তাদের দ্বিতীয় মাসে নতুন একজোড়া বাচ্চা দেয় এবং এটি পরবর্তী প্রতিটি মাসের জন্য চলতে থাকবে (চিত্র 5.3 দেখো)। ধরে নেওয়া হচ্ছে কোনো খরগোসের মৃত্যু হয়নি। প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ..., ষষ্ঠ মাসের শুরুতে খরগোস জোড়ার সংখ্যা হবে যথাক্রমে :

1, 1, 2, 3, 5, 8।

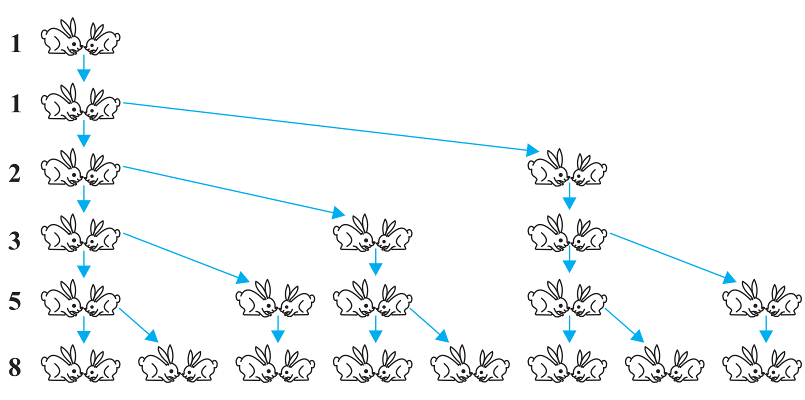


Fig. 5.3

উপরের উদাহরণগুলোতে আমরা কিছু নমুনা লক্ষ করলাম। কিছু উদাহরণে আমরা দেখি যে, পরপর পদগুলো পাওয়া যায়, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করে, কিছুতে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা দিয়ে গুণ করে, অন্যটিতে আমরা পাই যে তারা হল পরপর সংখ্যার বর্গ, এবং এভাবে চলতে থাকবে।

এই অধ্যায়ে আমরা এগুলোর মধ্যে একটি নমুনা নিয়ে আলোচনা করব যার পূর্ববর্তী পদগুলোর সাথে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করে পরবর্তী পদ পাওয়া যায়। আমরা আরও দেখব যে, কীভাবে তাদের n-তম পদ পাওয়া যায় এবং পর পর n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করা যায় এবং এই জ্ঞানের প্রয়োগে কিছু দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা সমাধান করা যায়।

5.2 সমান্তর প্রগতি (Arithmetic Progressions)

নিম্নলিখিত সংখ্যার তালিকাগুলো লক্ষ করো :

(i) $1, \ 2, \ 3, \ 4, \ldots$

(ii) $100, \ 70, \ 40, \ 10, \ldots$

(iii) $-3, \ -2, \ -1, \ 0, \ \ldots$

(iv) $3, \ 3, \ 3, \ 3, \ldots$

(v) $-1.0, -1.5, -2.0, -2.5, \ldots$

তালিকার প্রত্যেকটি সংখ্যাকে বলা হয় একটি **পদ (term)**।

একটি পদ প্রদত্ত হলে তোমরা কি উপরের প্রতিটি তালিকার পরবর্তী পদটি লিখতে পারবে? যদি পার, তাহলে তোমরা কীভাবে এটি লিখবে? সম্ভবত একটি নমুনা বা নিয়মকে অনুসরণ করে। চলো আমরা লক্ষ করি এবং নিয়মটি লিখি।

(i)-এ প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদ থেকে 1 অধিক।

(ii)-এ প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদ থেকে 30 কম।

(iii)-এ প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদে 1 যোগ করে পাওয়া যায়।

(iv)-এ তালিকার সবগুলো পদ 3, অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদে 0 যোগ (বা বিয়োগ) করে পাওয়া যায়।

(v)-এ প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদে -0.5 যোগ করে (অর্থাৎ 0.5 বিয়োগ করে) পাওয়া যায়।

উপরের সবগুলো তালিকায় আমরা দেখি যে, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা পূর্ববর্তী পদগুলোতে যোগ করে পরপর পদগুলো পাওয়া যায়। এ ধরনের সংখ্যার তালিকাকে বলা হয় একটি **সমান্তর প্রগতি [Arithmetic Progression (AP)]**।

অতএব, **একটি সমান্তর প্রগতি, সংখ্যার এমন একটি তালিকা যাতে প্রথম পদ ছাড়া প্রত্যেক পদ তার পূর্ববর্তী পদের সাথে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা যোগ করে পাওয়া যায়।**

এই নির্দিষ্ট সংখ্যাকে বলা হয় সমান্তর প্রগতির (AP) **সাধারণ অন্তর (common difference)**। মনে রাখবে, এটি **ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য** হতে পারে।

চলো আমরা একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদকে a_1, দ্বিতীয় পদকে a_2, ..., n তম পদকে a_n দিয়ে এবং সাধারণ অন্তরকে d দিয়ে ব্যক্ত করি। তাহলে সমান্তর প্রগতিটি হল $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$।

সুতরাং, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d.$

সমান্তর প্রগতির আরও কিছু উদাহরণ :

(a) একটি বিদ্যালয়ের প্রাতঃকালীন সভায় একটি সারিতে দাঁড়ানো শিক্ষার্থীদের উচ্চতা (সেমি-এ) হল 147, 148, 149, . . ., 157।

(b) একটি শহরের জানুয়ারি মাসে কোনো একটি সপ্তাহের ন্যূনতম তাপমাত্রা (ডিগ্রি সেলসিয়াস) নথিভুক্ত করা হল, যার ঊর্দ্ধক্রম হল

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$

(c) 1000 টাকার একটি ঋণের সম্পূর্ণ অর্থের 5 % প্রতি মাস হারে ফেরত দিলে বাকি ধনরাশির (টাকায়) পরিমাণ হয় 950, 900, 850, 800, . . ., 50।

(d) একটি বিদ্যালয়ের প্রথম থেকে দ্বাদশ শ্রেণির প্রথম স্থানাধিকারীদের প্রদান করা নগদ পুরস্কার (টাকায়) হল যথাক্রমে 200, 250, 300, 350, . . ., 750।

(e) 50 টাকা করে প্রতি মাসে জমা দিলে প্রত্যেক মাসের শেষে 10 মাসে মোট জমার (টাকায়) পরিমাণ হয় 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500।

উপরের প্রতিটি তালিকা কেন একটি সমান্তর প্রগতি তার ব্যাখ্যা করা, তোমাদের অনুশীলনের জন্য ছাড়া হল।

তোমরা লক্ষ করতে পারো যে,

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

একটি সমান্তর প্রগতি প্রকাশ করে যেখানে প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d । এটিকে বলা হয় **একটি সমান্তর প্রগতির সাধারণ রূপ (general form)**।

উপরের উদাহরণ (a) থেকে (e)-তে লক্ষ করো, সেখানে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক পদই আছে। এরূপ সমান্তর প্রগতিকে একটি **সসীম সমান্তর প্রগতি (finite AP)** বলা হয়। আরও লক্ষ করো যে, এই সমান্তর প্রগতির প্রতিটির একটি শেষ পদ আছে। এই অনুচ্ছেদের উদাহরণ (i) থেকে (v)-এর সমান্তর প্রগতিসমূহ সসীম সমান্তর প্রগতি নয় এবং এজন্য তাদের বলা হয় **অসীম সমান্তর প্রগতি (infinite Arithmetic Progressions)**। এরূপ সমান্তর প্রগতিসমূহের কোনো শেষ পদ থাকে না।

এখন, একটি সমান্তর প্রগতি সম্বন্ধে জানতে গেলে তোমাদের ন্যূনতম কী তথ্য জানা আবশ্যক? এটির প্রথম পদ জানা-ই কি যথেষ্ট? অথবা, শুধুমাত্র সাধারণ অন্তর জানা-ই কি যথেষ্ট? তোমরা দেখবে যে, তোমাদের উভয়ই জানা প্রয়োজন — প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d ।

উদাহরণস্বরূপ, যদি প্রথম পদ $a = 6$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 3$ হয়, তবে সমান্তর প্রগতিটি হয়

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

এবং যদি $a = 6$ এবং $d = -3$ হয়, তবে সমান্তর প্রগতিটি হয়,

$$6, 3, 0, -3, \ldots$$

অনুরূপে, যখন

$a = -7$, $d = -2$ হয়, তখন সমান্তর প্রগতিটি হয় $-7, -9, -11, -13, \ldots$

$a = 1.0$, $d = 0.1$ হয়, তখন সমান্তর প্রগতিটি হয় $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$ হয়, তখন সমান্তর প্রগতিটি হয় $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$

$a = 2$, $d = 0$ হয়, তখন সমান্তর প্রগতিটি হয় $2, 2, 2, 2, \ldots$

সুতরাং, যদি তোমরা a এবং d এর মান কত তা জান তাহলে তোমরা সমান্তর প্রগতির তালিকা তৈরি করতে পারো। এটির বিপরীত প্রক্রিয়ায় কী করা যায়? অর্থাৎ, যদি তোমাদের একটি সংখ্যার তালিকা দেওয়া হয় তাহলে কি তোমরা এটি সমান্তর প্রগতি কিনা বলতে পার? এবং তারপর a এবং d বের করতে পারবে কি? যেহেতু, a হল প্রথম পদ, তাই এটি সহজেই লেখা যায়। আমরা জানি যে, একটি সমান্তর প্রগতিতে প্রত্যেকটি পরবর্তী পদ পাওয়া যায় তার পূর্ববর্তী পদের সাথে d যোগ করে। সুতরাং, একটি সমান্তর প্রগতির ক্ষেত্রে d নির্ণয় করা যায় যে-কোনো পদকে তার পরবর্তী পদ অর্থাৎ, যে পদটি ঠিক তার পরে থাকে তা থেকে বিয়োগ করে এবং এটি অবশ্যই একই হবে একটি সমান্তর প্রগতির ক্ষেত্রে।

উদাহরণস্বরূপ, সংখ্যার তালিকা :

$6, 9, 12, 15, \ldots$ এর ক্ষেত্রে

আমরা পাই,

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3,$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3,$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

এখানে পরপর দুটি পদের অন্তরফল প্রতি ক্ষেত্রে 3। সুতরাং, প্রদত্ত তালিকাটি একটি সমান্তর প্রগতি যার প্রথম পদ a হল 6 এবং সাধারণ অন্তর d হল 3।

সংখ্যার তালিকা, $6, 3, 0, -3, \ldots$ এর ক্ষেত্রে

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

অনুরূপভাবে এটিও একটি সমান্তর প্রগতি যার প্রথম পদ 6 এবং সাধারণ অন্তর -3।

সাধারণভাবে, একটি সমান্তর প্রগতি $a_1, a_2, \ldots, a_n$ এর ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$d = a_{k+1} - a_k$$

যেখানে a_{k+1} এবং a_k হল যথাক্রমে $(k+1)$তম এবং k তম পদ।

একটি প্রদত্ত সমান্তর প্রগতির d নির্ণয়ের জন্য আমাদের $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ এর সবগুলো নির্ণয়ের প্রয়োজন নেই। এদের মধ্যে যে-কোনো একটি নির্ণয় করাই যথেষ্ট।

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ সংখ্যার তালিকাটি লক্ষ করো। এটির দিকে তাকিয়ে তোমরা বলতে পারো যে, যে-কোনো দুটি পরপর পদের বিয়োগফল সমান নয়। সুতরাং, এটি একটি সমান্তর প্রগতি নয়।

লক্ষ করো, সমান্তর প্রগতি : 6, 3, 0, – 3, . . ., এর d নির্ণয়ের জন্য আমরা 3 থেকে 6 বিয়োগ করব, 6 থেকে 3 নয়, অর্থাৎ আমরা $(k + 1)$তম পদ থেকে k-তম পদ বিয়োগ করব, যদি $(k + 1)$তম পদ ক্ষুদ্রতম হয় তা হলেও।

চলো আমরা কিছু উদাহরণের মাধ্যমে এই ধারণাটি আরও স্পষ্ট করি।

উদাহরণ 1 : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d লেখো।

সমাধান : এখানে, $a = \frac{3}{2},\ d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1.$

লক্ষ করো যে, আমরা পর পর যে-কোনো দুটি পদ ব্যবহার করে d নির্ণয় করতে পারি, যদি আমরা জানি যে, সংখ্যাগুলো সমান্তর প্রগতিতে আছে।

উদাহরণ 2 : নিম্নলিখিত সংখ্যা তালিকার কোন্‌টি সমান্তর প্রগতি গঠন করে? যদি তারা সমান্তর প্রগতি গঠন করে তবে পরবর্তী দুটি পদ লেখো :

(i) 4, 10, 16, 22, . . .
(ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .
(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . .
(iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

সমাধান : (i) আমরা পাই, $a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$

$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

অর্থাৎ, $a_{k+1} - a_k$ প্রতিক্ষেত্রে সমান।

সুতরাং, প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর তালিকা একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে যেখানে সাধারণ অন্তর $d = 6$।

পরবর্তী দুটি পদ হল : $22 + 6 = 28$ এবং $28 + 6 = 34$.

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

অর্থাৎ, $a_{k+1} - a_k$ প্রতিক্ষেত্রে সমান।

সুতরাং, প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর তালিকা একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে যার সাধারণ অন্তর $d = -2$।

পরবর্তী দুটি পদ হল :

$$-5 + (-2) = -7 \quad \text{এবং} \quad -7 + (-2) = -9$$

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

যেহেতু $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$, তাই প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর তালিকা একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে না।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$
$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$
$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

এখানে, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$

সুতরাং, প্রদত্ত সংখ্যাগুলোর তালিকা একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে না।

অনুশীলনী 5.1

1. নিম্নলিখিত পরিস্থিতিগুলোর সাথে সম্পর্কযুক্ত সংখ্যাগুলো কি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে এবং কেন ?

(i) প্রত্যেক কিলোমিটারের পর ট্যাক্সি ভাড়া, যখন প্রথম কিলোমিটারের জন্য ভাড়া 15 টাকা এবং প্রত্যেক অতিরিক্ত কিলোমিটারের জন্য ভাড়া 8 টাকা হয়।

(ii) একটি সিলিন্ডারে থাকা বায়ুর পরিমাণ, যেখানে একটি বায়ু নিষ্কাশক পাম্প একই সময়ে সিলিন্ডারে থাকা বায়ুর $\frac{1}{4}$ অংশ নিষ্কাশন করে।

(iii) একটি কুয়ো (well) প্রতি মিটার খনন করার পর খরচ, যেখানে এটির জন্য খরচ, প্রথম মিটারের জন্য 150 টাকা এবং পরবর্তী প্রত্যেক মিটারের জন্য 50 টাকা করে বৃদ্ধি পায়।

(iv) প্রত্যেক বছরে হিসাবের খাতায় জমা হওয়া অর্থ, যখন জমা দেওয়া 10000 টাকার উপর বার্ষিক 8 % চক্রবৃদ্ধি সুদ দেওয়া হয়।

2. সমান্তর প্রগতির প্রথম চারটি পদ লেখো যখন প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d নিম্নরূপ :

(i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলোর প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর লেখো :

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. নিম্নলিখিত কোন্‌গুলো সমান্তর প্রগতি ? যদি এরা সমান্তর প্রগতি গঠন করে তবে সাধারণ অন্তর d নির্ণয় করো এবং আরও তিনটি পদ লেখো।

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 একটি সমান্তর প্রগতির n-তম পদ (nth Term of an AP)

চলো অনুচ্ছেদ 5.1 দেওয়া অবস্থার উপর পুনরায় বিচার করি যেখানে রীনা একটি চাকুরির জন্য আবেদন করে এবং নির্বাচিত হয়। তাকে এই কাজের জন্য প্রারম্ভিক বেতন মাসিক 8000 টাকা সাথে বার্ষিক 500 টাকা বেতন বৃদ্ধি হিসাবে নিযুক্তি দেওয়া হয়। পঞ্চম বছরে তার মাসিক বেতন কত হবে?

এর উত্তর দেওয়ার জন্য, এসো আমরা প্রথম দেখি তার মাসিক বেতন দ্বিতীয় বছরে কত হবে।

এটি হবে $(8000 + 500)$ টাকা $=$ 8500 টাকা। অনুরূপভাবে আমরা তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম বছরের জন্য তার মাসিক বেতন, আগের বছরের বেতনের সাথে 500 টাকা যোগ করে নির্ণয় করতে পারি। সুতরাং, তৃতীয় বছরের জন্য তার বেতন

$= (8500 + 500)$ টাকা

$= (8000 + 500 + 500)$ টাকা

$= (8000 + 2 \times 500)$ টাকা

$= [8000 + \mathbf{(3-1)} \times 500]$ টাকা (**তৃতীয় বছরের** জন্য)

$= 9000$ টাকা

চতুর্থ বছরের জন্য বেতন $= (9000 + 500)$ টাকা

$= (8000 + 500 + 500 + 500)$ টাকা

$= (8000 + 3 \times 500)$ টাকা

$= [8000 + \mathbf{(4-1)} \times 500]$ টাকা (**চতুর্থ বছরের** জন্য)

$= 9500$ টাকা

পঞ্চম বছরের জন্য বেতন $= (9500 + 500)$ টাকা

$= (8000+500+500+500+500)$ টাকা

$= (8000 + 4 \times 500)$ টাকা

$= [8000 + \mathbf{(5-1)} \times 500]$ টাকা (**পঞ্চম বছরের** জন্য)

$= 10000$ টাকা

লক্ষ করো আমরা সংখ্যাসমূহের একটি তালিকা পাচ্ছি

$$8000, 8500, 9000, 9500, 10000, \ldots$$

এই সংখ্যাসমূহ সমান্তর প্রগতিতে আছে। (কেন?)

এখন উপরে গঠিত নমুনা দেখে কি তুমি তার ষষ্ঠ বছরের মাসিক বেতন নির্ণয় করতে পারবে? 15 তম বছরের? এবং এটি ধরে নিয়ে যে সে তখনও এই কাজটি করবে 25 তম বছরে তার মাসিক বেতন কত হবে? এটি তুমি নির্ণয় করতে পারো আগের বছরের বেতনের সাথে প্রত্যেক বার 500 টাকা যোগ করে। আমরা কি এই প্রক্রিয়া সংক্ষিপ্ত করতে পারি? চলো আমরা দেখি। যেভাবে আমরা এই বেতন নির্ণয় করছি তা থেকে তোমরা হয়তো কিছু ধারণা করতে পারো।

15 তম বছরের জন্য বেতন

$$= 14 \text{ তম বছরের জন্য বেতন } + 500 \text{ টাকা}$$

$$= \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \dots + 500}_{13 \text{ বার}}\right] \text{টাকা} + 500 \text{ টাকা}$$

$$= [8000 + 14 \times 500] \text{ টাকা}$$

$$= [8000 + \mathbf{(15-1)} \times 500] \text{ টাকা} = 15000 \text{ টাকা}$$

অর্থাৎ, প্রথম বেতন $+ (15-1) \times$ বার্ষিক বৃদ্ধি

অনুরূপভাবে, 25 তম বছরের জন্য তার মাসিক বেতন হবে

$$[8000 + \mathbf{(25-1)} \times 500] \text{ টাকা} = 20000 \text{ টাকা}$$

$$= \text{প্রথম বেতন} + \mathbf{(25-1)} \times \text{বার্ষিক বৃদ্ধি}$$

এই উদাহরণটি তোমাদের কিছু ধারণা দেয় যে, কীভাবে তোমরা 15 তম পদ বা 25 তম পদ লিখবে এবং আরও সাধারণভাবে সমান্তর প্রগতির n তম পদ লিখবে।

ধরো, $a_1, a_2, a_3, \dots$ একটি সমান্তর প্রগতি যার প্রথম পদ a_1 হল a এবং সাধারণ অন্তর d ।

তাহলে,

দ্বিতীয় পদ $a_2 = a + d = a + \mathbf{(2-1)}\, d$

তৃতীয় পদ $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + \mathbf{(3-1)}\, d$

চতুর্থ পদ $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + \mathbf{(4-1)}\, d$

....

....

এই নমুনা দেখে, আমরা বলতে পারি যে ***n*-তম** পদ $a_n = a + (n-1)\, d.$

সুতরাং, **প্রথম পদ *a* এবং সাধারণ অন্তর *d* যুক্ত সমান্তর প্রগতিটির *n*-তম পদ হল $\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$ ।**

a_n কে **সমান্তর প্রগতির সাধারণ পদ (general term)**ও বলা হয়। যদি সমান্তর প্রগতির m-সংখ্যক পদ থাকে, তবে a_m শেষ পদকে প্রকাশ করে, **যাকে কোনো কোনো সময় l দিয়েও চিহ্নিত করা হয়।**

এসো কিছু উদাহরণ বিচার করি।

উদাহরণ 3 : সমান্তর প্রগতি : 2, 7, 12, . . . এর দশম পদ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ এবং $n = 10$

আমরা জানি, $a_n = a + (n - 1)\, d$

সুতরাং, $a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$

অতএব, প্রদত্ত সমান্তর প্রগতির দশম পদ 47 ।

উদাহরণ 4 : সমান্তর প্রগতি : 21, 18, 15, . . . এর কোন্ পদটি – 81 ? আরও নির্ণয় করো এর কোনো পদ '0' হবে কি ? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে কারণ দেখাও।

সমাধান : এখানে, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ এবং $a_n = -81$, এবং আমাদের n নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু $a_n = a + (n - 1)\, d$,

আমরা পাই
$$-81 = 21 + (n - 1)(-3)$$
$$-81 = 24 - 3n$$
$$-105 = -3n$$

সুতরাং, $n = 35$

অতএব, প্রদত্ত সমান্তর প্রগতির 35 তম পদ হল – 81

এরপর আমরা জানতে চাই যে, এমন কোনো n এখানে আছে কি যার জন্য $a_n = 0$ । যদি এমন একটি n সেখানে থাকে, তবে

$$21 + (n - 1)(-3) = 0,$$

অর্থাৎ, $3(n - 1) = 21$

অর্থাৎ, $n = 8$

সুতরাং, অষ্টম পদটি হল 0 ।

উদাহরণ 5 : সমান্তর প্রগতিটি নির্ণয় করো যার তৃতীয় পদ 5 এবং সপ্তম পদ 9.

সমাধান : আমরা পাই

$$a_3 = a + (3 - 1)\, d = a + 2d = 5 \qquad (1)$$

এবং $$a_7 = a + (7 - 1)\, d = a + 6d = 9 \qquad (2)$$

একঘাত সহ-সমীকরণ (1) এবং (2) সমাধান করে আমরা পাই

$$a = 3, \quad d = 1$$

অতএব, নির্ণেয় সমান্তর প্রগতিটি হল 3, 4, 5, 6, 7, . . .

উদাহরণ 6 : সংখ্যাসমূহের তালিকা 5, 11, 17, 23, . . . এর একটি পদ 301 কিনা যাচাই করো।

সমাধান : আমরা পাই :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

যেহেতু $k = 1, 2, 3,$ ইত্যাদির জন্য $a_{k+1} - a_k$ এর মান একই, তাই প্রদত্ত সংখ্যাসমূহের তালিকা একটি সমান্তর প্রগতি।

এখন, $a = 5$ এবং $d = 6.$

ধরো 301 হল এই সমান্তর প্রগতির n-তম পদ।

আমরা জানি যে,

$$a_n = a + (n-1)\,d$$

সুতরাং, $$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

অর্থাৎ, $$301 = 6n - 1$$

সুতরাং, $$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

কিন্তু n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হতে হবে (কেন?)।

সুতরাং, 301 সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যাসমূহের তালিকার একটি পদ নয়।

উদাহরণ 7 : দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা 3 দ্বারা বিভাজ্য?

সমাধান : 3 দ্বারা বিভাজ্য দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যাসমূহের তালিকা হল :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

এটি কি একটি সমান্তর প্রগতি? হ্যাঁ। এখানে, $a = 12,\ d = 3,\ a_n = 99.$

যেহেতু $$a_n = a + (n-1)\,d,$$

আমরা পাই $$99 = 12 + (n-1) \times 3$$

অর্থাৎ, $$87 = (n-1) \times 3$$

অর্থাৎ, $$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$

অর্থাৎ, $$n = 29 + 1 = 30$$

সুতরাং, 3 দ্বারা বিভাজ্য 30 টি দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা আছে।

উদাহরণ 8 : সমান্তর প্রগতি : 10, 7, 4, . . ., – 62 এর শেষ পদ থেকে (প্রথম পদের দিকে) 11 তম পদ নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3,\ l = -62,$

যেখানে $$l = a + (n-1)\,d$$

শেষ পদ থেকে শুরু করে 11-তম পদ নির্ণয় করার জন্য, আমরা সমান্তর প্রগতিটির মোট পদ সংখ্যা নির্ণয় করব।

সুতরাং, $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

অর্থাৎ, $-72 = (n-1)(-3)$

অর্থাৎ, $n - 1 = 24$

বা, $n = 25$

সুতরাং, সমান্তর প্রগতিটিতে 25 টি পদ আছে।

শেষ পদ থেকে শুরু করে 11-তম পদটি হবে 15-তম পদ (লক্ষ করো এটি 14 তম পদ নয়। কেন?)

সুতরাং, $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

অর্থাৎ, শেষ পদ থেকে শুরু করে 11তম পদটি হল -32 ।

বিকল্প সমাধান :

যদি আমরা সমান্তর প্রগতিটিকে বিপরীতক্রমে লিখি, তবে $a = -62$ এবং $d = 3$ (কেন?)

সুতরাং, এখন প্রশ্ন হচ্ছে a এবং d দিয়ে 11-তম পদ নির্ণয় করা।

সুতরাং, $a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$

অতএব, নির্ণেয় 11-তম পদ হল -32 ।

উদাহরণ 9 : 1000 টাকার একটি মূলধন প্রতি বছর 8% সরল সুদের হারে খাটানো হল। প্রত্যেক বছরের শেষে সুদ নির্ণয় করো। এই সুদসমূহ কি সমান্তর প্রগতি গঠন করে? যদি করে তবে এই তথ্যকে ব্যবহার করে 30 বছরের শেষে সুদ নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা জানি যে সরল সুদ গণনা করার সূত্রটি হল

$$\text{সরল সুদ} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

সুতরাং, প্রথম বছরের শেষে সুদ $= \frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ টাকা $=$ 80 টাকা

দ্বিতীয় বছরের শেষে সুদ $= \frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ টাকা $=$ 160 টাকা

তৃতীয় বছরের শেষে সুদ $= \frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ টাকা $=$ 240 টাকা

অনুরূপভাবে, আমরা চতুর্থ, পঞ্চম, ইত্যাদি বছরের শেষে সুদ নির্ণয় করতে পারি। অতএব, প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... বছরের শেষে সুদ (টাকায়) হল যথাক্রমে

$$80, 160, 240, \ldots$$

এটি একটি সমান্তর প্রগতি, যেহেতু এই তালিকার পরপর পদগুলোর মধ্যে পার্থক্য 80, অর্থাৎ, $d = 80$ । আবার, $a = 80$ ।

সুতরাং, 30 বছরের শেষে সুদ নির্ণয়ের জন্য, আমরা বের করব a_{30} ।

এখন, $$a_{30} = a + (30 - 1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

সুতরাং, 30 বছরের শেষে সুদ হবে 2400 টাকা।

উদাহরণ 10 : একটি ফুল বাগানে প্রথম সারিতে 23টি গোলাপ গাছ আছে, দ্বিতীয় সারিতে আছে 21টি, তৃতীয় সারিতে 19টি এবং এভাবে চলতে থাকবে। শেষ সারিতে আছে 5 টি গোলাপ গাছ। ফুল বাগানে কয়টি সারি আছে?

সমাধান : প্রথম, দ্বিতীয় ,তৃতীয় ...., সারিতে গোলাপ গাছের সংখ্যা হল :

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

এটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে (কেন?)। ধরো, ফুলবাগানে n টি সারি আছে।

তাহলে $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$, $a_n = 5$

যেহেতু, $$a_n = a + (n - 1)\,d$$

আমরা পাই, $$5 = 23 + (n - 1)(-2)$$

অর্থাৎ, $$-18 = (n - 1)(-2)$$

অর্থাৎ, $$n = 10$$

সুতরাং, ফুলবাগানে 10টি সারি আছে।

অনুশীলনী 5.2

1. নিম্নলিখিত সারণির শূন্যস্থান পূর্ণ করো যেখানে সমান্তর প্রগতির a হল প্রথম পদ, d সাধারণ অন্তর এবং a_n হল n তম পদ :

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	. . .
(ii)	– 18	. . .	10	0
(iii)	. . .	– 3	18	– 5
(iv)	– 18.9	2.5	. . .	3.6
(v)	3.5	0	105	. . .

2. নিম্নলিখিতগুলোতে শুদ্ধ উত্তর নির্বাচন করো এবং যুক্তি দাও :

(i) 10, 7, 4, . . . , এই সমান্তর প্রগতির 30 তম পদ হল :

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) – 87

(ii) $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots,$ এই সমান্তর প্রগতির 11 তম পদ হল :

(A) 28 (B) 22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলোর বাক্সের লুপ্ত পদসমূহ নির্ণয় করো :

(i) 2, $\boxed{}$, 26

(ii) $\boxed{}$, 13, $\boxed{}$, 3

(iii) 5, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $9\frac{1}{2}$

(iv) – 4, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 6

(v) $\boxed{}$, 38, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, – 22

4. সমান্তর প্রগতি 3, 8, 13, 18, . . . এর কোন্ পদটি 78 ?

5. নিম্নলিখিত প্রতিটি সমান্তর প্রগতির পদ সংখ্যা নির্ণয় করো :

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

6. সমান্তর প্রগতি 11, 8, 5, 2 . . . এর একটি পদ – 150 কিনা যাচাই করো।

7. একটি সমান্তর প্রগতির 31 তম পদ নির্ণয় করো যার 11 তম পদ 38 এবং 16 তম পদ 73 ।

8. একটি সমান্তর প্রগতির 50 টি পদ আছে যার তৃতীয় পদ 12 এবং শেষ পদ 106 । 29 তম পদ নির্ণয় করো।

9. যদি একটি সমান্তর প্রগতির তৃতীয় এবং নবম পদ যথাক্রমে 4 এবং – 8 হয়, তবে এই সমান্তর প্রগতির কোন পদটি শূন্য ?

10. একটি সমান্তর প্রগতির 17 তম পদটি দশম পদ থেকে 7 বেশি। সাধারণ অন্তর নির্ণয় করো।

11. সমান্তর প্রগতি 3, 15, 27, 39, . . . এর কোন পদটি 54 তম পদ থেকে 132 বেশি ?

12. দুটি সমান্তর প্রগতির একই সাধারণ অন্তর। তাদের 100 তম পদসমূহের পার্থক্য 100 , তাদের 1000 তম পদসমূহের পার্থক্য কত ?

13. তিন অঙ্ক বিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা 7 দ্বারা বিভাজ্য ?

14. 10 এবং 250 এর মধ্যবর্তী 4-এর কয়টি গুণিতক আছে ?

15. n -এর কোন মানের জন্য দুটি সমান্তর প্রগতি 63, 65, 67, . . . এবং 3, 10, 17, . . . এর n তম পদ সমান হবে ?

16. সমান্তর প্রগতিটি নির্ণয় করো যার তৃতীয় পদ 16 এবং সপ্তম পদটি পঞ্চম পদ থেকে 12 বেশি।

17. সমান্তর প্রগতি : 3, 8, 13, . . ., 253 -এর শেষ পদ থেকে শুরু করে 20 তম পদটি নির্ণয় করো।

18. একটি সমান্তর প্রগতির চতুর্থ এবং অষ্টম পদের সমষ্টি 24 এবং ষষ্ঠ এবং দশম পদের সমষ্টি 44। প্রগতিটির প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় করো।

19. সুব্বা রাও 1995 সালে বার্ষিক 5000 টাকা বেতনে কাজ করতে শুরু করেন এবং পরবর্তি প্রতি বছর 200 টাকা করে বেশি বেতন পান। কোন্ সালে তার বেতন 7000 টাকা হবে?

20. রামকলি কোনো একটি বছরের প্রথম সপ্তাহে 5 টাকা জমা করেন এবং পরের সপ্তাহগুলোতে 1.75 টাকা করে সাপ্তাহিক জমা বৃদ্ধি করেন। যদি n তম সপ্তাহটিতে তাঁর জমার পরিমাণ 20.75 টাকা হয়, তবে n নির্ণয় করো।

5.4 সমান্তর প্রগতির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি (Sum of First n Terms of an AP)

চলো অনুচ্ছেদ 5.1-এ প্রদত্ত ঘটনাটি পুনরায় বিচার করি, যেখানে শকিলা তার মেয়ের টাকার বাক্সে 100 টাকা রেখেছিল যখন সে এক বছরের ছিল, 150 টাকা রাখে তার দ্বিতীয় জন্মদিনে, 200 টাকা রাখে তার তৃতীয় জন্মদিনে এবং অনুরূপে চলতে থাকে। তার মেয়ের বয়স যখন 21 বছর হবে তখন তার টাকার বাক্সে সংগৃহীত টাকার পরিমাণ কত হবে?

এখানে তার প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ... জন্মদিনগুলোতে টাকার বাক্সে রাখা অর্থের (টাকার) পরিমাণ হল যথাক্রমে 100, 150, 200, 250, . . . 21 তম বর্ষ পর্যন্ত। 21 তম জন্মদিনে টাকার বাক্সে থাকা মোট অর্থ নির্ণয়ের জন্য আমরা 21 টি সংখ্যার প্রতিটিকে নিয়ে উপরের তালিকাটি লিখব এবং তারপর তাদের যোগ করব। তোমার কি মনে হচ্ছে না যে এটি একটি জটিল এবং সময়সাপেক্ষ প্রক্রিয়া? আমরা কি প্রক্রিয়াটিকে সংক্ষিপ্ত করতে পারি? এটি সম্ভব হবে যদি আমরা এই সমষ্টি নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বের করতে পারি। চলো আমরা দেখি।

আমরা গাউস্ (যার সম্পর্কে তোমরা অধ্যায় 1-এ পড়েছ) কে দেওয়া সমস্যাটি বিচার করছি যা তাকে কেবল 10 বছর বয়সে সমাধান করতে দেওয়া হয়েছিল। 1 থেকে 100 পর্যন্ত ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করার জন্য তাকে বলা হয়েছিল। তিনি তৎক্ষণাৎ উত্তর দিয়েছিলেন যে সমষ্টিটি হল 5050। তুমি কি অনুমান করতে পারো যে তিনি কীভাবে করলেন? তিনি লিখেছিলেন :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

এবং তারপর, সংখ্যাগুলোকে উল্টে লিখে

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

এই দুটিকে যোগ করে তিনি পেয়েছিলেন

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad (100 \text{ বার})$$

সুতরাং, $S = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5050$, অর্থাৎ, সমষ্টি হল $= 5050$.

এখন আমরা একই কৌশল প্রয়োগ করে একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করব :

$$a, a+d, a+2d, \ldots$$

এই সমান্তর প্রগতিটির n তম পদ হল $a+(n-1)\,d$ । ধরো S সমান্তর প্রগতিটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টিকে প্রকাশ করে। আমরা পাই

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + [a+(n-1)\,d] \qquad (1)$$

পদগুলোকে বিপরীতক্রমে পুনরায় লিখে আমরা পাই

$$S = [a+(n-1)\,d] + [a+(n-2)\,d] + \ldots + (a+d) + a \qquad (2)$$

পদ অনুযায়ী (1) এবং (2) যোগ করে আমরা পাই

$$2S = \frac{[2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d]}{n \text{ বার}}$$

বা, $2S = n\,[2a+(n-1)\,d]$ (যেহেতু এখানে n সংখ্যক পদ আছে)

বা, $S = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)\,d]$

সুতরাং, **একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি হল**

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a+(n-1)\,d]}$$

আমরা এটিকে এরূপেও লিখতে পারি $S = \frac{n}{2}\,[a+a+(n-1)\,d]$

অর্থাৎ, $$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,(a+a_n)} \qquad (3)$$

এখন, একটি সমান্তর প্রগতির যদি কেবল মান n সংখ্যক পদ থাকে, তাহলে শেষ পদ $a_n = l$ । (3) থেকে আমরা দেখি যে

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,(a+l)} \qquad (4)$$

এই রূপের ফলাফলটি উপযোগী হয় যখন সমান্তর প্রগতিটির প্রথম ও শেষ পদ দেওয়া থাকে এবং সাধারণ অন্তর দেওয়া থাকে না।

এখন আমরা প্রশ্নটিতে ফিরে যাব যা আমাদের শুরুতে দেওয়া হয়েছিল। শাকিলার মেয়ের টাকার বাক্সে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ... জন্মদিনে অর্থের (টাকায়) পরিমাণ ছিল যথাক্রমে 100, 150, 200, 250, . . . ।

এটি একটি সমান্তর প্রগতি। তার 21 তম জন্মদিনে সংগৃহীত মোট অর্থের পরিমাণ আমাদের নির্ণয় করতে হবে, অর্থাৎ, এই সমান্তর প্রগতির প্রথম 21টি পদের সমষ্টি।

এখানে, $a = 100$, $d = 50$ এবং $n = 21$.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d], \text{ সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই}$$

আমরা পাই, $$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21-1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

সুতরাং, তার 21 তম জন্মদিনে সংগৃহীত অর্থের পরিমাণ 12600 টাকা।

সূত্র প্রয়োগে সমস্যাটির সমাধান কি অনেক সহজতর হল না?

সমান্তর প্রগতির n সংখ্যক পদের সমষ্টিকে আমরা S-এর স্থানে S_n দিয়েও প্রকাশ করি। একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 20 টি পদের সমষ্টিকে আমরা S_{20} লিখে প্রকাশ করি। প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টির সূত্রে চারটি রাশি S, a, d এবং n সম্পর্ক যুক্ত। যদি আমরা তাদের যে-কোনো তিনটি জানি তাহলে আমরা চতুর্থটি বের করতে পারি।

মন্তব্য : একটি সমান্তর প্রগতির n তম পদটি হল তার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি ও প্রথম $(n-1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টির অন্তর, অর্থাৎ, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ।

চলো আমরা কিছু উদাহরণ দেখি।

উদাহরণ 11 : 8, 3, –2, . . . সমান্তর প্রগতির প্রথম 22 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

আমরা জানি

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

অতএব, $$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

সুতরাং, সমান্তর প্রগতিটির প্রথম 22 টি পদের সমষ্টি -979 ।

উদাহরণ 12 : যদি একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 14 টি পদের সমষ্টি 1050 হয় এবং এর প্রথম পদ 10 হয়, তবে 20 তম পদটি নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$.

যেহেতু, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d],$$

সুতরাং, $$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

অর্থাৎ, $910 = 91d$

বা, $d = 10$

অতএব, $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$, অর্থাৎ, 20 তম পদটি হল 200 ।

উদাহরণ 13 : 24, 21, 18, . . . সমান্তর প্রগতির কতগুলো পদ অবশ্যই নিতে হবে যাতে তাদের সমষ্টি 78 হয়?

সমাধান : এখানে, $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$, $S_n = 78$ । আমাদের n নির্ণয় করা প্রয়োজন।

আমরা জানি, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

সুতরাং, $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51 - 3n]$$

বা, $3n^2 - 51n + 156 = 0$

বা, $n^2 - 17n + 52 = 0$

বা, $(n-4)(n-13) = 0$

বা, $n = 4$ বা 13

n -এর উভয় মানই গ্রহণযোগ্য। সুতরাং, এখানে পদ সংখ্যা হয় 4 অথবা 13 ।

মন্তব্য :

1. এক্ষেত্রে প্রথম 4 টি পদের সমষ্টি = প্রথম 13 টি পদের সমষ্টি = 78 ।
2. দুটি উত্তরই সম্ভব কারণ পঞ্চম থেকে 13তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি শূন্য। এটির কারণ a ধনাত্মক এবং d ঋণাত্মক, এজন্য কিছু পদ ধনাত্মক হবে এবং অন্য কিছু পদ ঋণাত্মক এবং একে অপরের সাথে কেটে যাবে।

উদাহরণ 14 : সমষ্টি নির্ণয় করো :

(i) প্রথম 1000 টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (ii) প্রথম n টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান :

(i) ধরো $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$

একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n টি পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ প্রয়োগে আমরা পাই,

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1 + 1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

সুতরাং, প্রথম 1000 টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 500500 ।

(ii) ধরো, $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

এখানে $a = 1$ এবং শেষ পদ l হল n ।

অতএব, $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ বা, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

সুতরাং, **প্রথম n টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি হল**

$$\mathbf{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

উদাহরণ 15 : একটি সংখ্যার তালিকার n-তম পদ $a_n = 3 + 2n$ হলে, এর প্রথম 24 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

সমাধান :

যেহেতু, $a_n = 3 + 2n$,

সুতরাং, $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$

$\vdots$

সংখ্যার তালিকাটি হল $5, 7, 9, 11, \ldots$

এখানে, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ এবং এভাবে চলতে থাকবে।

সুতরাং, এটি একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে যার সাধারণ অন্তর $d = 2$ ।

S_{24} নির্ণয়ের জন্য, আমাদের আছে $n = 24, \quad a = 5, \quad d = 2.$

অতএব, $S_{24} = \frac{24}{2}\left[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2\right] = 12\left[10 + 46\right] = 672$

সুতরাং, সংখ্যা তালিকাটির প্রথম 24 টি পদের সমষ্টি 672 ।

উদাহরণ 16 : একটি টিভি সেট প্রস্তুতকারক সংস্থা তৃতীয় বছরে 600 টি

এবং সপ্তম বছরে 700 টি টিভি সেট উৎপাদন করে। এটি ধরে নিয়ে যে প্রত্যেক বছর উৎপাদন সমানভাবে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যায় বৃদ্ধি পায়, নির্ণয় করো :

(i) প্রথম বছরের উৎপাদন

(ii) দশম বছরের উৎপাদন

(iii) প্রথম 7 বছরের মোট উৎপাদন

সমাধান : (i) যেহেতু উৎপাদন প্রত্যেক বছর সমানভাবে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যায় বৃদ্ধি পায়, তাই প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, ... বছরগুলোতে উৎপাদিত টিভি সেটের সংখ্যা একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করবে।

চলো আমরা n তম বছরে উৎপাদিত টিভি সেটের সংখ্যাকে a_n দিয়ে প্রকাশ করি। তাহলে

$$a_3 = 600 \text{ এবং } a_7 = 700$$

বা, $a+2d = 600$

এবং $a + 6d = 700$

এই সমীকরণগুলো সমাধান করে, আমরা পাই $d = 25$ এবং $a = 550$ ।

অতএব, প্রথম বছরে টিভি সেট উৎপাদন হয়েছে 550 টি।

(ii) এখন $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

সুতরাং, দশম বছরে টিভি সেটের উৎপাদন 775 টি।এর

(iii) আবার, $S_7 = \frac{7}{2}\left[2 \times 550 + (7-1) \times 25\right]$

$$= \frac{7}{2}\left[1100 + 150\right] = 4375$$

অতএব, প্রথম 7 বছরে মোট টিভি সেট উৎপাদিত হয় 4375 টি।

অনুশীলনী 5.3

1. নিম্নলিখিত সমান্তর প্রগতিগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করো :

(i) 2, 7, 12, . . ., এর 10 টি পদ পর্যন্ত। (ii) –37, –33, –29, . . ., এর 12টি পদ পর্যন্ত।

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., এর 100টি পদ পর্যন্ত।(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$, . . ., এর 11টি পদ পর্যন্ত।

2. নীচের যোগফলগুলো নির্ণয় করো :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. একটি সমান্তর প্রগতিতে

(i) $a = 5, d = 3, a_n = 50$, হলে n এবং S_n নির্ণয় করো।

(ii) $a = 7, a_{13} = 35$, হলে d এবং S_{13} নির্ণয় করো।

(iii) $a_{12} = 37, d = 3$, হলে a এবং S_{12} নির্ণয় করো।

(iv) $a_3 = 15, S_{10} = 125$, হলে d এবং a_{10} নির্ণয় করো।

(v) $d = 5, S_9 = 75$, হলে a এবং a_9 নির্ণয় করো।

(vi) $a = 2, d = 8, S_n = 90$, হলে n এবং a_n নির্ণয় করো।

(vii) $a = 8, a_n = 62, S_n = 210$, হলে n এবং d নির্ণয় করো।

(viii) $a_n = 4, d = 2, S_n = -14$, হলে n এবং a নির্ণয় করো।

(ix) $a = 3, n = 8, S = 192$, হলে d নির্ণয় করো।

(x) $l = 28, S = 144$, এবং সেখানে মোট 9 টি পদ আছে। a নির্ণয় করো।

4. 9, 17, 25, . . . সমান্তর প্রগতির কয়টি পদ অবশ্যই নিলে তাদের যোগফল 636 হবে?

5. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ 5, শেষ পদটি 45 এবং সমষ্টি হল 400 । পদ সংখ্যা এবং সাধারণ অন্তর নির্ণয় করো।

6. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম ও শেষ পদ যথাক্রমে 17 এবং 350 । যদি সাধারণ অন্তর 9 হয়, তবে সেখানে কতগুলো পদ আছে এবং তাদের সমষ্টি কত?

7. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 22 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো যার $d = 7$ এবং 22 তম পদ 149।

8. একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 51টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো যার দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে 14 এবং 18 ।

9. যদি কোনো একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম 7 টি পদের সমষ্টি 49 এবং 17 টি পদের সমষ্টি 289। প্রথম n টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

10. দেখাও যে, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে যেখানে a_n নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রথম 15 টি পদের সমষ্টিও নির্ণয় করো।

11. যদি কোনো একটি সমান্তর প্রগতির n টি পদের সমষ্টি $4n - n^2$ হয়, তবে প্রথম পদটি কত (অর্থাৎ, S_1) ? প্রথম দুটি পদের সমষ্টি কত? দ্বিতীয় পদটি কত? অনুরূপভাবে, তৃতীয়, দশম এবং n-তম পদ নির্ণয় করো।

12. 6 দ্বারা বিভাজ্য প্রথম 40 টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করো।

13. 8-এর প্রথম 15 টি গুণিতকের সমষ্টি নির্ণয় করো।

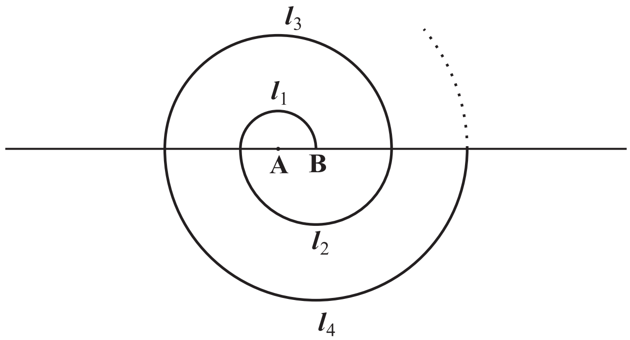
14. 0 এবং 50 এর মধ্যবর্তী অযুগ্ম সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করো।

15. একটি চুক্তিবদ্ধ নির্মাণ কার্য একটি নির্দিষ্ট তারিখের পরে সম্পাদনের জন্য নিম্নরূপে জরিমানা ধার্য করা হয় : প্রথম দিনের জন্য 200 টাকা, দ্বিতীয় দিনের জন্য 250 টাকা, তৃতীয় দিনের জন্য 300 টাকা ইত্যাদি, অর্থাৎ প্রত্যেক পরবর্তী দিনের জরিমানা ঠিক আগের দিনের জরিমানা থেকে 50 টাকা বেশি হয়। একজন ঠিকাদারকে জরিমানা বাবদ কী পরিমাণ অর্থ দিতে হবে যদি সে কাজটি সম্পূর্ণ করতে 30 দিন দেরি করে?

16. একটি বিদ্যালয় শিক্ষার্থীদের সামগ্রিক শিক্ষাগত কৃতিত্বের জন্য সাতটি নগদ পুরস্কারে মোট 700 টাকা ব্যয় করে। যদি প্রত্যেকটি পুরস্কারের মূল্য তার ঠিক আগের পুরস্কারের মূল্য থেকে 20 টাকা কম হয় তবে প্রতিটি পুরস্কারের মূল্য নির্ণয় করো।

17. একটি বিদ্যালয়ে শিক্ষার্থীরা বায়ুদূষণ হ্রাস করার জন্য বিদ্যালয় এবং তার চারপাশে বৃক্ষরোপণ করার পরিকল্পনা করল। এটি স্থির করা হল যে, প্রত্যেক শ্রেণির প্রতিটি শাখা তাদের শ্রেণি সংখ্যার সমসংখ্যক গাছ রোপণ করবে, উদাহরণস্বরূপ, প্রথম শ্রেণির একটি শাখা 1টি গাছ রোপণ করবে, দ্বিতীয় শ্রেণির একটি শাখা 2টি গাছ রোপণ করবে এবং অনুরূপভাবে দ্বাদশ শ্রেণি পর্যন্ত। সেখানে প্রতিটি শ্রেণিতে তিনটি শাখা আছে। শিক্ষার্থীরা কতগুলো গাছ রোপণ করবে?

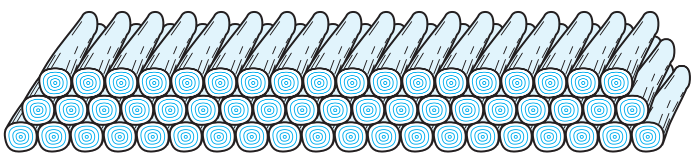
18. কেন্দ্র A থেকে শুরু করে পর্যায়ক্রমে কেন্দ্র A থেকে B তে পরিবর্তিত হয়ে পর পর কতগুলো অর্ধবৃত্তের সাহায্যে একটি সর্পিল (spiral) তৈরি হয়, যাদের ব্যাসার্ধগুলো 0.5 সেমি, 1.0 সেমি, 1.5 সেমি, 2.0 সেমি, . . . যা চিত্র 5.4-এ দেখানো হয়েছে। তেরোটি পরপর অর্ধবৃত্ত দিয়ে তৈরি অনুরূপ একটি সর্পিলের মোট দৈর্ঘ্য কত হবে? ($\pi = \frac{22}{7}$ ধরো)



চিত্র 5.4

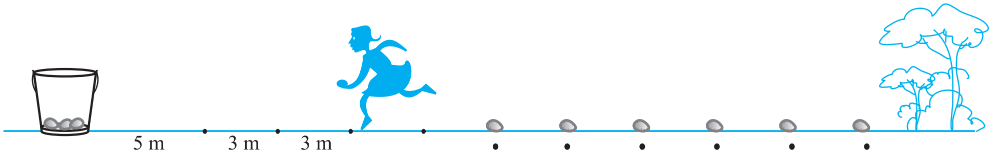
[**ইঙ্গিত :** পর্যায়ক্রমিক অর্ধবৃত্তগুলোর দৈর্ঘ্য হল $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$ যাদের কেন্দ্র হল যথাক্রমে A, B, A, B, . . .]

19. 200 টি গুঁড়িকে (logs) কয়েকটি সারিতে গাদা (stacked) করে নিম্নরূপে সাজিয়ে রাখা হয়েছে : সবচেয়ে নিচের সারিতে 20টি, তার পরের সারিতে 19টি, তার পরের সারিতে 18টি এবং চলতে থাকবে (চিত্র 5.5 দেখো)। মোট কয়টি সারিতে 200টি গুঁড়ি রাখা হয়েছে এবং সবচেয়ে উপরের সারিতে মোট কয়টি গুঁড়ি রয়েছে?



চিত্র 5.5

20. একটি কমলা দৌড় প্রতিযোগিতায় প্রারম্ভিক স্থানে একটি বালতি রাখা আছে, যা প্রথম কমলাটি থেকে 5মি দূরে এবং অন্য কমলাগুলোকে একই সরলরেখায় পরস্পরের মধ্যে 3 মি দূরত্বে রাখা আছে। সরলরেখায় মোট দশটি কমলা আছে (চিত্র 5.6 দেখো)।



চিত্র 5.6

একজন প্রতিযোগী বালতি থেকে শুরু করে সবচেয়ে কাছের কমলাটি তুলে নেয়, দৌড়ে এটি সহ ফিরে আসে, এটিকে বালতিতে রাখে, দৌড়ে ফিরে যায় পরবর্তী কমলাটি উঠিয়ে আনার জন্য, বালতির দিকে দৌড়ে আসে এটিকে রাখার জন্য এবং সে একইভাবে ততক্ষণ করতে থাকে যতক্ষণ না সবগুলো কমলা বালতিতে রাখে। প্রতিযোগীকে মোট কতটুকু দূরত্ব দৌড়াতে হবে?

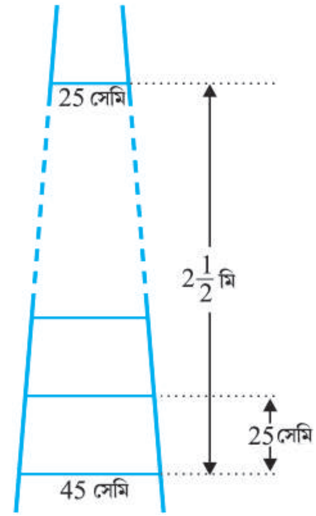
[**ইঙ্গিত :** একজন প্রতিযোগীকে প্রথম ও দ্বিতীয় কমলা তোলার জন্য মোট দূরত্ব (মিটারে) দৌড়াতে হবে $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

অনুশীলনী 5.4 (ঐচ্ছিক)*

1. 121, 117, 113, . . . সমান্তর প্রগতির প্রথম কোন্ পদটি ঋণাত্মক পদ ?
[**ইঙ্গিত :** $a_n < 0$ এর জন্য n নির্ণয় করো]

2. একটি সমান্তর প্রগতির তৃতীয় এবং সপ্তম পদের সমষ্টি 6 এবং তাদের গুণফল 8। সমান্তর প্রগতিটির প্রথম 16টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করো।

3. একটি মই-এর ধাপগুলো পরস্পর থেকে 25 সেমি দূরে আছে (চিত্র 5.7 দেখো)। ধাপগুলোর দৈর্ঘ্য সবচেয়ে নীচেরটি 45 সেমি থেকে সবচেয়ে উপরেরটি 25 সেমি সমহারে হ্রাস পায়। যদি সবচেয়ে উপরের এবং সবচেয়ে নীচের ধাপের মধ্যে দূরত্ব $2\frac{1}{2}$ মি হয়, তবে ধাপগুলোর জন্য প্রয়োজনীয় কাঠের মোট দৈর্ঘ্য কত ?
[**ইঙ্গিত :** ধাপের সংখ্যা $= \frac{250}{25} + 1$]

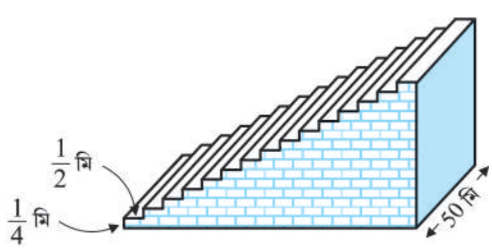


চিত্র 5.7

4. একটি সারিতে থাকা বাড়িগুলোকে পরপর 1 থেকে 49 পর্যন্ত নম্বর দেওয়া হল। দেখাও যে, x এর এমন একটি মান আছে যে, x নম্বরের বাড়িটির আগের বাড়িগুলোর নম্বরের সমষ্টি, এর পরের বাড়িগুলোর নম্বরের সমষ্টির সমান। x এর এই মানটি নির্ণয় করো।
[**ইঙ্গিত :** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. কোনো একটি ফুটবল মাঠের একটি ছোটো দর্শক গ্যালারি প্রত্যেকটি 50মি লম্বা 15 মি ধাপ দিয়ে গঠিত এবং নিরেট কংক্রিট (concrete) দিয়ে তৈরি।

প্রতিটি ধাপ $\frac{1}{4}$ মি উঁচু এবং $\frac{1}{2}$ মি চওড়া (চিত্র 5.8 দেখো)। গ্যালারিটি তৈরি করতে মোট কত আয়তন কংক্রিট প্রয়োজন তা নির্ণয় করো।
[**ইঙ্গিত :** প্রথম ধাপ তৈরি করতে প্রয়োজনীয় কংক্রিটের আয়তন $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50$ মি^{3}]



চিত্র 5.8

* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত নয়।

5.5 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একটি **সমান্তর প্রগতি** হল একটি সংখ্যার তালিকা, যেখানে প্রথম পদ ছাড়া, প্রতিটি পদ পাওয়া যায় তার পূর্ববর্তী পদের সাথে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা d যোগ করে। এই নির্দিষ্ট সংখ্যা d কে বলা হয় **সাধারণ অন্তর (common difference)**।
   একটি সমান্তর প্রগতির সাধারণ আকার হল $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots$
2. একটি প্রদত্ত সংখ্যার তালিকা $a_1, a_2, a_3, \ldots$ একটি সমান্তর প্রগতি হবে যদি $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ অন্তরফলগুলোর মান সমান হয়, অর্থাৎ, যদি $a_{k+1} - a_k$ এর মান k-এর বিভিন্ন মানের একই হয়।
3. কোনো একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে এর n-তম পদ (অথবা সাধারণ পদ) হল $a_n = a + (n-1)\,d$ ।
4. কোনো একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n টি পদের সমষ্টি হল :

$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

5. যদি একটি সসীম সমান্তর প্রগতির শেষ পদ l হয়, ধরো n-তম পদ, তাহলে সমান্তর প্রগতির সবগুলো পদের সমষ্টি হল :

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

যদি $a,\ b,\ c$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে $b = \dfrac{a+c}{2}$ এবং b কে বলা হয় a ও c এর সমান্তরীয় মধ্যক (arithmetic mean)।

ত্রিভুজ
(TRIANGLES)

6

6.1 ভূমিকা

তোমরা তোমাদের পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে ত্রিভুজ ও এর অনেক ধর্ম সম্পর্কে ভালোভাবে পরিচিত হয়েছ। নবম শ্রেণিতে, তোমরা ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে বিস্তারিতভাবে অধ্যয়ন করেছ। স্মরণ করো যে দুটি চিত্রকে *সর্বসম (congruent)* বলা হবে তখনই যখন এদের আকৃতি (shape) ও আকার (size) দুটোই এক হয়। এই অধ্যায়ে, তোমরা ওইসব চিত্র সম্পর্কে অধ্যয়ন করবে যাদের একই আকৃতি কিন্তু এদের আকার এক হওয়া আবশ্যক নয়। দুটি চিত্র যাদের একই আকৃতি (কিন্তু এদের আকার এক হওয়া আবশ্যক নয়) তাদের *সদৃশ চিত্র (similar figures)* বলা হয়। বিশেষভাবে, আমরা ত্রিভুজের সদৃশতা নিয়ে আলোচনা করব এবং এই জ্ঞানকে পূর্বে শেখা পিথাগোরাসের উপপাদ্যের একটি প্রমাণে সহজ প্রয়োগ করব।

তোমরা কি অনুমান করতে পার কীভাবে পর্বত (যেমন মাউন্ট এভারেস্ট)-এর উচ্চতা অথবা কিছু অনেক দূরবর্তী বস্তুর (যেমন চাঁদ) দূরত্ব নির্ণয় করা হয়?

তোমরা কি মনে কর এগুলো মাপনি ফিতার সাহায্যে সরাসরি মাপা যায়? আসলে, এসব উচ্চতা ও দূরত্ব পরোক্ষ পরিমাপের (indirect measurements) ধারণা ব্যবহার করে নির্ণয় করা যায়, যেটি চিত্রের সদৃশ্যতার নীতির উপর নির্ভর করে (উদাহরণ 7, অনুশীলনী 6.3 এর 15 নং প্রশ্ন এবং এছাড়াও এই পুস্তকের অধ্যায় 8 ও 9 দেখো)।

6.2 সদৃশ চিত্র (Similar Figures)

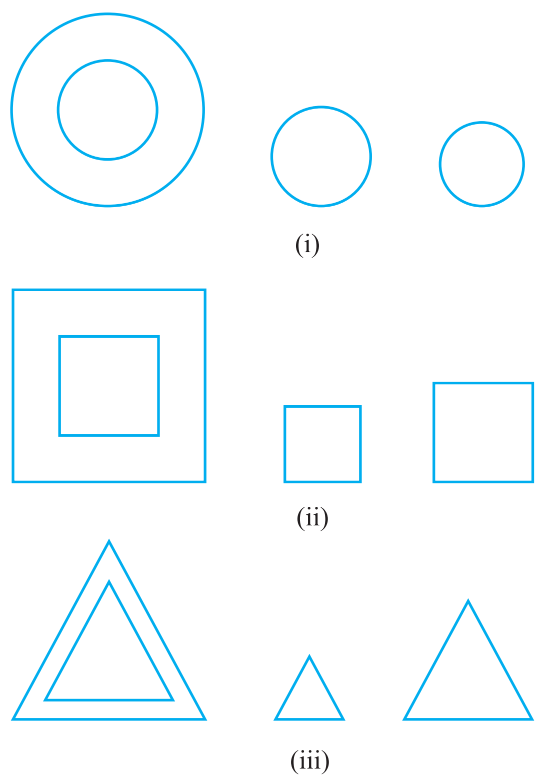
নবম শ্রেণিতে, তোমরা দেখেছ যে, সমান (একই) ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সকল বৃত্ত সর্বসম হয়, সমান বাহুবিশিষ্ট সকল বর্গক্ষেত্র সর্বসম হয় এবং সমান বাহুবিশিষ্ট সকল সমবাহু ত্রিভুজ সর্বসম হয়।

এখন যে-কোনো দুটি (অথবা অধিক) বৃত্ত [চিত্র 6.1 (i) দেখো] বিবেচনা করি।

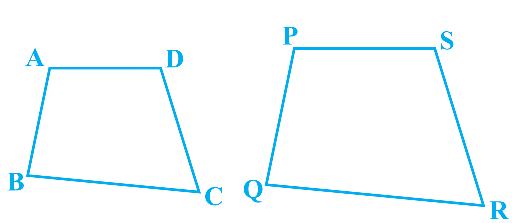
ওরা কি সর্বসম? যেহেতু, এদের সকলের ব্যাসার্ধ বিভিন্ন তাই তারা পরস্পর সর্বসম নয়। লক্ষ করো যে, এদের মধ্যে কিছু সর্বসম ও কিছু সর্বসম নয়। কিন্তু এদের সকলের আকৃতি একই। সুতরাং তাদের সকলকে আমরা *সদৃশ (similar)* বলব। দুটি সদৃশ চিত্রের একই আকৃতি আছে কিন্তু এদের একই আকার হওয়া আবশ্যক নয়। সুতরাং, সকল বৃত্ত সদৃশ হবে। দুই (বা ততোধিক) বর্গক্ষেত্র ও দুই (বা ততোধিক) সমবাহু ত্রিভুজ সম্পর্কে তোমরা কী বলবে [চিত্র 6.1 এর (ii) ও (iii) দেখো] ? বৃত্তের ক্ষেত্রে আমরা পূর্বে যা লক্ষ করেছি, এর মতই এখানে সকল বর্গক্ষেত্র সদৃশ হবে ও সকল সমবাহু ত্রিভুজ সদৃশ হবে।

উপরের আলোচনা থেকে, আমরা বলতে পারি যে, *সকল সর্বসম চিত্র সদৃশ হবে কিন্তু সদৃশ চিত্র সর্বসম হওয়া আবশ্যক নয়।*

একটি বৃত্ত ও একটি বর্গক্ষেত্র কি সদৃশ হতে পারে? একটি ত্রিভুজ ও একটি বর্গক্ষেত্র কি সদৃশ হতে পারে? শুধু পাশের চিত্রগুলোর দিকে তাকিয়ে তোমরা এই প্রশ্নগুলোর উত্তর দিতে পারবে (চিত্র 6.1 দেখো)। স্পষ্টতই, এই চিত্রগুলো সদৃশ নয়। (কেন?)

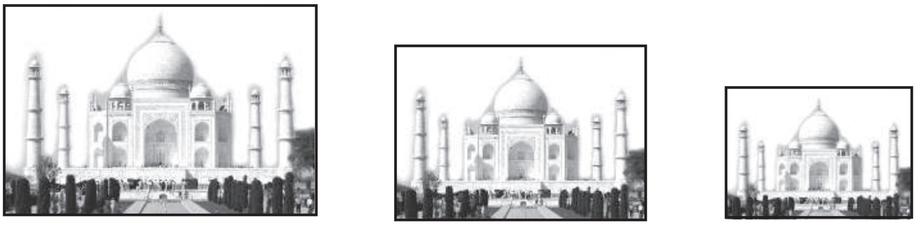


চিত্র 6.1



চিত্র 6.2

দুটি চতুর্ভুজ ABCD ও PQRS সম্পর্কে তোমরা কি বলতে পারো (চিত্র 6.2 দেখো) ? তারা কি সদৃশ ? এই চিত্রগুলো সদৃশ মনে হচ্ছে কিন্তু আমরা এ সম্পর্কে নিশ্চিত হতে পারি না। অতএব, আমাদের চিত্রের সদৃশতা সম্পর্কিত কিছু সংজ্ঞার অবশ্যই প্রয়োজন এবং এই সংজ্ঞার উপর ভিত্তি করে আমরা কিছু নিয়মের সাহায্যে নিশ্চিত হতে পারি যে প্রদত্ত চিত্রদ্বয় সদৃশ হবে কি হবে না। এইজন্য, চলো আমরা চিত্র 6.3 -এ দেওয়া ফটোগ্রাফগুলোকে লক্ষ করি :



চিত্র 6.3

তোমরা চটপট বলবে যে তারা একই স্মৃতিস্তম্ভের ফটোগ্রাফ (তাজমহল) কিন্তু তাদের আকার বিভিন্ন। তোমরা কী বলবে যে তিনটি ফটোগ্রাফ সদৃশ হবে? হ্যাঁ, তারা সদৃশ।

তোমরা একই ব্যক্তির সম আকারের দুটি ফটোগ্রাফ সম্পর্কে কি বলবে, যেখানে একটিতে লোকটির বয়স 10 বছর ও অপরটিতে লোকটির বয়স 40 বছর? এই ফটোগ্রাফগুলো কি সদৃশ হবে? এই ফটোগ্রাফগুলোর আকার একই কিন্তু এদের আকৃতি নিশ্চিতরূপে সমান নয়। সুতরাং, এরা সদৃশ নয়।

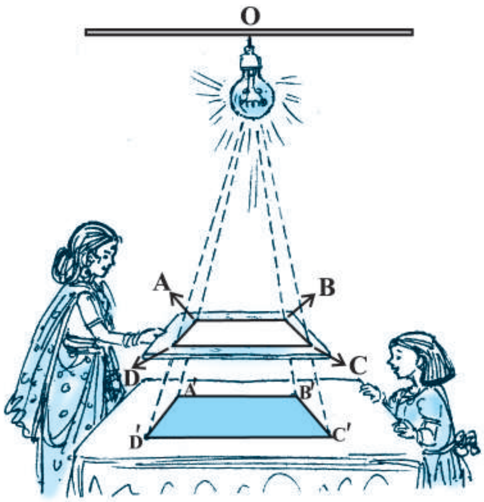
যখন কোনো ফটোগ্রাফার একই নেগেটিভ থেকে বিভিন্ন আকারের ফটোগ্রাফ ছাপাবে তখন সে কি করবে? তোমরা স্ট্যাম্প আকার, পাসপোর্ট আকার ও পোস্ট কার্ড আকারের ফটোগ্রাফ সম্পর্কে অবশ্যই শুনেছ। ফটোগ্রাফার সাধারণত একটি ছোটো আকারের ফিল্ম, ধরো যার আকার 35 মিমি, এর উপর ফটো তুলে ও একে বড়ো আকার, ধরো 45 মিমি (অথবা 55 মিমি) ফটোতে বর্ধিত করবে। অর্থাৎ, যদি আমরা ছোটো ফটোতে যে-কোনো একটি রেখাংশ বিবেচনা করি, তাহলে বড়ো ফটোতে (চিত্র) উহার অনুরূপ রেখাংশের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{45}{35}$ অথবা $\left(\frac{55}{35}\right)$। বাস্তবে এর অর্থ হল এই যে, ছোটো ফটোতে প্রতিটি রেখাংশকে 35:45 (অথবা 35:55) *অনুপাতে* বর্ধিত (সম্প্রসারিত) করা হয়। এটিকে এভাবেও বলা যায় যে, বড়ো ফটোতে প্রতিটি রেখাংশকে 45:35 (অথবা 55:35) অনুপাতে সংকুচিত (কমানো) করা হয়। অধিকন্তু, যদি তোমরা বিভিন্ন আকারের দুটি ফটোতে যে-কোনো অনুরূপ রেখাংশ যুগলের মধ্যবর্তী নতিগুলো (অথবা কোণগুলো) বিবেচনা কর, তাহলে তোমরা দেখবে যে, এই নতিগুলো (অথবা কোণগুলো) *সর্বদা সমান হবে*। এটি হল দুটি চিত্রের এবং বিশেষভাবে দুটি বহুভুজের সদৃশতা হওয়ার উপাদান (essence)। আমরা বলি যে :

সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে, যদি (i) তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (ii) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে (অথবা সমানুপাতে) থাকে।

লক্ষ করো যে, বহুভুজগুলোর জন্য অনুরূপ বাহুগুলোর একই অনুপাতকে *স্কেল গুণক* (অথবা *প্রতিনিধিত্বমূলক ভগ্নাংশ)* বলা হয়। তোমরা অবশ্যই শুনেছ যে বিশ্ব মানচিত্র এবং অট্টালিকা নির্মাণের জন্য নকশা প্রস্তুত করা হয় একটি উপযোগী স্কেল গুণক ব্যবহার করে ও নির্দিষ্ট নিয়মাবলি মানা হয়।

চিত্রের সদৃশতা সম্পর্কে আরও স্পষ্টভাবে বোঝার জন্য, চলো আমরা নিম্নলিখিত কার্যকলাপ সম্পাদন করি :

কার্যকলাপ 1 : তোমাদের শ্রেণিকক্ষের ভেতরের ছাদের কোনো একটি বিন্দু O তে একটি প্রজ্জ্বলিত বাল্‌ব বসাও ও এর ঠিক নীচে একটি টেবিল রাখ। চলো, আমরা একটি সমতল পিচবোর্ড থেকে একটি বহুভুজ, ধর একটি চতুর্ভুজ ABCD কেটে নিলাম ও এই পিচবোর্ডটিকে ভূমির সমান্তরাল প্রজ্জ্বলিত বালব ও টেবিলের মাঝে রাখ। তারপর দেখবে টেবিলের উপর ABCD এর একটি ছায়া পড়বে। এই ছায়ার সীমারেখাকে A′B′C′D′ (চিত্র 6.4 দেখো) দিয়ে চিহ্নিত করো।



চিত্র 6.4

লক্ষ করো যে, চতুর্ভুজ A′B′C′D′ হল চতুর্ভুজ ABCD-এর বর্ধিতকরণ। এর কারণ হল আলোর একটি ধর্ম আছে যে আলো সরলরেখায় চলে। তোমরা এটিও লক্ষ করতে পারো যে A′ বিন্দুটি রশ্মি OA এর উপর অবস্থিত। B′ বিন্দুটি রশ্মি OB এর উপর অবস্থিত, C′ বিন্দুটি OC এর উপর অবস্থিত এবং D′ বিন্দুটি OD এর উপর অবস্থিত। অতএব, চতুর্ভুজ A′B′C′D′ ও চতুর্ভুজ ABCD এর একই আকৃতি কিন্তু এদের আকার বিভিন্ন।

সুতরাং, চতুর্ভুজ A′B′C′D′ ও চতুর্ভুজ ABCD হল সদৃশ। আমরা আরও বলতে পারি যে, চতুর্ভুজ ABCD চতুর্ভুজ A′B′C′D′ এর সাথে সদৃশ।

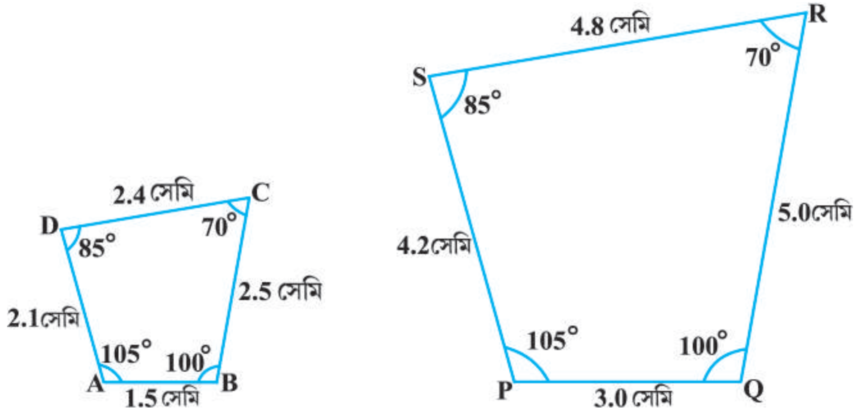
এখানে তোমরা আরও লক্ষ করতে পারো যে, শীর্ষবিন্দু A এর অনুরূপ শীর্ষবিন্দু হল A′, শীর্ষবিন্দু B এর অনুরূপ শীর্ষবিন্দু হল B′, শীর্ষবিন্দু C এর অনুরূপ শীর্ষবিন্দু হল C′ এবং শীর্ষবিন্দু D এর অনুরূপ শীর্ষবিন্দু হল D′। সাংকেতিকরূপে, এই অনুরূপতাগুলোকে $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ এবং $D' \leftrightarrow D$ রূপে প্রকাশ করা হয়। দুটি চতুর্ভুজের বাহুগুলো ও কোণগুলোকে প্রকৃতরূপে পরিমাপ করে তোমরা যাচাই করতে পারো যে,

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ এবং

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

এটি থেকে আবার স্পষ্ট যে, *সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ্য হবে, যদি (i) তাদের সবগুলো অনুরূপ কোণ সমান হয় ও (ii) তাদের সবগুলো অনুরূপ বাহু একই অনুপাতে (অথবা সমানুপাতে) থাকে।*

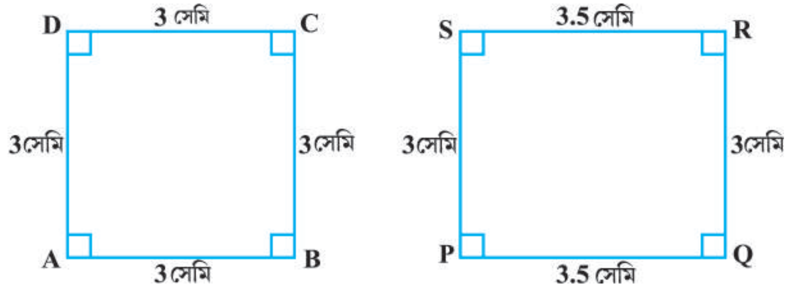
এর উপর গুরুত্ব আরোপ করে উপরের তথ্য থেকে তোমরা সহজেই বলতে পারছ যে, চিত্র 6.5-এ চতুর্ভুজ ABCD এবং চতুর্ভুজ PQRS পরস্পর সদৃশ।



চিত্র 6.5

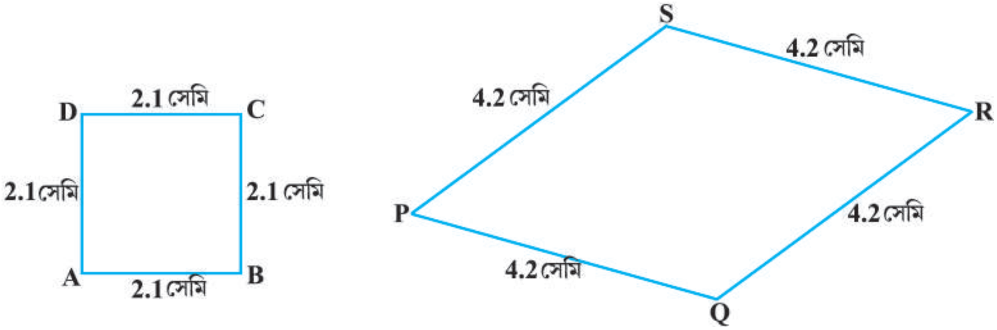
মন্তব্য : তোমরা যাচাই করতে পারছ যে, যদি একটি বহুভুজ অন্য একটি বহুভুজের সাথে সদৃশ এবং এই দ্বিতীয় বহুভুজটি কোনোও একটি তৃতীয় বহুভুজের সাথে সদৃশ হয়, তবে প্রথম বহুভুজটি তৃতীয় বহুভুজের সাথে সদৃশ হবে।

চিত্র 6.6-এ তোমরা লক্ষ করতে পারছ যে দুটি চতুর্ভুজ (একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি আয়তক্ষেত্র) এর অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় কিন্তু তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে না।



চিত্র 6.6

সুতরাং, দুটি চতুর্ভুজ সদৃশ নয়। অনুরূপভাবে, চিত্র 6.7-এ তোমরা লক্ষ করো যে, দুটি চতুর্ভুজ (একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস) এর অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে, কিন্তু তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান নয়। অর্থাৎ, দুটি বহুভুজ (চতুর্ভুজ) সদৃশ নয়।



চিত্র 6.7

অতএব, *দুটি বহুভুজের সদৃশতার উপরের দুটি শর্ত (i) এবং (ii) এর মধ্যে যে-কোনো একটি সিদ্ধ হওয়া তাদের সদৃশ হওয়ার জন্য যথেষ্ট নয়।*

অনুশীলনী 6.1

1. বন্ধনীতে প্রদত্ত শব্দগুলো থেকে সঠিক শব্দটি ব্যবহার করে শূন্যস্থানগুলো পূরণ করো :

(i) সকল বৃত্ত ________ হয়। (সর্বসম, সদৃশ)

(ii) সকল বর্গক্ষেত্র ________ হয়। (সদৃশ, সর্বসম)

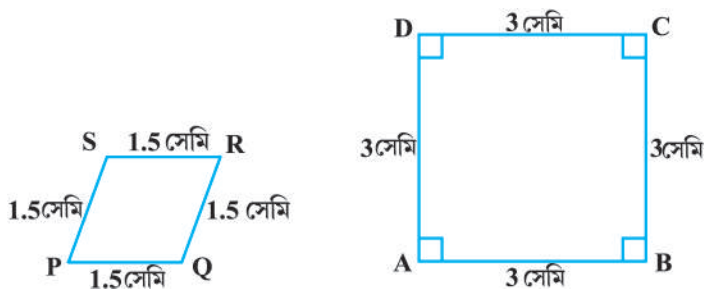
(iii) সকল ________ ত্রিভুজ সদৃশ হয়। (সমদ্বিবাহু, সমবাহু)

(iv) সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে, যদি (a) তাদের অনুরূপ কোণগুলো ________ হয় এবং (b) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো ________ হয়। (সমান, সমানুপাতিক)

2. নিম্নলিখিত যুগলের দুটি ভিন্ন ভিন্ন উদাহরণ দাও :

(i) সদৃশ চিত্রযুগল (ii) অ-সদৃশ চিত্রযুগল

3. নিম্নলিখিত চতুর্ভুজগুলো সদৃশ হবে কি হবে না, বিবৃত করো :



চিত্র 6.8

6.3 ত্রিভুজের সদৃশতা (Similarity of Triangles)

তোমরা দুটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে কী বলতে পারো?

তোমরা মনে করে দেখো যে ত্রিভুজও একটি বহুভুজ। তাই, দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার জন্য আমরা একই শর্তাবলি এখানে বিবৃত করতে পারি। অর্থাৎ,

দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে, যদি

(i) তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

(ii) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে (অথবা সমানুপাতে) থাকে।

লক্ষ করো যে, যদি দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় তবে এরা *সদৃশকোণী ত্রিভুজযুগল* হিসেবে পরিচিত হবে। একজন বিখ্যাত গ্রিক গণিতজ্ঞ থেলস্ দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজ সম্বন্বিত একটি গুরুত্বপূর্ণ সত্যতা প্রদান করেন যা নিম্নে বিবৃত করা হল :

দুটি সদৃশকোণী ত্রিভুজে যে-কোনো দুটি অনুরূপ বাহুর অনুপাত সর্বদা একরকম হয়।

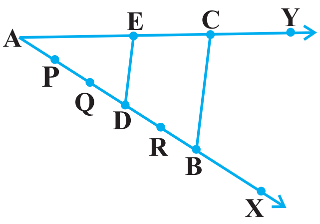
এরকম বিশ্বাস করা হয় যে, সদৃশতার জন্য থেলস্ একটি ফলাফল ব্যবহার করেছিলেন যাকে *মৌলিক সমানুপাতিক উপপাদ্য* (এখন *থেলসের উপপাদ্য* নামে পরিচিত) বলা হয়।

থেলস্
(640 – 546 খ্রিস্ট পূর্ব)

মৌলিক সমানুপাতিক উপপাদ্য বোঝার জন্য, চলো আমরা নিম্নলিখিত কার্যকলাপ সম্পাদন করি :

কার্যকলাপ 2 : যে-কোনো একটি কোণ XAY অঙ্কণ করো এবং এর একটি বাহু AX এর উপর কিছু বিন্দু (ধরো পাঁচটি বিন্দু) যেমন P, Q, D, R এবং B এমনভাবে চিহ্নিত করো যাতে AP = PQ = QD = DR = RB হয়।

এখন, B বিন্দুগামী একটি রেখা অঙ্কন করো যা বাহু AY-কে C বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 6.9 দেখো)।

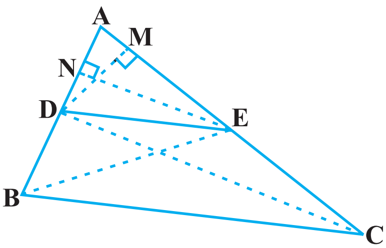


চিত্র 6.9

আবার, D বিন্দুগামী BC এর সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করো যা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। তোমরা কি তোমাদের অঙ্কন থেকে দেখতে পারছ যে, $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ হয়? AE এবং EC পরিমাপ করো। $\frac{AE}{EC}$ সম্পর্কে কী বলবে? লক্ষ করো যে, $\frac{AE}{EC}$ ও $\frac{3}{2}$ এর সমান। এইভাবে, তোমরা দেখতে পারছ যে, Δ ABC-এ DE || BC এবং $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$। এটি কি একটি সমাপতন (coincidence)? নাকি এটি নিম্নলিখিত উপপাদ্য (মৌলিক সমানুপাতিক উপপাদ্য) এর কারণে হয় :

উপপাদ্য 6.1 : *যদি একটি ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা অপর দুটি বাহুকে ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে, তবে অপর বাহু দুটি একই অনুপাতে বিভক্ত হবে।*

প্রমাণ : একটি ত্রিভুজ ABC দেওয়া আছে যেখানে BC এর সমান্তরাল রেখা অপর দুটি বাহু AB এবং AC কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করেছে (চিত্র 6.10 দেখো)।



চিত্র 6.10

আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ।

BE ও CD যুক্ত করি এবং তারপর $DM \perp AC$ এবং $EN \perp AB$ অঙ্কন করি।

এখন, Δ ADE -এর ক্ষেত্রফল (= $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা) = $\frac{1}{2} \times AD \times EN$ ।

নবম শ্রেণি থেকে মনে করে দেখো যে, Δ ADE এর ক্ষেত্রফলকে সংক্ষেপে ক্ষেত্রফল (ADE) দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ADE) = $\frac{1}{2}\, AD \times EN$

অনুরূপভাবে, ক্ষেত্রফল (BDE) = $\frac{1}{2}\, DB \times EN$,

ক্ষেত্রফল (ADE) = $\frac{1}{2}\, AE \times DM$ এবং ক্ষেত্রফল (DEC) = $\frac{1}{2}\, EC \times DM$.

অতএব, $$\frac{\text{ক্ষেত্রফল (ADE)}}{\text{ক্ষেত্রফল (BDE)}} = \frac{\frac{1}{2}\, AD \times EN}{\frac{1}{2}\, DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

এবং $$\frac{\text{ক্ষেত্রফল (ADE)}}{\text{ক্ষেত্রফল (DEC)}} = \frac{\frac{1}{2}\, AE \times DM}{\frac{1}{2}\, EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

লক্ষ করো যে, Δ BDE ও Δ DEC একই ভূমি DE এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (BDE) = ক্ষেত্রফল (DEC) (3)

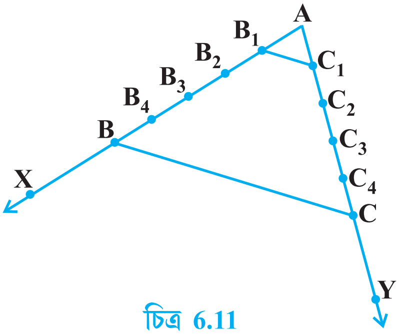
সুতরাং, (1), (2) ও (3) থেকে আমরা পাই :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

এই উপপাদ্যের বিপরীত (converse) বিবৃতিটিও কি সত্য? (বিপরীত বিবৃতির অর্থ বোঝার জন্য পরিশিষ্ট 1 দেখো)? এটি পরীক্ষা করার জন্য, চলো আমরা নীচের কার্যকলাপটি সম্পাদন করি:

কার্যকলাপ 3 : তোমাদের নোটবই-এ একটি কোণ XAY অঙ্কন করো এবং রশ্মি AX এর উপর কিছু বিন্দু যেমন B_1, B_2, B_3, B_4 এবং B এমনভাবে চিহ্নিত করো যাতে $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ হয়।

অনুরূপভাবে, রশ্মি AY-এর উপর কিছু বিন্দু যেমন C_1, C_2, C_3, C_4 এবং C এমনভাবে চিহ্নিত করো যাতে $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ হয়। তারপর B_1C_1 এবং BC যুক্ত করো (চিত্র 6.11 দেখো)।



চিত্র 6.11

লক্ষ করো যে, $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (প্রতিটি $\frac{1}{4}$ এর সমান)

তোমরা আরও লক্ষ করো যে, B_1C_1 এবং BC রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল অর্থাৎ,

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

অনুরূপভাবে, B_2C_2, B_3C_3 এবং B_4C_4 যুক্ত করে, তোমরা দেখতে পারছ যে :

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} \left(= \frac{2}{3}\right) \text{ এবং } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

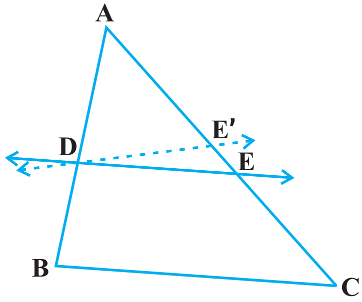
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} \left(= \frac{3}{2}\right) \text{ এবং } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} \left(= \frac{4}{1}\right) \text{ এবং } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1), (2), (3) এবং (4) থেকে, এটা দেখা যাচ্ছে যে, যদি একটি রেখা কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে একই অনুপাতে বিভক্ত করে তবে রেখাটি ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সহিত সমান্তরাল হবে।

তোমরা কোনো অন্য মাপের কোণ XAY অঙ্কণ করে এবং AX ও AY বাহুদ্বয়ের উপর যে-কোনো সংখ্যক সমান অংশ নিয়ে এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করতে পারো। প্রতিক্ষেত্রে, তোমরা একই ফলাফলে পৌঁছুবে। অর্থাৎ, আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যটি পাব, যেটি হল উপপাদ্য 6.1 এর বিপরীত উপপাদ্য :

উপপাদ্য 6.2 : *যদি একটি সরলরেখা কোনো ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুকে একই অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে সরলরেখাটি তৃতীয় বাহুর সাথে সমান্তরাল হবে।*



চিত্র 6.12

এই উপপাদ্যটি আমরা প্রমাণ করতে পারব, যদি একটি রেখা DE এমনভাবে নেওয়া হয় যাতে $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ হয়। এখানে আমরা ধরে নিই যে, রেখা DE, BC এর সাথে সমান্তরাল নয় (চিত্র 6.12 দেখো)।

যদি DE বাহু BC এর সাথে সমান্তরাল না হয়, তবে BC এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা DE′ অঙ্কন করো।

অতএব, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (কেন ?)

সুতরাং, $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (কেন ?)

উপরের সমীকরণের উভয়পক্ষে 1 যোগ করে, তোমরা দেখতে পারছ যে, E ও E′ অবশ্যই মিলিত হবে। (কেন ?)

উপরিউক্ত উপপাদ্যগুলোর প্রয়োগ ব্যাখ্যা করার জন্য চলো আমরা কিছু উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

উদাহরণ 1 : যদি একটি সরলরেখা কোনো ত্রিভুজ ABC এর দুটি বাহু AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে এবং সরলরেখাটি যদি BC এর সাথে সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (চিত্র 6.13 দেখো)।

সমাধান : $DE \parallel BC$ (প্রদত্ত)

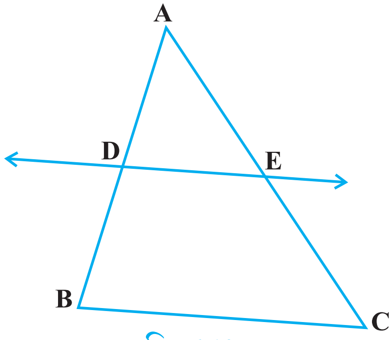
অতএব, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (উপপাদ্য 6.1)

বা, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

বা, $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

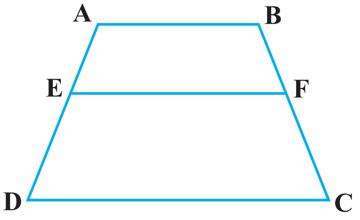
বা, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

সুতরাং, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



চিত্র 6.13

উদাহরণ 2 : ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যেখানে AB || DC। অ-সমান্তরাল বাহুদ্বয় AD এবং BC এর উপর দুটি বিন্দু যথাক্রমে E ও F এমনভাবে নেওয়া হয় যাতে EF বাহু AB এর সাথে সমান্তরাল হয় (চিত্র 6.14 দেখো)। দেখাও যে, $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ।



চিত্র 6.14

সমাধান : চলো আমরা A ও C কে যুক্ত করি যা EF কে G বিন্দুতে ছেদ করেছে (চিত্র 6.15 দেখো)।

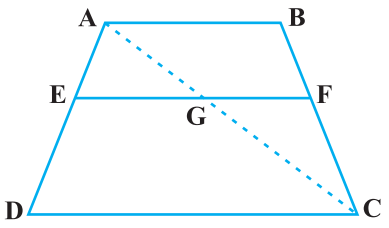
AB || DC এবং EF || AB (প্রদত্ত)

অতএব, EF || DC (একই রেখার সাথে সমান্তরাল রেখাগুলো পরস্পর সমান্তরাল হয়)

এখন, Δ ADC-এ,

EG|| DC (যেহেতু EF || DC)

সুতরাং, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (উপপাদ্য 6.1) (1)



চিত্র 6.15

অনুরূপভাবে, Δ CAB থেকে,

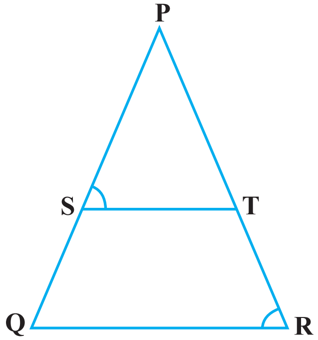
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

অর্থাৎ, $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

সুতরাং, (1) এবং (2) থেকে,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

উদাহরণ 3 : চিত্র 6.16-এ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ এবং $\angle PST = \angle PRQ$। প্রমাণ করো যে, PQR একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



চিত্র 6.16

সমাধান : এখানে দেওয়া আছে যে, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

অতএব, ST || QR (উপপাদ্য 6.2)

সুতরাং, $\angle PST = \angle PQR$ (অনুরূপ কোণযুগল) (1)

আরও, দেওয়া আছে যে,

$$\angle PST = \angle PRQ \qquad (2)$$

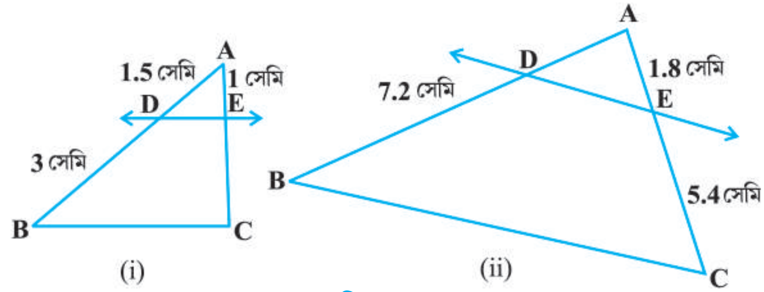
অতএব, $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) ও(2) থেকে]

সুতরাং, PQ = PR (সমান কোণগুলোর বিপরীত বাহু)

অর্থাৎ, PQR একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 6.2

1. চিত্র 6.17 এর, (i) ও (ii)-এ, DE || BC ।তাহলে (i)-এ EC ও (ii)-এ AD নির্ণয় করো।



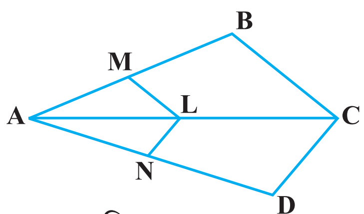
চিত্র 6.17

2. Δ PQR এর PQ ও PR বাহুর উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু হল যথাক্রমে E ও F ।নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রের জন্য EF || QR কিনা বিবৃত করো :

(i) PE = 3.9 সেমি, EQ = 3 সেমি, PF = 3.6 সেমি এবং FR = 2.4 সেমি

(ii) PE = 4 সেমি, QE = 4.5 সেমি, PF = 8 সেমি এবং RF = 9 সেমি

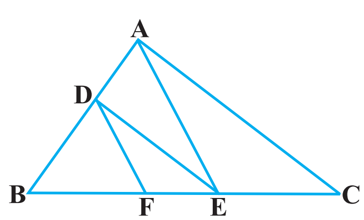
(iii) PQ = 1.28 সেমি, PR = 2.56 সেমি, PE = 0.18 সেমি এবং PF = 0.36 সেমি



চিত্র 6.18

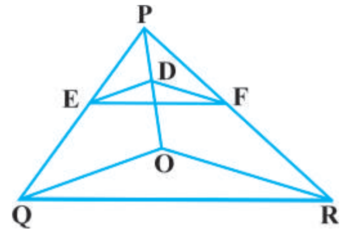
3. চিত্র 6.18-এ, যদি LM || CB এবং LN || CD হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ।

4. চিত্র 6.19-এ, যদি DE || AC এবং DF || AE হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ।



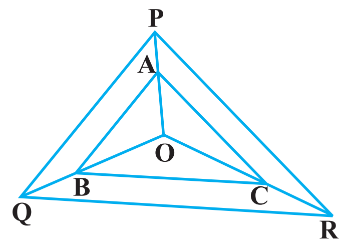
চিত্র 6.19

5. চিত্র 6.20-এ, DE || OQ এবং DF || OR । দেখাও যে, EF || QR ।



চিত্র 6.20

6. চিত্র 6.21-এ, OP, OQ ও OR এর উপর অবস্থিত তিনটি বিন্দু হল যথাক্রমে A, B ও C । বিন্দুগুলো এমনভাবে অবস্থিত যাতে AB || PQ এবং AC || PR হয়। দেখাও যে, BC || QR।



চিত্র 6.21

7. উপপাদ্য 6.1 ব্যবহার করে, প্রমাণ করো যে, একটি ত্রিভুজের কোনো এক বাহুর মধ্যবিন্দুগামী ও দ্বিতীয় বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (মনে করে দেখো যে, তোমরা এটি নবম শ্রেণিতে প্রমাণ করেছিলে)।

8. উপপাদ্য 6.2 ব্যবহার করে, প্রমাণ করো যে, একটি ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযুক্তকারী রেখা তৃতীয় বাহুর সাথে সমান্তরাল হয়। (মনে করে দেখো যে তোমরা এটি নবম শ্রেণিতে প্রমাণ করেছিলে)।

9. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার AB || DC এবং এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ।

10. চতুর্ভুজ ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যাতে $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ হয়। দেখাও যে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম।

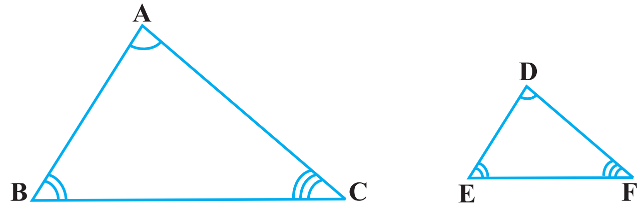
6.4 ত্রিভুজের সদৃশতার জন্য শর্তসমূহ (Criteria for Similarity of Triangles)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, আমরা বিবৃত করেছিলাম যে দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে, যদি (i) তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (ii) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে (অথবা সমানুপাতে) হয়।

অর্থাৎ, Δ ABC এবং Δ DEF -এ, যদি

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ হয়, তবে দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে (চিত্র 6.22 দেখো)।



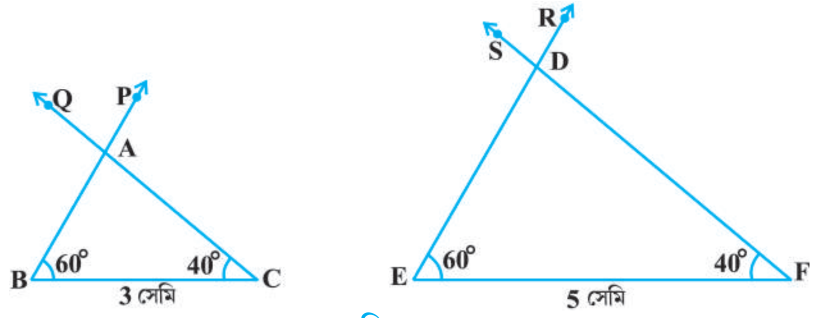
চিত্র 6.22

এখানে, তোমরা দেখতে পারছ যে, A এর অনুরূপ D, B এর অনুরূপ E ও C এর অনুরূপ F। সাংকেতিকরূপে, এই দুটি ত্রিভুজের সদৃশতাকে লেখা হয় 'Δ ABC ~ Δ DEF' এবং এটিকে পড়া হয় 'ত্রিভুজ ABC ও ত্রিভুজ DEF পরস্পর সদৃশ'। সংকেত '~' 'সদৃশতা' প্রকাশ করার জন্য ব্যবহৃত হয়। মনে করে দেখো যে নবম শ্রেণিতে তোমরা 'সর্বসমতা' প্রকাশ করার জন্য সংকেত '$\cong$' ব্যবহার করেছিলে।

এই কথা আমাদের অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে, দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার ক্ষেত্রে আমরা যেরকম করেছিলাম, তেমনি দুটি ত্রিভুজের সদৃশতাকেও আমরা সাংকেতিক রূপে প্রকাশ করব। তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর সঠিক অনুরূপতা ব্যবহার করে। উদাহরণস্বরূপ, চিত্র 6.22-এ Δ ABC এবং Δ DEF এর জন্য আমরা Δ ABC ~ Δ EDF অথবা Δ ABC ~ Δ FED লিখতে পারি না। যদিও আমরা লিখতে পারি Δ BAC ~ Δ EDF।

এখন একটি স্বাভাবিক প্রশ্ন মনে আসছে : দুটি ত্রিভুজ, ধরো Δ ABC এবং Δ DEF এর সদৃশতা পরীক্ষা করার জন্য আমরা কি সর্বদা তাদের অনুরূপ কোণগুলোর সবগুলো যুগলের সমতা সম্পর্কে ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) ও তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর সবগুলোর যুগলের অনুপাতের সমতা সম্পর্কে $\left(\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}\right)$ দৃষ্টিপাত করি ? চলো আমরা পরীক্ষা করি। মনে করে দেখো যে নবম শ্রেণিতে, তোমরা দুটি ত্রিভুজের শুধুমাত্র তিন জোড়া অনুরূপ অংশ (অথবা উপাদান) নিয়ে দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার জন্য কিছু নীতি অর্জন করেছিলে। এখানেও, চলো আমরা দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার জন্য এমন কিছু মানদণ্ডে পৌঁছানোর চেষ্টা করি, যাতে এই দুটি ত্রিভুজের ছয় জোড়া অনুরূপ অংশগুলোর সবগুলোর পরিবর্তে, এই অনুরূপ অংশগুলোর কম সংখ্যক জোড়ার উপর আমরা সীমাবদ্ধ থাকতে পারি। এর জন্য, চলো আমরা নিম্নলিখিত কার্যকলাপ সম্পাদন করি :

কার্যকলাপ 4 : দুটি ভিন্ন ভিন্ন দৈর্ঘ্যের, ধরো, 3 সেমি এবং 5 সেমি এর, যথাক্রমে দুটি রেখাংশ BC ও EF অঙ্কন করো। তারপর, B এবং C বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\angle PBC$ এবং $\angle QCB$ মাপের দুটি কোণ, ধরো তাদের পরিমাপ যথাক্রমে $60°$ এবং $40°$, অঙ্কন করো। এছাড়াও, E ও F বিন্দুদ্বয়ে যথাক্রমে $60°$ এবং $40°$ পরিমাপ নিয়ে দুটি কোণ $\angle REF$ এবং $\angle SFE$ অঙ্কণ করো (চিত্র 6.23 দেখো)।



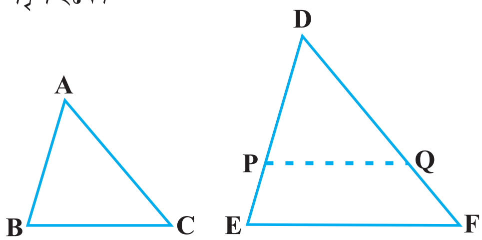
চিত্র 6.23

মনে করো BP এবং CQ রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং ER এবং FS রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF-এ তোমরা দেখতে পাচ্ছ যে, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং $\angle A = \angle D$। অর্থাৎ, এই দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়। তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সম্পর্কে তোমরা কী বলবে ? লক্ষ করো যে, $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ । $\frac{AB}{DE}$ এবং $\frac{CA}{FD}$ সম্পর্কে তোমরা কী বলবে ? AB, DE, CA এবং FD পরিমাপ করে, তোমরা নির্ণয় করতে পারবে যে, $\frac{AB}{DE}$ এবং $\frac{CA}{FD}$ । উভয়ই 0.6 এর সমান (অথবা 0.6 এর কাছাকাছি, যদি পরিমাপে সামান্য কিছু ত্রুটি থাকে)। অর্থাৎ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ । তোমরা অসংখ্য ত্রিভুজ জোড়, যাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান, অঙ্কন করে এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করতে পারো। প্রতি বার তোমরা দেখবে যে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে (অথবা সমানুপাতে) থাকে। এই কার্যকলাপটি আমাদেরকে দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার জন্য নিম্নলিখিত নীতিতে পৌঁছুতে সাহায্য করে।

উপপাদ্য 6.3 : *যদি দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, তবে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে (অথবা সমানুপাতে) থাকবে এবং অতঃপর ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।*

এই শর্তটিকে দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার AAA (কোণ-কোণ-কোণ) শর্ত হিসেবে উল্লেখ করা হয়।

এই উপপাদ্যটিকে প্রমাণ করার জন্য দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF এমনভাবে নেওয়া হয় যেখানে $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ (চিত্র 6.24 দেখো)।



চিত্র 6.24

DP = AB এবং DQ = AC কাটো এবং P ও Q যুক্ত করো।

তাহলে $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (কেন ?)

এ থেকে পাওয়া যায়, $\angle B = \angle P = \angle E$ এবং $PQ \parallel EF$ (কীভাবে ?)

সুতরাং, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ (কেন ?)

অর্থাৎ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (কেন ?)

অনুরূপভাবে, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ এবং তাই, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ।

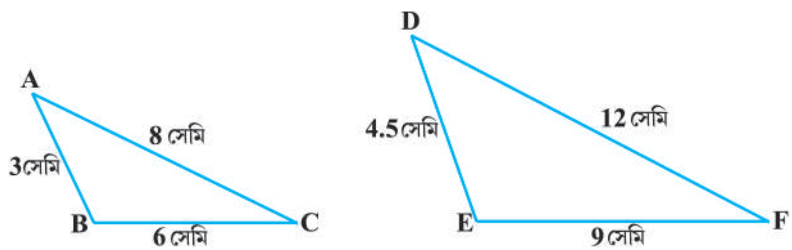
মন্তব্য : যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজের কোণের যোগফলের ধর্মানুযায়ী, তাদের তৃতীয় কোণটিও সমান হবে। সুতরাং, AAA সদৃশতা নীতিটি নিম্নরূপেও বিবৃত করা যায় :

যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।

এটিকে দুটি ত্রিভুজের AA *সদৃশতা শর্ত* হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

উপরে তোমরা দেখেছ যে যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হয়, তবে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক (proportional) (অর্থাৎ, একই অনুপাতে) হবে। এই বিবৃতিটির বিপরীত বিবৃতি সম্পর্কে কী বলবে ? এর বিপরীত বিবৃতি কি সত্য হবে ? অন্য অর্থে, যদি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমানুপাতিক হয়, তবে এটি কি সত্য যে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান : চলো আমরা এটিকে একটি কার্যকলাপের মাধ্যমে পরীক্ষা করি :

কার্যকলাপ 5 : দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF এমনভাবে অঙ্কন করো যেখানে AB = 3 সেমি, BC = 6 সেমি, CA = 8 সেমি, DE = 4.5 সেমি, EF = 9 সেমি এবং FD = 12 সেমি হয় (চিত্র 6.25 দেখো)।



চিত্র 6.25

তোমরা জান : $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (প্রতিটি $\frac{2}{3}$ এর সমান)

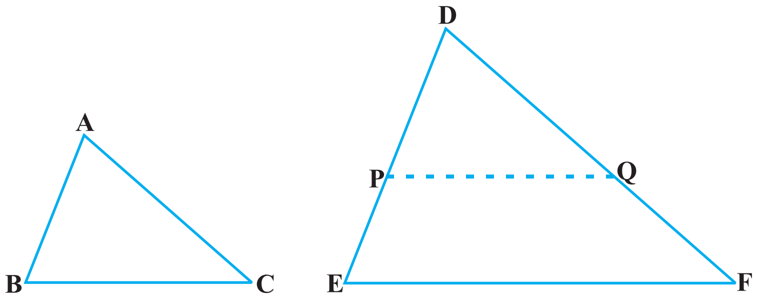
এখন, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ এবং $\angle F$ পরিমাপ করো। তোমরা লক্ষ করবে যে, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$, অর্থাৎ, ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ কোণগুলো সমান।

এরকম অনেকগুলো ত্রিভুজ অঙ্কন করে তোমরা এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করতে পারো (তাদের বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে)। প্রতিক্ষেত্রে তোমরা দেখবে যে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান। এটি আসলে দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার নিম্নলিখিত নীতির কারণে ঘটে :

উপপাদ্য 6.4 : *যদি দুটি ত্রিভুজে, একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো অপর একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমানুপাতিক হয় (অর্থাৎ, একই অনুপাতে থাকে), তবে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং অতঃপর ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হয়।*

এই শর্তটিকে *দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার* SSS (বাহু-বাহু-বাহু) *শর্ত হিসেবে* বিবেচনা করা হয়।

উপপাদ্যটিকে প্রমাণ করার জন্য দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF এমনভাবে নেওয়া হয় যেখানে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (< 1) (চিত্র 6.26 দেখো) :



চিত্র 6.26

$DP = AB$ এবং $DQ = AC$ কাটো এবং P ও Q যুক্ত করো।

এটি দেখানো যেতে পারে যে, $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ এবং $PQ \parallel EF$ (কীভাবে?)

অতএব, $\angle P = \angle E$ এবং $\angle Q = \angle F.$

সুতরাং, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

তাই, $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (কেন?)

অতএব $BC = PQ$ (কেন?)

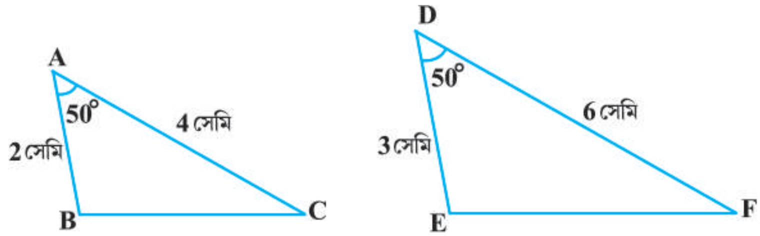
অর্থাৎ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (কেন?)

সুতরাং, $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ (কীভাবে?)

মন্তব্য : তোমরা মনে করে দেখো যে, দুটি শর্ত অর্থাৎ, (i) অনুরূপ কোণগুলো সমান ও (ii) অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে, এর মধ্যে যে-কোনো একটি শর্ত দুটি বহুভুজ সদৃশ হওয়ার জন্য যথেষ্ট নয়। যদিও, উপপাদ্য 6.3 এবং উপপাদ্য 6.4 এর ভিত্তিতে, তোমরা এখন বলতে পারছ যে, দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার ক্ষেত্রে, উভয় শর্ত, পরীক্ষা করা প্রয়োজনীয় নয় যেহেতু একটি শর্ত অপরটিকে নির্দেশ করে।

চলো এখন আমরা দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার বিভিন্ন শর্তগুলোকে পুনরায় স্মরণ করি যেগুলো আমরা নবম শ্রেণিতে শিখেছি। তোমরা লক্ষ করো যে ত্রিভুজের সদৃশতার SSS শর্তটিকে ত্রিভুজের সর্বসমতার SSS শর্তের সাথে তুলনা করা যায়। এটি থেকে আমরা একটি ইঙ্গিত পাই যার সাহায্যে ত্রিভুজের সদৃশতার এমন একটি শর্ত পাওয়ার চেষ্টা করি যা ত্রিভুজের সর্বসমতার SAS শর্তের সাথে তুলনীয়। এরজন্য, চলো আমরা একটি কার্যকলাপ সম্পন্ন করি।

কার্যকলাপ 6 : দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF এমনভাবে অঙ্কন করো যেখানে $AB = 2$ সেমি, $\angle A = 50°$, $AC = 4$ সেমি, $DE = 3$ সেমি, $\angle D = 50°$ এবং $DF = 6$ সেমি (চিত্র 6.27 দেখো) হয়।



চিত্র 6.27

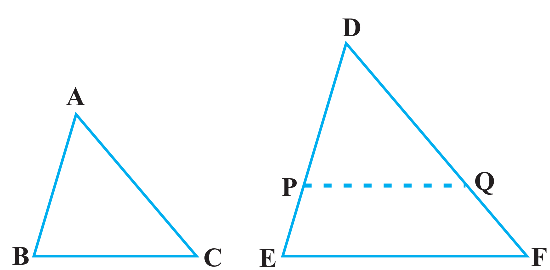
এখানে, তোমরা লক্ষ করেছ যে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (প্রতিটি $\frac{2}{3}$ এর সমান) এবং $\angle A$ (AB এবং AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী) $= \angle D$ (DE এবং DF বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী)। অর্থাৎ, একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণের সমান এবং ওই কোণগুলোর ধারক বাহুগুলো একই অনুপাতে (অর্থাৎ, সমানুপাতে) আছে। চলো এখন আমরা $\angle B, \angle C, \angle E$ এবং $\angle F$ পরিমাপ করে দেখি।

পরিমাপ করে তোমরা দেখবে যে $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ । অর্থাৎ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ । অতএব, সদৃশতার AAA শর্ত অনুযায়ী, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ । এ ধরনের অনেক ত্রিভুজ যুগল অঙ্কণ করে, যেখানে একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণের সমান এবং ওই কোণগুলোর ধারক বাহুগুলো একই অনুপাতে (অর্থাৎ, সমানুপাতে) থাকে, এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করতে পারো। প্রত্যেক বার তোমরা দেখবে যে ত্রিভুজগুলো সদৃশ হয়। এটি ত্রিভুজের সদৃশতার নিম্নলিখিত শর্তের কারণে ঘটে :

উপপাদ্য 6.5 : *যদি একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের কোনো একটি কোণের সমান হয় এবং ওই কোণগুলোর ধারক বাহুগুলো সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।*

এই শর্তটিকে দুটি ত্রিভুজের সদৃশতার SAS (বাহু-কোণ-বাহু) শর্ত হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

পূর্বের মতো, দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF নিয়ে, যেখানে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) এবং $\angle A = \angle D$ এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায় (চিত্র 6.28 দেখো)। $DP = AB$, $DQ = AC$ কাটো এবং P ও Q যুক্ত করো।



চিত্র 6.28

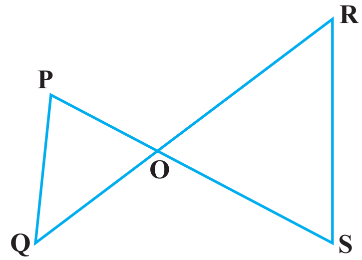
এখানে, $PQ \parallel EF$ এবং $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (কীভাবে?)

অতএব, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ এবং $\angle C = \angle Q$

সুতরাং, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (কেন ?)

এই শর্তগুলোর প্রয়োগ ব্যাখ্যা করার জন্য আমরা এখন কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 4 : চিত্র 6.29 -এ , যদি $PQ \parallel RS$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$.



চিত্র 6.29

সমাধান : $PQ \parallel RS$ (প্রদত্ত)

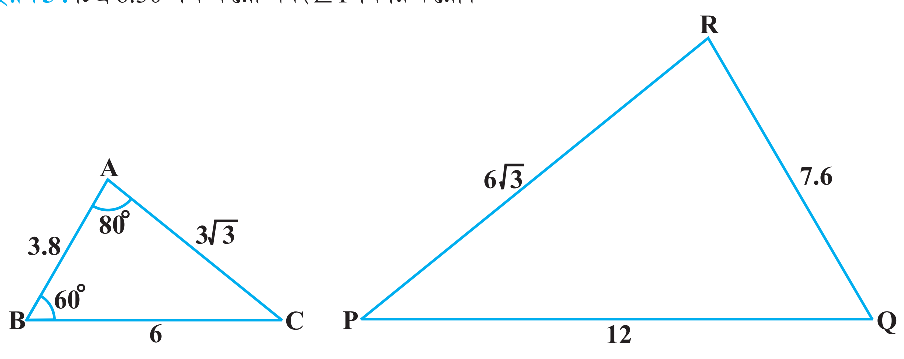
সুতরাং, $\angle P = \angle S$ (একান্তর কোণ)

এবং $\angle Q = \angle R$

এছাড়াও, $\angle POQ = \angle SOR$ (বিপ্রতীপ কোণ)

সুতরাং, $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (সদৃশতার AAA শর্ত অনুযায়ী)

উদাহরণ 5 : চিত্র 6.30 লক্ষ করো এবং $\angle P$ নির্ণয় করো।



চিত্র 6.30

সমাধান : ΔABC এবং ΔPQR -এ

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ এবং } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ, $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

অতএব, $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (সদৃশতার SSS শর্ত অনুযায়ী)

সুতরাং, $\angle C = \angle P$ (সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ কোণ)

কিন্তু, $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (কোণের সমষ্টির ধর্ম অনুযায়ী)

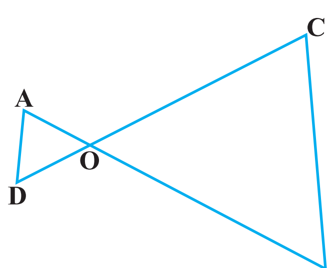
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

সুতরাং, $\angle P = 40°$

উদাহরণ 6 : চিত্র 6.31-এ,

$OA\,.\,OB = OC\,.\,OD$ হলে

দেখাও যে, $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$.



চিত্র 6.31

সমাধান : $OA\,.\,OB = OC\,.\,OD$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

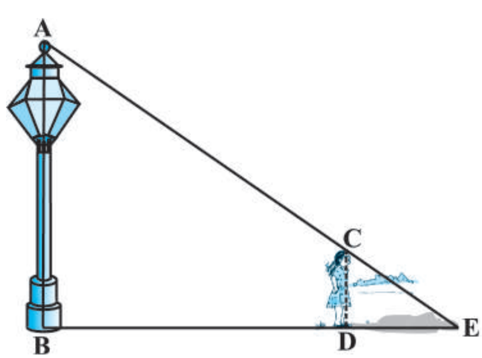
এছাড়া, আমরা জানি $\angle AOD = \angle COB$ (বিপ্রতীপ কোণ) (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) থেকে $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (সদৃশতার SAS শর্ত অনুযায়ী)

অতএব, $\angle A = \angle C$ এবং $\angle D = \angle B$

(সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ কোণযুগল)

উদাহরণ 7 : 90 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি মেয়ে একটি ল্যাম্পপোস্টের ভূমি থেকে 1.2 মি/সেকেন্ড বেগে দূরে হেঁটে যাচ্ছে। পোস্টটি (খুঁটিটি) যদি মাটি থেকে 3.6 মি উচ্চতায় অবস্থিত হয়, তবে 4 সেকেন্ড পর মেয়েটির ছায়ার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



চিত্র 6.32

সমাধান : ধরো AB দিয়ে ল্যাম্পপোস্ট ও CD দিয়ে মেয়েটির অবস্থান বোঝানো হয়েছে, যখন সে ল্যাম্পপোস্টের ভূমি থেকে 4 সেকেন্ডে দূরে হেঁটে আসল (চিত্র 6.32 দেখো)।

চিত্র থেকে, তোমরা দেখতে পাচ্ছ যে, DE হল মেয়েটির ছায়ার দৈর্ঘ্য। ধরো DE হল x মিটার।

এখন, $BD = 1.2$ মিটার $\times 4 = 4.8$ মিটার।

ΔABE এবং ΔCDE থেকে লক্ষ করো যে,

$\angle B = \angle D$ (প্রতিটি কোণ $90°$ কারণ এখানে ল্যাম্পপোস্ট ও মেয়েটি উভয়ই মাটিতে লম্বভাবে দাঁড়িয়ে আছে)

এবং $\angle E = \angle E$ (একই কোণ)

অতএব, $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (সদৃশতার AA শর্ত অনুযায়ী)

সুতরাং, $\dfrac{BE}{DE} = \dfrac{AB}{CD}$

অর্থাৎ, $\dfrac{4.8 + x}{x} = \dfrac{3.6}{0.9}$ (90 সেমি $= \dfrac{90}{100}$ মি $= 0.9$ মি)

অর্থাৎ, $4.8 + x = 4x$

অর্থাৎ, $3x = 4.8$

অর্থাৎ, $x = 1.6$

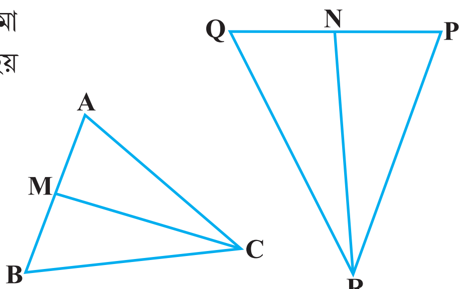
সুতরাং, 4 সেকেন্ড হাঁটার পর মেয়েটির ছায়ার দৈর্ঘ্য হবে 1.6 মিটার।

উদাহরণ 8 : চিত্র 6.33-এ, ΔABC এবং ΔPQR -এর মধ্যমা হল যথাক্রমে CM এবং RN । যদি $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ হয় তবে, প্রমাণ করো যে,

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\dfrac{CM}{RN} = \dfrac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



চিত্র 6.33

সমাধান : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ (1)

এবং $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ এবং $\angle C = \angle R$ (2)

কিন্তু $AB = 2\,AM$ এবং $PQ = 2\,PN$

(যেহেতু CM এবং RN হল মধ্যমা)

সুতরাং, (1) থেকে, $\dfrac{2\,AM}{2\,PN} = \dfrac{CA}{RP}$

অর্থাৎ, $\frac{AM}{PN}=\frac{CA}{RP}$ (3)

এছাড়া, $\angle MAC = \angle NPR$ [(2)- থেকে] (4)

সুতরাং, (3) ও (4) থেকে,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (সদৃশতার SAS শর্ত অনুযায়ী) (5)

(ii) (5) থেকে, $\frac{CM}{RN}=\frac{CA}{RP}$ (6)

কিন্তু, $\frac{CA}{RP}=\frac{AB}{PQ}$ [(1) থেকে] (7)

সুতরাং, $\frac{CM}{RN}=\frac{AB}{PQ}$ [(6) এবং (7) থেকে] (8)

(iii) আবার, $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ [(1) থেকে]

সুতরাং, $\frac{CM}{RN}=\frac{BC}{QR}$ [(8) থেকে] (9)

এছাড়া, $\frac{CM}{RN}=\frac{AB}{PQ}=\frac{2\ BM}{2\ QN}$

অর্থাৎ, $\frac{CM}{RN}=\frac{BM}{QN}$ (10)

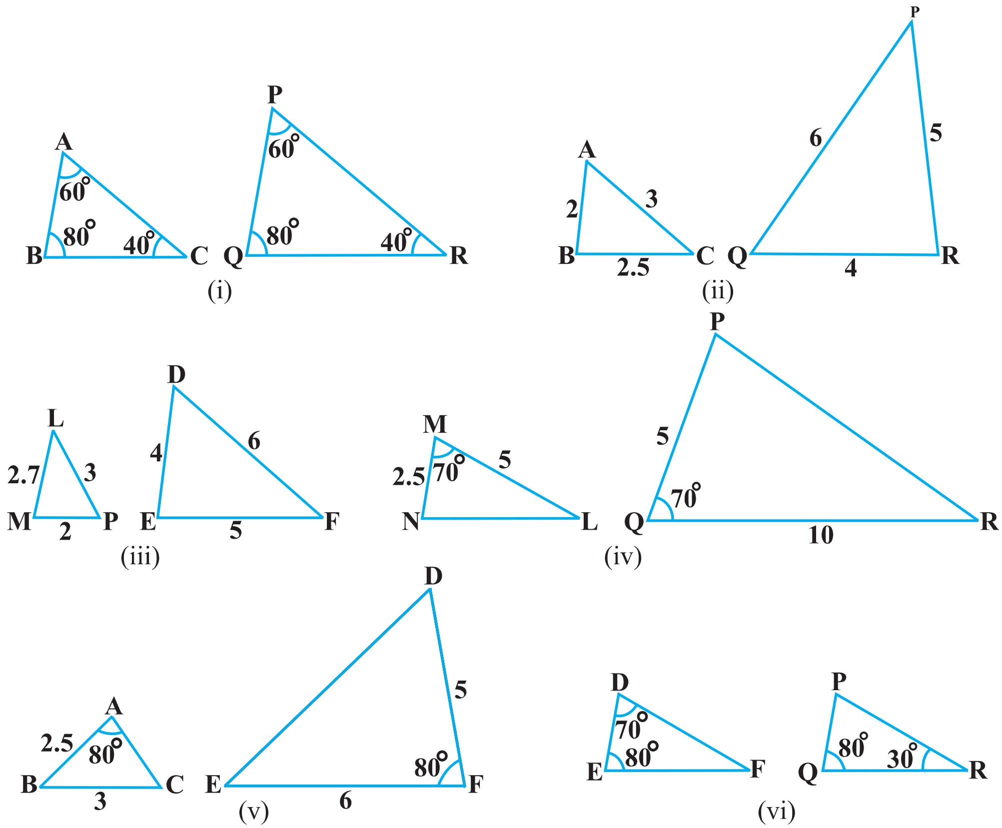
অর্থাৎ, $\frac{CM}{RN}=\frac{BC}{QR}=\frac{BM}{QN}$ [(9) এবং (10) থেকে]

সুতরাং, $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (সদৃশতার SSS শর্ত অনুযায়ী)

[**দ্রষ্টব্য :** তোমরা এই প্রশ্নের (iii) নং অংশটিকে, (i) নং অংশ প্রমাণে যে পদ্ধতি প্রয়োগ করেছ সেই পদ্ধতি অনুযায়ী প্রমাণ করতে পারো।]

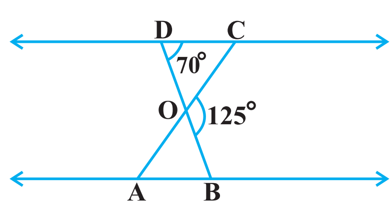
অনুশীলনী 6.3

1. চিত্র 6.34 -এ প্রদর্শিত কোন্ ত্রিভুজযুগলগুলো সদৃশ, বিবৃত করো। প্রশ্নের উত্তরে সদৃশতার শর্ত উল্লেখ করো এবং এছাড়া সদৃশ ত্রিভুজের জোড়াগুলোকে সাংকেতিক রূপে লেখো :



চিত্র 6.34

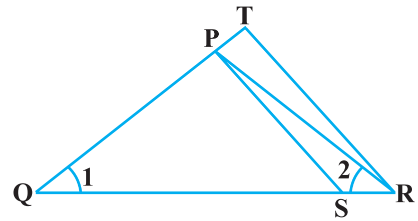
2. চিত্র 6.35-এ, $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125°$ এবং $\angle CDO = 70°$। $\angle DOC$, $\angle DCO$ এবং $\angle OAB$ নির্ণয় করো।



চিত্র 6.35

3. ট্রাপিজিয়াম ABCD এর AB || DC এবং এর কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ত্রিভুজদ্বয়ের সদৃশতার শর্ত ব্যবহার করে, দেখাও যে, $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$

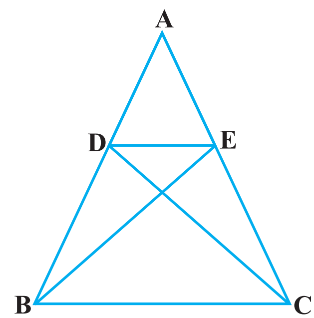
4. চিত্র 6.36-এ, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ এবং $\angle 1 = \angle 2$ । দেখাও যে, $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ ।



চিত্র 6.36

5. ΔPQR এর বাহুদ্বয় PR এবং QR এর উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু হল যথাক্রমে S এবং T যেখানে $\angle P = \angle RTS$। দেখাও যে, $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$.

6. চিত্র 6.37-এ, যদি $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ হয় তবে, দেখাও যে, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ।



চিত্র 6.37

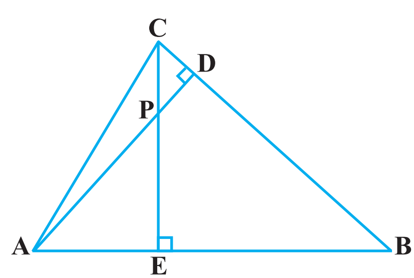
7. চিত্র 6.38-এ, ΔABC এর লম্বদ্বয় AD এবং CE পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে,

(i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$



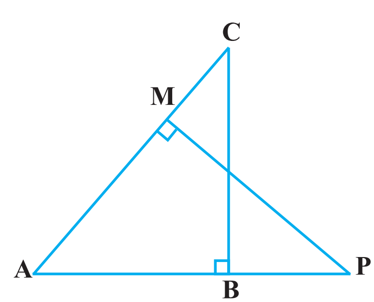
চিত্র 6.38

8. সামান্তরিক ABCD এর বর্ধিত বাহু AD এর উপর অবস্থিত একটি বিন্দু হল E এবং BE, CD বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $\Delta ABE \sim \Delta CFB$.

9. চিত্র 6.39-এ, ABC এবং AMP হল দুটি সমকোণী ত্রিভুজ, যথাক্রমে B ও M বিন্দুতে সমকোণ রয়েছে। প্রমাণ করো যে,

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$



চিত্র 6.39

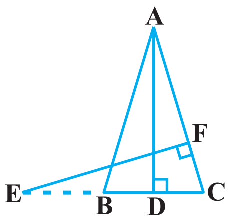
10. CD ও GH হল যথাক্রমে $\angle ACB$ এবং $\angle EGF$ এর এমন সমদ্বিখণ্ডক যেখানে D ও H যথাক্রমে ΔABC এবং ΔEFG এর AB এবং FE বাহু দুটির উপর অবস্থিত। যদি $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ হয় তবে, দেখাও যে,

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

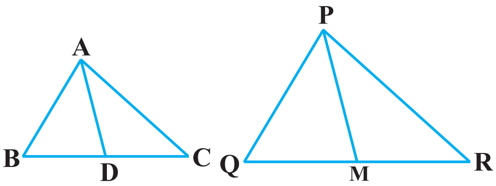
11. চিত্র 6.40-এ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC এর বর্ধিত বাহু CB এর উপর অবস্থিত একটি বিন্দু হল E এবং AB = AC। যদি $AD \perp BC$ ও $EF \perp AC$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\Delta ABD \sim \Delta ECF$।



চিত্র 6.40

12. ΔABC এর বাহুদ্বয় AB ও BC এবং মধ্যমা AD যথাক্রমে ΔPQR এর বাহুদ্বয় PQ ও QR এবং মধ্যমা PM এর সঙ্গে সমানুপাতিক (চিত্র 6.41 দেখো)। দেখাও যে, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

13. ত্রিভুজ ABC এর BC বাহুর উপর অবস্থিত D এমন একটি বিন্দু যে, $\angle ADC = \angle BAC$। দেখাও যে, $CA^2 = CB.CD$ ।



চিত্র 6.41

14. ত্রিভুজ ABC এর বাহুদ্বয় AB ও AC এবং মধ্যমা AD যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজ PQR এর বাহুদ্বয় PQ ও PR এবং মধ্যমা PM এর সাথে সমানুপাতিক। দেখাও যে, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$।

15. লম্বভাবে অবস্থিত 6 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি খুঁটি (Pole) মাটিতে 4 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি ছায়া তৈরি করে এবং একই সময়ে একটি মিনার (tower) মাটিতে 28 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি ছায়া তৈরি করে। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

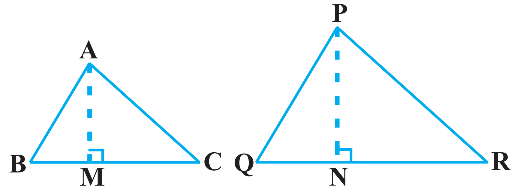
16. যদি AD ও PM যথাক্রমে ত্রিভুজ ABC এবং ত্রিভুজ PQR এর মধ্যমা হয়, যেখানে $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$

6.5 সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Areas of Similar Triangles)

তোমরা পূর্বে শিখেছ যে দুটি সদৃশ ত্রিভুজে, তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে। তোমরা কি মনে কর ওই ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ও তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে? তোমরা জান যে, ক্ষেত্রফল পরিমাপ করা হয় বর্গএককে (Square Units)। অতএব, তোমরা প্রত্যাশা করতে পারো যে, ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর বর্গের অনুপাতের সমান হয়। এটি প্রকৃতপক্ষে সত্য এবং আমরা এটিকে পরবর্তী উপপাদ্যে প্রমাণ করব।

উপপাদ্য 6.6 : *দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর বর্গের অনুপাতের সমান হয়।*

প্রমাণ : আমাদেরকে দুটি ত্রিভুজ ABC এবং PQR দেওয়া আছে। যেখানে $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (চিত্র 6.42 দেখো)।



চিত্র 6.42

আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{\text{ক্ষেত্রফল (ABC)}}{\text{ক্ষেত্রফল (PQR)}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$

দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য, আমরা ওই ত্রিভুজদ্বয়ের লম্ব উচ্চতা যথাক্রমে AM ও PN অঙ্কন করি।

এখন, $\text{ক্ষেত্রফল (ABC)} = \dfrac{1}{2} BC \times AM$

এবং $\text{ক্ষেত্রফল (PQR)} = \dfrac{1}{2} QR \times PN$

সুতরাং, $$\dfrac{\text{ক্ষেত্রফল (ABC)}}{\text{ক্ষেত্রফল (PQR)}} = \dfrac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \dfrac{BC \times AM}{QR \times PN} \quad (1)$$

এখন, ΔABM ও ΔPQN-এ

$\angle B = \angle Q$ (যেহেতু $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

এবং $\angle M = \angle N$ (প্রতিটির পরিমাপ $90°$)

অতএব, $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (সদৃশতার AA শর্ত)

সুতরাং, $$\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ} \quad (2)$$

এছাড়াও, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (প্রদত্ত)

অতএব, $$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP} \quad (3)$$

সুতরাং, $$\dfrac{\text{ক্ষেত্রফল (ABC)}}{\text{ক্ষেত্রফল (PQR)}} = \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AM}{PN}$$ [(1) এবং (3) থেকে]

$$= \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ}$$ [(2) থেকে]

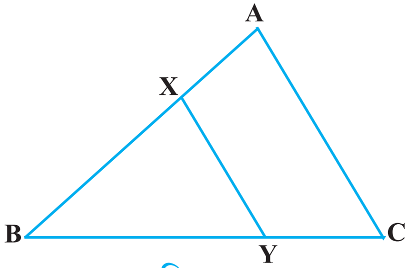
$$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$$

এখন (3) ব্যবহার করে, আমরা পাই

$$\dfrac{\text{ক্ষেত্রফল (ABC)}}{\text{ক্ষেত্রফল (PQR)}} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$$

এই উপপাদ্যের প্রয়োগ ব্যাখ্যা করার জন্য চলো আমরা একটি উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 9 : চিত্র 6.43-এ, XY রেখাংশ ΔABC এর AC বাহুর সমান্তরাল এবং এটি ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলের দুটি অংশে বিভক্ত করে। অনুপাত $\frac{AX}{AB}$ নির্ণয় করো।



চিত্র 6.43

সমাধান : আমরা জানি $XY \parallel AC$ (প্রদত্ত)

অতএব, $\angle BXY = \angle A$ এবং $\angle BYX = \angle C$ (অনুরূপ কোণ যুগল)

সুতরাং, $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ (সদৃশতার AA নীতি)

অতএব, $$\frac{\text{ক্ষেত্রফল }(ABC)}{\text{ক্ষেত্রফল }(XBY)} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2$$ (উপপাদ্য 6.6) (1)

এছাড়াও, ক্ষেত্রফল (ABC) = 2 ক্ষেত্রফল (XBY) (প্রদত্ত)

সুতরাং, $$\frac{\text{ক্ষেত্রফল }(ABC)}{\text{ক্ষেত্রফল }(XBY)} = \frac{2}{1}$$ (2)

সুতরাং, (1) ও (2) থেকে,

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ অর্থাৎ, } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

অথবা, $$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

অথবা, $$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

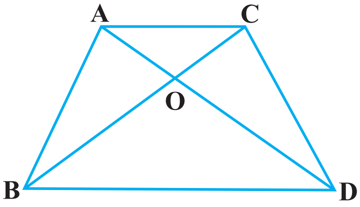
অথবা, $$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \text{ অর্থাৎ, } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

অনুশীলনী 6.4

1. ধরো, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ এবং তাদের ক্ষেত্রফল যথাক্রমে 64 সেমি^{2} এবং 121 সেমি^{2} । যদি EF = 15.4 সেমি হয়, তবে BC নির্ণয় করো।

2. ট্রাপিজিয়াম ABCD, যার $AB \parallel DC$ এবং এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি AB = 2 CD হয়, তবে AOB এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।

3. চিত্র 6.44-এ, একই ভূমি BC এর উপর অবস্থিত দুটি ত্রিভুজ হল ABC এবং DBC । যদি AD ও BC পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{\text{ক্ষেত্রফল (ABC)}}{\text{ক্ষেত্রফল (DBC)}} = \frac{AO}{DO}$



চিত্র 6.44

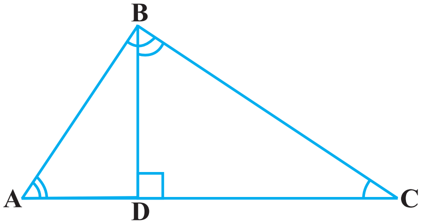
4. যদি দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান হয়, তবে প্রমাণ করো যে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।
5. Δ ABC এর বাহুত্রয় AB, BC এবং CA এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F । Δ DEF এবং Δ ABC এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।
6. প্রমাণ করো যে, দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের অনুরূপ মধ্যমার বর্গের অনুপাতের সমান।
7. প্রমাণ করো যে, একটি বর্গক্ষেত্রের যে-কোনো বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ওই বর্গক্ষেত্রের যে-কোনো একটি কর্ণের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হয়।

সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ও এর সত্যতা যাচাই করো :

8. ABC এবং BDE হল দুটি সমবাহু ত্রিভুজ যেখানে বাহু BC এর মধ্যবিন্দু D। ত্রিভুজ ABC এবং ত্রিভুজ BDE এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত হল
   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4
9. দুটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত হল 4 : 9। ওই ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত হল
   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Pythagoras Theorem)

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে তোমরা আগেই পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাথে পরিচিত হয়েছ। তোমরা কিছু কার্যকলাপের মাধ্যমে এই উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই করেছিলে এবং নির্দিষ্ট কিছু সমস্যার সমাধানে এর প্রয়োগ করেছিলে। এছাড়াও তোমরা নবম শ্রেণিতে এই উপপাদ্যটির একটি প্রমাণ দেখেছ। এখন, আমরা ত্রিভুজের সদৃশতার ধারণা প্রয়োগ করে এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করব। এটি প্রমাণ করার জন্য আমরা কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের শীর্ষবিন্দু থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্বের দুই পাশে গঠিত সদৃশ ত্রিভুজদ্বয় সম্পর্কিত একটি ফলাফল ব্যবহার করব।



চিত্র 6.45

এখন, চলো আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC নিই, যার $\angle B = 90^0$। ধরো BD অতিভুজ AC এর উপর লম্ব (চিত্র 6.45 দেখো)।

তোমরা লক্ষ করেছ যে, Δ ADB ও Δ ABC-এ,

$$\angle A = \angle A$$

এবং $\angle ADB = \angle ABC$ (কেন?)

সুতরাং, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (কীভাবে?) (1)

অনুরূপভাবে, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (কীভাবে?) (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) থেকে বলা যায় লম্ব BD এর দুই পাশে অবস্থিত ত্রিভুজদ্বয় সমগ্র ত্রিভুজ ABC এর সাথে সদৃশ।

এছাড়াও, যেহেতু $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

এবং $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

সুতরাং, $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (অনুচ্ছেদ 6.2-এর মন্তব্য থেকে)

উপরিউক্ত আলোচনা থেকে আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যে পৌঁছুতে পারি।

উপপাদ্য 6.7 : *যদি কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের শীর্ষবিন্দু থেকে অতিভুজের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা হয় তবে লম্বের দুই পাশে গঠিত ত্রিভুজদ্বয়ের প্রতিটি সমগ্র ত্রিভুজের সাথে সদৃশ এবং এরা নিজেরাও পরস্পর সদৃশ হবে।*

চলো এখন আমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করার জন্য উপরের উপপাদ্যটি প্রয়োগ করি :

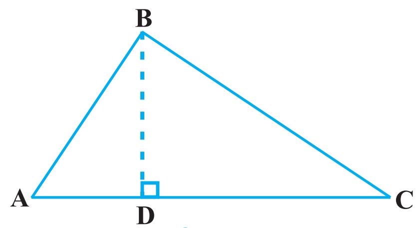
পিথাগোরাস
(569 – 479 খ্রি. পূ.)

উপপাদ্য 6.8 : *কোনো সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজের বর্গ উহার অপর দুটি বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হয়।*

প্রমাণ : আমাদেরকে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC ও $\angle B = 90^0$ দেওয়া আছে।

আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

চলো $BD \perp AC$ অঙ্কন করি (চিত্র 6.46 দেখো)।



চিত্র 6.46

এখন, $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (উপপাদ্য 6.7)

সুতরাং, $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ (বাহুগুলো সমানুপাতিক)

বা, $AD \,.\, AC = AB^2$ (1)

এছাড়াও, $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (উপপাদ্য 6.7)

সুতরাং, $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$

বা, $CD \,.\, AC = BC^2$ (2)

(1) এবং (2) যোগ করে, আমরা পাই

$$AD \,.\, AC + CD \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

বা, $$AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$$

বা, $$AC \,.\, AC = AB^2 + BC^2$$

বা, $$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

পূর্বে একজন প্রাচীন ভারতীয় গণিতজ্ঞ বোধায়ন (Baudhayan) (প্রায় 800 খ্রি. পূ.) উপরের উপপাদ্যটি নিম্নলিখিতরূপে দিয়েছিলেন :

একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, এর উভয় বাহুর (অর্থাৎ, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ) উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের যোগফলের সমান।

এই কারণে, এই উপপাদ্যকে কখনো কখনো *বোধায়ন উপপাদ্য* হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

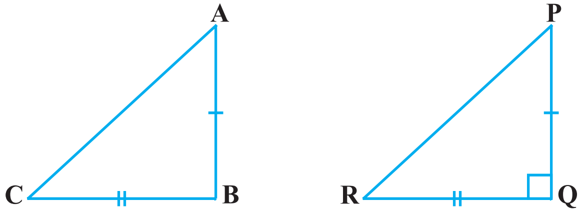
পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত বিবৃতি সম্পর্কে তোমরা কী বলতে পার? তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে যাচাই করেছিলে যে এই বিপরীত বিবৃতিটিও সত্য। আমরা এখন এটিকে একটি উপপাদ্য হিসেবে প্রমাণ করব।

উপপাদ্য 6.9 : *কোনো ত্রিভুজে, যদি একটি বাহুর বর্গ অপর দুটি বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণটি সমকোণ হবে।*

প্রমাণ : এখানে, আমাদেরকে একটি ত্রিভুজ ABC দেওয়া আছে যেখানে $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ।

আমাদের প্রমাণ করা প্রয়োজন $\angle B = 90°$ ।

প্রমাণের শুরুতে, আমরা একটি সমকোণী $\Delta\, PQR$ অঙ্কন করব, যার $\angle Q = 90°$ এবং $PQ = AB$ এবং $QR = BC$ (চিত্র 6.47 দেখো)।



চিত্র 6.47

এখন, $\Delta\, PQR$ থেকে, আমরা পাই :

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য, যেহেতু $\angle Q = 90°$)

বা, $$PR^2 = AB^2 + BC^2$$ (অঙ্কন অনুসারে) (1)

কিন্তু $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (প্রদত্ত) (2)

সুতরাং, $AC = PR$ [(1) এবং (2) থেকে] (3)

এখন, ΔABC এবং ΔPQR-এ,

$AB = PQ$ (অঙ্কন অনুসারে)

$BC = QR$ (অঙ্কন অনুসারে)

$AC = PR$ [উপরে (3)-এ প্রমাণিত]

অতএব, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (সর্বসমতার SSS শর্ত অনুযায়ী)

সুতরাং, $\angle B = \angle Q$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ (CPCT)]

কিন্তু, $\angle Q = 90°$ (অঙ্কন অনুসারে)

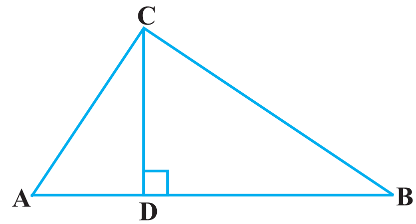
সুতরাং, $\angle B = 90°$

দ্রষ্টব্য : এছাড়াও এই উপপাদ্যের অন্য একটি প্রমাণের জন্য পরিশিষ্ট 1 দেখো।

এই উপপাদ্যগুলোর প্রয়োগ ব্যাখ্যা করার জন্য চলো আমরা কিছু উদাহরণ নিই :

উদাহরণ 10 : চিত্র 6.48-এ, $\angle ACB = 90°$ এবং $CD \perp AB$।

প্রমাণ করো যে, $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$.



চিত্র 6.48

সমাধান : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$

(উপপাদ্য 6.7)

অতএব, $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

বা, $AC^2 = AB \,.\, AD$ (1)

অনুরূপভাবে, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (উপপাদ্য 6.7)

অতএব, $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

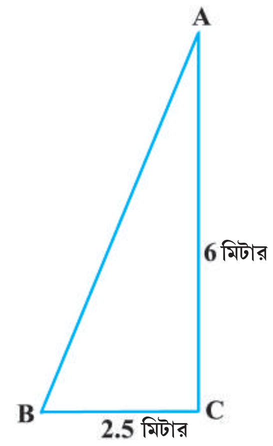
বা, $BC^2 = BA \,.\, BD$ (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) থেকে, আমরা পাই

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

উদাহরণ 11 : একটি মইকে (ladder) কোনো একটি দেওয়াল বরাবর এমনভাবে স্থাপন করা হয়েছে যে দেওয়াল থেকে এর পাদদেশের দূরত্ব 2.5 মিটার এবং এর চূড়া (শীর্ষ) মাটি থেকে 6 মিটার উপরে অবস্থিত একটি জানালা পর্যন্ত পৌঁছায়। মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরো AB হল মই এবং CA হল দেওয়াল যার A-তে জানালাটি অবস্থিত (চিত্র 6.49 দেখো)।



চিত্র 6.49

এছাড়াও, $BC = 2.5$ মিটার এবং $CA = 6$ মিটার

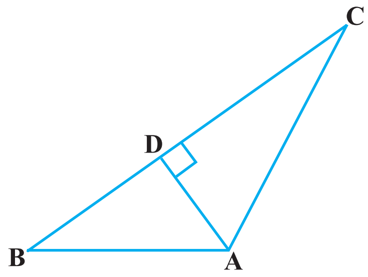
পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে, আমরা পাই :

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + (6)^2$$
$$= 42.25$$

সুতরাং, $AB = 6.5$

অর্থাৎ, মইটির দৈর্ঘ্য হল 6.5 মিটার।

উদাহরণ 12 : চিত্র 6.50-এ, যদি $AD \perp BC$ হয় তবে প্রমাণ করো যে, $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$.



চিত্র 6.50

সমাধান : Δ ADC থেকে, আমরা পাই

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$
(পিথাগোরাসের উপপাদ্য) (1)

অনুরূপভাবে, Δ ADB থেকে, আমরা পাই

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
(পিথাগোরাসের উপপাদ্য) (2)

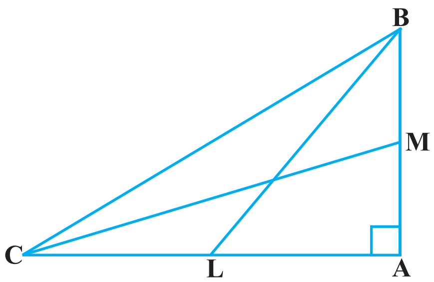
(2) থেকে (1) বিয়োগ করে, আমরা পাই

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

বা, $$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

উদাহরণ 13 : ABC ত্রিভুজের $\angle$ A= সমকোণ। BL এবং CM দুটি মধ্যমা হলে, প্রমাণ করো,

$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$.



চিত্র 6.51

সমাধান : BL এবং CM হল Δ ABC এর মধ্যমাদ্বয় যেখানে $\angle A = 90°$ (চিত্র 6.51 দেখো)।

Δ ABC থেকে,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$ (পীথাগোরাসের উপপাদ্য) (1)

Δ ABL থেকে,

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

বা, $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ (L হল AC এর মধ্যবিন্দু)

বা, $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

বা, $4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2$ (2)

Δ CMA থেকে,

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

বা, $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ (M হল AB এর মধ্যবিন্দু)

বা, $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

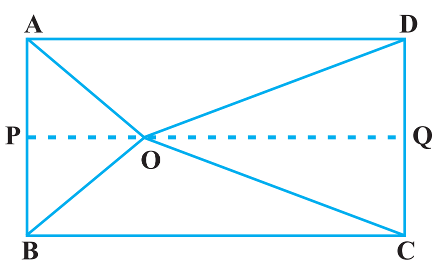
বা, $4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2$ (3)

(2) এবং (3) যোগ করে, আমরা পাই

$$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,(AC^2 + AB^2)$$

অর্থাৎ, $4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ [(1) থেকে]

উদাহরণ 14 : আয়তক্ষেত্র ABCD এর ভিতরে অবস্থিত কোনো একটি বিন্দু হল O (চিত্র 6.52 দেখো)। প্রমাণ করো যে, $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$।



চিত্র 6.52

সমাধান :

O বিন্দুগামী একটি রেখা $PQ \parallel BC$ এমনভাবে অঙ্কন করো, যেখানে P ও Q যথাক্রমে AB ও DC এর উপর অবস্থিত হয়।

এখন, $PQ \parallel BC$

সুতরাং, $PQ \perp AB$ এবং $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90°$ এবং $\angle C = 90°$)

অতএব, $\angle BPQ = 90°$ এবং $\angle CQP = 90°$

সুতরাং, BPQC এবং APQD উভয়ই আয়তক্ষেত্র।

এখন, Δ OPB থেকে,

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, Δ OQD থেকে,

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

Δ OQC থেকে, আমরা পাই

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

এবং Δ OAP থেকে, আমরা পাই

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) এবং (2) যোগ করে, আমরা পাই

$$\begin{aligned} OB^2 + OD^2 &= BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2 \\ &= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2 \\ &\qquad \text{(যেহেতু } BP = CQ \text{ এবং } DQ = AP\text{)} \\ &= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2 \\ &= OC^2 + OA^2 \qquad \text{[(3) এবং (4) থেকে]} \end{aligned}$$

অনুশীলনী 6.5

1. কয়েকটি ত্রিভুজের বাহুগুলো নীচে দেওয়া হল। এর মধ্যে কোন্‌গুলো সমকোণী ত্রিভুজ নির্ণয় করো। সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য লেখো।

(i) 7 সেমি, 24 সেমি, 25 সেমি

(ii) 3 সেমি, 8 সেমি, 6 সেমি

(iii) 50 সেমি, 80 সেমি, 100 সেমি

(iv) 13 সেমি, 12 সেমি, 5 সেমি

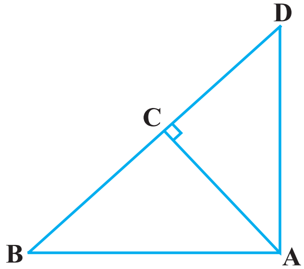
2. PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle P$ = সমকোণ এবং বাহু QR এর উপর একটি বিন্দু M এমনভাবে অবস্থিত যে, $PM \perp QR$ । প্রমাণ করো যে, $PM^2 = QM \,.\, MR$।

3. চিত্র 6.53-এ, ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = সমকোণ এবং $AC \perp BD$। দেখাও যে,

(i) $AB^2 = BC \,.\, BD$

(ii) $AC^2 = BC \,.\, DC$

(iii) $AD^2 = BD \,.\, CD$



চিত্র 6.53

4. ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $\angle C = 90^0$। প্রমাণ করো যে, $AB^2 = 2AC^2$ ।

5. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $AC = BC$। যদি $AB^2 = 2\,AC^2$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

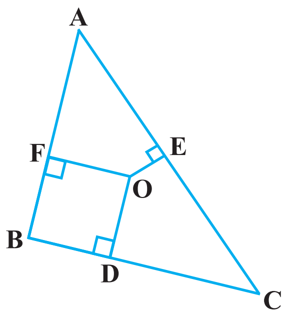
6. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$ । এর প্রতিটি লম্ব উচ্চতা নির্ণয় করো।

7. প্রমাণ করো যে, কোনো রম্বসের বাহুগুলোর বর্গের সমষ্টি এর কর্ণদ্বয়ের বর্গের সমষ্টির সমান।

8. চিত্র 6.54-এ, O হল ত্রিভুজ ABC এর ভিতরে অবস্থিত একটি বিন্দু এবং $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ এবং $OF \perp AB$। প্রমাণ করো যে,

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$,

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$.



চিত্র 6.54

9. 10 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি মই (ladder) এর অগ্রভাগ ভূমি থেকে 8 মিটার উপরে অবস্থিত একটি জানালায় রাখা হল। দেওয়ালের নিম্নাংশ (base) থেকে মই-এর পাদদেশের (foot) দূরত্ব নির্ণয় করো।

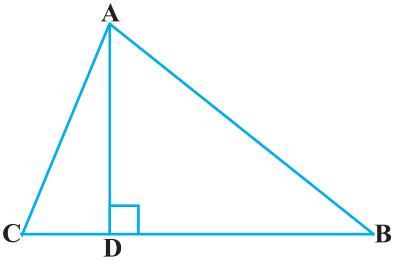
10. 18 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একটি উল্লম্ব দণ্ডের সঙ্গে 24 মিটার লম্বা একটি ধাতব তারের এক প্রান্ত সংযুক্ত আছে ও তারটির আরেক প্রান্ত মাটিতে পোঁতা একটি খুঁটির সঙ্গে সংযুক্ত আছে। দণ্ডের নিম্নাংশ থেকে খুঁটিকে কত দূরে পোঁতা হলে তারটি টান (taut) অবস্থায় থাকবে?

11. একটি উড়োজাহাজ বিমান বন্দর থেকে 1000 কিলোমিটার প্রতি ঘণ্টা বেগে উত্তরদিকে উড়ে যায়। ওই সময় আরেকটি উড়োজাহাজ একই বিমান বন্দর থেকে 1200 কিলোমিটার প্রতি ঘণ্টা বেগে পশ্চিম দিকে উড়ে যায়। $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে দুটি বিমানের মধ্যে দূরত্ব কত হবে?

12. 6 মিটার এবং 11 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি খুঁটি একটি সমতল ভূমিতে দাঁড়িয়ে আছে। যদি খুঁটি দুটির পাদদেশের মধ্যে দূরত্ব 12 মিটার হয়, তবে তাদের শীর্ষের মধ্যে দূরত্ব কত হবে, নির্ণয় করো।

13. ত্রিভুজ ABC যার $\angle C = 90°$, এর দুটি বাহু CA ও CB এর উপর অবস্থিত দুটি বিন্দু হল যথাক্রমে D এবং E। প্রমাণ করো যে, $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$।

14. কোনো Δ ABC এর শীর্ষবিন্দু A থেকে বাহু BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব BC কে D বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করেছে যে, DB = 3 CD হয় (চিত্র 6.55 দেখো)। প্রমাণ করো যে, $2\,AB^2 = 2\,AC^2 + BC^2$।



চিত্র 6.55

15. কোনো সমবাহু ত্রিভুজ ABC-এ, বাহু BC এর উপর একটি বিন্দু D এমনভাবে নেওয়া হয়েছে যে, $BD = \frac{1}{3}$ BC হয়। প্রমাণ করো যে, $9\,AD^2 = 7\,AB^2$।

16. কোনো সমবাহু ত্রিভুজে প্রমাণ করো যে এর একটি বাহুর বর্গের তিনগুণ তার একটি লম্ব উচ্চতার (altitude) বর্গের চারগুণের সমান হয়।

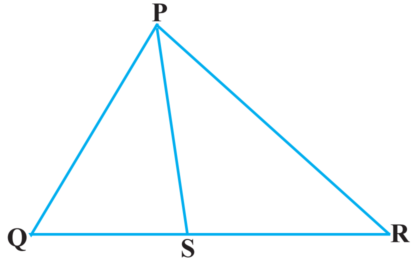
17. সঠিক উত্তরে টিক (Tick) চিহ্ন দাও এবং এর সত্যতা যাচাই করো : Δ ABC-এ, $AB = 6\sqrt{3}$ সেমি, AC = 12 সেমি এবং BC = 6 সেমি। $\angle B$ হল :

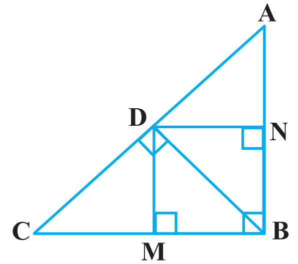
(A) 120° (B) 60°

(C) 90° (D) 45°

অনুশীলনী 6.6 (ঐচ্ছিক)*

1. চিত্র 6.56-এ, Δ PQR এর $\angle$ QPR এর সমদ্বিখণ্ডক হল PS। প্রমাণ করো যে, $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ ।

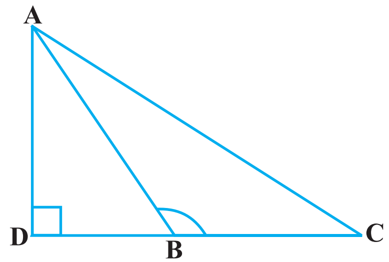

চিত্র 6.56

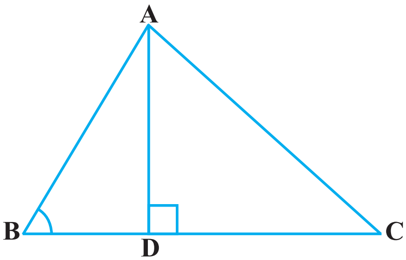

চিত্র 6.57

2. চিত্র 6.57 এ, ΔABC এর অতিভুজ AC এর উপর একটি বিন্দু হল D, যেখানে $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ এবং $DN \perp AB$। প্রমাণ করো যে,

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$ (ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

3. চিত্র 6.58 -এ, ABC একটি ত্রিভুজ যার $\angle ABC > 90°$ এবং $AD \perp CB$ । প্রমাণ করো যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC \cdot BD$.

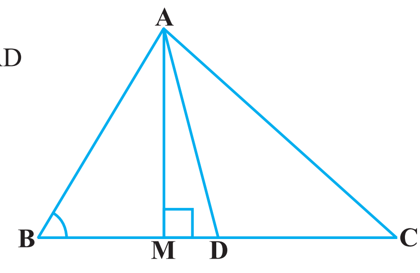

চিত্র 6.58


চিত্র 6.59

4. চিত্র 6.59-এ, ABC একটি ত্রিভুজ যার $\angle ABC < 90°$ এবং $AD \perp BC$। প্রমাণ করো যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot BD$.

5. চিত্র 6.60 -এ, ত্রিভুজ ABC এর একটি মধ্যমা হল AD এবং $AM \perp BC$। প্রমাণ করো যে,

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$


চিত্র 6.60

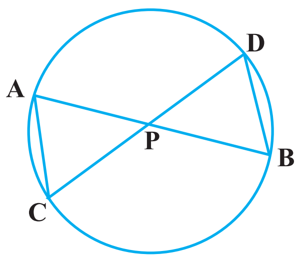
* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্ভুক্ত নয়।

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2$ (iii) $AC^2 + AB^2 = 2\,AD^2 + \dfrac{1}{2}\,BC^2$

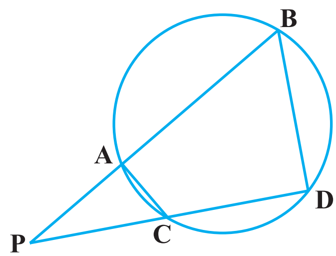
6. প্রমাণ করো যে, কোনো সামন্তরিকের কর্ণদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি এর বাহুগুলোর বর্গের সমষ্টির সমান।

7. চিত্র 6.61-এ, দুটি জ্যা AB এবং CD পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করো যে,

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$ (ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$



চিত্র 6.61

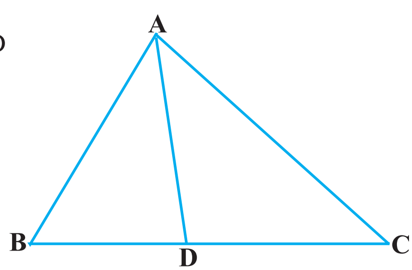


চিত্র 6.62

8. চিত্র 6.62 -এ, কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা AB এবং CD পরস্পরকে P বিন্দুতে (যখন বর্ধিত করা হয়) বৃত্তের বাইরে ছেদ করেছে। প্রমাণ করো যে,

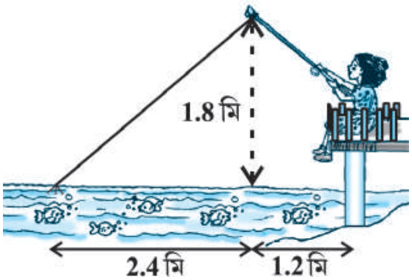
(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

9. চিত্র 6.63-এ, ΔABC এর বাহু BC এর উপর একটি বিন্দু D এমনভাবে অবস্থিত যে, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ হয়। প্রমাণ করো যে, AD, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্র 6.63

10. নাজিমা একটি ছোটো নদীতে (stream) মাছ ধরছে। তার মাছ ধরার ছিপের অগ্রভাগ জলতল থেকে 1.8 মিটার উপরে অবস্থিত এবং তারের (string) অপর প্রান্তভাগে অবস্থিত নির্দেশক শলাকা জলতলে এমনভাবে অবস্থিত যে নাজিমা থেকে এর দূরত্ব 3.6 মিটার এবং ছিপের অগ্রভাগের ঠিক নীচে জলতলে অবস্থিত বিন্দুটি থেকে এটির দূরত্ব 2.4 মিটার। এটা ধরে নাও যে, তারটি (ছিপের আগা থেকে নির্দেশক শলাকা পর্যন্ত) টান (taut) অবস্থায় আছে, তাহলে সে কতটুকু তার বাইরে রেখেছে (চিত্র 6.64 দেখো)? যদি সে তারটিকে 5 সেমি/সেকেন্ড বেগে টানে, তবে 12 সেকেন্ড পরে নাজিমা থেকে নির্দেশক শলাকার অনুভূমিক দূরত্ব কত হবে?



চিত্র 6.64

6.7 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. দুটি চিত্র যাদের একই আকৃতি, কিন্তু আকার এক হবে এটা আবশ্যক নয়, তাদের সদৃশ চিত্র বলা হয়।
2. সকল সর্বসম চিত্র সদৃশ কিন্তু এর বিপরীত বিবৃতি সত্য নয়।
3. সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুটি বহুভুজ সদৃশ হবে, যদি (i) তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (ii) তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে (অর্থাৎ সমানুপাতে) থাকে।
4. যদি একটি ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা ত্রিভুজটির অপর দুটি বাহুকে দুটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে, তবে অপর বাহু দুটি একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।
5. যদি একটি রেখা কোনো ত্রিভুজের যে-কোনো দুটি বাহুকে একই অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে রেখাটি তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হয়।
6. যদি দুটি ত্রিভুজের, অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, তবে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে এবং অতঃপর দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হয় (সদৃশতার AAA শর্ত)।
7. দুটি ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হয়, তবে দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হয় (সদৃশতার AA শর্ত)।
8. যদি দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো একই অনুপাতে থাকে, তবে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং অতঃপর ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ (সদৃশতার SSS শর্ত)।
9. যদি কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয় এবং এই কোণগুলোর ধারক বাহুগুলো একই অনুপাতে (সমানুপাতিক) থাকে, তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ (সদৃশতার SAS শর্ত)।
10. দুটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর বর্গের অনুপাতের সমান হয়।
11. যদি কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের শীর্ষবিন্দু থেকে অতিভুজের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা হয়, তবে লম্বের দুই পাশে উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় সমগ্র ত্রিভুজের সাথে সদৃশ হয় এবং এছাড়াও ত্রিভুজদ্বয় একে অপরের সদৃশ হবে।
12. কোনো সমকোণী ত্রিভুজে, অতিভুজের বর্গ তার অন্য দুটি বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হয় (পিথাগোরাসের উপপাদ্য)।
13. যদি কোনো ত্রিভুজে, একটি বাহুর বর্গ অন্য দুটি বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণ হল একটি সমকোণ।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

যদি দুটি সমকোণী ত্রিভুজে, একটি ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহু, অপর ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হয়। এটিকে RHS সদৃশতা শর্ত হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

অধ্যায় 8-এর উদাহরণ 2-এ, যদি তোমরা এই শর্ত প্রয়োগ করো, তবে এর প্রমাণ অনেকটা সহজতর হবে।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

(COORDINATE GEOMETRY)

7

7.1 ভূমিকা

সমতলে কোনো একটি বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা সম্পর্কে তোমরা নবম শ্রেণিতে পড়েছ, এর জন্য আমাদের একজোড়া স্থানাঙ্ক অক্ষের প্রয়োজন হয়। একটি বিন্দুর y-অক্ষ থেকে দূরত্বকে বলা হয় এর **x-স্থানাঙ্ক** বা **ভূজ**। বিন্দুর x-অক্ষ থেকে দূরত্বকে বলা হয় এর **y-স্থানাঙ্ক** বা **কোটি**। x-অক্ষের উপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্কসমূহ $(x, 0)$ আকারের এবং y-অক্ষের উপর বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, y)$ আকারে হয়।

এখানে তোমাদের জন্য একটি খেলার ব্যবস্থা করা হয়েছে। লেখ কাগজে এক সেট লম্ব অক্ষযুগল আঁকো। এখন নিচের বিন্দুগুলো স্থাপন করো এবং নির্দেশানুযায়ী এদের যুক্ত করো : A(4, 8) থেকে B(3, 9), B(3, 9) থেকে C(3, 8), C(3, 8) থেকে D(1, 6), D(1, 6) থেকে E(1, 5), E(1, 5) থেকে F(3, 3), F(3, 3) থেকে G(6, 3), G(6, 3) থেকে H(8, 5), H(8, 5) থেকে I(8, 6), I(8, 6) থেকে J(6, 8), J(6, 8) থেকে K(6, 9), K(6, 9) থেকে L(5, 8), L(5, 8) থেকে A, বিন্দুগুলো ক্রমান্বয়ে যোগ করো। তারপর P(3.5, 7), Q (3, 6) এবং R(4, 6) বিন্দুগুলো যোগে ত্রিভুজ গঠন করো। X(5.5, 7), Y(5, 6) এবং Z(6, 6) যুক্ত করে আরও একটি ত্রিভুজ গঠন করো। এখন S(4, 5), T(4.5, 4) এবং U(5, 5)-কে যুক্ত করে একটি ত্রিভুজ গঠন করো। সবশেষে S থেকে (0, 5) এবং (0, 6) যুক্ত করো এবং U থেকে (9, 5) এবং (9, 6) বিন্দুগুলো যোগ করো। তুমি কীরূপ চিত্র পেয়েছ?

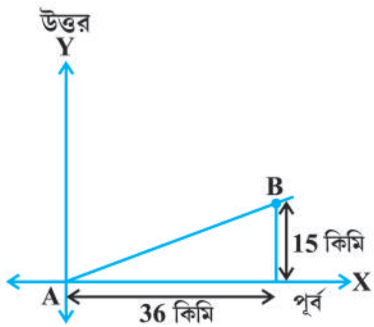
তোমরা আরও দেখেছ যে, দ্বি-চল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ $ax + by + c = 0$, (a, b এক সাথে শূন্য নয়), যা লৈখিকভাবে একটি সরলরেখা প্রকাশ করে। তাছাড়াও তোমরা অধ্যায় 2-এ দেখেছ, $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$-এর লেখচিত্র একটি অধিবৃত্ত হয়। প্রকৃতপক্ষে, স্থানাঙ্ক জ্যামিতির বিকাশ, জ্যামিতিক চিত্রগুলোর অধ্যয়নে বীজগাণিতিক সরঞ্জাম হিসেবে প্রয়োগ হয়। এটি আমাদের বীজগণিত প্রয়োগে জ্যামিতি অধ্যয়নে এবং জ্যামিতির সাহায্যে বীজগণিত বোঝার ক্ষেত্রে সহায়তা করে। এসকল কারণে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বিভিন্ন ক্ষেত্র যেমন পদার্থবিদ্যা, কারিগরিবিদ্যা, নৌবিদ্যা, ভূ-কম্পবিদ্যা এবং শিল্পকলায় ব্যাপক প্রয়োগ পরিলক্ষিত হয়।

এ অধ্যায়ে তোমরা দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত হলে কীভাবে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে হয় তা শিখবে এবং তিনটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবে। তোমরা এটিও অধ্যয়ন করবে দুটি প্রদত্ত বিন্দু দিয়ে গঠিত রেখাংশ কোনো একটি বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত হলে কীভাবে ওই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

7.2 দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র (Distance Formula)

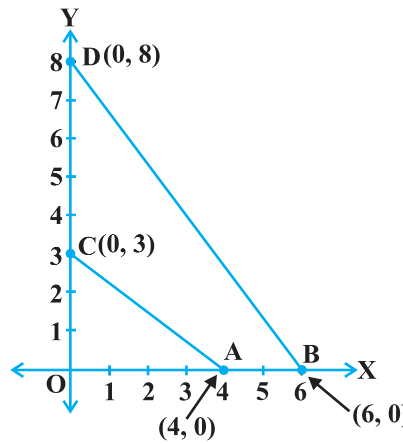
নীচের পরিস্থিতিটি বিবেচনা করো :

একটি শহর B, শহর A থেকে 36 কিমি পূর্বে এবং 15 কিমি উত্তরে অবস্থিত। পরিমাপ না করে তুমি কীভাবে শহর A থেকে শহর B-এর দূরত্ব বের করবে? চলো দেখি, এই পরিস্থিতিটি লৈখিকভাবে চিত্র 7.1-এ দেখানো হয়েছে। দূরত্ব গণনার জন্য তুমি পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করতে পারো।



চিত্র 7.1

এখন, ধরো দুটি বিন্দু x-অক্ষের উপর অবস্থিত। আমরা কি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারব? দৃষ্টান্তস্বরূপ চিত্র 7.2 -এ A(4, 0) এবং B(6, 0) বিন্দু দুটিকে নিয়ে ভাবো। A এবং B বিন্দুগুলো x-অক্ষের উপর অবস্থিত।



চিত্র 7.2

চিত্র থেকে তুমি দেখতে পাও যে, OA = 4 একক এবং OB = 6 একক।

অতএব, A থেকে B-এর দূরত্ব অর্থাৎ AB = OB – OA = 6 – 4 = 2একক।

সুতরাং, যদি দুটি বিন্দু x-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, আমরা সহজে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারি।

এখন, আমরা y-অক্ষের উপর দুটি বিন্দু ধরে নিই। তোমরা কি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে? যদি C(0, 3) এবং D(0, 8) বিন্দু দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। অনুরূপে আমরা CD = 8 – 3 = 5 একক নির্ণয় করতে পারি (চিত্র 7.2 দেখো)।

এরপর, C থেকে A এর দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে (চিত্র 7.2)? যেহেতু OA = 4 একক এবং OC = 3 একক, C থেকে A -এর দূরত্ব অর্থাৎ AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 একক। অনুরূপে, D থেকে B-এর দূরত্ব d = BD = 10 একক তোমরা নির্ণয় করতে পারো।

এখন, যদি আমরা স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ে অবস্থিত নয় এমন দুটি বিন্দু নিয়ে ভাবি, তাহলে আমরা কি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারব? হ্যাঁ! এটি নির্ণয় করতে আমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করব। চলো আমরা একটি উদাহরণ নিয়ে দেখি।

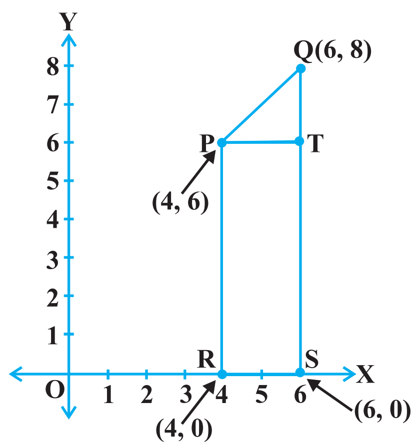
চিত্র 7.3-এ P(4, 6) এবং Q(6, 8) বিন্দুগুলো প্রথম পাদে অবস্থিত। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ে কীভাবে আমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করব? চলো আমরা P ও Q হতে যথাক্রমে PR এবং QS লম্ব x-অক্ষের উপর অঙ্কণ করি। তাছাড়া P থেকে QS-এর উপর লম্ব আঁকি যা QS কে T-তে ছেদ করে। তাহলে R ও S-এর স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে (4, 0) এবং (6, 0)। সুতরাং, RS = 2 একক। তাছাড়া, QS = 8 একক এবং TS = PR = 6 একক।

অতএব, $QT = 2$ একক এবং $PT = RS = 2$ একক।

এখন পিথাগোরাসীয় উপপাদ্য প্রয়োগে আমরা পাই

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$

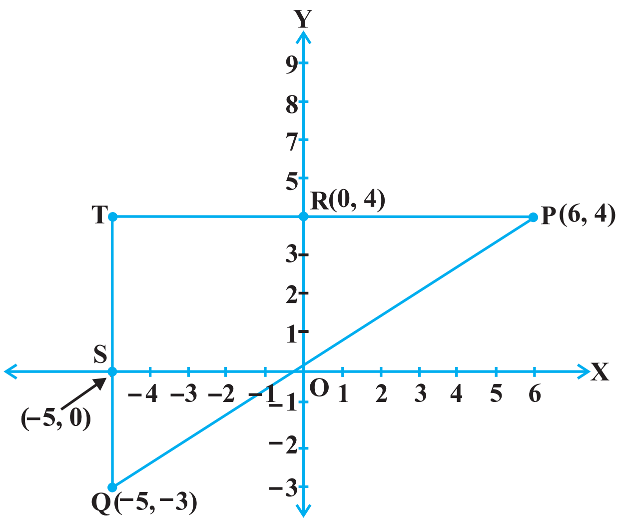
সুতরাং, $PQ = 2\sqrt{2}$ একক



চিত্র 7.3

দুটি ভিন্ন পাদে অবস্থিত দুটি বিন্দুর দূরত্ব আমরা কীভাবে নির্ণয় করব ?

ধরা যাক, $P(6, 4)$ এবং $Q(-5, -3)$ দুটি বিন্দু (চিত্র 7.4 দেখো)। x-অক্ষের উপর QS লম্ব আঁকো। এছাড়া P বিন্দু থেকে বর্ধিত QS -এর উপর PT একটি লম্ব আঁকো যা y-অক্ষকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

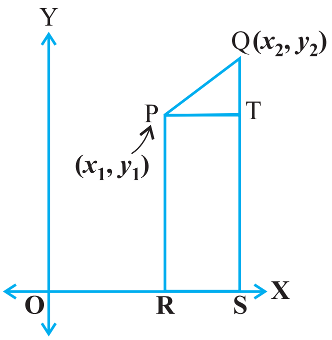


চিত্র 7.4

তাহলে $PT = 11$ একক এবং $QT = 7$ একক (কেন ?)

সমকোণী ত্রিভুজ PTQ-তে পিথাগোরাস উপপাদ্য প্রয়োগে আমরা পাই $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ একক।

চলো আমরা এখন যে-কোনো দুটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করি। x-অক্ষের উপর PR এবং QS লম্ব আঁকো। P বিন্দু থেকে QS এর উপর লম্ব আঁকা হল যা এটিকে T বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 7.5 দেখো)।



চিত্র 7.5

তাহলে, $OR = x_1, OS = x_2$। সুতরাং, $RS = x_2 - x_1 = PT$।

আবার, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$.। সুতরাং, $QT = y_2 - y_1$।

এখন, ΔPTQ -এ পিথাগোরাস প্রয়োগে, আমরা পাই

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

অতএব,
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

লক্ষণীয়, যেহেতু দূরত্ব সর্বদা অঋণাত্মক হয়, তাই আমরা শুধুমাত্র ধনাত্মক বর্গমূল নিই। সুতরাং, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ -এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$\mathbf{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

যাকে **দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র** বলা হয়।

মন্তব্য :

1. বিশেষ ক্ষেত্রে, মূলবিন্দু $O(0, 0)$ থেকে $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. আমরা এটিও লিখতে পারি, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (কেন?)

উদাহরণ 1 : $(3, 2)$, $(-2, -3)$ এবং $(2, 3)$ বিন্দুগুলো দিয়ে একটি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে কি? যদি হয়, তবে গঠিত ত্রিভুজের ধরন উল্লেখ করো।

সমাধান : চলো আমরা PQ, QR এবং PR-এর দূরত্ব বের করার জন্য দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রয়োগ করি, যেখানে প্রদত্ত বিন্দুগুলো হল $P(3, 2)$, $Q(-2, -3)$ এবং $R(2, 3)$ ।আমরা পাই

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (প্রায়)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (প্রায়)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (প্রায়)}$$

যেহেতু, দূরত্বগুলোর যে-কোনো দুটির যোগফল তৃতীয়টির চেয়ে বৃহত্তর, অতএব P, Q এবং R বিন্দুগুলো একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

এছাড়া, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ হয়, পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য প্রয়োগে, আমরা পাই $\angle P = 90°$।

অতএব, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

উদাহরণ 2 : দেখাও যে, (1, 7), (4, 2), (–1, –1) এবং (– 4, 4) বিন্দুগুলো একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

সমাধান : ধরা যাক, প্রদত্ত বিন্দুগুলো হল A(1, 7), B(4, 2), C(–1, –1) এবং D(– 4, 4) । ABCD কে বর্গক্ষেত্র দেখানোর একটি পদ্ধতি হল এর বাহুগুলো সমান এবং এর উভয় কর্ণদ্বয়ও যেন সমান হয়। এখন,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

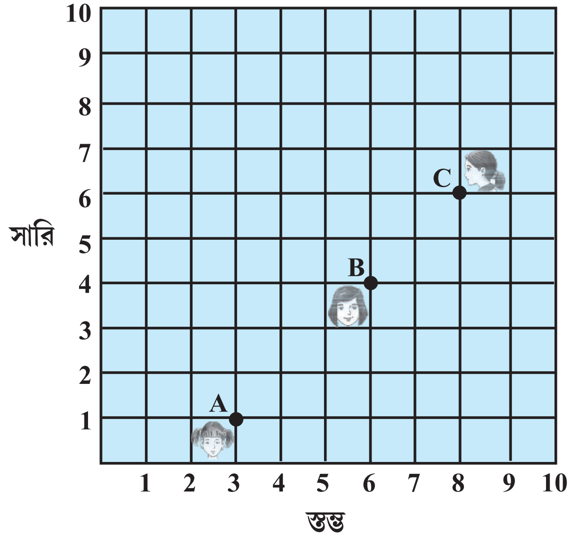
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

যেহেতু, AB = BC = CD = DA এবং AC = BD, অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের সব বাহুগুলো সমান এবং এর কর্ণদ্বয় AC এবং BD উভয়েই সমান। অতএব, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

বিকল্প সমাধান : আমরা চারটি বাহু এবং একটি কর্ণ, ধরো AC উপরিউক্ত রূপে নির্ণয় করব। এখানে $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$। অতএব, পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য থেকে, $\angle D = 90°$। একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু সমান এবং একটিকোণ 90° হলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র। অতএব, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

উদাহরণ 3 : চিত্র 7.6-এ একটি শ্রেণিকক্ষের ডেস্কের সজ্জা দেখানো হল। অসীমা, ভারতী এবং কেমেলার বসার অবস্থান যথাক্রমে A(3, 1), B(6, 4) এবং C(8, 6)। তুমি কি মনে কর যে, তারা একই রেখায় বসেছে? তোমরা উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।



চিত্র 7.6

সমাধান : দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রয়োগে, আমরা পাই

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

যেহেতু $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$, আমরা বলতে পারি, A, B এবং C সমরেখ। অতএব, ওরা একই রেখা বরাবর বসেছিল।

উদাহরণ 4 : x এবং y এর মধ্যবর্তী একটি সম্পর্ক নির্ণয় করো যাতে (x, y) বিন্দুটি (7, 1) এবং (3, 5) বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হয়।

সমাধান : ধরো $P(x, y)$ বিন্দুটি A(7, 1) এবং B(3, 5) বিন্দুগুলো থেকে সমদূরবর্তী।

আমাদের দেওয়া আছে AP = BP । সুতরাং, $AP^2 = BP^2$

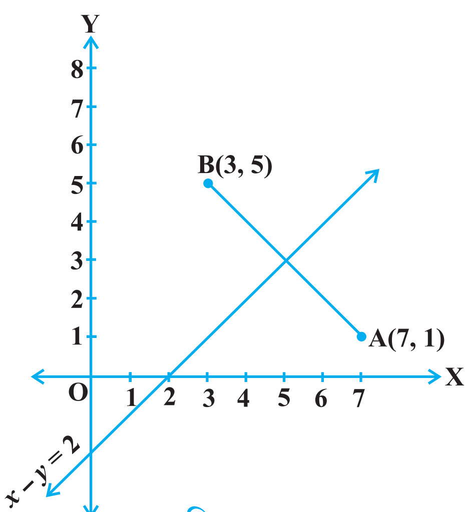
অর্থাৎ, $$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

অর্থাৎ, $$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

অর্থাৎ, $$x - y = 2$$

এটিই হল নির্ণেয় সম্পর্ক।

মন্তব্য : লক্ষ করো, $x - y = 2$ সমীকরণের লেখচিত্র একটি সরলরেখা হয়। তোমাদের পূর্বের অধ্যয়ন থেকে এটা জান যে, A এবং B থেকে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। অতএব, $x - y = 2$ এর লেখচিত্র AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 7.7 দেখো)।



চিত্র 7.7

উদাহরণ 5 : y-অক্ষের উপর একটি বিন্দু নির্ণয় করো যা A(6, 5) এবং B(–4, 3) থেকে সমদূরবর্তী।

সমাধান : আমরা জানি যে, y-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, y)$ রূপে হয়। সুতরাং, ধরা যাক $P(0, y)$ বিন্দুটি A ও B থেকে সমদূরবর্তী। তাহলে

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

অর্থাৎ, $$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

অর্থাৎ, $$4y = 36$$

অর্থাৎ, $$y = 9$$

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্দু হল (0, 9)।

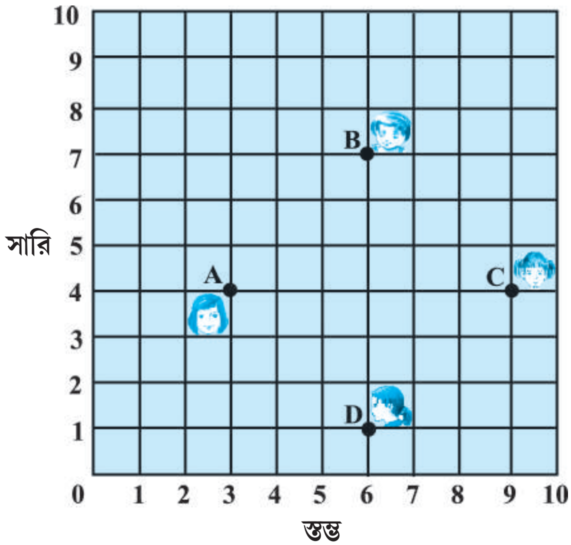
চলো আমরা সমাধানটি যাচাই করে নিই : $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

দ্রষ্টব্য : উপরিউক্ত মন্তব্য প্রয়োগে, আমরা দেখি যে, (0, 9) হল y-অক্ষ এবং AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু।

অনুশীলনী 7.1

1. নীচের বিন্দুযুগলগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো :
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$
2. (0, 0) এবং (36, 15) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো। এখন কি তোমরা অনুচ্ছেদ 7.2-এ আলোচিত A এবং B শহরের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে?
3. (1, 5), (2, 3) এবং (– 2, – 11) বিন্দুগুলো সমরেখ কিনা নির্ণয় করো।
4. (5, – 2), (6, 4) এবং (7, – 2) বিন্দুগুলো একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হবে কিনা যাচাই করো।
5. 4 জন বন্ধু একটি শ্রেণিকক্ষে A, B, C এবং D বিন্দুতে চিত্র 7.8 -এর অনুরূপে বসল। চম্পা এবং চামেলি শ্রেণিকক্ষে হাঁটাহাঁটি করছিল এবং কয়েক মিনিট লক্ষ করার পর চম্পা চামেলিকে জিজ্ঞেস করল, “তুমি কি মনে কর না ABCD একটি বর্গক্ষেত্র?” চামেলির অসম্মতি ছিল। দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রয়োগে, এদের মধ্যে কে ঠিক তা নির্ণয় করো।



চিত্র 7.8

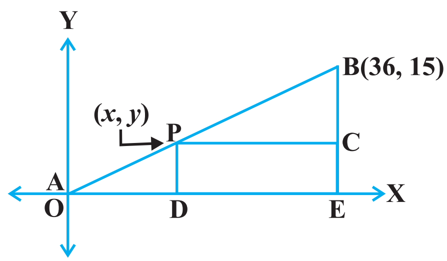
6. নীচের বিন্দুগুলো দিয়ে যদি চতুর্ভুজ গঠিত হয় তবে এদের ধরন উল্লেখ করো এবং তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও :
   (i) (– 1, – 2), (1, 0), (– 1, 2), (– 3, 0)
   (ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)
   (iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)
7. x-অক্ষের উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করো যা (2, –5) এবং (–2, 9) থেকে সমদূরবর্তী হয়।
8. P(2, – 3) এবং Q(10, y) এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 10 একক হলে y-এর মান নির্ণয় করো।

9. যদি Q(0, 1) বিন্দুটি P(5, –3) এবং $R(x, 6)$ বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় করো। এছাড়া QR এবং PR-এর দূরত্ব নির্ণয় করো।

10. (x, y) বিন্দুটি (3, 6) এবং (– 3, 4) থেকে সমদূরবর্তী হলে, x এবং y -এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো।

7.3 বিভাজন সূত্র (Section Formula)

চলো আমরা 7.2 অনুচ্ছেদের পরিস্থিতিটি পুনরায় বিবেচনা করি। ধরো কোনো টেলিফোন কোম্পানি একটি প্রসার কেন্দ্র (relay tower) A এবং B -এর মধ্যবর্তী P বিন্দুতে এমনভাবে স্থাপন করতে চায় যেন P থেকে B-এর দূরত্ব A-এর দূরত্বের দ্বিগুণ হয়। যদি P বিন্দুটি AB-এর উপর অবস্থিত হয়, এটি AB-কে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করে। (চিত্র 7.9 দেখো) যদি আমরা A কে মূলবিন্দু O হিসেবে ধরে নিই এবং উভয় অক্ষ বরাবর 1 কিমিকে 1 একক নেওয়া হয়, তবে B-এর স্থানাঙ্ক হবে (36, 15)। প্রসার কেন্দ্রের অবস্থান জানার জন্য, P -এর স্থানাঙ্ক আমাদের অবশ্যই জানতে হবে। কীভাবে আমরা এই স্থানাঙ্কগুলো নির্ণয় করব?



চিত্র 7.9

ধরো, P-এর স্থানাঙ্ক (x, y)। P এবং B থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব টান যাতে এগুলো যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করে। BE-এর উপর PC লম্ব টান। তাহলে অধ্যায় 6-এ আলোচিত, AA সাদৃশ্যতা শর্তানুযায়ী, Δ POD এবং Δ BPC সদৃশ।

অতএব, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, এবং $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

সুতরাং, $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ এবং $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$.

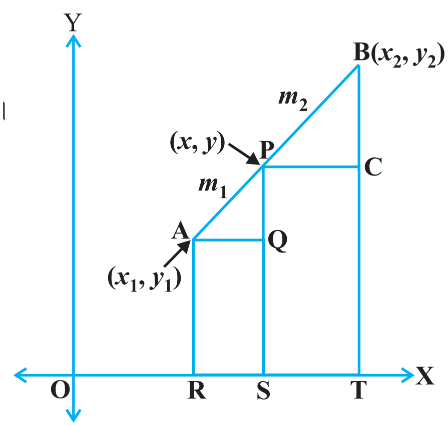
এই সমীকরণগুলো থেকে পাওয়া যায় $x = 12$ এবং $y = 5$।

তোমরা যাচাই করে দেখতে পারো যে, P(12, 5) এই শর্তে ছেদ করে যাতে OP : PB = 1 : 2 হয়।

চলো সাধারণ সূত্র নির্ণয়ের জন্য একটি উদাহরণের সাহায্যে বোঝার চেষ্টা করি।

ধরো $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ যে-কোনো দুটি বিন্দু এবং $P(x, y)$ বিন্দুটি AB -কে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$$ (চিত্র 7.10 দেখো)।



চিত্র 7.10

x-অক্ষের উপর AR, PS এবং BT লম্ব আঁকো। x-অক্ষের সমান্তরালে AQ এবং PC আঁকো। তাহলে, AA সদৃশতার শর্তানুযায়ী

$$\Delta \text{ PAQ} \sim \Delta \text{ BPC}$$

অতএব, $$\frac{\text{PA}}{\text{BP}} = \frac{\text{AQ}}{\text{PC}} = \frac{\text{PQ}}{\text{BC}} \qquad (1)$$

এখন, $$\text{AQ} = \text{RS} = \text{OS} - \text{OR} = x - x_1$$
$$\text{PC} = \text{ST} = \text{OT} - \text{OS} = x_2 - x$$
$$\text{PQ} = \text{PS} - \text{QS} = \text{PS} - \text{AR} = y - y_1$$
$$\text{BC} = \text{BT} - \text{CT} = \text{BT} - \text{PS} = y_2 - y$$

এই মানগুলোকে (1)-এ প্রতিস্থাপন করে পাই

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ থেকে পাই } x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$

অনুরূপে, $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \text{ থেকে পাই } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

সুতরাং, $\text{P}(x, y)$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক যা $\text{A}(x_1, y_1)$ এবং $\text{B}(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করে তা হল

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

এটি **বিভাজন সূত্র** হিসাবে পরিচিত।

এই সূত্রটিও A, P এবং B থেকে y-অক্ষের উপর লম্ব টেনে নির্ণয় করা যেতে পারে এবং উপরোক্ত নিয়মে এগোতে হবে।

যদি P বিন্দু AB -কে $k : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে তাহলে P-এর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right).$$

বিশেষ ক্ষেত্র : একটি রেখাংশের মধ্যবিন্দু রেখাংশটিকে 1 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। অতএব, $\text{A}(x_1, y_1)$ এবং $\text{B}(x_2, y_2)$ -এর সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

চলো আমরা এই বিভাজন সূত্রের উপর ভিত্তি করে কয়েকটি উদাহরণ এর সমাধান করি।

উদাহরণ 6 : (4, – 3) এবং (8, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে 3 : 1 অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে যে বিন্দুটি তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করি, প্রয়োজনীয় বিন্দুটি $P(x, y)$ । বিভাজনসূত্র প্রয়োগে, আমরা পাই

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

অতএব, নির্ণেয় বিন্দুটি হল (7, 3) ।

উদাহরণ 7 : A(– 6, 10) এবং B(3, – 8) বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে (– 4, 6) বিন্দুটি কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

সমাধান : মনে করো, (– 4, 6) বিন্দুটি AB-কে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে। বিভাজন সূত্র প্রয়োগে আমরা পাই

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \tag{1}$$

মনে করে দেখো যে যদি $(x, y) = (a, b)$ হয়, তবে $x = a$ এবং $y = b$ ।

সুতরাং, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ এবং } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

এখন, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$ থেকে পাওয়া যায়

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

অর্থাৎ, $$7m_1 = 2m_2$$

অর্থাৎ, $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

তোমাদের যাচাই করে দেখা উচিত যে, অনুপাতটি y-স্থানাঙ্ককেও সিদ্ধ করে।

এখন, $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (সর্বত্র m_2 দিয়ে ভাগ করে)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

অতএব, $(-4, 6)$ বিন্দুটি $A(-6, 10)$ এবং $B(3, -8)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $2 : 7$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

বিকল্পরূপে : $m_1 : m_2$ অনুপাতটিকে $\frac{m_1}{m_2} : 1$, বা $k : 1$ রূপে লেখা যেতে পারে। ধরো $(-4, 6)$ বিন্দুটি AB-কে $k : 1$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে। বিভাজন সূত্র প্রয়োগে আমরা পাই

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k-6}{k+1}, \frac{-8k+10}{k+1}\right) \qquad (2)$$

সুতরাং, $$-4 = \frac{3k-6}{k+1}$$

অর্থাৎ, $$-4k-4 = 3k-6$$

অর্থাৎ, $$7k = 2$$

অর্থাৎ, $$k : 1 = 2 : 7$$

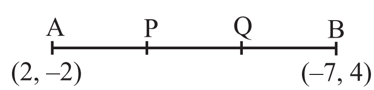
তোমরা y-স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রেও এটি যাচাই করতে পারো।

সুতরাং, $(-4, 6)$ বিন্দুটি $A(-6, 10)$ এবং $B(3, -8)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $2 : 7$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

দ্রষ্টব্য : যদি A, P এবং B সমরেখ হয়, তবে PA এবং PB-এর দূরত্ব নির্ণয় করে এদের অনুপাত নিয়েও তোমরা সমাধান করতে পারো।

উদাহরণ 8 : $A(2, -2)$ এবং $B(-7, 4)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশটি যে বিন্দুগুলো দিয়ে সমত্রিখণ্ডিত (অর্থাৎ সমান তিনটি অংশে) হয়েছে , এদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

সমাধান : ধরো, P এবং Q বিন্দু দুটি AB -কে সমত্রিখণ্ডিত করেছে অর্থাৎ, AP = PQ = QB (চিত্র 7.11 দেখো)।



চিত্র 7.11

অতএব, P বিন্দু AB-কে $1 : 2$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে। সুতরাং, বিভাজন সূত্র প্রয়োগে P-এর স্থানাঙ্ক হবে,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right), \text{ অর্থাৎ, } (-1, 0)$$

এখন, Q বিন্দুটিও AB-কে $2 : 1$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে। সুতরাং, Q-এর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right), \text{ অর্থাৎ, } (-4, 2)$$

অতএব, A এবং B সংযোজক রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুগুলো হল $(-1, 0)$ এবং $(-4, 2)$।

দ্রষ্টব্য : আমরা Q বিন্দুকে PB-এর মধ্যবিন্দু হিসেবে পেতে পারি। সুতরাং আমরা মধ্যবিন্দু নির্ণয়ের সূত্রের মাধ্যমে এটির স্থানাঙ্ক পাই।

উদাহরণ 9 : $(5, -6)$ এবং $(-1, -4)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে y-অক্ষ কী অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় করো এবং ছেদবিন্দুটিও নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করি, $k : 1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়। তাহলে বিভাজনসূত্র প্রয়োগে, AB-কে যে বিন্দুটি $k : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে এর স্থানাঙ্ক হল $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$.

এই বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং আমরা জানি y-অক্ষে ভূজ 0 হয়।

অতএব, $$\frac{-k+5}{k+1} = 0$$

সুতরাং, $$k = 5$$

অর্থাৎ, নির্ণেয় অনুপাতটি $5 : 1$। $k = 5$ বসানো হলে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$.

উদাহরণ 10 : যদি একটি সামন্তরিকের ক্রমান্বয়ে শীর্ষবিন্দুগুলো A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) এবং D(p, 3) হয়, তবে p-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা জানি যে, একটি সামন্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, AC-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক = BD-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক

অর্থাৎ, $$\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

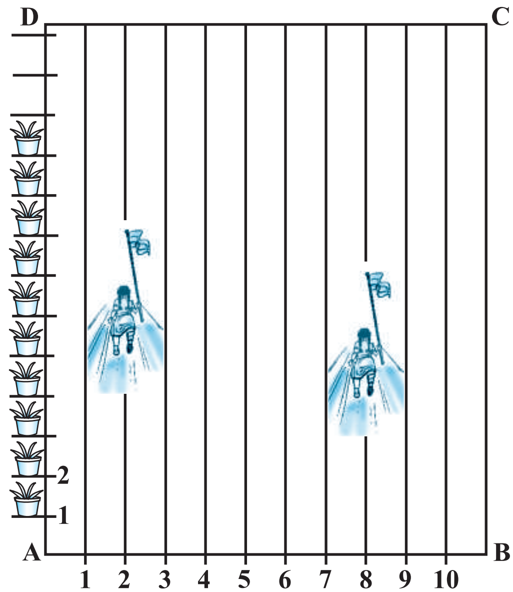
অর্থাৎ, $$\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

সুতরাং, $$\frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

অর্থাৎ, $$p = 7$$

অনুশীলনী 7.2

1. $(-1, 7)$ এবং $(4, -3)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দু $2 : 3$ অনুপাতে বিভক্ত করে এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
2. $(4, -1)$ এবং $(-2, -3)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুগুলো সমত্রিখণ্ডিত করে এদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
3. তোমাদের বিদ্যালয়ে ক্রীড়া দিবসের কার্যকলাপে ABCD আয়তাকার মাঠে 1 মিটার করে দূরে দুরে চক পাউডার দিয়ে রেখা টানা হল। AD বরাবর 1 মিটার পর পর দূরত্বে 100 টি ফুলের টব বসানো হল (চিত্র 7.12-এর মতো)। নীহারিকা দ্বিতীয় রেখা বরাবর AD-এর $\frac{1}{4}$ অংশ দূরত্বে গিয়ে একটি সবুজ পতাকা পোঁতে প্রীত অষ্টম রেখা বরাবর AD-এর $\frac{1}{5}$ অংশ দূরত্বে গিয়ে লাল পতাকা পোঁতে। এই দুই পতাকার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? এই দুটি পতাকার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? যদি রেশ্মি দুটি পতাকার সংযোজক পথের ঠিক মাঝে একটি নীল পতাকা পুঁতে, তবে সে কোথায় তার পতাকাটি পুঁতেছিল?



চিত্র 7.12

4. $(-3, 10)$ এবং $(6, -8)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $(-1, 6)$ বিন্দুটি কী অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় করো।
5. $A(1, -5)$ এবং $B(-4, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশ x-অক্ষ দ্বারা কী অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় করো। এছাড়া যে বিন্দুটিতে বিভক্ত হয়েছে, এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
6. যদি $(1, 2)$, $(4, y)$, $(x, 6)$ এবং $(3, 5)$ বিন্দুগুলো ক্রমান্বয়ে একটি সামন্তরিকের শীর্ষবিন্দু হিসেবে নেওয়া হয়, তবে x এবং y-এর মান নির্ণয় করো।
7. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো, যেখানে AB একটি বৃত্তের ব্যাস যার কেন্দ্র $(2, -3)$ এবং B $(1, 4)$ হয়।
8. যদি A ও B-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2, -2)$ এবং $(2, -4)$ হয়, তবে P-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো, যেখানে $AP = \frac{3}{7} AB$ এবং P বিন্দুটি AB রেখাংশের উপর অবস্থিত হয়।
9. সে বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যারা $A(-2, 2)$ এবং $B(2, 8)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে চারটি সমান অংশে বিভক্ত করে।
10. $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ এবং $(-2, -1)$ — বিন্দুগুলো ক্রমান্বয়ে একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু হলে, এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। [**ইঙ্গিত :** একটি রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (এর কর্ণদ্বয়ের গুণফল]

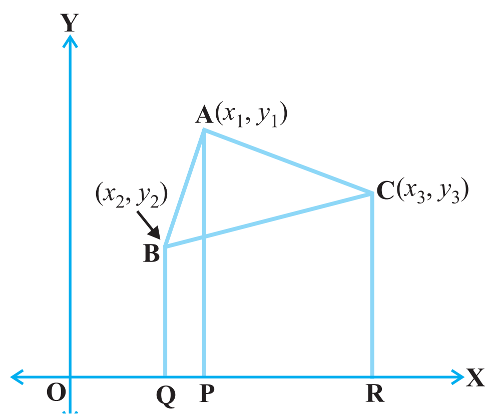
7.4 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle)

তোমাদের পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে, তোমরা শিখেছ যে, কী করে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়, যখন এর ভূমি এবং অনুরূপ উচ্চতা (altitude) প্রদত্ত হয়। তোমরা যে সূত্রটি ব্যবহার করেছো তা হল :

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে নবম শ্রেণিতে তোমরা হেরনের সূত্র সম্বন্ধে অধ্যয়ন করেছ। এখন, যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক প্রদত্ত হয়, তবে কি তোমরা এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে? বেশ, তোমরা দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রয়োগে ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে হেরণের সূত্রের সাহায্যে এর ক্ষেত্রফল পাবে। কিন্তু এটি খুব কষ্টসাধ্য, বিশেষত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যদি অমূলদ সংখ্যা হয়। চলো, এর চেয়ে কোনো সহজতর পদ্ধতি আছে কিনা দেখা যাক।

ধরো, ABC একটি ত্রিভুজ যার শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হল $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ । A, B এবং C থেকে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AP, BQ এবং CR লম্বসমূহ টানা হল। স্পষ্টতই ABQP, APRC এবং BQRC হল ট্রাপিজিয়াম (চিত্র 7.13 দেখো)।



চিত্র 7.13

এখন, চিত্র 7.13 থেকে এটা স্পষ্ট যে,

Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল = ট্রাপিজিয়াম ABQP-এর ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম APRC-এর ক্ষেত্রফল − ট্রাপিজিয়াম BQRC-এর ক্ষেত্রফল

তোমরা আরও জান যে,

$$\text{ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times (\text{সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি}) \times (\text{এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব})।$$

অতএব,

$$\Delta \text{ ABC-এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$

অতএব, $\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ রাশিটির সংখ্যাগত মান হল Δ ABC-এর ক্ষেত্রফল।

চলো আমরা, এমন কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি যেখানে আমরা এই সূত্রের প্রয়োগ করতে পারি।

উদাহরণ 11 : $(1, -1)$, $(-4, 6)$ এবং $(-3, -5)$ শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : $A(1, -1)$, $B(-4, 6)$ এবং $C(-3, -5)$ শীর্ষ দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উপরোক্ত সূত্র প্রয়োগে পাওয়া যায়।

$$\frac{1}{2}[1(6+5)+(-4)(-5+1)+(-3)(-1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}(11+16+21) = 24$$

সুতরাং, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 24 বর্গ একক।

উদাহরণ 12 : $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ এবং $C(7, -4)$ বিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ এবং $C(7, -4)$ বিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\frac{1}{2}[5(7+4)+4(-4-2)+7(2-7)]$$

$$= \frac{1}{2}(55-24-35) = \frac{-4}{2} = -2$$

যেহেতু ক্ষেত্রফলের পরিমাপ ঋণাত্মক হতে পারে না, আমরা শুধু -2 এর সংখ্যাগত মান অর্থাৎ 2 নেব।
অতএব, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= 2$ বর্গএকক।

উদাহরণ 13 : $P(-1.5, 3)$, $Q(6, -2)$ এবং $R(-3, 4)$ বিন্দুগুলো দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুগুলো দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\frac{1}{2}[-1.5(-2-4)+6(4-3)+(-3)(3+2)]$$

$$= \frac{1}{2}(9+6-15) = 0$$

আমরা কি 0 বর্গএকক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ পেতে পারি? এটি কী অর্থ বহন করে?

যদি একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 0 বর্গএকক হয়, তবে এর শীর্ষগুলো সমরেখ হবে।

উদাহরণ 14 : $A(2, 3)$, $B(4, k)$ এবং $C(6, -3)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হলে k -এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু প্রদত্ত বিন্দুগুলো সমরেখ, তাই এদের নিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল অবশ্যই 0 হবে, অর্থাৎ,

$$\frac{1}{2}[2(k+3)+4(-3-3)+6(3-k)] = 0$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}(-4k) = 0$

অতএব, $k = 0$

চলো আমাদের উত্তরটি যাচাই করি।

$$\Delta\, ABC\text{-এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)] = 0$$

উদাহরণ 15 : যদি A(–5, 7), B(– 4, –5), C(–1, –6) এবং D(4, 5) একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু হয়, তবে ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : B থেকে D পর্যন্ত যুক্ত করে তোমরা দুটি ত্রিভুজ ABD এবং BCD পাবে।

এখন, $$\Delta\, ABD\text{-এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$$

$$= \frac{1}{2}(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ বর্গএকক}$$

এছাড়া, $$\Delta\, BCD\text{-এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$$

$$= \frac{1}{2}(44-10+4) = 19 \text{ বর্গএকক}$$

সুতরাং, চতুর্ভুজ ABCD-এর ক্ষেত্রফল = 53 + 19 = 72 বর্গএকক।

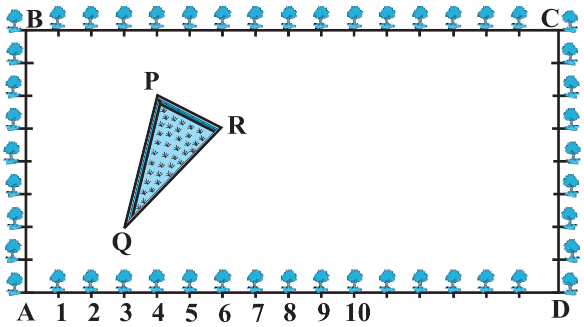
দ্রষ্টব্য : একটি বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে, এটিকে আমরা কতগুলো ত্রিভুজাকার অঞ্চলে বিভক্ত করি, যাদের কোনো সাধারণ ক্ষেত্র থাকে না এবং ত্রিভুজাকার অঞ্চলগুলোর ক্ষেত্রফল যুক্ত করে থাকি।

অনুশীলনী 7.3

1. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যাদের শীর্ষবিন্দুগুলো হল
   (i) (2, 3), (–1, 0), (2, – 4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)
2. নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে 'k' -এর মান নির্ণয় করো, যার জন্য বিন্দুগুলো সমরেখ হয়।
   (i) (7, –2), (5, 1), (3, k) (ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)
3. (0, –1), (2, 1) এবং (0, 3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যুক্ত করে যে ত্রিভুজ পাওয়া যায় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের সাথে প্রদত্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।
4. (– 4, – 2), (– 3, – 5), (3, – 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলো ক্রমান্বয়ে যুক্ত করে যে চতুর্ভুজটি পাওয়া যায় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
5. তোমরা নবম শ্রেণিতে (অধ্যায় 9, উদাহরণ 3) অধ্যয়ন করেছ যে, ত্রিভুজের একটি মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। এই ফলাফলটি Δ ABC-এর ক্ষেত্রে যাচাই করে দেখো যার শীর্ষগুলো হল A(4, – 6), B(3, –2) এবং C(5, 2)।

অনুশীলনী 7.4 (ঐচ্ছিক)*

1. $A(2, -2)$ এবং $B(3, 7)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $2x + y - 4 = 0$ সরলরেখা কী অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় করো।
2. যদি (x, y), $(1, 2)$ এবং $(7, 0)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হয়, তবে x এবং y -এর মধ্যে একটি সম্পর্ক নির্ণয় করো।
3. $(6, -6)$, $(3, -7)$ এবং $(3, 3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
4. একটি বর্গক্ষেত্রের বিপরীত দুটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(-1, 2)$ এবং $(3, 2)$। এর অপর দুটি শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
5. কৃষ্ণনগরে একটি সেকেন্ডারি স্কুলের দশম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের বাগান গঠনের কার্যকলাপের জন্য একটি আয়তাকার জমি দেওয়া হল। এর সীমারেখার উপর পরপর 1 মিটার দূরে গুলমোহরের চারাগাছ রোপণ করা হল। এই জমিতে একটি ত্রিভুজাকার তৃণভূমিখণ্ড আছে (চিত্র 7.14 দেখো)। শিক্ষার্থীদেরকে বাকি অংশে ফুলের চারার বীজ বপন করতে হবে।



চিত্র 7.14

   (i) A-কে মূলবিন্দু ধরে, ত্রিভুজের শীর্ষগুলোর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
   (ii) যদি C মূলবিন্দু হয়, তবে $\Delta\, PQR$ -এর শীর্ষগুলোর স্থানাঙ্ক কী হবে?
   এছাড়া প্রতিটি ক্ষেত্রে ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। তোমরা কী পর্যবেক্ষণ করেছ?
6. একটি ত্রিভুজ $\Delta\, ABC$ -এর শীর্ষগুলো হল $A(4, 6)$, $B(1, 5)$ এবং $C(7, 2)$ । একটি রেখা আঁকা হল যা AB এবং AC কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে, এরূপে ছেদ করে যেন $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$ হয়। $\Delta\, ADE$-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো এবং $\Delta\, ABC$-এর ক্ষেত্রফলের সাথে এটির তুলনা করো (উপপাদ্য 6.2 এবং উপপাদ্য 6.6 কে স্মরণ করো)।
7. ধরো $A(4, 2)$, $B(6, 5)$ এবং $C(1, 4)$ হল $\Delta\, ABC$-এর শীর্ষসমূহ।
   (i) A থেকে অঙ্কিত মধ্যমা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।
   (ii) AD-এর উপর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যাতে $AP : PD = 2 : 1$ হয়।
   (iii) মধ্যমা BE এবং CF-এর উপরিস্থিত Q এবং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যাতে $BQ : QE = 2 : 1$ এবং $CR : RF = 2 : 1$ হয়।
   (iv) তোমরা কী পর্যবেক্ষণ করেছ?
   [**দ্রষ্টব্য :** তিনটি মধ্যমার উপর অবস্থিত সাধারণ বিন্দুটিকে *ভরকেন্দ্র* বলে এবং এটি মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।]

* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ের বর্হিভূত

(v) যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ ΔABC-এর শীর্ষ হয়, তবে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

8. $A(-1, -1)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 4)$ এবং $D(5, -1)$ বিন্দুগুলো দিয়ে গঠিত একটি আয়তক্ষেত্র ABCD -এর AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S । চতুর্ভুজ PQRS কি একটি বর্গক্ষেত্র হবে ? এটি কি আয়তক্ষেত্র ? বা একটি রম্বস ? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

7.5 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ -এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হল $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ।

2. $P(x, y)$ বিন্দুটির মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব হল $\sqrt{x^2 + y^2}$ ।

3. $P(x, y)$ বিন্দু যা $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে, এর স্থানাঙ্ক হল $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

4. $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দু হল $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ।

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুগুলো দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হল

$$\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$ -এর সাংখ্যিক মান।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

7.3 অনুচ্ছেদে আলোচিত বিভাজন হতে P বিন্দু যা $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজন রেখাংশকে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করে, এর স্থানাঙ্ক (x, y) হল নিম্নরূপ :

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

লক্ষণীয়, এখানে, $PA : PB = m_1 : m_2$ ।

যা হোক, যদি P বিন্দু A ও B এর মধ্যবর্তী অবস্থিত না হয় কিন্তু AB রেখার উপর, AB রেখাংশের বাইরে অবস্থিত হয় এবং $PA : PB = m_1 : m_2$ হলে, আমরা বলি যে, P বিন্দু A ও B বিন্দুদ্বয় সংযোজক রেখাংশকে বর্হিবিভক্ত করে। তোমরা বিভাজন সূত্রের এই ক্ষেত্রটি উচ্চতর শ্রেণিগুলোতে অধ্যয়ন করবে।

ত্রিকোণমিতির পরিচয় (INTRODUCTION TO TRIGONOMETRY) 8

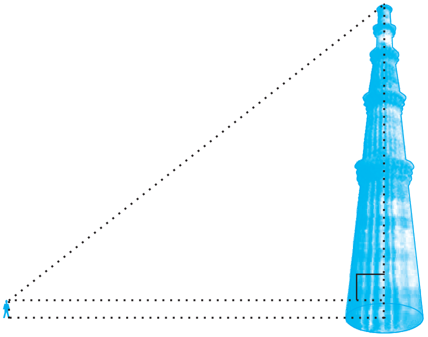
There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry.

– J.F. Herbart (1890)

8.1 ভূমিকা

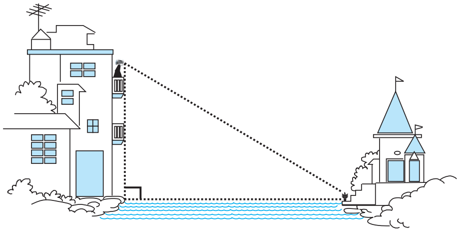
তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে ইতোমধ্যে ত্রিভুজ, বিশেষ করে সমকোণী ত্রিভুজ সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছ। চলো আমরা আমাদের চারপাশ থেকে কিছু উদাহরণ নিই যেখানে সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়েছে এমন কল্পনা করা যায়। উদাহরণস্বরূপ :

1. মনে করো, কোনো একটি স্কুলের শিক্ষার্থীরা কুতুব মিনার পরিদর্শনে গেছে। এখন, যদি একজন শিক্ষার্থী মিনারের চূড়ার দিকে তাকিয়ে থাকে, তবে একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে এমন কল্পনা করা যায়, যা চিত্র 8.1-এ দেখানো হয়েছে। এটিকে আসলে পরিমাপ না করে, ছাত্রটি কি মিনারের উচ্চতা বের করতে সমর্থ হবে?



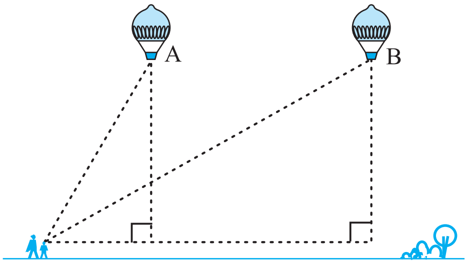
চিত্র 8.1

2. মনে করো একটি মেয়ে নদীর তীরে অবস্থিত তার বাড়ির ঝুল-বারান্দায় বসে আছে। তখন সে নদীর অপর তীরে অবস্থিত একটি মন্দিরের সিঁড়িতে রাখা একটি ফুলদানিকে নীচের দিকে তাকিয়ে দেখছিল। এই পরিস্থিতিতে আমরা এমন কল্পনা করতে পারি যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়েছে যা চিত্র 8.2-এ দেখানো হল। মেয়েটি যে উচ্চতায় বসে আছে এটা যদি তোমাদের জানা থাকে, তাহলে তোমরা কি নদীর বিস্তার (Width) নির্ণয় করতে পারবে?



চিত্র 8.2

3. মনে করো গরম বায়ুভর্তি একটি বেলুন বাতাসে উড়ছে। উড়ন্ত অবস্থায় বেলুনটিকে একটি মেয়ে দেখতে পায় এবং এটা বলার জন্য সে তার মার কাছে ছুটে যায়। বেলুনটিকে দেখার জন্য তার মা তৎক্ষণাৎ ঘর থেকে বেরিয়ে এল। মনে করো যখন মেয়েটি বেলুনটিকে প্রথম দেখেছিল, তখন বেলুনটি বিন্দু A-তে ছিল। আবার, যখন মামা ও মেয়ে উভয়ই বেলুনটিকে দেখার জন্য ঘর থেকে বেরিয়ে এল, তখন বেলুনটির অবস্থান অন্য একটি বিন্দু B-তে ছিল। তোমরা কি ভূমি থেকে B-এর লম্ব উচ্চতা নির্ণয় করতে পারবে?



চিত্র 8.3

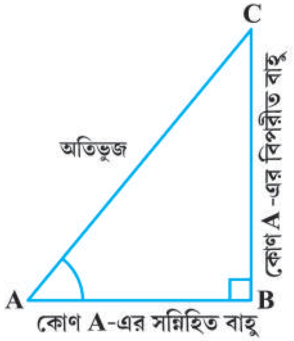
উপরে দেওয়া সকল পরিস্থিতিতে দূরত্ব অথবা উচ্চতা কিছু গাণিতিক কৌশল, যা 'ত্রিকোণমিতি' নামক গণিতের একটি শাখার প্রয়োগ করে নির্ণয় করা যায়। 'trigonometry' শব্দটির উৎপত্তি গ্রিক শব্দ 'tri' (যার অর্থ তিন), 'gon' (যার অর্থ বাহু) এবং 'metron' (যার অর্থ পরিমাপ) থেকে হয়েছে। আসলে, **ত্রিকোণমিতি** হল একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর ও কোণগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নিয়ে অধ্যয়ন । প্রাচীনকালে ত্রিকোণমিতির উপর জ্ঞাত কাজ মিশর ও ব্যবীলন-এ লিপিবদ্ধ ছিল। গোড়ার দিকে জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা (astronomers) ত্রিকোণমিতিকে পৃথিবী থেকে নক্ষত্র এবং গ্রহের দূরত্ব পরিমাপে প্রয়োগ করতেন। এমনকি আজও যন্ত্রবিদ্যা (Engineering) ও ভৌতবিজ্ঞানে (Physical Sciences) ব্যবহৃত অধিকাংশ উন্নত প্রযুক্তিবিদ্যা ত্রিকোণমিতিক ধারণার উপর নির্ভরশীল।

এই অধ্যায়ে, আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর কিছু অনুপাতকে ওর সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে অধ্যয়ন করব যাকে **কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (trigonometric ratios of the angle)** বলা হয়। এখানে আমরা আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সূক্ষ্মকোণ পর্যন্ত সীমাবদ্ধ রাখব, যদিও এই অনুপাতগুলোকে অন্য কোণে বর্ধিত করা যায়। তাছাড়া আমরা $0°$ এবং $90°$ মাপের কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহও নির্ধারণ করব। আমরা কিছু নির্দিষ্ট কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ গণনা করব এবং এসকল অনুপাত সম্পর্কিত কিছু অভেদ (identities) প্রতিষ্ঠা করব, যাদের **ত্রিকোণমিতিক অভেদ (trigonometric identities)** বলা হয়।

8.2 ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

অনুচ্ছেদ 8.1-এ তোমরা বিভিন্ন পরিস্থিতিতে গঠিত কিছু সমকোণী ত্রিভুজের কল্পনা করেছিলে।

চলো আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC নিই যা চিত্র 8.4-এ দেখানো হয়েছে।

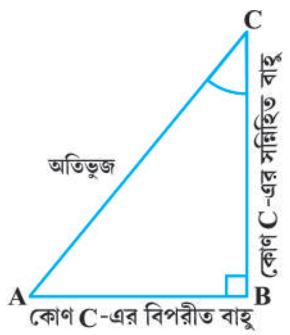


চিত্র 8.4

এখানে, $\angle$ CAB (অথবা, সংক্ষেপে, কোণ A) হল একটি সূক্ষ্মকোণ। কোণ A-এর সাপেক্ষে বাহু BC-এর অবস্থান লক্ষ করো। এটা $\angle A$ এর মুখোমুখি অবস্থিত। একে আমরা কোণ A-এর *বিপরীত বাহু* বলি। AC হল সমকোণী ত্রিভুজের

অতিভুজ এবং বাহু AB, $\angle$ A-এর একটি অংশ। সুতরাং, আমরা এটিকে কোণ A-এর *সন্নিহিত বাহু* বলি।

লক্ষ করো যে, কোণ A এর পরিবর্তে কোণ C নিলে (চিত্র 8.5 দেখো) বাহুগুলোর অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে।



চিত্র 8.5

পূর্বের শ্রেণিগুলোতে তোমরা 'অনুপাত' সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছিলে। এখন আমরা কোনো সমকোণী ত্রিভুজের বাহু সম্বন্ধীয় কিছু নির্দিষ্ট অনুপাত, যাদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়, নির্ধারণ করব।

সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এ কোণ A-এর **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ** নিম্নে নির্ধারণ করা হল :

$$\angle A \text{ এর সাইন (sine)} = \frac{\text{কোণ A এর বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\angle A \text{ এর কোসাইন (cosine)} = \frac{\text{কোণ A এর সন্নিহিত কোণ}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\angle A \text{ এর ট্যানজ্যান্ট (tangent)} = \frac{\text{কোণ A এর বিপরীত বাহু}}{\text{কোণ A এর সন্নিহিত বাহু}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\angle A \text{ এর কোসেক্যান্ট (cosecant)} = \frac{1}{\angle A \text{ এর সাইন}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{কোণ A এর বিপরীত বাহু}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\angle A \text{ এর সেক্যান্ট (secant)} = \frac{1}{\angle A \text{ এর কোসাইন}} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{কোণ A এর সন্নিহিত বাহু}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\angle A \text{ এর কোট্যানজ্যান্ট (cotangent)} = \frac{1}{\angle A \text{ এর ট্যানজ্যান্ট}} = \frac{\text{কোণ A এর সন্নিহিত বাহু}}{\text{কোণ A এর বিপরীত বাহু}} = \frac{AB}{BC}$$

উপরের সংজ্ঞায়িত অনুপাতগুলোকে সংক্ষিপ্তরূপে যথাক্রমে sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A এবং cot A লেখা যায়। লক্ষ করো যে, **cosec A, sec A এবং cot A** অনুপাতগুলোর অন্যোন্যক (reciprocals) হল যথাক্রমে sin A, cos A এবং tan A।

এছাড়া, লক্ষ করো যে, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ এবং $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ ।

সুতরাং, একটি সমকোণী ত্রিভুজের কোনো সূক্ষ্মকোণের সাপেক্ষে **ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ** ত্রিভুজটির কোণ ও তার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে।

কেন তোমরা সমকোণী ত্রিভুজে (চিত্র 8.5 দেখো) কোণ C-এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ধারণ করার চেষ্টা করবে না ?

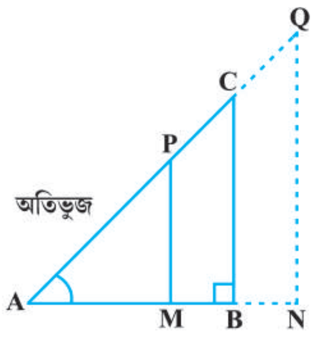
'sine' শব্দটি ব্যবহারের প্রথম ধারণা, যেরূপে আজ আমরা ব্যবহার করছি, এর উল্লেখ 500 খ্রি. আর্যভট্টের লেখা পুস্তক *আর্যভট্টমে* পাওয়া যায়। আর্যভট্ট ***ardha-jya*** শব্দটি প্রয়োগ অর্ধ-জ্যা এর জন্য করেছিলেন যেটিকে যথাসময়ে ***jya*** অথবা ***jiva*** এর সংক্ষিপ্তরূপে নেওয়া হয়েছিল। যখন *আর্যভট্টমের* অনুবাদ আরবি ভাষায় হয়েছিল তখন ***jiva*** শব্দটি যেমন আছে সেরকম (অপরিবর্তিত) রাখা হয়েছিল। ***jiva*** শব্দটি ***sinus*** রূপে অনূদিত হয়েছিল যার অর্থ হল বক্র (curve), যেখানে আরবীয় সংস্করণকে ল্যাটিন (Latin) ভাষায় অনুবাদ করা হয়েছিল। শীঘ্রই ইউরোপের সর্বত্র গাণিতিক পাঠ্যগুলোতে ***sinus*** শব্দটি যা ***sine*** হিসেবেও ব্যবহৃত হয়, এর প্রচলন সাধারণ হয়ে উঠেছিল। জ্যোতির্বিদ্যার একজন ইংরেজি অধ্যাপক এডমুন্ড গুন্টার [Edmund Gunter (1581–1626)] প্রথম সংক্ষিপ্তরূপে ***'sin'*** সংকেতটি ব্যবহার করেছিলেন।

আর্যভট্ট
476 – 550 খ্রিস্টাব্দ

'cosine' এবং **'tangent'** শব্দগুলোর উৎপত্তি অনেক পরে হয়েছিল। কোসাইন অপেক্ষকের উত্থান হয়েছিল পূরক কোণের সাইন গণনা করার প্রয়োজনে। আর্যভট্ট এটিকে **kotijya** নাম দিয়েছিলেন। ***cosinus*** নামটির উৎপত্তি এডমুন্ড গুন্টর এর সাথে হয়েছিল। 1674 সালে ইংরেজ গণিতবিদ্ স্যার জোনস মুরে (Sir Jonas Moore) প্রথম সংক্ষিপ্তরূপে ***'cos'*** সংকেতটি ব্যবহার করেছিলেন।

মন্তব্য : লক্ষ করে দেখো যে, sin A প্রতীকটি 'the sine of the angle A'-এর সংক্ষিপ্ত রূপ হিসেবে ব্যবহৃত হয়। sin A কিন্তু 'sin' এবং A-এর গুণফল নয়। A-থেকে পৃথক করলে 'sin'-এর কোনো অর্থ হয় না। অনুরূপে cos এবং A-এর গুণফল cos A নয়। এভাবে অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো একইরকম তাৎপর্য বহন করে।

এখন, আমরা যদি সমকোণী ত্রিভুজ ABC -এর অতিভুজ AC এর উপর একটি বিন্দু P বা বর্ধিত AC-এর উপর একটি বিন্দু Q নিই এবং AB-এর উপর PM লম্ব এবং বর্ধিত AB-এর উপর QN লম্ব আঁকি (চিত্র 8.6 দেখো), তবে Δ PAM এ $\angle$A-এর সাথে Δ CAB-এ $\angle$ A-এর বা Δ QAN-এ $\angle$ A-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কিরূপ পার্থক্য হবে?



চিত্র 8.6

এটির উত্তরের জন্য, প্রথমে ত্রিভুজগুলোর দিকে তাকাও। Δ PAM এর সাথে Δ CAB সদৃশ কি? অধ্যায় 6 -এর AA সদৃশ্যতা শর্ত স্মরণে আনো। ওই শর্তটি প্রয়োগে তোমরা দেখবে ত্রিভুজ PAM এবং CAB সদৃশ। অতএব, সদৃশ ত্রিভুজের ধর্ম থেকে ত্রিভুজগুলোর অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

সুতরাং, আমরা পাই
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}.$$

এটি থেকে আমরা পাই, $\frac{MP}{AP} = \frac{BC}{AC} = \sin A$ ।

অনুরূপে, $\frac{AM}{AP} = \frac{AB}{AC} = \cos A$, $\frac{MP}{AM} = \frac{BC}{AB} = \tan A$ এবং ইত্যাদি।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, Δ PAM -এর A কোণের সাথে Δ CAB -এর A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কোনো পার্থক্য নেই।

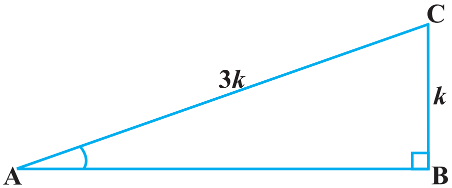
একইভাবে, তোমরা যাচাই করে দেখো যে, sin A -এর মান (এবং অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও) Δ QAN -এর ক্ষেত্রেও একই থাকে।

আমাদের পর্যবেক্ষণ থেকে এটা স্পষ্ট যে, **কোনো একটি কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয় না, যদি কোণটি স্থির থাকে।**

দ্রষ্টব্য : সুবিধার জন্য $(\sin A)^2$, $(\cos A)^2$ ইত্যাদির পরিবর্তে আমরা যথাক্রমে $\sin^2 A$, $\cos^2 A$ ইত্যাদি লিখি। কিন্তু $\text{cosec } A = (\sin A)^{-1} \neq \sin^{-1} A$ (এটিকে sine inverse A বলা হয়)। $\sin^{-1} A$ এর ভিন্ন অর্থ আছে যা উচ্চতর শ্রেণিতে আলোচিত হবে। একই নিয়ম অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর জন্যও হয়। মাঝে মাঝে গ্রিক বর্ণ θ (theta) দিয়ে কোণকে চিহ্নিত করা হয়।

আমরা একটি সূক্ষ্মকোণের ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংজ্ঞায়িত করেছি। যদি আমাদের একটি অনুপাত জানা থাকে, তবে অপর অনুপাতগুলো আমরা পেতে পারি কি? চলো দেখি,

যদি একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC -তে, $\sin A = \frac{1}{3}$ হয়, তবে এর অর্থ এই যে, $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$, অর্থাৎ ABC ত্রিভুজের BC এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 1 : 3 (চিত্র 8.7 দেখো)। সুতরাং BC যদি k-এর সমান হয় তবে AC হবে $3k$, যেখানে k একটি ধনাত্মক সংখ্যা। A কোণের অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে হলে আমাদের তৃতীয় বাহু AB নির্ণয় করা প্রয়োজন। পীথাগোরাস উপপাদ্য কি তোমাদের মনে আছে? চলো এটিকে প্রয়োগ করে AB-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



চিত্র 8.7

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (3k)^2 - (k)^2 = 8k^2 = (2\sqrt{2}\,k)^2$$

সুতরাং, $AB = \pm 2\sqrt{2}\,k$

অতএব, আমরা পাই $AB = 2\sqrt{2}\,k$ (কেন AB-এর মান $-2\sqrt{2}\,k$ নয়?)

এখন, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{2}\,k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

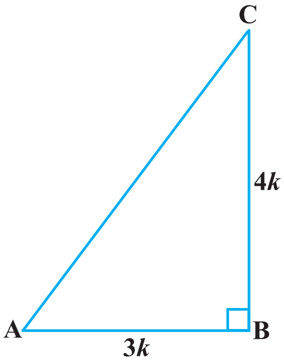
অনুরূপে, তোমরা A কোণের অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে পারবে।

মন্তব্য : যেহেতু একটি সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ দীর্ঘতম বাহু, তাই sin A বা cos A-এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে ছোটো হয় (অথবা বিশেষ ক্ষেত্রে 1-এর সমান হয়)।

চলো আমরা কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করি।

উদাহরণ 1 : দেওয়া আছে $\tan A = \frac{4}{3}$, তবে A কোণের অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান : চলো প্রথমে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করি (চিত্র ৪.8 দেখো)।



চিত্র 8.8

এখন, আমরা জানি যে, $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3}$ ।

সুতরাং, যদি $BC = 4k$ হয়, তবে $AB = 3k$, যেখানে k একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

এখন, পিথাগোরাস উপপাদ্য প্রয়োগে আমরা পাই,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (4k)^2 + (3k)^2 = 25k^2$$

সুতরাং, $$AC = 5k$$

এখন, আমরা সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে এদের সংজ্ঞা ব্যবহারে লিখতে পারি,

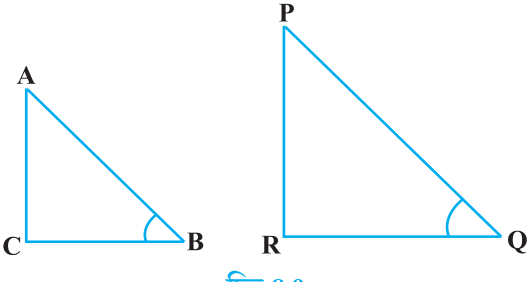
$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

অতএব, $\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$ এবং $\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$ ।

উদাহরণ 2 : যদি $\angle B$ এবং $\angle Q$ দুটি সূক্ষ্মকোণ এরূপ যে, $\sin B = \sin Q$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\angle B = \angle Q$.

সমাধান : মনে করো, দুটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এবং PQR-এর ক্ষেত্রে $\sin B = \sin Q$ (চিত্র 8.9 দেখো)।



চিত্র 8.9

আমরা পাই, $$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

এবং $$\sin Q = \frac{PR}{PQ}$$

তাহলে $$\frac{AC}{AB} = \frac{PR}{PQ}$$

অতএব, $$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = k \text{ (ধরি)} \quad (1)$$

এখন পিথাগোরাস উপপাদ্য প্রয়োগে,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$$

এবং $$QR = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$$

সুতরাং, $$\frac{BC}{QR} = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{\sqrt{k^2PQ^2 - k^2PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = \frac{k\sqrt{PQ^2 - PR^2}}{\sqrt{PQ^2 - PR^2}} = k \quad (2)$$

(1) এবং (2) থেকে পাই,

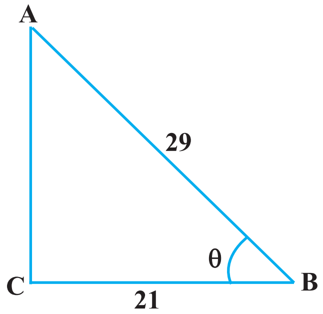
$$\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

তাহলে, উপপাদ্য 6.4 প্রয়োগে $\Delta ACB \sim \Delta PRQ$ হয়, অতএব $\angle B = \angle Q$ ।

উদাহরণ 3 : ধরো ΔACB একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার C কোণ হল সমকোণ, $AB = 29$ একক, $BC = 21$ একক এবং $\angle ABC = \theta$ (চিত্র 8.10 দেখো) তাহলে

(i) $\cos^2\theta + \sin^2\theta$,

(ii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র 8.10

সমাধান : ΔACB থেকে আমরা পাই,

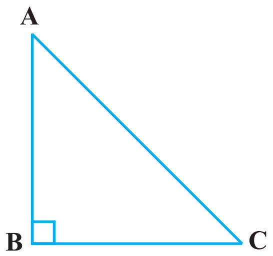
$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(29)^2 - (21)^2}$$
$$= \sqrt{(29-21)(29+21)} = \sqrt{(8)(50)} = \sqrt{400} = 20 \text{ একক।}$$

সুতরাং, $$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{20}{29}, \quad \cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{21}{29}$$

এখন, (i) $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{20}{29}\right)^2 + \left(\frac{21}{29}\right)^2 = \frac{20^2 + 21^2}{29^2} = \frac{400 + 441}{841} = 1$$

এবং (ii) $$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \left(\frac{21}{29}\right)^2 - \left(\frac{20}{29}\right)^2 = \frac{(21+20)(21-20)}{29^2} = \frac{41}{841} \text{ ।}$$

উদাহরণ 4 : একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর B কোণ সমকোণ, যদি $\tan A = 1$ হয়, তবে যাচাই করে দেখো যে, $2 \sin A \cos A = 1$ ।



চিত্র 8.11

সমাধান : ΔABC-তে, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$ (চিত্র 8.11 দেখো)

অর্থাৎ, $BC = AB$

ধরো $AB = BC = k$, যেখানে k একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

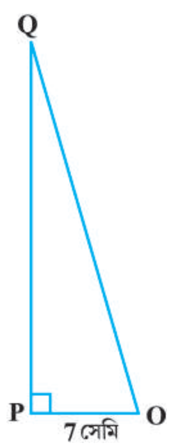
এখন, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(k)^2 + (k)^2} = k\sqrt{2}$

অতএব, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সুতরাং, $2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$, যা হল নির্ণেয় মান।

উদাহরণ 5 : Δ OPQ-এর P-তে সমকোণ, $OP = 7$ সেমি এবং $OQ - PQ = 1$ সেমি (চিত্র 8.12 দেখো)। $\sin Q$ এবং $\cos Q$ -এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র 8.12

সমাধান : Δ OPQ থেকে আমরা পাই,

$OQ^2 = OP^2 + PQ^2$

অর্থাৎ, $(1 + PQ)^2 = OP^2 + PQ^2$ (কেন?)

অর্থাৎ, $1 + PQ^2 + 2PQ = OP^2 + PQ^2$

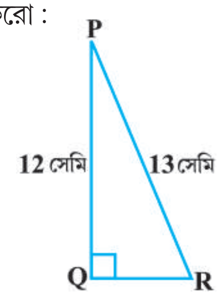
অর্থাৎ, $1 + 2PQ = 7^2$ (কেন?)

অর্থাৎ, $PQ = 24$ সেমি এবং $OQ = 1 + PQ = 25$ সেমি

সুতরাং, $\sin Q = \frac{7}{25}$ এবং $\cos Q = \frac{24}{25}$ ।

অনুশীলনী 8.1

1. ΔABC-এর B-তে সমকোণ, $AB = 24$ সেমি, $BC = 7$ সেমি। মান নির্ণয় করো :
   (i) $\sin A, \cos A$
   (ii) $\sin C, \cos C$
2. চিত্র 8.13 থেকে, $\tan P - \cot R$ নির্ণয় করো।
3. যদি $\sin A = \frac{3}{4}$ হয়, তবে $\cos A$ এবং $\tan A$ নির্ণয় করো।
4. দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$, $\sin A$ এবং $\sec A$ নির্ণয় করো।
5. দেওয়া আছে, $\sec \theta = \frac{13}{12}$, অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো গণনা করো।



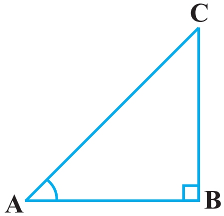
চিত্র 8.13

6. যদি $\angle A$ এবং $\angle B$ এরূপ দুটি সূক্ষ্মকোণ যে $\cos A = \cos B$ হয়, তবে দেখাও যে, $\angle A = \angle B$ ।
7. যদি $\cot \theta = \frac{7}{8}$ হয়, তবে মান নির্ণয় করো : (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$, (ii) $\cot^2\theta$
8. যদি $3 \cot A = 4$ হয়, তবে যাচাই করে দেখো $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ হয় কিনা।
9. ABC ত্রিভুজের B-কোণ সমকোণ, যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, মান নির্ণয় করো :
   (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$
   (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$
10. ΔPQR-এর Q-তে সমকোণ, $PR + QR = 25$ সেমি এবং $PQ = 5$ সেমি। $\sin P$, $\cos P$ এবং $\tan P$ এর মান নির্ণয় করো।
11. নিম্নলিখিতগুলো সত্য বা মিথ্যা কিনা বিবৃত করো । তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।
    (i) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1-এর চেয়ে ছোটো।
    (ii) A-এর কোনো একটি মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$ ।
    (iii) A কোণের cosecant-এর সংক্ষিপ্ত রূপ হল $\cos A$ ।
    (iv) $\cot A$ হল cot এবং A এর গুণফল।
    (v) θ এর কোন্ মানের জন্য $\sin\theta = \frac{4}{3}$ ।

8.3 কয়েকটি বিশেষ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Some Specific Angles)

তোমরা জ্যামিতিতে $30°, 45°, 60°$ এবং $90°$ কোণের অঙ্কনের সাথে পরিচিত হয়েছ। এই অনুচ্ছেদে আমরা এদের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান বের করব এবং অবশ্যই $0°$-এর জন্যও নির্ণয় করব।

45° -এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (Trigonometric Ratios of 45°)



চিত্র 8.14

Δ ABC-এর B কোণ সমকোণ, যদি একটি কোণ 45° হয় তবে অপর কোণটিও 45° হবে অর্থাৎ, $\angle A = \angle C = 45°$ (চিত্র 8.14 দেখো)।

সুতরাং, $BC = AB$ (কেন?)

এখন, ধরো $BC = AB = a$.

তাহলে পিথাগোরাস উপপাদ্য থেকে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

সুতরাং, $AC = a\sqrt{2}$.

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর সংজ্ঞা প্রয়োগে আমরা পাই :

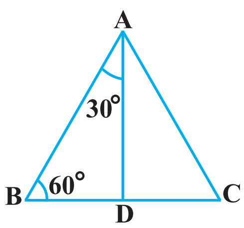
$$\sin 45° = \frac{\text{45° কোণের বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{45° কোণের সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{\text{45° কোণের বিপরীত বাহু}}{\text{45° কোণের সংলগ্ন বাহু}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a} = 1$$

তাছাড়া, $\operatorname{cosec} 45° = \dfrac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}$, $\sec 45° = \dfrac{1}{\cos 45°} = \sqrt{2}$, $\cot 45° = \dfrac{1}{\tan 45°} = 1$.

30° এবং 60°-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (Trigonometric Ratios of 30° and 60°)



চিত্র 8.15

চলো আমরা এখন 30° এবং 60° -এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো গণনা করি। ধরো ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। যেহেতু একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ 60°, অতএব, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$।

A থেকে BC বাহুর উপর AD লম্ব আঁকো (চিত্র 8.15 দেখো)।

এখন, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (কেন?)

সুতরাং, $BD = DC$

এবং $\angle BAD = \angle CAD$ (CPCT)

এখন লক্ষ করো যে :

ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ, D বিন্দুতে সমকোণ, $\angle BAD = 30°$ এবং $\angle ABD = 60°$ (চিত্র 8.15 দেখো)।

তোমরা জান যে, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় করতে হলে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য আমাদের জানা প্রয়োজন। সুতরাং, ধরে নাও $AB = 2a$ ।

তাহলে, $$BD = \frac{1}{2}BC = a$$

এবং $$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2a)^2 - (a)^2 = 3a^2,$$

অতএব, $$AD = a\sqrt{3}$$

এখন আমরা পাই,

$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

এছাড়া, $$\text{cosec } 30° = \frac{1}{\sin 30°} = 2, \quad \sec 30° = \frac{1}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30° = \frac{1}{\tan 30°} = \sqrt{3}.$$

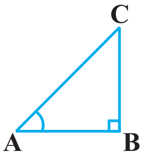
অনুরূপে,

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}, \tan 60° = \sqrt{3},$$

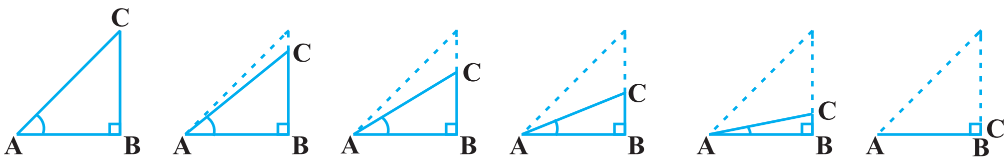
$$\text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}, \ \sec 60° = 2 \text{ এবং } \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

0° এবং 90° এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (Trigonometric Ratios of 0° and 90°)

চলো আমরা দেখি A কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের কী ঘটবে, যদি সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ কে ছোটো থেকে আরও ছোটো করা হয়, যতক্ষণ না শূন্য হয়। যেহেতু $\angle A$ ছোটো থেকে আরও ছোটো হয়, ফলে BC-এর দৈর্ঘ্য কমতে থাকে। C বিন্দুটি B-এর নিকটবর্তী হতে থাকে এবং পরিশেষে $\angle A$, 0° এর খুব কাছাকাছি হয়, এতে AC প্রায় AB-এর সমান হয় (চিত্র 8.17 দেখো)।



চিত্র 8.16



চিত্র 8.17

যখন $\angle A$ এর মান $0°$-এর খুব কাছাকাছি হয়, তখন BC-এর মান 0-এর নিকটবর্তী হয় এবং তাই $\sin A = \frac{BC}{AC}$ এর মান 0-এর খুব কাছাকাছি হয়, এতে AC অনেকটা AB এর সমান হয় এবং সুতরাং, $\cos A = \frac{AB}{AC}$ এর মান 1-এর খুব নিকটবর্তী হয়।

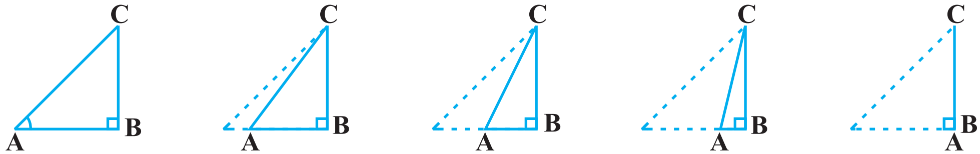
sin A এবং cos A এর মান কীভাবে সংজ্ঞায়িত করব তার জন্য এটি আমাদের সাহায্য করবে, যখন A = $0°$ হয়। আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারি : **$\sin 0° = 0$ এবং $\cos 0° = 1$** ।

এগুলো ব্যবহারে, আমরা পাই :

$\tan 0° = \frac{\sin 0°}{\cos 0°} = 0, \cot 0° = \frac{1}{\tan 0°}$, যা সংজ্ঞাত নয়। (কেন ?)

$\sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$ এবং $\operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\sin 0°}$, এটিও আবার সংজ্ঞাত নয়। (কেন ?)

এখন চলো আমরা দেখি, $\angle A$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের কী ঘটবে যখন ΔABC এর $\angle A$ কোণটি বড়ো থেকে আরো বড়ো করা হয়, যতক্ষণ না ইহা $90°$ হয়। যেহেতু $\angle A$ বড়ো থেকে আরও বড়ো হচ্ছে, $\angle C$ ছোটো থেকে আরও ছোটো হবে। অতএব, উপরোক্ত ক্ষেত্রের মতো AB-এর দৈর্ঘ্য কমতে থাকে। A বিন্দুটি B-এর খুব নিকটবর্তী হতে থাকে। পরিশেষে $\angle A$ যখন $90°$-এর খুব কাছাকাছি হয়, $\angle C$ তখন $0°$-এর খুব নিকটবর্তী হয় এবং AC বাহু প্রায় BC-বাহুর সাথে মিশে যায় (চিত্র 8.18 দেখো)।



চিত্র 8.18

যখন $\angle C$-এর মান $0°$-এর খুব কাছে হয়, তখন $\angle A$ এর মান $90°$-এর কাছাকাছি হয় এবং AC বাহু মোটামুটি BC বাহুর সমান হয়, তাই sin A এর মান 1-এর খুব কাছের হয়। তাছাড়া $\angle A$ -এর মান $90°$-র খুব নিকটবর্তী হলে, $\angle C$ -এর মান $0°$-এর খুব কাছাকাছি হয়, AB বাহু প্রায় শূন্য হয়, তাই cos A -এর মান 0-এর খুব কাছাকাছি হয়।

সুতরাং, আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারি : **$\sin 90° = 1$ এবং $\cos 90° = 0$** ।

এখন, কেন তুমি $90°$-এর অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো বের করতে পারবে না ?

আমরা এখন দ্রুত প্রয়োগের জন্যে সারণি 8.1-এ $0°, 30°, 45°, 60°$ এবং $90°$ -এর সব ত্রিকোণমিতির অনুপাতগুলোর মান প্রস্তুত করব।

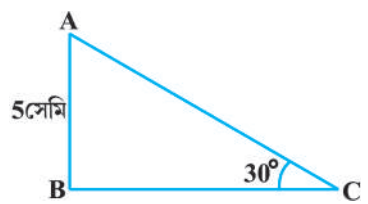
সারণি 8.1

$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin A	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos A	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan A	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞাত
cosec A	অসংজ্ঞাত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec A	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞাত
cot A	অসংজ্ঞাত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

মন্তব্য : উপরের সারণিতে তোমরা লক্ষ করলে পাবে যে, $\angle A$ -এর মান $0°$ থেকে $90°$-তে বৃদ্ধি পেলে sinA -এর মান 0 থেকে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং cos A-এর মান 1 থেকে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

চলো উপরের সারণির মানগুলো প্রয়োগে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করি।

উদাহরণ 6 : Δ ABC-এর B-তে সমকোণ, AB = 5 সেমি এবং $\angle ACB = 30°$ (চিত্র 8.19 দেখো)। BC এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



চিত্র 8.19

সমাধান : BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ে BC এবং প্রদত্ত AB বাহুর সাথে যুক্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে বেছে নেব। যেহেতু C কোণের সংলগ্ন বাহু BC এবং AB বাহু C কোণের বিপরীত, অতএব,

$$\frac{AB}{BC} = \tan C$$

অর্থাৎ,
$$\frac{5}{BC} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

যা থেকে
$$BC = 5\sqrt{3}$$ সেমি হয়।

AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ে আমরা পাই,

$$\sin 30° = \frac{AB}{AC} \quad (\text{কেন?})$$

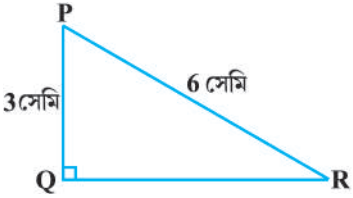
অর্থাৎ, $$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

অর্থাৎ, $AC = 10$ সেমি

লক্ষ করো, বিকল্পভাবে পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগে উপরের উদাহরণের ক্ষেত্রে তৃতীয় বাহু নির্ণয় করতে পারি।

অর্থাৎ, $$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \text{ সেমি } = 10 \text{ সেমি}$$

উদাহরণ 7 : PQR ত্রিভুজে, Q বিন্দুতে সমকোণ (চিত্র 8.20 দেখো), $PQ = 3$ সেমি এবং $PR = 6$ সেমি, $\angle QPR$ এবং $\angle PRQ$ নির্ণয় করো।



চিত্র 8.20

সমাধান : দেওয়া আছে, $PQ = 3$ সেমি এবং $PR = 6$ সেমি।

সুতরাং, $$\frac{PQ}{PR} = \sin R$$

অথবা, $$\sin R = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

সুতরাং, $\angle PRQ = 30°$

অতএব, $\angle QPR = 60°$ (কেন?)

তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের যদি একটি বাহু এবং যে-কোনো অপর অংশ (হয় একটি সূক্ষ্মকোণ নতুবা যে-কোনো বাহু) জানা থাকে, তবে ত্রিভুজটির অপর বাহু এবং কোণগুলো নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 8 : যদি $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, $0° < A + B \le 90°$, $A > B$, হয়, তবে A এবং B নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু, $\sin(A - B) = \frac{1}{2}$, অতএব, $A - B = 30°$ (কেন?) (1)

আবার, যেহেতু $\cos(A + B) = \frac{1}{2}$, সুতরাং, $A + B = 60°$ (কেন?) (2)

(1) এবং (2) সমাধান করে, আমরা পাই : $A = 45°$ এবং $B = 15°$।

অনুশীলনী 8.2

1. নিম্নলিখিতগুলোর মান নির্ণয় করো :

(i) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

(ii) $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(iii) $\dfrac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(iv) $\dfrac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(v) $\dfrac{5\cos^2 60^\circ + 4\sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

2. সঠিক বিকল্পটি বেছে নাও এবং তোমার পছন্দের স্বপক্ষে যুক্তি দাও :

(i) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ} =$

(A) $\sin 60^\circ$ (B) $\cos 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

(ii) $\dfrac{1-\tan^2 45^\circ}{1+\tan^2 45^\circ} =$

(A) $\tan 90^\circ$ (B) 1 (C) $\sin 45^\circ$ (D) 0

(iii) $\sin 2A = 2\sin A$ সত্য হয়, যখন $A =$

(A) 0° (B) 30° (C) 45° (D) 60°

(iv) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} =$

(A) $\cos 60^\circ$ (B) $\sin 60^\circ$ (C) $\tan 60^\circ$ (D) $\sin 30^\circ$

3. যদি $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ এবং $\tan(A-B) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A+B \le 90^\circ$; $A > B$, হয়, তবে A এবং B নির্ণয় করো।

4. নিম্নলিখিতগুলো সত্য অথবা মিথ্যা বলো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(i) $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

(ii) θ বৃদ্ধির সাথে $\sin\theta$ -এর মান বৃদ্ধি পায়।

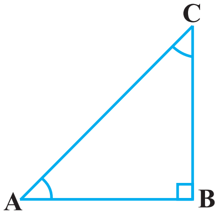
(iii) θ বৃদ্ধির সাথে $\cos\theta$ -এর মান বৃদ্ধি পায়।

(iv) θ-এর সকল মানে $\sin\theta = \cos\theta$ হয়।

(v) $A = 0^\circ$ -এর জন্য $\cot A$ সংজ্ঞাত নয়।

8.4 পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Complementary Angles)

তোমরা স্মৃতিতে এনে দেখো যে, দুটি কোণকে পূরক বলা হয় যদি এদের সমষ্টি 90° হয়। ΔABC-এর B বিন্দুতে সমকোণ, তোমরা কি কোনো পূরক কোণ যুগল দেখতে পাও? (চিত্র 8.21 দেখো)।



চিত্র 8.21

যেহেতু $\angle A + \angle C = 90°$, ওরা এরূপ যুগল তৈরি করে, আমরা পাই:

$$\left.\begin{array}{lll} \sin A = \dfrac{BC}{AC} & \cos A = \dfrac{AB}{AC} & \tan A = \dfrac{BC}{AB} \\[2ex] \operatorname{cosec} A = \dfrac{AC}{BC} & \sec A = \dfrac{AC}{AB} & \cot A = \dfrac{AB}{BC} \end{array}\right\} \quad (1)$$

এখন চলো আমরা $\angle C = 90° - \angle A$-এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ লিখি।

সুবিধার জন্য $90° - \angle A$ -এর পরিবর্তে আমরা $90° - A$ লিখব।

$90° - A$ কোণের বিপরীত এবং সংলগ্ন বাহু কী হবে?

তোমরা নির্ণয় করবে যে, $90° - A$ কোণের বিপরীত বাহু AB এবং সংলগ্ন বাহু BC। অতএব,

$$\left.\begin{array}{lll} \sin (90° - A) = \dfrac{AB}{AC}, & \cos (90° - A) = \dfrac{BC}{AC}, & \tan (90° - A) = \dfrac{AB}{BC} \\[2ex] \operatorname{cosec} (90° - A) = \dfrac{AC}{AB}, & \sec (90° - A) = \dfrac{AC}{BC}, & \cot (90° - A) = \dfrac{BC}{AB} \end{array}\right\} \quad (2)$$

এখন, (1) এবং (2) -এর অনুপাতগুলোকে তুলনা করো, লক্ষ করো যে :

$$\sin (90° - A) = \frac{AB}{AC} = \cos A \text{ এবং } \cos (90° - A) = \frac{BC}{AC} = \sin A$$

তাছাড়া, $$\tan (90° - A) = \frac{AB}{BC} = \cot A, \cot (90° - A) = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

$$\sec (90° - A) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec} A, \operatorname{cosec} (90° - A) = \frac{AC}{AB} = \sec A$$

সুতরাং, $\mathbf{\sin (90° - A) = \cos A,}$ $\mathbf{\cos (90° - A) = \sin A,}$

$\mathbf{\tan (90° - A) = \cot A,}$ $\mathbf{\cot (90° - A) = \tan A,}$

$\mathbf{\sec (90° - A) = \operatorname{cosec} A,}$ $\mathbf{\operatorname{cosec} (90° - A) = \sec A,}$

যেখানে A-এর সকল মানগুলো $0°$ এবং $90°$-এর মধ্যবর্তী। যাচাই করে দেখো $A = 0°$ অথবা $A = 90°$-এর জন্য সিদ্ধ হয় কিনা।

দ্রষ্টব্য : $\tan 0° = 0 = \cot 90°$, $\sec 0° = 1 = \operatorname{cosec} 90°$ এবং $\sec 90°$, $\operatorname{cosec} 0°$, $\tan 90°$ এবং $\cot 0°$ সংজ্ঞাত নয়।

এখন, চলো কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করি।

উদাহরণ 9 : মান নির্ণয় করো : $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°}$

সমাধান : আমরা জানি, $\cot A = \tan (90° - A)$

সুতরাং, $\cot 25° = \tan (90° - 25°) = \tan 65°$

অর্থাৎ, $\dfrac{\tan 65°}{\cot 25°} = \dfrac{\tan 65°}{\tan 65°} = 1$

উদাহরণ 10 : যদি $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ হয়, যেখানে 3A একটি সূক্ষ্মকোণ, তবে A-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান : আমাদের দেওয়া হয়েছে যে, $\sin 3A = \cos (A - 26°)$ (1)

যেহেতু $\sin 3A = \cos (90° - 3A)$, আমরা (1) -কে লিখতে পারি

$$\cos (90° - 3A) = \cos (A - 26°)$$

যেহেতু $90° - 3A$ এবং $A - 26°$ উভয়েই সূক্ষ্মকোণ,

সুতরাং, $90° - 3A = A - 26°$

যা থেকে পাওয়া যায়, $A = 29°$

উদাহরণ 11 : $\cot 85° + \cos 75°$ কে $0°$ এবং $45°$ -এর অন্তবর্তী কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত রূপে প্রকাশ করো।

সমাধান :

$$\cot 85° + \cos 75° = \cot (90° - 5°) + \cos (90° - 15°)$$
$$= \tan 5° + \sin 15°$$

অনুশীলনী 8.3

1. মান নির্ণয় করো :

   (i) $\dfrac{\sin 18°}{\cos 72°}$ (ii) $\dfrac{\tan 26°}{\cot 64°}$ (iii) $\cos 48° - \sin 42°$ (iv) $\operatorname{cosec} 31° - \sec 59°$

2. দেখাও যে :

   (i) $\tan 48° \tan 23° \tan 42° \tan 67° = 1$

   (ii) $\cos 38° \cos 52° - \sin 38° \sin 52° = 0$

3. যদি $\tan 2A = \cot (A - 18°)$, যেখানে 2A একটি সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে A-এর মান নির্ণয় করো।

4. যদি $\tan A = \cot B$ হয়, প্রমাণ করো যে, $A + B = 90°$ ।

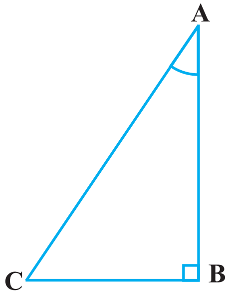
5. যদি $\sec 4A = \text{cosec}\,(A - 20°)$, যেখানে 4A একটি সূক্ষ্মকোণ, তবে A-এর মান নির্ণয় করো।

6. যদি A, B এবং C ত্রিভুজ ABC-এর অন্তঃস্থ কোণ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\cdot$$

7. $\sin 67° + \cos 75°$-কে $0°$ এবং $45°$-এর অন্তবর্তী কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতরূপে প্রকাশ করো।

8.5 ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (Trigonometric Identities)



চিত্র 8.22

তোমরা মনে করে দেখো যে, একটি সমীকরণকে অভেদ বলা হয় যখন এর সাথে যুক্ত চলরাশির যে-কোনো মানে উভয়দিকের সমতা বজায় থাকে। অনুরূপে, কোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যুক্ত সমীকরণকে একটি **ত্রিকোণমিতিক অভেদ** বলা হবে যদি এটি সংযুক্ত কোণের সকল মানের জন্য সত্য হয়।

এই অনুচ্ছেদে, আমরা একটি ত্রিকোণমিতিক অভেদ প্রমাণ করব এবং এটিকে প্রয়োগ করে অপর ত্রিকোণমিতিক অভেদগুলো প্রমাণ করব।

Δ ABC-এর B বিন্দুতে সমকোণ (চিত্র 8.22 দেখো), আমরা পাই :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \qquad (1)$$

(1) -এর প্রতিটি পদকে AC^2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

অর্থাৎ, $$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AC}\right)^2$$

অর্থাৎ, $$(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = 1$$

অর্থাৎ, $$\mathbf{\cos^2 A + \sin^2 A = 1} \qquad (2)$$

এটি সকল A-এর জন্য সত্য, যেখানে $0° \le A \le 90°$। সুতরাং, এটি একটি ত্রিকোণমিতিক অভেদ।

চলো আমরা এখন (1)-কে AB^2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

অথবা, $$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

অর্থাৎ, $$\mathbf{1 + \tan^2 A = \sec^2 A} \qquad (3)$$

$A = 0°$-এর জন্য সমীকরণটি সত্য হবে কি? হ্যাঁ, এটি সত্য। $A = 90°$ হলে কী হবে? বেশ, $A = 90°$-এর জন্য $\tan A$ এবং $\sec A$ সংজ্ঞাত নয়। সুতরাং, A-এর সকল মানের জন্য (3) সত্য, যেখানে $0° \leq A < 90°$।

চলো আমরা দেখি BC^2 দিয়ে (1) কে ভাগ করে কী পাই,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

অর্থাৎ, $$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

অর্থাৎ, $$\mathbf{\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A} \qquad (4)$$

লক্ষ করো যে $A = 0°$-এর জন্য $\operatorname{cosec} A$ এবং $\cot A$ সংজ্ঞাত নয়। অতএব, A-এর সকল মানের জন্য (4) সত্য হবে, যেখানে $0° < A \leq 90°$ হয়।

এই অভেদগুলো প্রয়োগে, আমরা প্রতিটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোতে প্রকাশ করতে পারি অর্থাৎ, যদি একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত জানা থাকে, আমরা অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান বের করতে পারি।

চলো আমরা দেখি কীভাবে এই অভেদগুলো প্রয়োগ করতে পারি। ধরো আমরা জানি যে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে $\cot A = \sqrt{3}$ ।

যেহেতু, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\sec A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, এবং $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ।

আবার, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$ । অতএব, $\operatorname{cosec} A = 2$ ।

উদাহরণ 12 : $\cos A$, $\tan A$ এবং $\sec A$ অনুপাতগুলোকে $\sin A$-এর আকারে প্রকাশ করো।

সমাধান : যেহেতু $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$, অতএব,

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, অর্থাৎ, $\cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

থেকে পাই $$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \qquad \text{(কেন?)}$$

সুতরাং, $$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 \quad \sin^2 A}} \text{ এবং } \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

উদাহরণ 13 : প্রমাণ করো যে, $\sec A\,(1-\sin A)(\sec A+\tan A)=1$ ।

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = \sec A\,(1-\sin A)(\sec A+\tan A) = \left(\frac{1}{\cos A}\right)(1-\sin A)\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1-\sin A)(1+\sin A)}{\cos^2 A} = \frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ 14 : প্রমাণ করো যে, $\dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \dfrac{\cot A-\cos A}{\cot A+\cos A} = \dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}-\cos A}{\dfrac{\cos A}{\sin A}+\cos A}$

$$= \frac{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\cos A\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{\sin A}-1\right)}{\left(\dfrac{1}{\sin A}+1\right)} = \frac{\operatorname{cosec} A-1}{\operatorname{cosec} A+1} = \text{ডানপক্ষ}$$

উদাহরণ 15 : $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$ অভেদটি প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

সমাধান : যেহেতু আমরা $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ যুক্ত অভেদ প্রয়োগ করব, তাহলে চলো প্রথমে বামপক্ষে (যে অভেদটি আমাদের প্রমাণ করতে হবে) লব ও হরকে $\cos\theta$ দিয়ে ভাগ করে এটিকে $\sec\theta$ এবং $\tan\theta$ আকারে প্রকাশ করি।

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1} = \frac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$$

$$= \frac{(\tan\theta+\sec\theta)-1}{(\tan\theta-\sec\theta)+1} = \frac{\{(\tan\theta+\sec\theta)-1\}\,(\tan\theta-\sec\theta)}{\{(\tan\theta-\sec\theta)+1\}\,(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\tan\theta-\sec\theta)}{\{\tan\theta-\sec\theta+1\}\,(\tan\theta-\sec\theta)}$$

$$= \frac{-1 - \tan\theta + \sec\theta}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)\,(\tan\theta - \sec\theta)}$$

$$= \frac{1}{\tan\theta - \sec\theta} = \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta},$$

যা হল অভেদের প্রামাণ্য ডানপক্ষ।

অনুশীলনী 8.4

1. sin A, sec A এবং tan A ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে cot A -এর আকারে প্রকাশ করো।

2. $\angle$A-এর সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোকে sec A-এর আকারে প্রকাশ করো।

3. মান নির্ণয় করো :

(i) $\dfrac{\sin^2 63° + \sin^2 27°}{\cos^2 17° + \cos^2 73°}$

(ii) $\sin 25° \cos 65° + \cos 25° \sin 65°$

4. সঠিক বিকল্পটি বেছে নাও। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(i) $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A =$

(A) 1 (B) 9 (C) 8 (D) 0

(ii) $(1 + \tan\theta + \sec\theta)(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta) =$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –1

(iii) $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A) =$

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

(iv) $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} =$

(A) $\sec^2 A$ (B) –1 (C) $\cot^2 A$ (D) $\tan^2 A$

5. নিম্নলিখিত অভেদগুলো প্রমাণ করো, যেখানে রাশিগুলোর সঙ্গে যুক্ত কোণগুলো সূক্ষ্মকোণের জন্য সংজ্ঞাত।

(i) $(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)^2 = \dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}$ (ii) $\dfrac{\cos A}{1 + \sin A} + \dfrac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

(iii) $\dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

[**ইঙ্গিত :** রাশিটি কে sin θ এবং cos θ আকারে লেখো]

(iv) $\dfrac{1+\sec A}{\sec A} = \dfrac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ [**ইঙ্গিত :** বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ আলাদাভাবে সরল করো]

(v) $\dfrac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$, $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ এই অভেদটি প্রয়োগ করে।

(vi) $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ (vii) $\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{\tan A + \cot A}$

[**ইঙ্গিত :** বামপক্ষ এবং ডানপক্ষকে আলাদাভাবে সরল করো]

(x) $\left(\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right) = \left(\dfrac{1-\tan A}{1-\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

8.6 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. B বিন্দুতে সমকোণযুক্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর ক্ষেত্রে,

$\sin A = \dfrac{\text{A কোণের বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$, $\cos A = \dfrac{\text{A কোণের সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$

$\tan A = \dfrac{\text{A কোণের বিপরীত বাহু}}{\text{A কোণের সংলগ্ন বাহু}}$ ।

2. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$; $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$; $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$, $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$ ।

3. কোনে একটি সূক্ষ্মকোণের একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত জানা থাকলে, ওই কোণের অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো সহজে নির্ণয় করা যায়।

4. $0°, 30°, 45°, 60°$ এবং $90°$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান।

5. sin A অথবা cos A এর মান কখনো 1-এর বেশি হয় না, অপরদিকে sec A অথবা cosec A-এর মান সর্বদা 1-এর বেশি বা সমান হয়।

6. $\sin(90° - A) = \cos A$, $\cos(90° - A) = \sin A$;
$\tan(90° - A) = \cot A$, $\cot(90° - A) = \tan A$;
$\sec(90° - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90° - A) = \sec A$ ।

7. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,
$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, এখানে $0° \le A < 90°$,
$\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$, এখানে $0° < A \le 90°$ ।

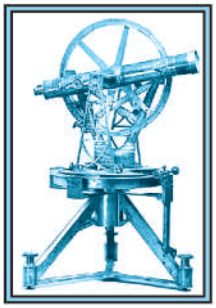
ত্রিকোণমিতির কয়েকটি প্রয়োগ
(SOME APPLICATIONS OF TRIGONOMETRY)

9

9.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে তোমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধে অধ্যয়ন করেছ। এই অধ্যায়ে, তোমাদের চারপাশে বাস্তব জীবনে ত্রিকোণমিতির প্রয়োগ সম্পর্কিত কয়েকটি প্রক্রিয়া নিয়ে অধ্যয়ন করবে। ত্রিকোণমিতি একটি অন্যতম প্রাচীনতম বিষয় যা সমগ্র বিশ্বের গুণীজনেরা অধ্যয়ন করে আসছেন। অষ্টম অধ্যায়ে আমরা একথা বলেছি যে, জ্যোর্তিবিদ্যার বিকাশে ত্রিকোণমিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তখন থেকে জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা পৃথিবী থেকে গ্রহ এবং নক্ষত্রের দূরত্ব গণনার ক্ষেত্রে এর ব্যবহার করে আসছেন। ভূগোল ও নৌবিদ্যায়ও (navigation) ত্রিকোণমিতির ব্যবহার হয়েছে। মানচিত্র গঠন করতে, অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমাংশের সাহায্যে কোনো একটি দ্বীপের অবস্থান নির্ণয়ে ত্রিকোণমিতির জ্ঞানের ব্যবহার করা হয়।

জরিপকারীগণ (Surveyors) শত শত বছর ধরে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করে চলেছেন। এমন একটি বৃহৎ জরিপ প্রকল্প হল উনবিংশ শতাব্দীতে ব্রিটিশ ভারতের **‘বৃহৎ ত্রিকোণমিতিক জরিপ’ (Great Trigonometric Survey)** যার জন্য দুটি সর্ববৃহৎ জরিপ যন্ত্র (theodolites) তৈরি হয়েছিল। 1852 খ্রিস্টাব্দের জরিপের সময় পৃথিবীর সর্বোচ্চ পর্বতশৃঙ্গের আবিষ্কার হয়েছিল। 160 কিমি থেকেও বেশি দূরত্বের ছয়টি ভিন্ন ভিন্ন স্থান থেকে পর্বতের চূড়াটি পর্যবেক্ষণ করা হয়। 1856 সালে এই চূড়াটির নামকরণ স্যার জর্জ এভারেস্টের নাম অনুসারে করা হয়, যিনি সর্বপ্রথম বিশাল থিয়োডোলাইট অনুমোদন করেন এবং ব্যবহার করেন (পাশের চিত্রটি দেখো)। বর্তমানে এই থিয়োডোলাইটটি দেরাদুনে অবস্থিত ভারতীয় জরিপ বিভাগের মিউজিয়ামে দেখার জন্য রাখা আছে।



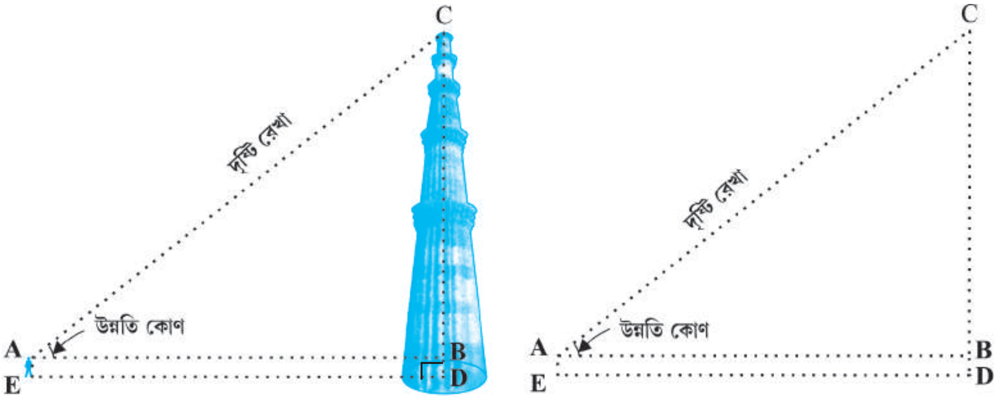
থিয়োডোলাইট (A Theodolite)

(জরিপ করার যন্ত্র, যা ত্রিকোণমিতিক তত্ত্বের ভিত্তিতে তৈরি। ঘূর্ণায়মান দূরবিন দিয়ে এর সাহায্যে কোণ পরিমাপ করা হয়।)

এই অধ্যায়ে আমরা দেখব যে, প্রকৃতপক্ষে না মেপে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করে কীভাবে বিভিন্ন বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

9.2 উচ্চতা ও দূরত্ব (Heights and Distances)

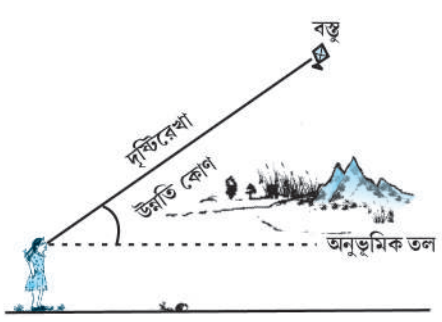
চলো আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ের চিত্র 8.1 বিচার করি, যা নীচে পুনরায় চিত্র 9.1-এ আঁকা হয়েছে।



চিত্র 9.1

এই চিত্রে শিক্ষার্থীর চোখ থেকে মিনারের শীর্ষ পর্যন্ত আঁকা রেখা AC কে বলা হয় ***দৃষ্টি রেখা (line of sight)***। শিক্ষার্থী মিনারটির শীর্ষের দিকে দেখছে। অনুভূমিক রেখার সাথে দৃষ্টি রেখা যে BAC কোণ উৎপন্ন করেছে, তাকে বলা হয় শিক্ষার্থীর চোখ থেকে মিনারের শীর্ষের *উন্নতি কোণ (angle of elevation)*।

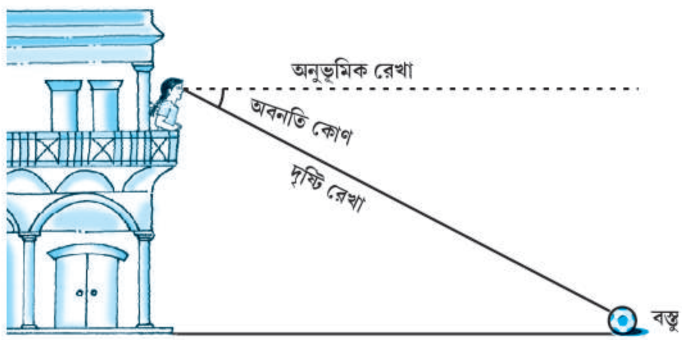
অতএব, **দৃষ্টি রেখা** হল দর্শক বস্তুর যে বিন্দুটি দেখছে তা থেকে তার চোখ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখা। যে বিন্দুটি দেখছে তার **উন্নতি কোণ** হল অনুভূমিক রেখার সাথে দৃষ্টি রেখা যে কোণ উৎপন্ন করে যখন বিন্দুটি অনুভূমিক তলের উপরের দিকে দেখা হয় অর্থাৎ যখন আমাদের বস্তুটি দেখার জন্য মাথা উপরের দিকে উঠাতে হয় (চিত্র 9.2 দেখো)।



চিত্র 9.2

এখন চিত্র 8.2 তে দেওয়া পরিস্থিতি বিবেচনা করো। ঝুল-বারান্দায় (Balcony) বসে থাকা মেয়েটি মন্দিরের সিঁড়িতে রাখা ফুলদানিটি নীচের দিকে তাকিয়ে দেখছে। এক্ষেত্রে দৃষ্টিরেখাটি অনুভূমিক তলের নীচের দিকে অবস্থিত। দৃষ্টিরেখা অনুভূমিক রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় *অবনতি কোণ (angle of depression)*।

অতএব, কোনো বস্তুর যে বিন্দুটি দেখছে তার **অবনতি কোণ** হল দৃষ্টি রেখা দ্বারা অনুভূমিক রেখার সাথে উৎপন্ন কোণ যখন বস্তুটি অনুভূমিক তল থেকে নীচে অবস্থিত হয় অর্থাৎ যখন বিন্দুটি দেখার জন্য আমাদের মাথা নীচের দিকে নামাতে হয় (চিত্র 9.3 দেখো)।



চিত্র 9.3

এখন তোমরা হয়তো চিত্র 8.3 -তে দৃষ্টি রেখা এবং সৃষ্ট কোণসমূহ চিহ্নিত করতে পারছ। এরা কি উন্নতি কোণ নাকি অবনতি কোণ?

চলো আবার আমরা চিত্র 9.1 তে ফিরে যাই। যদি তোমরা প্রকৃতপক্ষে না মেপে মিনারের উচ্চতা CD নির্ণয় করতে চাও, তাহলে তোমাদের কোন্ তথ্য প্রয়োজন? তোমাদের নিম্নলিখিত তথ্যগুলো জানা প্রয়োজন:

(i) মিনারের পাদদেশ থেকে শিক্ষার্থী যেখানে দাঁড়িয়ে আছে সেই দূরত্ব DE

(ii) মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ, $\angle BAC$

(iii) শিক্ষার্থীর উচ্চতা AE

ধরে নাও, উপরের তিনটি শর্ত জানা আছে, তাহলে কীভাবে আমরা মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করব?

চিত্র থেকে পাই, $CD = CB + BD$, এখানে $BD = AE$, যা হল শিক্ষার্থীর উচ্চতা।

BC নির্ণয় করার জন্য আমরা $\angle BAC$ বা $\angle A$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রয়োগ করব।

ΔABC তে, BC বাহু হল জ্ঞাত $\angle A$ এর সাপেক্ষে বিপরীত বাহু। এমন আমরা কোন্ কোন্ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রয়োগ করতে পারব? এদের মধ্যে কোন্‌টিতে দুটি মান আমাদের জানা আছে এবং আমরা একটি মান নির্ণয় করতে চাই? $\tan A$ বা $\cot A$ প্রয়োগ করলে আমাদের খোঁজার ক্ষেত্র অনেকটা সংক্ষিপ্ত হয়, কেন না এই অনুপাত দুটি AB এবং BC এর সাহায্যে গঠিত।

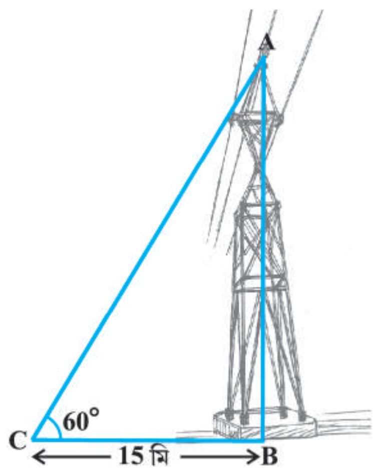
অতএব, $\tan A = \dfrac{BC}{AB}$ বা $\cot A = \dfrac{AB}{BC}$, যার সমাধান করে আমরা BC এর মান পাব।

BC এর সাথে AE যোগ করে তোমরা মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করতে পারবে।

চলো আমরা কিছু সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে এই মাত্র আলোচিত প্রক্রিয়াটি ব্যাখ্যা করি।

উদাহরণ 1 : ভূমির উপর একটি মিনার উল্লম্বভাবে দাড়িয়ে আছে। মিনারের পাদবিন্দু থেকে 15 মি দূরে অবস্থিত ভূমির উপর কোনো বিন্দু থেকে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধান : চলো প্রথমে আমরা সমস্যাটি প্রকাশ করার জন্য একটি সরল চিত্র অঙ্কন করি (চিত্র 9.4 দেখো)। এখানে AB মিনারটিকে প্রকাশ করছে, CB হল মিনার থেকে বিন্দুটির দূরত্ব এবং $\angle ACB$ হল উন্নতি কোণ। আমরা মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করতে চাই অর্থাৎ, AB। আবার, ACB একটি ত্রিভুজ যার B কোণটি সমকোণ।



চিত্র 9.4

সমস্যাটি সমাধান করার জন্য আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাত tan 60° (অথবা cot 60°) কে বেছে নেব, কারণ এই অনুপাতটি AB ও BC নিয়ে গঠিত।

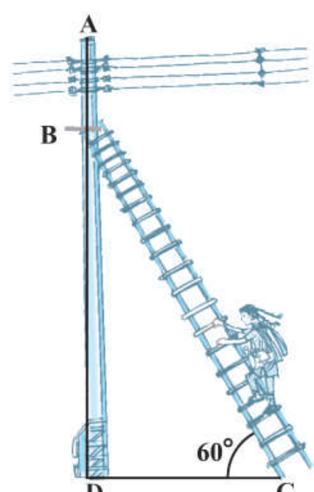
এখন, $\tan 60° = \dfrac{AB}{BC}$

অর্থাৎ, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{15}$

অর্থাৎ, $AB = 15\sqrt{3}$

অতএব, মিনারের উচ্চতা হল $15\sqrt{3}$ মি.।

উদাহরণ 2 : একজন বিদ্যুৎ কর্মীকে 5 মিটার উঁচু কোনো একটি স্তম্ভের একটি বৈদ্যুতিক গোলযোগ মেরামত করতে হবে। মেরামত করার জন্য তাকে স্তম্ভের শীর্ষ থেকে 1.3 মি. নীচে একটি বিন্দু পর্যন্ত পৌঁছুতে হবে (চিত্র 9.5 দেখো)। প্রয়োজনীয় ওই অবস্থান পর্যন্ত তাকে পৌঁছুতে সাহায্য করার জন্য মই-এর দৈর্ঘ্য কত হতে হবে যাতে মইটি অনুভূমিক রেখার সাথে 60° কোণে নত থাকে? আরও নির্ণয় করো যে, স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে কত দূরে মই-এর নিম্নপ্রান্তটি সে স্থাপন করবে? ($\sqrt{3} = 1.73$ ধরো)



চিত্র 9.5

সমাধান : চিত্র 9.5 -তে বিদ্যুৎকর্মীকে AD স্তম্ভের B বিন্দুতে পৌঁছানো প্রয়োজন।

সুতরাং, $BD = AD - AB = (5 - 1.3)$ মি $= 3.7$ মি.

এখানে, BC মইটিকে প্রকাশ করছে। আমরা এটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে চাই, অর্থাৎ, সমকোণী ত্রিভুজ BDC এর অতিভুজ।

এখন, তোমরা কি চিন্তা করতে পারছ, কোন ত্রিকোণমিতিক অনুপাত আমরা প্রয়োগ করব ?

এটি অবশ্যই sin 60° ।

সুতরাং, $\frac{BD}{BC} = \sin 60°$ বা, $\frac{3.7}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

অতএব, $BC = \frac{3.7 \times 2}{\sqrt{3}} = 4.28$ মি. (প্রায়)

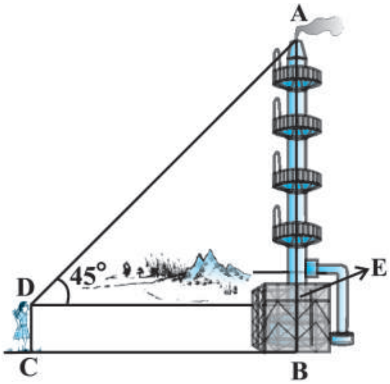
অর্থাৎ, মই-এর দৈর্ঘ্য হবে 4.28 মিটার।

এখন, $\frac{DC}{BD} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

অর্থাৎ, $DC = \frac{3.7}{\sqrt{3}} = 2.14$ মি. (প্রায়)

অতএব, স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে 2.14 মি. দূরে সে মই-এর নিম্নপ্রান্ত স্থাপন করবে।

উদাহরণ 3 : 1.5 মি. লম্বা একজন পর্যবেক্ষক একটি চিমনি থেকে 28.5 মি. দূরে দাঁড়িয়ে আছে। তার চোখ থেকে চিমনির শীর্ষের উন্নতি কোণ 45°। চিমনির উচ্চতা কত ?



চিত্র 9.6

সমাধান : এখানে, AB চিমনি, CD হল পর্যবেক্ষক এবং ∠ADE উন্নতি কোণ (চিত্র 9.6 দেখো)। এক্ষেত্রে, ADE হল একটি ত্রিভুজ যার ∠ E সমকোণ এবং আমাদের চিমনির উচ্চতা নির্ণয় করা প্রয়োজন।

আমরা জানি, $AB = AE + BE = AE + 1.5$

এবং $DE = CB = 28.5$ মি.

AE নির্ণয়ের জন্য আমরা একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বেছে নেব, যা AE এবং DE উভয়কে নিয়ে গঠিত হয়। চলো আমরা উন্নতি কোণটির ট্যানজেন্ট (tangent)-কে ধরে নিই।

এখন, $\tan 45° = \frac{AE}{DE}$

অর্থাৎ, $1 = \frac{AE}{28.5}$

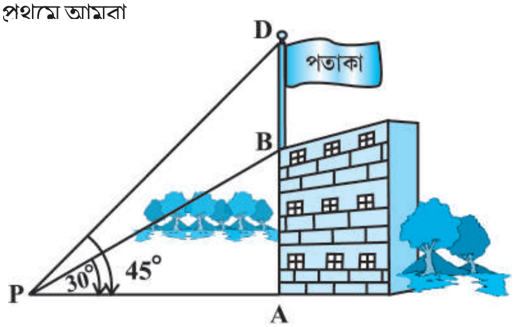
অতএব, $AE = 28.5$

সুতরাং, চিমনির উচ্চতা $(AB) = (28.5 + 1.5)$ মি $= 30$ মি।

উদাহরণ 4 : ভূমির কোনো একটি বিন্দু P থেকে 10 মি উঁচু একটি দালান বাড়ির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। বাড়িটির শীর্ষে একটি পতাকা উত্তোলিত আছে এবং P থেকে পতাকা দণ্ডের শীর্ষের উন্নতি কোণ 45°। পতাকা দণ্ডের দৈর্ঘ্য এবং P বিন্দু থেকে বাড়িটির দূরত্ব নির্ণয় করো। (তোমরা $\sqrt{3} = 1.732$ ধরো)

সমাধান : চিত্র 9.7 -তে AB দালান বাড়িটির উচ্চতাকে চিহ্নিত করছে, BD হল পতাকা দণ্ড এবং P হল প্রদত্ত বিন্দু। লক্ষ করো, এখানে দুটি সমকোণী ত্রিভুজ PAB এবং PAD। আমাদের পতাকা দণ্ডটির দৈর্ঘ্য, অর্থাৎ DB এবং P বিন্দু থেকে বাড়িটির দূরত্ব, অর্থাৎ, PA নির্ণয় করতে হবে।

যেহেতু, আমরা দালান বাড়ির উচ্চতা AB জানি, তাই প্রথমে আমরা সমকোণী ত্রিভুজ Δ PAB কে বিচার করব।



চিত্র 9.7

আমরা পাই, $\tan 30° = \frac{AB}{AP}$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{AP}$

অতএব, $AP = 10\sqrt{3}$

অর্থাৎ, P থেকে দালান বাড়ির দূরত্ব $10\sqrt{3}$ মি. $= 17.32$ মি।

তারপর, চলো আমরা ধরি $DB = x$ মি। তাহলে $AD = (10 + x)$ মি।

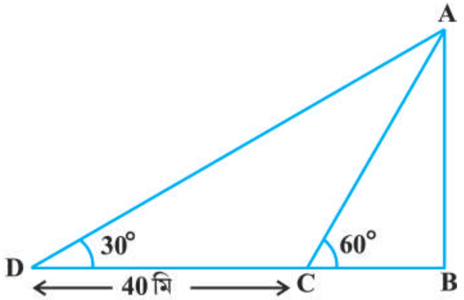
এখন, সমকোণী ত্রিভুজ PAD-থেকে, $\tan 45° = \frac{AD}{AP} = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

অতএব, $1 = \frac{10 + x}{10\sqrt{3}}$

অর্থাৎ, $x = 10\left(\sqrt{3} - 1\right) = 7.32$

সুতরাং, পতাকা দণ্ডটির দৈর্ঘ্য 7.32 মি।

উদাহরণ 5 : সমতল ভূমিতে দাঁড়ানো একটি মিনারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 40 মি বৃদ্ধি পায় যখন সূর্যের উন্নতি কোণ $60°$ থেকে $30°$ তে পরিবর্তিত হয়। মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করো।



চিত্র 9.8

সমাধান : চিত্র 9.8 তে AB হল মিনার এবং যখন সূর্যের উন্নতি কোণ $60°$ তখন ছায়ার দৈর্ঘ্য BC, অর্থাৎ, ছায়ার অগ্রভাগ থেকে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ $60°$ এবং ছায়ার দৈর্ঘ্য DB হয় যখন উন্নতি কোণ $30°$।

এখন, AB এর দৈর্ঘ্য h মি এবং BC এর দৈর্ঘ্য x মি ধরো।

প্রশ্নানুযায়ী, BC থেকে DB, 40 মি বড়ো।

সুতরাং, $\qquad \text{DB} = (40 + x)$ মি

এখন, আমরা দুটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এবং ABD পেলাম।

ΔABC থেকে পাই, $\qquad \tan 60° = \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}$

বা, $$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \qquad (1)$$

ΔABD থেকে পাই, $\qquad \tan 30° = \dfrac{\text{AB}}{\text{BD}}$

অর্থাৎ, $$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40} \qquad (2)$$

(1) থেকে আমরা পাই, $\qquad h = x\sqrt{3}$

এই মানটি (2) এ বসিয়ে আমরা পাই, $\left(x\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = x + 40$, অর্থাৎ, $3x = x + 40$

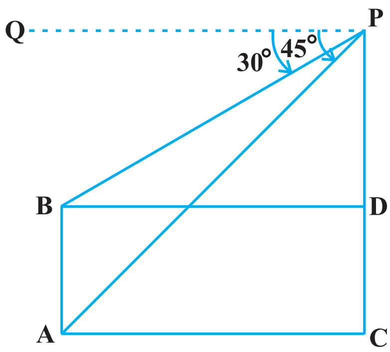
বা, $\qquad x = 20$

সুতরাং, $\qquad h = 20\sqrt{3} \qquad$ [(1) থেকে]

অতএব, মিনারের উচ্চতা হল $20\sqrt{3}$ মি।

উদাহরণ 6 : বহুতলবিশিষ্ট একটি বাড়ির শীর্ষ থেকে ৪ মি. উঁচু অপর একটি বাড়ির শীর্ষ ও পাদদেশের অবনতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $45°$। বহুতল বাড়িটির উচ্চতা এবং দুটি বাড়ির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধান : চিত্র 9.9 এ PC হল বহুতলবিশিষ্ট বাড়ি এবং AB হল ৪ মি উঁচু বাড়ি। আমরা বহুতলবিশিষ্ট বাড়িটির উচ্চতা, অর্থাৎ, PC এবং বাড়ি দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ, AC নির্ণয় করতে আগ্রহী।



চিত্র 9.9

চিত্রটি মনোযোগ দিয়ে দেখো। লক্ষ করো যে, PQ ও BD সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের ছেদক PB। অতএব, $\angle QPB$ এবং $\angle PBD$ পরস্পর একান্তর কোণ এবং তাই এরা সমান।

সুতরাং, $\angle PBD = 30°$। অনুরূপে, $\angle PAC = 45°$।

সমকোণী ত্রিভুজ PBD থেকে আমরা পাই,

$$\frac{PD}{BD} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{বা,} \quad BD = PD\sqrt{3}$$

সমকোণী ত্রিভুজ PAC থেকে আমরা পাই,

$$\frac{PC}{AC} = \tan 45° = 1$$

অর্থাৎ, $PC = AC$

আবার, $PC = PD + DC$, অতএব, $PD + DC = AC$।

যেহেতু, $AC = BD$ এবং $DC = AB = 8$ মি, আমরা পাই, $PD + 8 = BD = PD\sqrt{3}$ (কেন?)

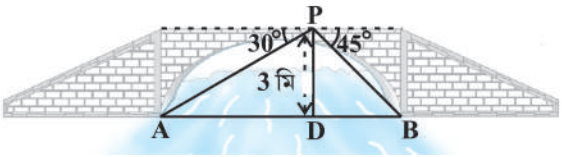
এটি থেকে পাওয়া যায়, $$PD = \frac{8}{\sqrt{3}-1} = \frac{8\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = 4\left(\sqrt{3}+1\right) \text{ মি}$$

সুতরাং, বহুতলবিশিষ্ট বাড়িটির উচ্চতা হল $\left\{4\left(\sqrt{3}+1\right)+8\right\}$ মি $= 4\left(3+\sqrt{3}\right)$ মি

এবং বাড়ি দুটির মধ্যে দূরত্ব হল $4\left(3+\sqrt{3}\right)$ মি।

উদাহরণ 7 : নদীর উপরে একটি সেতুর কোনো একটি অবস্থান থেকে নদীর দুই তীরের অবনতি কোণ যথাক্রমে $30°$ এবং $45°$। যদি তীর থেকে সেতুর উচ্চতা 3 মি হয়, তাহলে নদীটি কতটুকু প্রশস্ত তা নির্ণয় করো।

সমাধান : চিত্র 9.10-এ A ও B হল নদীর তীরের বিপরীত দুটি বিন্দু, তাই AB হল নদীর প্রশস্ততা। P হল 3 মি উঁচুতে সেতুর উপর একটি বিন্দু অর্থাৎ, DP=3 মি। আমরা নদীর প্রশস্ততা নির্ণয় করতে আগ্রহী, যা হল Δ APB এর AB বাহুর দৈর্ঘ্য।



চিত্র 9.10

এখন, $AB = AD + DB$

সমকোণী ত্রিভুজ APD এর $\angle A = 30°$

সুতরাং, $\tan 30° = \frac{PD}{AD}$

অর্থাৎ, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AD}$ বা $AD = 3\sqrt{3}$ মি

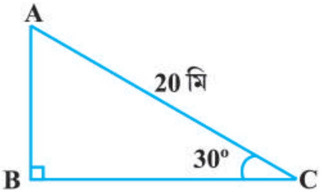
আবার, সমকোণী ত্রিভুজ PBD এ $\angle B = 45°$, সুতরাং, $BD = PD = 3$ মি।

এখন, $AB = BD + AD = 3 + 3\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$ মি।

অতএব, নদীর প্রশস্ততা $3\left(\sqrt{3}+1\right)$ মি।

অনুশীলনী 9.1

1. একজন সার্কাস শিল্পী একটি 20 মি. লম্বা দড়ি বেয়ে উপরে উঠছে, যা একটি উল্লম্ব স্তম্ভের শীর্ষ থেকে ভূমি পর্যন্ত টান টান করে দৃঢ়ভাবে বাধা আছে। যদি দড়িটি ভূমিতলের সাথে 30° কোণে নত থাকে তবে স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় করো (চিত্র 9.11 দেখো)।



চিত্র 9.11

2. ঝড়ে একটি গাছ ভেঙে যায় এবং ভাঙা অংশ এমনভাবে বাঁকা হয় যে গাছটির অগ্রভাগ ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। গাছের পাদদেশ এবং যেখানে গাছের অগ্রভাগ ভূমি স্পর্শ করেছে তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 মিটার। গাছের উচ্চতা নির্ণয় করো।
3. একজন ঠিকাদার শিশুদের খেলার জন্য একটি পার্কে দুটি পিছল তল (slides) স্থাপন করতে চায়। 5 বছরের কম বয়সের শিশুদের জন্য সে যে পিছল তলটি স্থাপন করতে চায় সেটির শীর্ষের উচ্চতা 1.5 মিটার এবং এটি ভূমির সাথে 30° কোণে নত, অপর দিকে বড়ো শিশুদের জন্য সে অপেক্ষাকৃত খাড়া একটি পিছল তল বসাতে চায় যার উচ্চতা 3 মিটার এবং এটি ভূমির সাথে 60° কোণে নত। প্রতিক্ষেত্রে পিছল তলের দৈর্ঘ্য কত হবে?

4. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 30 মিটার দূরবর্তী কোনো বিন্দু থেকে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° । মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করো।

5. একটি ঘুড়ি ভূমি থেকে 60 মিটার উচ্চতায় উড়ছে। ঘুড়ির সাথে বাঁধা সুতোটি ভূমির কোনো বিন্দুতে অস্থায়ীভাবে বাঁধা আছে। ভূমির সাথে সুতোটির নতি 60° । সুতোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। ধরে নাও যে এখানে সুতোটি শিথিলভাবে যুক্ত নয়।

6. 1.5 মি. লম্বা একটি বালক 30 মি উঁচু একটি দালানবাড়ি থেকে কিছু দূরে দাঁড়িয়ে আছে। যখন সে বাড়িটির দিকে হেঁটে অগ্রসর হয় তখন তার চোখ থেকে বাড়িটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° থেকে 60° তে বৃদ্ধি পায়। দালানবাড়িটির দিকে সে যে দূরত্ব হেঁটে অগ্রসর হয়েছে তা নির্ণয় করো।

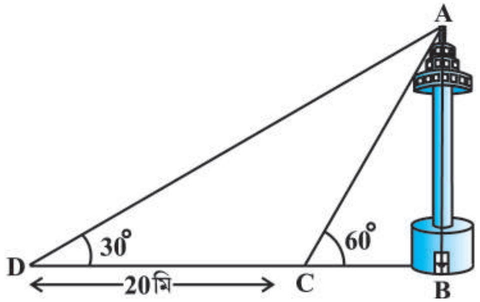
7. ভূমির উপর কোনো একটি বিন্দু থেকে 20 মি. উঁচু একটি বাড়ির উপর দণ্ডায়মান একটি সম্প্রচার মিনারের পাদদেশ ও শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 45° এবং 60° । মিনারের উচ্চতা নির্ণয় করো।

8. একটি বেদির উপরিতলে 1.6 মি উঁচু একটি মূর্তি বসানো আছে। ভূমির কোনো একটি বিন্দু থেকে মূর্তিটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং একই বিন্দু থেকে বেদিটির উপরিতলের উন্নতি কোণ 45° দেখা গেল। বেদিটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

9. একটি মিনারের পাদবিন্দু থেকে একটি অট্টালিকার শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° এবং অট্টালিকার পাদবিন্দু থেকে মিনারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° । যদি মিনারের উচ্চতা 50 মি হয় তবে অট্টালিকার উচ্চতা নির্ণয় করো।

10. 80 মি প্রশস্ত একটি সড়কের বিপরীত পার্শ্বে সমান উচ্চতা বিশিষ্ট দুটি স্তম্ভ দণ্ডায়মান। তাদের মধ্যবর্তী সড়কের উপর কোনো একটি বিন্দু থেকে স্তম্ভ দুটির শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 30°। স্তম্ভ দুটির উচ্চতা এবং স্তম্ভ দুটি থেকে বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় করো।

11. কোনো একটি খালের এক পাড়ে একটি টিভি টাওয়ার উল্লম্বভাবে দাঁড়িয়ে আছে। টাওয়ারের ঠিক সামনে বিপরীত পাড়ের একটি বিন্দু থেকে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° । টাওয়ারের পাদদেশ থেকে ওই বিন্দুটির সংযোজক রেখার বর্ধিতাংশের উপর এবং ওই বিন্দুটি থেকে 20 মি দূরের অপর একটি বিন্দু হতে টাওয়ারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° (চিত্র 9.12 দেখো)। টাওয়ারের উচ্চতা এবং খালটি কতটুকু চওড়া তা নির্ণয় করো।

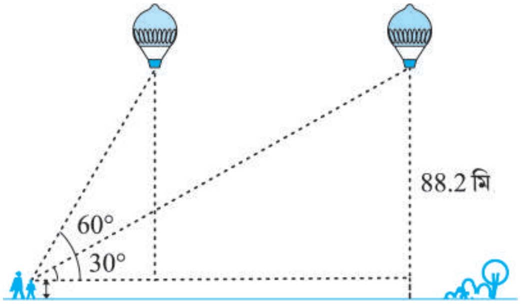


চিত্র 9.12

12. 7 মি উঁচু একটি বাড়ির শীর্ষ থেকে একটি ক্যাবল টাওয়ারের (cable tower) শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° এবং পাদবিন্দুর অবনতি কোণ 45° দেখা গেল। টাওয়ারটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

13. সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে 75 মি উঁচু একটি লাইট হাউসের শীর্ষ থেকে দুটি জাহাজের অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° এবং 45° দেখা গেল। যদি জাহাজ দুটি লাইট হাউসটির একই দিকে এবং একটি অপরটির ঠিক পেছনে থাকে তবে জাহাজ দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

14. 1.2 মি লম্বা একটি মেয়ে ভূমি থেকে 88.2 মি উচুঁতে দেখতে পেল একটি বেলুন অনুভূমিক রেখা বরাবর হাওয়ায় উড়ছে। কোনো এক সময় মেয়েটির চোখের সাথে বেলুনটির উন্নতি কোণ 60° ছিল এবং কিছু সময় পর উন্নতি কোণ হ্রাস পেয়ে 30° হয় (চিত্র 9.13 দেখো)। এই সময়ের ব্যবধানে বেলুনটি কতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করেছে নির্ণয় করো।



চিত্র 9.13

15. একটি সোজা রাজপথ একটি মিনারের পাদদেশ পর্যন্ত বিস্তৃত। মিনারের শীর্ষে দাঁড়িয়ে এক ব্যক্তি একটি গাড়িকে 30° অবনতি কোণে রাজপথের উপর দেখতে পেল, সেটি সমবেগে মিনারের পাদদেশের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। 6 সেকেন্ড পরে গাড়িটির অবনতি কোণ 60° দেখা গেল। এই স্থান থেকে মিনারের পাদদেশে পৌঁছুতে গাড়িটির কত সময় লাগবে তা নির্ণয় করো।

16. একটি স্তম্ভের পাদদেশ থেকে 4 মি ও 9 মি দূরবর্তী একই সরলরেখায় অবস্থিত দুটি অবস্থান থেকে স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণদ্বয় পরস্পর পূরক। প্রমাণ করো যে স্তম্ভের উচ্চতা 6 মি।

9.3 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. (i) **দৃষ্টিরেখা** হল দর্শক বস্তুর যে বিন্দুটি দেখছে তা থেকে তার চোখ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখা।

(ii) কোনো দৃশ্যমান বস্তুর **উন্নতি কোণ** হল দৃষ্টি রেখা দ্বারা অনুভূমিক রেখার সাথে উৎপন্ন কোণ যখন বস্তুটি অনুভূমিক তলের উপরের দিকে অবস্থিত হয় অর্থাৎ, যখন বস্তুটি দেখার জন্য আমাদের মাথাকে উপরের দিকে ওঠাতে হয়।

(iii) কোনো দৃশ্যমান বস্তুর **অবনতি কোণ** হল দৃষ্টিরেখার দ্বারা অনুভূমিক রেখার সাথে উৎপন্ন কোণ যখন বস্তুটি অনুভূমিক তলের নীচের দিকে অবস্থিত হয় অর্থাৎ যখন বস্তুটি দেখার জন্য আমাদের মাথা নীচের দিকে নামাতে হয়।

2. কোনো বস্তুর উচ্চতা বা দৈর্ঘ্য অথবা দুটি ভিন্ন বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে নির্ণয় করতে পারি ।

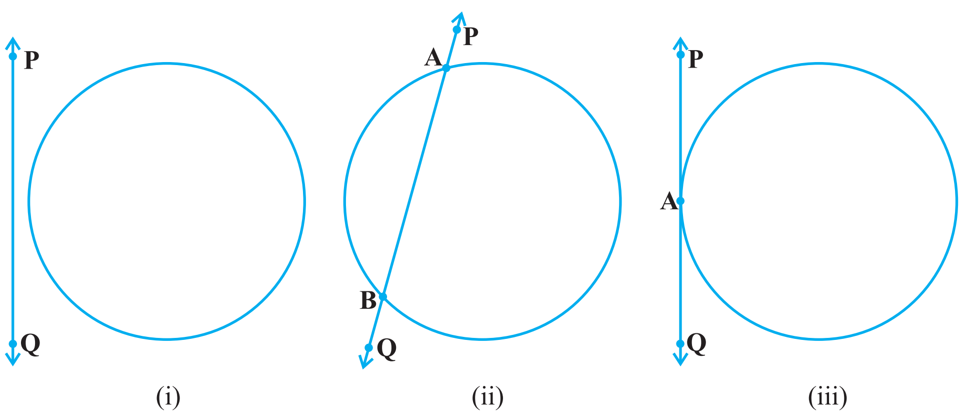
বৃত্ত
(CIRCLES)

10

10.1 ভূমিকা

নবম শ্রেণিতে তোমরা পড়েছ যে, একটি বৃত্ত হল একটি সমতলে অবস্থিত সংগৃহীত সকল বিন্দুসমূহ যেগুলো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (কেন্দ্র) থেকে সমান দূরত্বে (ব্যাসার্ধ) অবস্থিত। তোমরা বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন পদ যেমন জ্যা, বৃত্তাংশ, বৃত্তকলা, বৃত্তচাপ ইত্যাদি সম্বন্ধেও পড়েছ। চলো আমরা এখন বিভিন্ন পরিস্থিতিগুলো পরীক্ষা করি, যেগুলো একটি সমতলে অবস্থিত প্রদত্ত একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার অবস্থানের ফলে উৎপন্ন হয়।

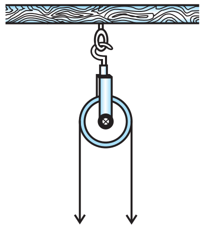
সুতরাং, চলো আমরা একটি বৃত্ত এবং একটি সরলরেখা PQ বিবেচনা করি। এখানে তিনটি সম্ভাবনা হতে পারে যা নীচের চিত্র 10.1-এ দেওয়া হয়েছে।



চিত্র 10.1

চিত্র 10.1 (i)-এ, PQ সরলরেখা এবং বৃত্তের কোনো সাধারণ বিন্দু নাই। এই ক্ষেত্রে, PQ কে বৃত্তের সাপেক্ষে **অপ্রতিচ্ছেদী রেখা (non-intersecting)** বলা হয়। চিত্র 10.1 (ii)-এ, বৃত্ত এবং সরলরেখা PQ -এর দুটি সাধারণ বিন্দু A এবং B আছে। এক্ষেত্রে, আমরা PQ কে বৃত্তের **ছেদক (secant)** বলে থাকি। চিত্র 10.1 (iii)-এ, বৃত্ত ও সরলরেখা PQ-এর কেবলমাত্র একটি সাধারণ বিন্দু A আছে। এক্ষেত্রে এই সরলরেখাটিকে বৃত্তের **স্পর্শক (tangent)** বলে।

তোমরা হয়তো দেখেছ একটি কূয়োর উপর স্থাপিত একটি কপিকল (Pulley) যা কূয়ো থেকে জল তুলতে ব্যবহার করা হয়। চিত্র 10.2 এ দেখো। এখানে কপিকলের উভয় দিকের দড়ির অংশকে যদি একটি রশ্মি হিসেবে বিবেচনা করা হয় তবে প্রতিটি রশ্মি বৃত্তাকার কপিকলের স্পর্শকের মতো হয়।



চিত্র 10.2

উপরে প্রদত্ত ক্ষেত্রগুলো ব্যতীত বৃত্তের সাপেক্ষে ঐ সরলরেখার অপর কোনো অবস্থান আছে কি না? তুমি দেখতে পারো যে বৃত্তের সাপেক্ষে ওই সরলরেখার আর অন্য কোনো অবস্থান থাকতে পারে না। এই অধ্যায়ে, আমরা বৃত্তের স্পর্শকসমূহের অস্তিত্ব এবং তাদের ধর্মগুলো সম্বন্ধে অধ্যয়ন করব।

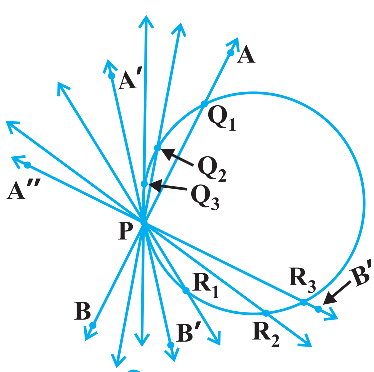
10.2 বৃত্তের স্পর্শক (Tangent to a Circle)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, তোমরা দেখেছ যে, **বৃত্তের একটি স্পর্শক* হল একটি সরলরেখা যা বৃত্তিটিকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে।**

একটি বৃত্তের কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের অস্তিত্ব বুঝতে, চলো আমরা নীচের কার্যকলাপগুলো সম্পাদন করি:

কার্যকলাপ 1 : একটি বৃত্তাকার তার নাও এবং বৃত্তাকার তারের P বিন্দুতে AB একটি সোজা তার যুক্ত করো যাতে এটি P বিন্দুর সাপেক্ষে একটি সমতলে ঘুরতে পারে। ব্যবস্থাপনাটি একটি টেবিলের উপর স্থাপন করো এবং AB তারটিকে P বিন্দুর সাপেক্ষে আস্তে আস্তে ঘোরাও যাতে সোজা তারটির বিভিন্ন অবস্থান পাওয়া যায়। (চিত্র 10.3(i) দেখো)।

বিভিন্ন অবস্থানে, তারটি বৃত্তাকার তারটিকে P বিন্দুতে এবং অন্য একটি বিন্দু Q_1 বা Q_2 বা Q_3 ইত্যাদি বিন্দুসমূহে ছেদ করে। একটি অবস্থানে, তোমরা দেখবে যে, এটি বৃত্তটিকে কেবলমাত্র P বিন্দুতে ছেদ করে (AB এর A′B′ অবস্থান দেখো)। এটি দেখায় যে P বিন্দুতে বৃত্তের একটি স্পর্শকের অস্তিত্ব আছে। পুনরায় ঘোরালে তোমরা দেখতে পাবে যে AB এর অন্য সকল অবস্থানে এটি বৃত্তটিকে P এবং অন্য একটি বিন্দু যেমন R_1 বা R_2 বা R_3 ইত্যাদিতে ছেদ করে। সুতরাং, তোমরা লক্ষ করেছ যে, **বৃত্তের একটি বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শক আছে।**



চিত্র 10.3 (i)

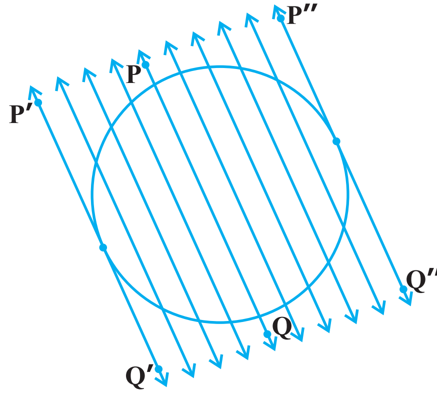
উপরের কার্যকলাপ করার সময় তোমরা লক্ষ করেছ যে, সরলরেখাটির AB অবস্থান যখন A′ B′ এর দিকে অগ্রসর হয়, তখন AB সরলরেখা ও বৃত্তের সাধারণ বিন্দু, ধরো Q_1, সাধারণ বিন্দু P এর দিকে ক্রমশ নিকট থেকে নিকটতর হতে থাকে। অবশেষে, এটি A′B′ এর A″B″ অবস্থানে P বিন্দুতে সমাপতিত হয়। আবার লক্ষ কর, যদি AB কে P এর সাপেক্ষে ডানদিকে ঘোরানো হয় তখন কী ঘটে? সাধারণ বিন্দু R_3 ক্রমশ

*স্পর্শক (tangent) শব্দটি এসেছে ল্যাটিন শব্দ ‘ট্যানজেরে’ (tangere) থেকে, যার অর্থ স্পর্শ করা এবং এটি ড্যানিশ গণিতবিদ্ টমাস ফিকে (Thomas Fineke) 1583 সালে সূচনা করেছিলেন।

P এর নিকট থেকে নিকটতর হতে থাকে এবং অবশেষে P বিন্দুতে সমাপতিত হয়। সুতরাং, আমরা দেখলাম :

বৃত্তের একটি স্পর্শক হল ছেদকের একটি বিশেষ ক্ষেত্র, যখন এর অনুরূপ জ্যা-এর প্রান্তবিন্দু দুটি সমাপতিত হয়।

কার্যকলাপ 2 : একটি কাগজের ওপর একটি বৃত্ত এবং বৃত্তটির একটি ছেদক PQ অঙ্কন করো। ছেদকটির উভয় দিকে এর সমান্তরাল বিভিন্ন সরলরেখা অঙ্কন করো। কয়েকটি ধাপের পর তোমরা দেখবে যে, সরলরেখাগুলো দ্বারা ছিন্ন জ্যা-এর দৈর্ঘ্য ক্রমশ কমতে থাকবে, অর্থাৎ, বৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদবিন্দু দুটি নিকট থেকে নিকটতর হচ্ছে [চিত্র 10.3(ii) দেখো]। একটি ক্ষেত্রে, এই দৈর্ঘ্যটি ছেদকের একটি দিকে শূন্য হয় এবং অন্যক্ষেত্রে, এটি ছেদকের অন্যদিকে শূন্য হয়। চিত্র 10.3(ii) এ ছেদক এর $P'Q'$ এবং $P''Q''$ অবস্থানগুলো দেখো। এগুলো হল বৃত্তটির প্রদত্ত ছেদক PQ এর সমান্তরাল স্পর্শক। এটি তোমাকে এও জানতে সাহায্য করবে যে, একটি প্রদত্ত ছেদকের দুটির বেশি সমান্তরাল স্পর্শক থাকতে পারে না।

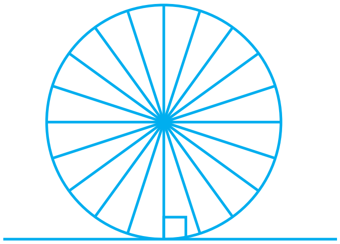


চিত্র 10.3 (ii)

কার্যকলাপ 1 করার সময় “বৃত্তের একটি স্পর্শক হল সেই ছেদক যখন অনুরূপ জ্যাটির উভয় প্রান্তবিন্দু সমাপতিত হয়” নামক যে বিষয়টি তোমরা অবশ্যই লক্ষ করেছ, এই কার্যকলাপ সেটিও প্রতিষ্ঠা করে।

বৃত্ত এবং স্পর্শকের সাধারণ বিন্দুকে **স্পর্শবিন্দু (point of contact)** বলা হয় [চিত্র 10.1(iii)-এ বিন্দু A] এবং স্পর্শকটি বৃত্তকে সাধারণ বিন্দুতে **স্পর্শ করে।**

এখন তোমার চারদিকে তাকাও। তোমরা কি বাই সাইকেল অথবা গোরুর গাড়িকে চলতে দেখেছ? এর চাকাগুলোর দিকে তাকাও। চাকার সমস্ত শলাকাগুলো এর ব্যাসার্ধ বরাবর। এখন ভূমির ওপর চাকার গতির সাপেক্ষে এটির অবস্থান লক্ষ করো। তোমরা কি কোথাও কোনো স্পর্শক লক্ষ করেছ? (চিত্র 10.4 দেখো)। বাস্তবে, চাকাটি একটি সরলরেখা বরাবর চলে যা চাকাটির দ্বারা গঠিত বৃত্তের একটি স্পর্শক হয়। আরো লক্ষ করো যে, সমস্ত অবস্থানে, ভূমির সঙ্গে স্পর্শক এবং স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ সমকোণ উৎপন্ন করে (চিত্র 10.4 দেখো)। আমরা এখন স্পর্শকের এই ধর্মটি প্রমাণ করব।



চিত্র 10.4

উপপাদ্য 10.1 : *বৃত্তের যে-কোনো বিন্দুতে স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।*

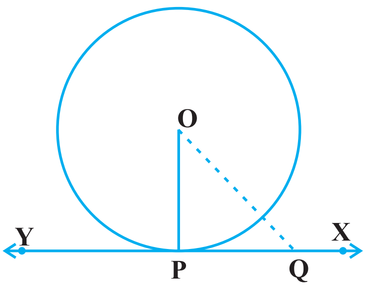
প্রমাণ : এখানে দেওয়া আছে, একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র O এবং P বিন্দুতে XY হল বৃত্তের স্পর্শক। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, OP হল XY এর উপর লম্ব।

XY এর উপর P ব্যতীত একটি বিন্দু Q নাও এবং OQ যুক্ত করো (চিত্র 10.5 দেখো)।

Q বিন্দুটি অবশ্যই বৃত্তের বাইরে অবস্থিত। (কেন? লক্ষ কর যে, যদি Q বিন্দু বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হয়, তবে XY বৃত্তের একটি ছেদক হবে, স্পর্শক হবে না)। অতএব, বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP থেকে OQ বৃহত্তর। অর্থাৎ

$$OQ > OP.$$

যেহেতু এটি XY এর উপর P বিন্দু ব্যতীত সকল বিন্দুর জন্য ঘটে, OP হল O বিন্দু থেকে XY এর উপর সকল দূরত্বের মধ্যে ক্ষুদ্রতম। সুতরাং, OP, XYএর উপর লম্ব। (উপপাদ্য A1.7 এ যা দেখানো হয়েছে)



চিত্র 10.5

মন্তব্য :

1. উপরের উপপাদ্য থেকে, আমরা এই সিদ্ধান্তেও উপনীত হতে পারি যে, বৃত্তের উপর কোনো বিন্দুতে একটি এবং কেবলমাত্র একটি স্পর্শক থাকতে পারে।
2. স্পর্শ বিন্দু হতে ব্যাসার্ধগামী রেখাকে অনেক সময় বৃত্তের ঐ বিন্দুতে ‘অভিলম্ব’ও বলা হয়।

অনুশীলনী 10.1

1. একটি বৃত্তের কয়টি স্পর্শক থাকতে পারে?

2. শূন্যস্থান পূরণ করো :

(i) বৃত্তের একটি স্পর্শক বৃত্তটিকে ____________ টি বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) একটি সরলরেখা যা একটি বৃত্তকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে তাকে বলা হয় ____________।

(iii) একটি বৃত্তের সর্বাধিক ____________ টি সমান্তরাল স্পর্শক থাকতে পারে।

(iv) একটি বৃত্ত এবং তার একটি স্পর্শকের সাধারণ বিন্দুকে বলা হয় ____________ ।

3. 5 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের উপরিস্থিত P বিন্দুতে একটি স্পর্শক PQ, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুগামী একটি সরলরেখাকে Q বিন্দুতে এরূপে ছেদ করে যাতে $OQ = 12$ সেমি হয়। PQ-এর দৈর্ঘ্য হল:

(A) 12 সেমি (B) 13 সেমি (C) 8.5 সেমি (D) $\sqrt{119}$ সেমি।

4. একটি বৃত্ত অঙ্কন করো এবং প্রদত্ত একটি সরলরেখার সমান্তরাল এরূপ দুটি সরলরেখা অঙ্কন করো যাতে একটি বৃত্তটির স্পর্শক এবং অপরটি ছেদক হয়।

10.3 বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু থেকে স্পর্শকের সংখ্যা (Number of Tangents from a Point on a Circle)

বৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু থেকে স্পর্শকের সংখ্যার ধারণা পাওয়ার জন্য চলো আমরা নীচের কার্যকলাপগুলো সম্পন্ন করি :

কার্যকলাপ 3 : কাগজের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। এর ভিতরে একটি বিন্দু P নাও। তোমরা কি এই বিন্দু দিয়ে বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কন করতে পারো? তোমরা দেখবে যে, এই বিন্দুগামী সকল সরলরেখা বৃত্তটিকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো বিন্দু দিয়ে কোনো স্পর্শক অঙ্কন করা সম্ভব নয়। [চিত্র 10.6 (i) দেখো]

এরপর বৃত্তের উপর একটি বিন্দু P নাও এবং এই বিন্দু দিয়ে স্পর্শকগুলো অঙ্কন করো। তোমরা ইতোমধ্যেই দেখেছ যে, বৃত্তের এরূপ একটি বিন্দুতে কেবলমাত্র একটি স্পর্শক থাকে [চিত্র 10.6 (ii) দেখো]।

সবশেষে, বৃত্তের বাহিরে একটি বিন্দু P নাও এবং এই বিন্দু থেকে বৃত্তের উপর স্পর্শক অঙ্কন করার চেষ্টা করো। তোমরা কী লক্ষ করলে? তোমরা দেখবে যে, এই বিন্দু দিয়ে বৃত্তের উপর ঠিক দুটি স্পর্শকই অঙ্কন করতে পারবে [চিত্র 10.6 (iii) দেখো]।

আমরা এই ঘটনাগুলোকে সংক্ষেপে নিম্নরূপে উপস্থাপন করতে পারি :

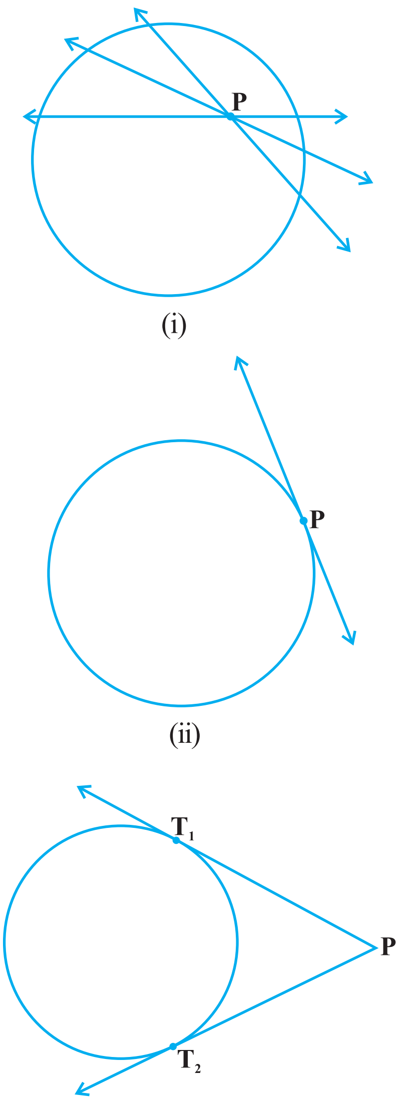
ক্ষেত্র 1 : বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো একটি বিন্দু দিয়ে বৃত্তের উপর কোনো স্পর্শক থাকে না।

ক্ষেত্র 2 : বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো একটি বিন্দু দিয়ে বৃত্তের উপর একটি এবং কেবলমাত্র একটি স্পর্শক থাকবে।

ক্ষেত্র 3 : বৃত্তের বাহিরের কোনো একটি বিন্দু দিয়ে বৃত্তের উপর ঠিক দুটি স্পর্শক থাকে।

চিত্র 10.6 (iii)-এ PT_1 এবং PT_2 স্পর্শকগুলোর স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে T_1 এবং T_2 ।

বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তটির স্পর্শবিন্দু পর্যন্ত রেখাংশকে, P বিন্দু হতে বৃত্তটির **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** বলে।

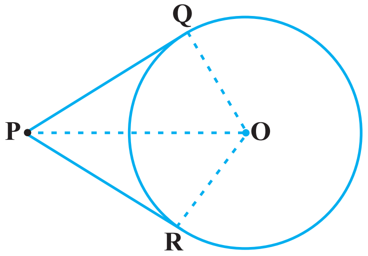


চিত্র 10.6

লক্ষ কর যে, চিত্র 10.6 (iii)-এ, PT_1 এবং PT_2 হল P বিন্দু থেকে বৃত্তের উপর স্পর্শকের দৈর্ঘ্য। দৈর্ঘ্য PT_1 এবং PT_2 এর একটি সাধারণ ধর্ম আছে। তোমরা কি এটি নির্ণয় করতে পারবে? PT_1 এবং PT_2 এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো। এই মানগুলো কি সমান? বাস্তবে, এটি সবসময় এরকমই হয়। চলো আমরা নীচের উপপাদ্যে এই ঘটনার একটি প্রমাণ দিই।

উপপাদ্য 10.2 : *বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকগুলোর দৈর্ঘ্য সমান হয়।*

প্রমাণ : আমাদের দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত, বৃত্তটির বাহিরে অবস্থিত একটি বিন্দু P এবং P থেকে বৃত্তের উপর PQ, PR দুটি স্পর্শক (চিত্র 10.7 দেখো)। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = PR$ ।



চিত্র 10.7

এজন্য আমরা OP, OQ এবং OR যুক্ত করি। তাহলে, $\angle OQP$ এবং $\angle ORP$ হল সমকোণ, কারণ এগুলো হল ব্যাসার্ধ এবং স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণ এবং উপপাদ্য 10.1 অনুযায়ী কোণগুলো সমকোণ। এখন সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় OQP এবং ORP এর,

	$OQ = OR$	(একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)
	$OP = OP$	(সাধারণ বাহু)
অতএব,	$\Delta OQP \cong \Delta ORP$	(RHS)
এ থেকে পাওয়া যায়,	$PQ = PR$	(CPCT)

মন্তব্য :

1. এই উপপাদ্যটি পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করেও নিম্নলিখিতভাবে প্রমাণ করা যায় :

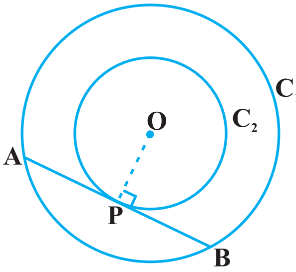
$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 \text{ (যেহেতু } OQ = OR)$$

যা থেকে পাওয়া যায়, $PQ = PR$.

2. আরও লক্ষ করো যে, $\angle OPQ = \angle OPR$। অতএব, OP হল $\angle QPR$ এর কোণ-সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ কেন্দ্রটি দুটি স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

চলো আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 1 : প্রমাণ করো যে, দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের মধ্যে বৃহত্তর বৃত্তের যে জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে স্পর্শ করে সেটি স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।



চিত্র 10.8

সমাধান : আমাদের দেওয়া আছে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত C_1 এবং C_2 , এবং AB হল বৃহত্তর বৃত্ত C_1 এর একটি জ্যা, যা ক্ষুদ্রতর বৃত্ত C_2 কে P বিন্দুতে স্পর্শ করে (চিত্র 10.8 দেখো)। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, $AP = BP$ ।

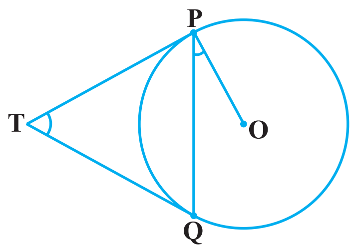
চলো আমরা OP যুক্ত করি। তাহলে AB, P বিন্দুতে C_2 এর একটি স্পর্শক এবং OP এর ব্যাসার্ধ। অতএব, উপপাদ্য 10.1 থেকে,

$$OP \perp AB$$

এখন, AB হল C_1 বৃত্তের একটি জ্যা এবং $OP \perp AB$। অতএব, OP, AB জ্যা এর সমদ্বিখণ্ডক, যেহেতু কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর লম্ব, জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

অর্থাৎ, $AP = BP$

উদাহরণ 2 : বহিঃস্থ কোনো বিন্দু T থেকে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর TP এবং TQ দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা হল। প্রমাণ করো যে, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ।



চিত্র 10.9

সমাধান : আমাদের দেওয়া আছে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত, একটি বহিঃস্থ বিন্দু T এবং বৃত্তের উপর TP এবং TQ দুটি স্পর্শক, যেখানে P এবং Q স্পর্শবিন্দু (চিত্র10.9 দেখো)। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\angle PTQ = 2\angle OPQ$$

ধরো, $\angle PTQ = \theta$

এখন, উপপাদ্য 10.2 থেকে $TP = TQ$। সুতরাং, TPQ হল একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অতএব, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\theta$

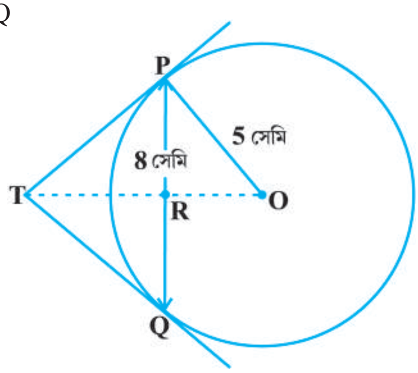
আবার, উপপাদ্য 10.1 থেকে, $\angle OPT = 90°$

সুতরাং, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

যা থেকে পাওয়া যায়, $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

উদাহরণ 3 : 5 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা PQ এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি। P এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকগুলো T বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 10.10 দেখো)। TP-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



চিত্র 10.10

সমাধান : OT যুক্ত করো। ধরো PQ কে R বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে Δ TPQ হল সমদ্বিবাহু এবং TO হল $\angle$ PTQ এর সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং, $OT \perp PQ$ । অতএব, OT, PQ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, যা থেকে পাই, $PR = RQ = 4$ সেমি।

আবার, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ সেমি $= 3$ সেমি।

এখন, $\angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (কেন?)

সুতরাং, $\angle RPO = \angle PTR$

অতএব, AA সদৃশ্যতা অনুসারে সমকোণী ত্রিভুজ TRP এবং সমকোণী ত্রিভুজ PRO, পরস্পর সদৃশ।

যা থেকে পাই, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$, অর্থাৎ, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ অথবা $TP = \frac{20}{3}$ সেমি।

দ্রষ্টব্য : পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করওে নিম্নলিখিতভাবে TP নির্ণয় করা যায় :

ধরো $TP = x$ এবং $TR = y$ । তখন

$x^2 = y^2 + 16$ (সমকোণী ত্রিভুজ PRT হতে) (1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (সমকোণী ত্রিভুজ OPT হতে) (2)

(2) নং হতে (1) নং বিয়োগ করে, আমরা পাই

$$25 = 6y - 7 \quad \text{or} \quad y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

অতএব, $$x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$$ [(1) নং হতে]

বা, $$x = \frac{20}{3}$$

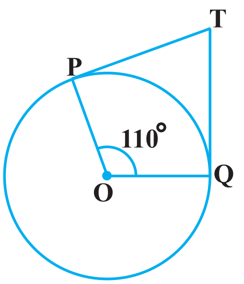
অনুশীলনী 10.2

প্রশ্ন 1 থেকে 3 পর্যন্ত, সঠিক উত্তরটি বাছাই করো এবং যথাযথ যুক্তি দাও :

1. Q বিন্দু হতে, একটি বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 24 সেমি এবং বৃত্তের কেন্দ্র হতে Q-এর দূরত্ব 25 সেমি। বৃত্তের ব্যাসার্ধ হল

(A) 7 সেমি (B) 12 সেমি

(C) 15 সেমি (D) 24.5 সেমি



চিত্র 10.11

2. চিত্র 10.11-এ, যদি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের TP এবং TQ দুটি স্পর্শক এমন হয় যাতে $\angle POQ = 110°$, তাহলে $\angle PTQ =$

(A) 60° (B) 70°

(C) 80° (D) 90°

3. যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের P বিন্দু হতে PA এবং PB দুটি স্পর্শক পরস্পরের সঙ্গে $80°$ কোণে নত হয়, তবে $\angle$ POA হল

(A) $50°$ (B) $60°$

(C) $70°$ (D) $80°$

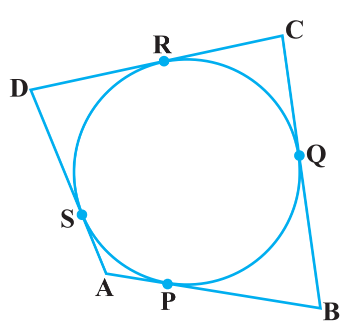
4. প্রমাণ করো যে, কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকগুলো সমান্তরাল।

5. প্রমাণ করো যে, কোনো বৃত্তের একটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী হয়।

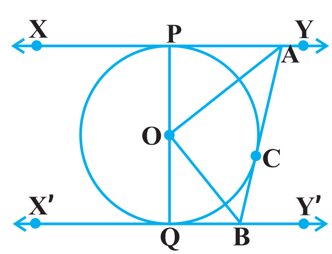
6. বৃত্তের কেন্দ্র হতে 5 সেমি দূরে অবস্থিত একটি বিন্দু A হতে বৃত্তের উপর একটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য 4 সেমি। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

7. দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলো হল 5 সেমি এবং 3 সেমি। বৃহত্তর বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তের একটি স্পর্শক।

8. একটি চতুর্ভুজ ABCD অঙ্কন করা হল, যা একটি বৃত্তে পরিলিখিত (চিত্র 10.12 দেখো)। প্রমাণ করো যে, $AB + CD = AD + BC$



চিত্র 10.12



চিত্র 10.13

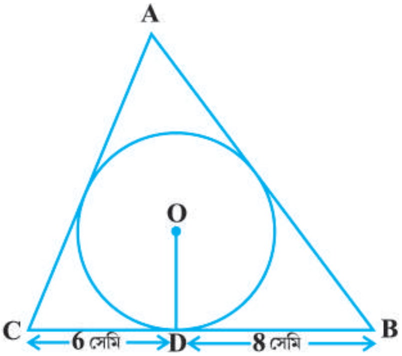
9. চিত্র 10.13-এ, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের XY এবং X′Y′ দুটি সমান্তরাল স্পর্শক এবং AB অপর একটি স্পর্শক যার স্পর্শবিন্দু C, XY কে A বিন্দুতে এবং X′Y′ কে B বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, $\angle AOB = 90°$।

10. প্রমাণ করো যে, বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক দুটির মধ্যবর্তী কোণ, স্পর্শবিন্দু এবং কেন্দ্র সংযোজককারী রেখাংশের মধ্যবর্তী কোণের সম্পূরক।

11. প্রমাণ করো যে, একটি বৃত্তের পরিলিখিত সামন্তরিকটি একটি রম্বস।

12. 4 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তকে পরিলিখিত করে একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা হল যাতে স্পর্শবিন্দু D, BC কে BD এবং DC রেখাংশে বিভক্ত করে, যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সেমি এবং 6 সেমি (চিত্র 10.14 দেখো)। AB এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

13. প্রমাণ করো যে, একটি বৃত্ত পরিলিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো বৃত্তের কেন্দ্রে সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্র 10.14

10.4 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে, তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একটি বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কে ধারণা।
2. বৃত্তের একটি স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।
3. বহিঃস্থ বিন্দু থেকে বৃত্তের উপর দুটি স্পর্শকের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান।

সম্পাদ্য
(CONSTRUCTIONS)
11

11.1 ভূমিকা

তোমরা নবম শ্রেণিতে একটি সোজা ধার (স্কেল) এবং একটি কম্পাস ব্যবহার করে কিছু সম্পাদ্য অঙ্কন করেছ, উদাহরণস্বরূপ, একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক, একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন, ত্রিভুজের কিছু বিষয়ে অঙ্কন ইত্যাদি করেছ। এছাড়াও এদের সত্যতা যাচাই করেছ। এই অধ্যায়ে, আমরা পূর্বের অঙ্কণের ধারণা ব্যবহার করে আরও কিছু অঙ্কন শিখব। তোমাদের এটিও আশা করা উচিত যে, এ ধরনের অঙ্কন কার্যের পেছনে গাণিতিক যুক্তি কী হতে পারে।

11.2 একটি রেখাংশকে বিভাজন (Division of a Line Segment)

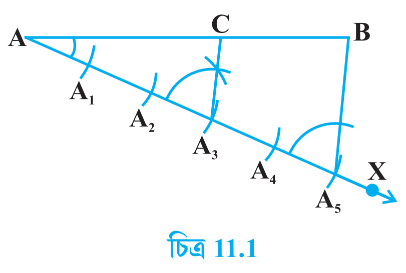
ধরা যাক একটি রেখাংশ দেওয়া আছে এবং তোমরা এটিকে প্রদত্ত যেমন 3 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করবে। তোমরা এটি করতে পারো, দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে এবং এর উপর একটি বিন্দু চিহ্নিত করে যা এটিকে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত করে। কিন্তু ধরে নাও, তোমার কাছে এটিকে সঠিকভাবে পরিমাপ করার কোনো উপায় নেই, তাহলে তুমি কীভাবে বিন্দুটি নির্ণয় করবে? আমরা নীচে বিন্দুটি নির্ণয় করার দুটি উপায় বলছি।

সম্পাদ্য 11.1 : *একটি রেখাংশকে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত করা।*

একটি রেখাংশ AB প্রদত্ত, আমরা এটিকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করতে চাই, যেখানে m এবং n উভয়ই ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। বোঝার সুবিধার্থে আমরা ধরে নিই, $m = 3$ এবং $n = 2$.

অঙ্কণের ধাপসমূহ (Steps of construction) :

1. AB এর সাথে একটি সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে যে-কোনো রশ্মি AX অঙ্কন করা হল।
2. AX এর উপর 5টি $(= m + n)$ বিন্দু A_1, A_2, A_3, A_4 এবং A_5 চিহ্নিত করা হল যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ।
3. BA_5 যুক্ত করা হল।
4. A_3 $(m = 3)$ বিন্দু দিয়ে A_5B এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করা হল ($\angle AA_5B$-এর সমান কোণ উৎপন্ন করে) যা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে। (চিত্র 11.1 দেখো) তাহলে, $AC : CB = 3 : 2$.



চিত্র 11.1

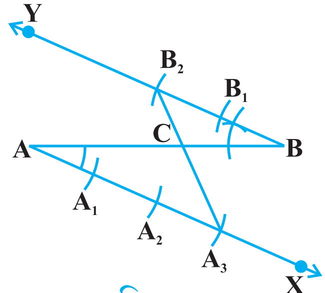
চলো আমরা দেখি কীভাবে এ পদ্ধতিটি আমাদের প্রয়োজনীয় বিভাজন দেয়।

যেহেতু A_3C এবং A_5B পরস্পর সমান্তরাল, অতএব

$$\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{AC}{CB}$$ (মৌলিক সমানুপাতিক উপপাদ্য দ্বারা)

অঙ্কনানুসারে, $\frac{AA_3}{A_3A_5} = \frac{3}{2}$ অতএব, $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$.

এটি দেখায় যে, C, AB কে $3 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।



চিত্র 11.2

বিকল্প পদ্ধতি

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

1. AB এর সাথে একটি সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে যে-কোনো রশ্মি AX অঙ্কন করা হল।
2. $\angle BAX$ এর সমান করে $\angle ABY$ অঙ্কন করা হল যাতে AX এর সমান্তরাল BY রশ্মি হয়।
3. AX এর উপর A_1, A_2, A_3 $(m = 3)$ এবং BY এর উপর B_1, B_2 $(n = 2)$ বিন্দুগুলো এরূপভাবে চিহ্নিত করা হল যাতে $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$.
4. A_3, B_2 যুক্ত করা হল। মনে করি ইহা AB রেখাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে। (চিত্র 11.2 দেখো)।

তাহলে $AC : CB = 3 : 2$.

কীভাবে এই পদ্ধতি কাজ করে? চলো আমরা দেখি।

এখানে ΔAA_3C ও ΔBB_2C পরস্পর সদৃশ। (কেন?)

তাহলে $$\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{AC}{BC}.$$

যেহেতু অঙ্কনানুসারে, $\frac{AA_3}{BB_2} = \frac{3}{2}$, অতএব, $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$.

প্রকৃতপক্ষে, একটি রেখাংশকে যে-কোনো অনুপাতে বিভক্ত করার জন্য উপরোক্ত পদ্ধতিটি কার্যকরি।

এখন আমরা উপরোক্ত অঙ্কনের ধারণা ব্যবহার করে প্রদত্ত ত্রিভুজের একটি সদৃশ ত্রিভুজ অঙ্কন করবো যার বাহুগুলো প্রদত্ত ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর সাথে প্রদত্ত অনুপাতে থাকবে।

সম্পাদ্য 11.2 : *প্রদত্ত স্কেল গুণক (scale factor) অনুসারে প্রদত্ত ত্রিভুজের সদৃশ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো।*

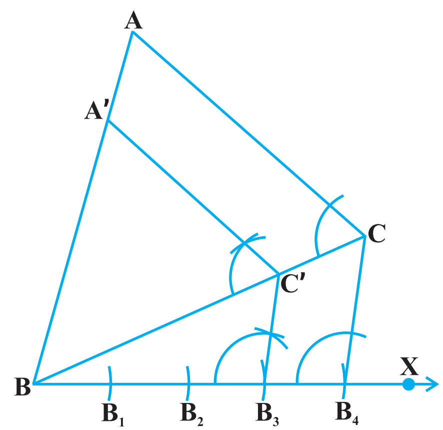
এই অঙ্কনটি দুটি আলাদা পরিস্থিতির সাথে যুক্ত। একটি হল, যে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হয় তা প্রদত্ত ত্রিভুজ হতে ছোটো এবং অপরটি হল প্রদত্ত ত্রিভুজ থেকে বড়ো। এখানে **স্কেল গুণক** এর অর্থ হল প্রদত্ত ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর সাথে অঙ্কিত ত্রিভুজের বাহুর অনুপাত (অধ্যায় 6 দেখো)। এই অঙ্কন বোঝার জন্য চলো আমরা নিম্নের উদাহরণগুলো নেই। **সাধারণ ক্ষেত্রেও এই একই পদ্ধতি ব্যবহার করা হবে।**

উদাহরণ 1 : প্রদত্ত ABC ত্রিভুজের একটি সদৃশ ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলো ABC ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর $\frac{3}{4}$ অংশের সমান হয় (অর্থাৎ, স্কেল গুণক $\frac{3}{4}$)।

সমাধান : একটি ত্রিভুজ ABC প্রদত্ত, আমরা আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করব যার বাহুগুলো ABC ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{3}{4}$ অংশ হয়।

অঙ্কণের ধাপসমূহ :

1. BC এর সাথে সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে শীর্ষবিন্দু A-এর বিপরীত দিকে BX রশ্মি অঙ্কন করা হল।
2. BX এর উপর 4টি ($\frac{3}{4}$ ভগ্নাংশে, 3 এবং 4 এর মধ্যে বড়োটি) বিন্দু B_1, B_2, B_3 এবং B_4 চিহ্নিত করি যাতে $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ হয়।
3. B_4, C যুক্ত করা হল এবং B_3 (তৃতীয় বিন্দুটি $\frac{3}{4}$ ভগ্নাংশে 3 এবং 4 এর মধ্যে ছোটোটি 3) বিন্দু দিয়ে B_4C এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করা হল যা BC কে C′ বিন্দুতে ছেদ করে।
4. C′ বিন্দু দিয়ে CA সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করা হল যা BA সরলরেখাকে A′ বিন্দুতে ছেদ করে। (চিত্র 11.3 দেখো)।



চিত্র 11.3

তাহলে, $\Delta A'BC'$ হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

চলো আমরা দেখি কীভাবে এ থেকে উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা হয়েছে।

11.1 অঙ্কনানুসারে, $\frac{BC'}{C'C} = \frac{3}{1}$ ।

অতএব, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'} = 1 + \frac{C'C}{BC'} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, অর্থাৎ, $\frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$.

অর্থাৎ, C′A′ হল CA এর সমান্তরাল। অতএব, $\Delta A'BC' \sim \Delta ABC$. (কেন ?)

সুতরাং, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$ ।

উদাহরণ 2 : প্রদত্ত ABC ত্রিভুজের একটি সদৃশ ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলো ABC ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর $\frac{5}{3}$ অংশের সমান হয় (অর্থাৎ, স্কেল গুণক $\frac{5}{3}$)।

সমাধান : একটি ত্রিভুজ ABC প্রদত্ত, আমরা আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করব যার বাহুগুলো Δ ABC এর অনুরূপ বাহুর $\frac{5}{3}$ অংশের সমান হয়।

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

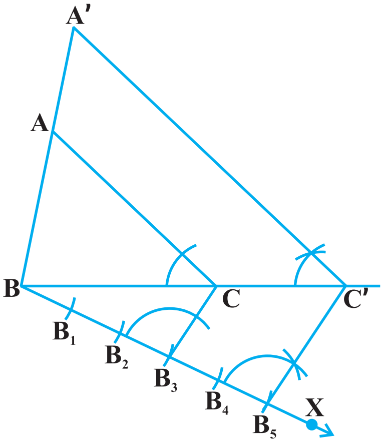
1. BC এর সাথে সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে শীর্ষবিন্দু A-এর বিপরীত দিকে BX রশ্মি অঙ্কন করা হল।
2. BX এর উপর 5টি ($\frac{5}{3}$ ভগ্নাংশে, 5 এবং 3 এর মধ্যে বড়োটি) বিন্দু B_1, B_2, B_3, B_4 এবং B_5 চিহ্নিত করি যাতে $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ ।
3. B_3 (তৃতীয় বিন্দু, $\frac{5}{3}$ ভগ্নাংশে 3 এবং 5 এর মধ্যে ছোটো হল 3) কে C এর সাথে যুক্ত করা হল এবং B_5 বিন্দু দিয়ে B_3C এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করা হল যা বর্ধিত BC রেখাংশকে C′ বিন্দুতে ছেদ করে।
4. C′ বিন্দু দিয়ে CA এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করা হল যা বর্ধিত BA রেখাংশকে A′ বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 11.4 দেখো)।

তাহলে A′BC′ হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

অঙ্কনটির সত্যতা যাচাইয়ের জন্য, লক্ষ করো যে, $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ ।(কেন?)

অতএব, $\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$

কিন্তু, $\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5}$,



চিত্র 11.4

সুতরাং, $\frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$, এবং তাহলে, $\frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$ ।

মন্তব্য : উদাহরণ 1 এবং 2-এ তোমরা AB অথবা AC-এর সাথে একটি সূক্ষ্মকোণ তৈরি করে একটি রশ্মি নিতে পার এবং একইভাবে অগ্রসর হও।

অনুশীলনী 11.1

নিম্নলিখিত প্রতিক্ষেত্রে অঙ্কনের পাশাপাশি যুক্তি দাও :

1. 7.6 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ অঙ্কন করো এবং এটিকে 5 : 8 অনুপাতে বিভক্ত করো। অংশ দুটির দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো।

2. 4 সেমি, 5 সেমি এবং 6 সেমি দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করো এবং তারপর এই ত্রিভুজটির সদৃশ অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য প্রথম ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{2}{3}$ অংশ হয়।

3. 5 সেমি, 6 সেমি এবং 7 সেমি দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করো এবং তারপর এই ত্রিভুজটির সদৃশ অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য প্রথম ত্রিভুজটির অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{7}{5}$ অংশ হয়।

4. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার ভূমি 8 সেমি এবং উচ্চতা 4 সেমি এবং তারপর অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর $1\frac{1}{2}$ গুণ।

5. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহু $BC = 6$ সেমি, $AB = 5$ সেমি এবং $\angle ABC = 60°$। তারপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য ΔABC -এর অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{3}{4}$ অংশ হয়।

6. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার $BC = 7$ সেমি, $\angle B = 45°$, $\angle A = 105°$। তারপর, একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য ΔABC-এর অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{4}{3}$ অংশ হয়।

7. একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করো যার বাহুগুলো (অতিভুজ ব্যতীত) 4 সেমি এবং 3 সেমি। তারপর অপর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর যার বাহুগুলো প্রদত্ত ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর $\frac{5}{3}$ অংশ হয়।

11.3 একটি বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন (Construction of Tangents to a Circle)

ইতোমধ্যে তোমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে শিখেছ যে যদি একটি বিন্দু বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত হয়, তবে ওই বিন্দু দিয়ে বৃত্তের কোনো স্পর্শক থাকতে পারে না। যদিও, একটি বিন্দু যদি বৃত্তের উপরিস্থিত হয়, তবে ওই বিন্দুতে বৃত্তের কেবলমাত্র একটি স্পর্শক থাকবে এবং এটি স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে লম্ব হয়। অতএব, যদি তোমরা একটি বৃত্তের উপরিস্থিত কোনো একটি বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করতে চাও, তাহলে ওই বিন্দু দিয়ে শুধু ব্যাসার্ধটি অঙ্কন করো এবং এই বিন্দু দিয়ে ব্যাসার্ধটির উপর একটি লম্ব অঙ্কন করো যা হবে ওই বিন্দুতে বৃত্তটির নির্ণেয় স্পর্শক।

তোমরা এও দেখেছ যে, যদি বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে দুটি স্পর্শক হবে।

আমরা এখন দেখব কীভাবে এই স্পর্শকগুলো অঙ্কন করা যায়।

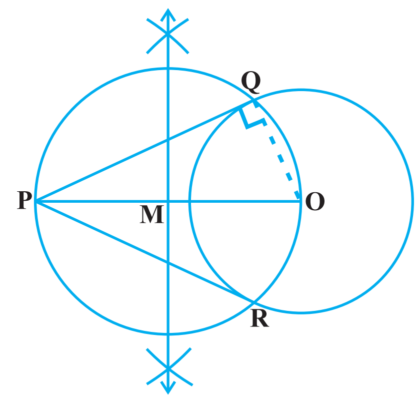
সম্পাদ্য 11.3 : *একটি বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে স্পর্শক অঙ্কন।*

আমাদেরকে O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত এবং এর বহিঃস্থ একটি বিন্দু P দেওয়া হল। আমাদের P বিন্দু থেকে বৃত্তটির দুটি স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ :

1. PO যুক্ত করা হল এবং এটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করা হল। মনে করো M হল PO-এর মধ্যবিন্দু।
2. M-কে কেন্দ্র করে এবং MO ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। মনে করো এই বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে।
3. PQ এবং PR যুক্ত করা হল।

   তাহলে, PQ এবং PR হল নির্ণেয় স্পর্শক দুটি। (চিত্র 11.5 দেখো)।



চিত্র 11.5

চলো এখন আমরা দেখি কোন যুক্তিতে অঙ্কন করা হয়েছে। OQ যুক্ত করা হল। তাহলে $\angle$ PQO হল অর্ধবৃত্তস্থ কোণ অর্থাৎ, $\angle PQO = 90°$

আমরা বলতে পারি কি $PQ \perp OQ$?

যেহেতু, OQ হল প্রদত্ত বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ, তাই PQ -কে বৃত্তটির একটি স্পর্শক হতে হবে। অনুরূপভাবে, PRও বৃত্তটির একটি স্পর্শক হবে।

দ্রষ্টব্য : যদি বৃত্তটির কেন্দ্র দেওয়া না থাকে, তবে প্রথমে যে-কোনো দুটি অসমান্তরাল জ্যা নাও এবং তারপর এদের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু বের করে ওই বিন্দুকে কেন্দ্র হিসেবে চিহ্নিত করে অতঃপর অগ্রসর হও।

অনুশীলনী 11.2

নিম্নলিখিত প্রতিক্ষেত্রে অঙ্কনের যৌক্তিকতাও দাও :

1. 6 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। এর কেন্দ্র থেকে 10 সেমি দূরে একটি বিন্দু থেকে বৃত্তটির উপর স্পর্শকদ্বয় অঙ্কন করো এবং এদের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো।

2. 4 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের ওপর এর সাথে এক কেন্দ্রীয় 6 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্তের উপরিস্থিত যে-কোনো বিন্দু থেকে একটি স্পর্শক অঙ্কন করো এবং এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো। সঠিক গণনার মাধ্যমে এর দৈর্ঘ্য পরিমাপের সত্যতাও যাচাই করো।

3. 3 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। এর বর্ধিত ব্যাসের উভয়দিকে কেন্দ্র থেকে প্রত্যেকটি 7 সেমি দূরে এরকম দুটি বিন্দু P এবং Q নাও। P এবং Q বিন্দু দুটি হতে বৃত্তটির স্পর্শকগুলো অঙ্কন করো।
4. 5 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের উপর এমন একজোড়া স্পর্শক অঙ্কন করো যারা পরস্পরের সঙ্গে $60°$ কোণে আনত।
5. 8 সেমি দৈর্ঘ্যের AB একটি রেখাংশ অঙ্কন করো। A-কে কেন্দ্র করে 4 সেমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত এবং B-কে কেন্দ্র করে 3 সেমি ব্যাসার্ধের অপর একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। প্রতিটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে অপর বৃত্তের ওপর স্পর্শকগুলো অঙ্কন করো।
6. মনে করো, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $AB = 6$ সেমি, $BC = 8$ সেমি এবং $\angle B = 90°$। BD হল B বিন্দু থেকে AC-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব। B, C ও D বিন্দুগুলো দিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করা হল। A বিন্দু থেকে এই বৃত্তটির ওপর স্পর্শকগুলো অঙ্কন করো।
7. একটি চুড়ি (bangle)-এর সাহায্যে একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তটির বাইরে একটি বিন্দু নাও। এই বিন্দুটি থেকে বৃত্তটির ওপর একজোড়া স্পর্শক অঙ্কন করো।

11.4 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত অঙ্কনগুলো কীভাবে করতে হয় তা শিখেছ :

1. একটি রেখাংশকে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত করা।
2. একটি প্রদত্ত স্কেল সূচক যা 1 অপেক্ষা ছোটো অথবা 1 অপেক্ষা বড়ো হয়, সে অনুযায়ী একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সাথে সদৃশ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা।
3. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু থেকে বৃত্তটিতে একজোড়া স্পর্শক অঙ্কন করা।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

সম্পাদ্য 11.2 -এর উদাহরণ (1) এবং (2)-এ ব্যবহৃত অনুরূপ ধাপগুলোর সাহায্যে একটি প্রদত্ত স্কেল সূচক অনুযায়ী একটি প্রদত্ত চতুর্ভুজ (অথবা বহুভুজ) এর সহিত সদৃশ একটি চতুর্ভুজ (অথবা বহুভুজ) অঙ্কন করা যেতে পারে।

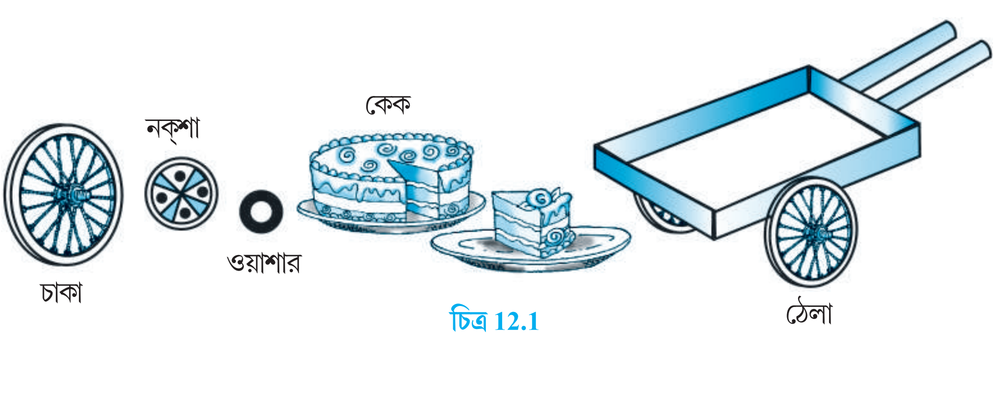
বৃত্ত সম্পর্কিত ক্ষেত্রফল

(AREAS RELATED TO CIRCLES)

12

12.1 ভূমিকা

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে সরল সামতলিক চিত্র যেমন আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, সামন্তরিক, ত্রিভুজ এবং বৃত্তের পরিসীমা এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে অবগত হয়েছ। অনেক বস্তু যা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত হয় সেগুলো বৃত্তাকার বা অন্য কোনো আকারের সাথে সম্পর্কিত। সাইকেলের চাকা, ঠেলা (barrow), ডার্টবোড (dartboard), গোলাকার কেক্, পাঁপড়, ড্রেনের ঢাকনা, বিভিন্ন নক্‌শা, চুড়ি, ব্রোচ (brooch), বৃত্তাকার পথ, ওয়াশার (washer), ফুলের বাগিচা (flower bed) ইত্যাদি এই ধরনের বস্তুর কিছু উদাহরণ (চিত্র 12.1 দেখো)। সুতরাং, পরিধি এবং বৃত্ত সম্পর্কিত ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সমস্যায় অনেক ব্যবহারিক গুরুত্ব আছে। এই অধ্যায়ে, আমরা আমাদের আলোচনাটি পরিসীমা (পরিধি) এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফলের পরিমাপের ধারণা দিয়ে শুরু করব এবং এই জ্ঞানের প্রয়োগে আমরা বৃত্তাকার অঞ্চলের (সংক্ষেপে একটি বৃত্ত) দুটি বিশেষ "অংশের" ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে ব্যবহার করব যা *বৃত্তকলা* (*sector*) এবং *বৃত্তাংশ* (*segment*) নামে পরিচিত। আমরা আরো দেখব যে কিছু সামতলিক চিত্রের সমন্বয়ে গঠিত বৃত্তের বা তার বিভিন্ন অংশের ক্ষেত্রফল কীভাবে নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র 12.1

12.2 বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত - একটি পর্যালোচনা (Perimeter and Area of a Circle — A Review)

মনে করো যে বৃত্তের চারিদিকে একবার ঘুরে আসতে যে দূরত্ব অতিক্রম করতে হয়, তাকে বৃত্তের পরিসীমা বলে, যা সাধারণত *পরিধি* হিসেবে পরিচিত। পূর্ববর্তী শ্রেণি থেকে তোমরা আরও জেনেছ যে, বৃত্তের পরিধি এবং ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবক অনুপাতটি প্রকাশ করা হয় গ্রিক বর্ণ π ('পাই' এরূপে পড়বে) দ্বারা। অন্যভাবে বলা যায়,

$$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$$

বা,

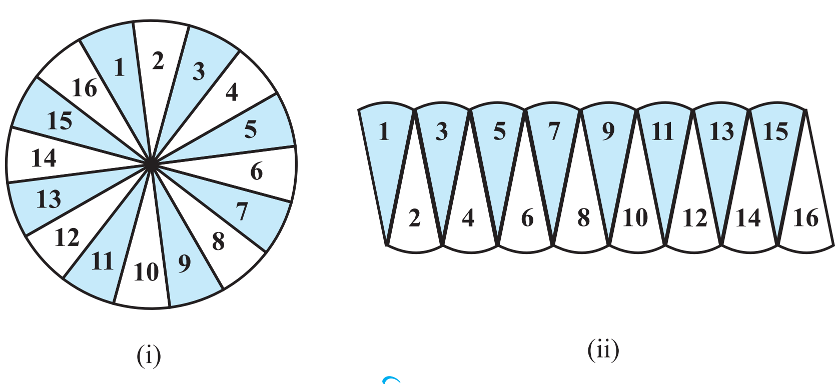
$$\text{পরিধি} = \pi \times \text{ব্যাস}$$

$$= \pi \times 2 \times r \text{ (যেখানে } r \text{ বৃত্তের ব্যাসার্ধ)}$$

$$= 2\pi r$$

মহান ভারতীয় গণিতবিদ্ আর্যভট্ট (476 – 550 খ্রিস্টাব্দে) π-এর একটি আনুমানিক মান দেন। তিনি বলেছিলেন যে, $\pi = \frac{62832}{20000}$, যা প্রায় 3.1416 এর সমান। এটি আরও মজাদার যে ভারতীয় মহান গণিতবিদ্ শ্রীনিবাস রামানুজনের (1887–1920) একটি সূত্র ব্যবহার করে, গণিতবিদ্রা π -এর মান দশমিকের পর মিলিয়ন (million) ঘর পর্যন্ত গণনা করতে সক্ষম হন। তুমি নবম শ্রেণির প্রথম অধ্যায়ে জেনেছ যে, π একটি অমূলদ সংখ্যা এবং এর দশমিক বিস্তারটি অসীম (non-terminating), এবং অনাবৃত্ত (non-recurring or non-repeating)। যাই হোক, বাস্তব ক্ষেত্রে, আমরা সাধারণত π এর মান $\frac{22}{7}$ অথবা আনুমানিক 3.14 ধরি।

তোমরা আরও স্মরণ করো যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল πr^2, যেখানে r হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ। তোমরা মনে করে দেখো যে, সপ্তম শ্রেণিতে তোমরা একটি বৃত্তকে কতগুলো বৃত্তকলায় কেটে, এদেরকে চিত্র 12.2-এর মতো সাজিয়ে এটিকে যাচাই করেছিলে।



চিত্র 12.2

তোমরা দেখেছ যে, চিত্র 12.2 (ii) তে প্রদর্শিত আকৃতিটি প্রায় আয়তকার যার দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ এবং প্রস্থ r । এটি নির্দেশ করে যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$. চলো আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে শেখা ধারণাগুলো পুনরাবৃত্তি করি।

উদাহরণ 1 : একটি বৃত্তাকার মাঠকে বেড়া দিয়ে ঘিরতে প্রতি মিটারে 24 টাকা হিসেবে 5280 টাকা খরচ হয়। মাঠটিতে লাঙল দিতে প্রতি বর্গমিটারে 0.50 টাকা করে খরচ হয়। মাঠটিতে লাঙল দিয়ে চাষ করতে কত খরচ হয় নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = \frac{22}{7}$)

সমাধান : বেড়ার দৈর্ঘ্য (মিটারে) $= \dfrac{\text{মোট খরচ}}{\text{খরচের হার}} = \dfrac{5280}{24} = 220$

সুতরাং, মাঠের পরিধি $= 220$ মিটার

অতএব, যদি মাঠের ব্যাসার্ধ r মিটার হয়,

তখন, $$2\pi r = 220$$

বা, $$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

বা, $$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35$$

অর্থাৎ, মাঠের ব্যাসার্ধ 35 মিটার।

অতএব, মাঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 35 \times 35$ মি$^2 = 22 \times 5 \times 35$ মি^{2}

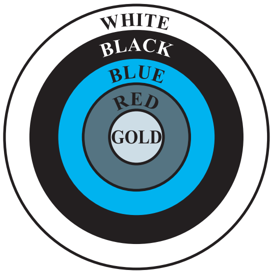
এখন, প্রতি বর্গমি. মাঠটিতে লাঙল দিতে খরচ $= 0.50$ টাকা।

সুতরাং, মাঠটিতে লাঙল দিতে মোট খরচ $= 22 \times 5 \times 35 \times 0.50$ টাকা $= 1925$ টাকা।

অনুশীলনী 12.1

উল্লেখ করা না হলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো।

1. দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 19 সেমি এবং 9 সেমি। দুটি বৃত্তের পরিধির সমষ্টির সমান পরিধি বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।
2. দুটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 8 সেমি এবং 6 সেমি। দুটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।
3. চিত্র 12.3-এ দেখানো একটি তিরের লক্ষ্যবস্তু যা তার পাঁচটি স্কোরিং অঞ্চলের কেন্দ্রের দিক থেকে বাইরের দিকে গোল্ড (Gold), লাল, নীল, কালো এবং সাদা রঙে চিহ্নিত করা আছে। যে অঞ্চলটি গোল্ড নির্দেশ করে তার ব্যাস 21 সেমি এবং অন্যান্য প্রতিটি ব্যান্ড (band) 10.5 সেমি প্রশস্ত। পাঁচটি স্কোরিং অঞ্চলের প্রতিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.3

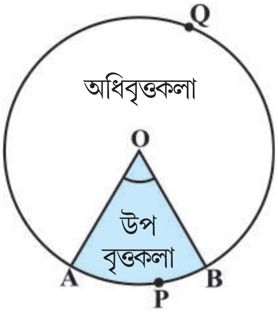
4. একটি গাড়ির প্রতিটি চাকার ব্যাস 80 সেমি। যদি গাড়িটির গতিবেগ ঘণ্টায় 66 কিমি হয়, তবে 10 মিনিট সময়ে গাড়ির প্রতিটি চাকা কতগুলো পূর্ণ আবর্তন সম্পাদন করবে?

5. নীচের সঠিক উত্তরটি বাছাই করো এবং তা যাচাই করো : একটি বৃত্তের পরিধি এবং ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান সমান হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হবে

(A) 2 একক (B) π একক (C) 4 একক (D) 7 একক

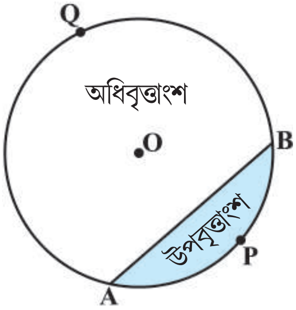
12.3 বৃত্তের বৃত্তকলা ও বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল (Areas of Sector and Segment of a Circle)

তোমরা তোমাদের পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে বৃত্তের *বৃত্তকলা* এবং *বৃত্তাংশ* সম্পর্কে জেনেছ। মনে করে দেখো যে, বৃত্তাকার অঞ্চলের যে অংশটি দুটি ব্যাসার্ধ এবং অনুরূপ বৃত্তচাপ দিয়ে সীমাবদ্ধ হয়, একে বৃত্তটির একটি *বৃত্তকলা* এবং বৃত্তাকার অঞ্চলের যে অংশটি একটি জ্যা এবং এর অনুরূপ বৃত্তচাপ দিয়ে সীমাবদ্ধ হয়, একে বৃত্তটির একটি *বৃত্তাংশ* বলে। এভাবে, চিত্র 12.4 -এ, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের ছায়াবৃত্ত অঞ্চল OAPB কে বৃত্তের *বৃত্তকলা* বলা হয়। $\angle$AOB কে *বৃত্তকলার কোণ* বলে। দেখ যে এই চিত্রে অছায়াবৃত্ত অঞ্চল OAQB -ও বৃত্তের একটি বৃত্তকলা। সুস্পষ্ট কারণে, OAPB-কে *উপবৃত্তকলা* এবং OAQB -কে *অধিবৃত্ত কলা* বলে। তোমরা আরও দেখতে পাও যে, অধিবৃত্তকলায় উৎপন্ন কোণটি $360° - \angle AOB$।



চিত্র 12.4

এখন, চিত্র 12.5-এ লক্ষ করলে দেখবে যে O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি জ্যা AB। সুতরাং, ছায়াবৃত্ত অঞ্চল APB হল বৃত্তের একটি বৃত্তাংশ। তুমি আরও লক্ষ করবে যে, ছায়ামুক্ত অঞ্চল AQB হল বৃত্তের AB জ্যা দ্বারা গঠিত আরেকটি বৃত্তাংশ। স্পষ্টতই, APB-কে *উপবৃত্তাংশ* এবং AQB-কে *অধিবৃত্তাংশ* বলা হয়।



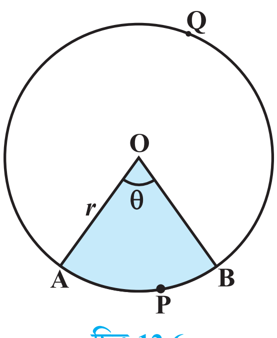
চিত্র 12.5

মন্তব্য : যদি উল্লেখ করা না থাকে, আমরা 'বৃত্তাংশ' এবং 'বৃত্তকলা' বলতে যথাক্রমে 'উপবৃত্তাংশ' এবং 'উপবৃত্তকলা' বুঝি।

এখন আমরা এইসব জ্ঞানের সাহায্যে এদের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের কিছু সম্পর্ক (বা সূত্রাবলি) বের করার চেষ্টা করব।

ধরি, O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি বৃত্তকলা OAPB এবং ব্যাসার্ধ r (চিত্র 12.6 দেখো)। ধরি $\angle$AOB-এর ডিগ্রি পরিমাপ θ।

তোমরা জান যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল (প্রকৃতপক্ষে বৃত্তাকার অঞ্চল বা থালার ক্ষেত্রে) হল πr^2।



চিত্র 12.6

এক্ষেত্রে, আমরা এই বৃত্তাকার অঞ্চলটিকে $360°$ (অর্থাৎ, ডিগ্রি পরিমাপ অর্থাৎ 360) কোণ গঠনকারী একটি বৃত্তকলা হিসাবে বিবেচনা করতে পারি। এখন ঐকিক নিয়মের প্রয়োগে, আমরা OAPB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করতে পারি :

যখন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ 360^0, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ 1^0 হলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\pi r^2}{360}$

অতএব, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ θ^0 হলে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\pi r^2}{360} \times \theta = \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$ ।

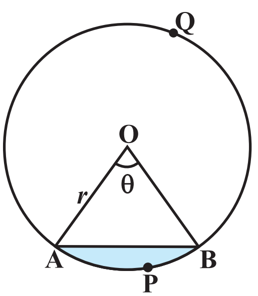
এইভাবে, আমরা বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সম্পর্কটি (বা সূত্রটি) নিম্নলিখিতভাবে লিখতে পারি।

θ কোণবিশিষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$,

যেখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বৃত্তকলার কোণ θ ডিগ্রি।

এখন, স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন জাগে : আমরা কি বৃত্তকলার অনুরূপ APB চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারি ? হ্যাঁ। আবার, ঐকিক নিয়ম প্রয়োগ করে এবং বৃত্তের ($360°$ কোণ) সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $2\pi r$ নিয়ে, আমরা নির্ণেয় বৃত্তচাপ APB-এর দৈর্ঘ্য পাই, $\dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ।

সুতরাং, **θ কোণ বিশিষ্ট বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য** $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ।



চিত্র 12.7

এখন চলো আমরা r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট O কেন্দ্রীয় বৃত্তের APB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের দিকটি বিবেচনা করি। (চিত্র 12.7 দেখো)। তোমরা দেখতে পাচ্ছ যে :

APB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল = OAPB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $-$ Δ OAB -এর ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2 -$ Δ OAB -এর ক্ষেত্রফল

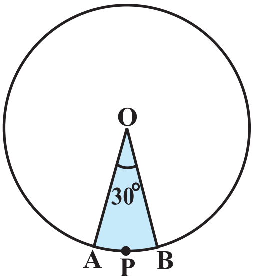
দ্রষ্টব্য : চিত্র 12.6 এবং 12.7 হতে তোমরা যথাক্রমে দেখেছ যে :

OAQB অধিবৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 -$ OAPB উপবৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

এবং AQB অধিবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 -$ APB উপবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

চলো আমরা এই ধারণাগুলো (বা ফলাফলগুলো) বুঝতে কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 2 : 4 সেমি ব্যাসার্ধ এবং 30° কোণবিশিষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। অনুরূপ অধিবৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। ($\pi = 3.14$ ধরো)।



চিত্র 12.8

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্তকলা হল OAPB (চিত্র 12.8 দেখো)।

$$\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 4 \times 4 \text{ সেমি}^2$$

$$= \frac{12.56}{3} \text{ সেমি}^2 = 4.19 \text{ সেমি}^2 \text{ (আসন্ন)}$$

অনুরূপ, অধিবৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

$$= \pi r^2 - \text{OAPB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}$$

$$= (3.14 \times 16 - 4.19) \text{ সেমি}^2$$

$$= 46.05 \text{ সেমি}^2 = 46.1 \text{ সেমি}^2 \text{ (আসন্ন)}$$

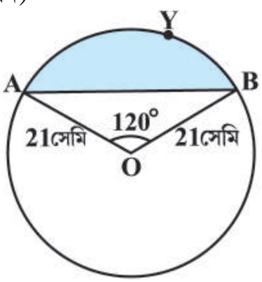
বিকল্পভাবে, অধিবৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{(360 - \theta)}{360} \times \pi r^2$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16 \text{ সেমি}^2$$

$$= \frac{330}{360} \times 3.14 \times 16 \text{ সেমি}^2 = 46.05 \text{ সেমি}^2$$

$$= 46.1 \text{ সেমি}^2 \text{ (আসন্ন)}$$

উদাহরণ 3 : চিত্র 12.9-এ প্রদর্শিত AYB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 সেমি এবং $\angle AOB = 120°$ হয়। (ধরে নাও $\pi = \frac{22}{7}$)।



চিত্র 12.9

সমাধান : AYB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

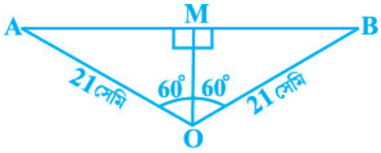
= OAYB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল – Δ OAB-এর ক্ষেত্রফল (1)

এখন, OAYB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ সেমি^{2} $= 462$ সেমি^{2} (2)

Δ OAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য, চিত্র 12.10-এ প্রদর্শিত $OM \perp AB$ অঙ্কন করো।

লক্ষ করো যে, $OA = OB$ । সুতরাং, RHS সর্বসমতা থেকে, $\Delta AMO \cong \Delta BMO$ ।

অতএব, M হল AB এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120° = 60°$ ।



চিত্র 12.10

ধরো, $OM = x$ সেমি

সুতরাং, Δ OMA হতে পাই, $\frac{OM}{OA} = \cos 60°$

বা, $\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$ $\left(\cos 60° = \frac{1}{2}\right)$

বা, $x = \frac{21}{2}$

অতএব, $OM = \frac{21}{2}$ সেমি

আবার, $\frac{AM}{OA} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

সুতরাং, $AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$ সেমি

অতএব, $AB = 2\,AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ সেমি $= 21\sqrt{3}$ সেমি

সুতরাং, Δ OAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,AB \times OM = \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ সেমি^{2}

$= \frac{441}{4}\sqrt{3}$ সেমি^{2} (3)

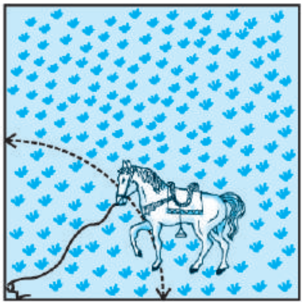
অতএব, AYB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল $= \left(462 - \frac{441}{4}\sqrt{3}\right)$ সেমি^{2} [(1), (2) এবং (3) হইতে]

$= \frac{21}{4}(88 - 21\sqrt{3})$ সেমি^{2}

অনুশীলনী 12.2

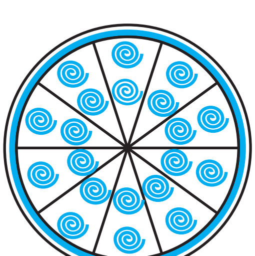
উল্লেখ না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো।

1. কোনো বৃত্তের একটি বৃত্তকলার কোণ $60°$ এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6 সেমি হলে, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
2. 22 সেমি পরিধিবিশিষ্ট একটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 14 সেমি, 5 মিনিটে ঐ ঘড়ির কাঁটা দিয়ে আবৃত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
4. 10 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির অনুরূপ (i) উপবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল ও (ii) অধিবৃত্ত কলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = 3.14$)
5. 21 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের একটি বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করলে, নির্ণয় করো যে:
   (i) চাপটির দৈর্ঘ্য (ii) বৃত্তচাপ দিয়ে গঠিত বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল
   (iii) অনুরূপ জ্যা দিয়ে গঠিত বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল।
6. 15 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির অনুরূপ উপবৃত্তাংশ এবং অধিবৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। ($\pi = 3.14$ এবং $\sqrt{3} = 1.73$ ধরো)
7. 12 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে $120°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির অনুরূপ বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরে নাও, $\pi = 3.14$ এবং $\sqrt{3} = 1.73$)।
8. একটি ঘোড়া 15 মিটার বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার তৃণক্ষেত্রের একটি কোনায় 5 মিটার লম্বা দড়ি দিয়ে একটি খুঁটিতে বাঁধা আছে (চিত্র 12.11 দেখো)। তাহলে নির্ণয় করো যে,
   (i) ঘোড়াটি ঐ ক্ষেত্রটির কতটুকু ক্ষেত্রফলের ঘাস খেতে পারবে?
   (ii) যদি দড়ির দৈর্ঘ্য 5 মিটারের পরিবর্তে 10 মিটার করা হয়, তবে কতটুকু বেশি পরিমাণ ক্ষেত্রের ঘাস খেতে পারবে? (ধরো, $\pi = 3.14$)



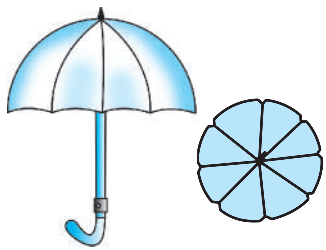
চিত্র 12.11

9. রুপোর তারের তৈরি 35 মিমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার ব্রুচ (brooch) তৈরি করা হল। তারটি দিয়ে আরও 5টি ব্যাস তৈরি করা হল যা বৃত্তাকার ব্রুচটিকে 10 টি সমান বৃত্তকলায় বিভক্ত করে। চিত্র 12.12 তে প্রদর্শিত। তাহলে নির্ণয় করো :
   (i) প্রয়োজনীয় রূপোর তারের মোট দৈর্ঘ্য।
   (ii) ব্রুচটির প্রতিটি বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ।



চিত্র 12.12

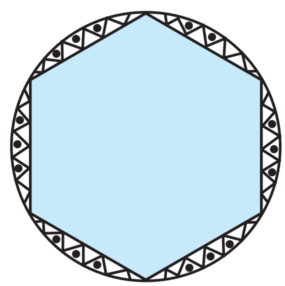
10. একটি ছাতায় সমদূরত্বে ৪টি শিক্ (ribs) আছে (চিত্র 12.13 দেখো)। ছাতাটিকে 45 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সামতলিক বৃত্ত কল্পনা করে, ছাতাটির পরপর দুটি শিকের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.13

11. একটি গাড়ির দুইটি হুইপার (wipers) আছে যা একটি আরেকটির উপর সমাপতিত হয় না। প্রতিটি হুইপারের 25 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ব্লেড 115° কোণে ঘুরতে পারে। প্রত্যেকটি ব্লেড একবার ঘুরে মোট কতটুকু ক্ষেত্রফল পরিষ্কার করে তা নির্ণয় করো।

12. জলে ডোবানো পাথর থেকে জাহাজগুলোকে সতর্ক করার জন্য একটি বাতিঘর (lighthouse) হতে 80° কোণে 16.5 কিমি দূরত্ব পর্যন্ত লাল রঙের আলো ছড়ানো হয়। ওই সমুদ্রে কতটুকু ক্ষেত্রফল জুড়ে জাহাজগুলোকে সতর্ক করা হয়। (ধরে নাও $\pi = 3.14$)



চিত্র 12.14

13. একটি গোলাকার টেবিল ঢাকনায় ছয়টি সমান নক্‌শা করা আছে, চিত্র 12.14-এ দেখানো হয়েছে। ঢাকনাটির ব্যাসার্ধ 28 সেমি হলে, নক্‌শাটি বুনতে প্রতি বর্গসেমি 0.35 টাকা হিসাবে খরচ নির্ণয় করো। (ধরো, $\sqrt{3} = 1.7$)

14. নীচের সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

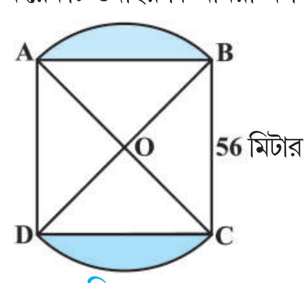
R ব্যাসার্ধের বৃত্তের p (ডিগ্রি এককে) কোণ বিশিষ্ট বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হল

(A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{p}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

12.4 সম্মিলিত সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রফল (Areas of Combinations of Plane Figures)

এ পর্যন্ত, আমরা বিভিন্ন চিত্রের ক্ষেত্রফল আলাদা আলাদাভাবে গণনা করে এসেছি। চলো আমরা এখন কিছু সম্মিলিত সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রফল গণনা করার চেষ্টা করি। আমরা আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে এইসকল চিত্র দেখে থাকি এবং এগুলো বিভিন্ন আকর্ষনীয় নক্‌শার আকারের মাঝে থাকে। ফুলের বাগিচা (Flower bed), ড্রেনের ঢাকনা, জানালার নক্‌শা, টেবিলের ঢাকনার উপর নক্‌শা হল এর কয়েকটি উদাহরণ। আমরা এসব চিত্রের ক্ষেত্রফল গণনার প্রক্রিয়া কিছু উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা করব।

উদাহরণ 4 : 56 মি. বাহুবিশিষ্ট ABCD বর্গাকার ক্ষেত্রের দুটি বাহুর উপর বৃত্তাকার ফুলের বাগিচা যা চিত্র 12.15-এ দেখানো হয়েছে। যদি বর্গাকার ক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O প্রতিটি বৃত্তাকার ফুল বাগিচার কেন্দ্র হয়। বর্গাকার ক্ষেত্র এবং ফুল বাগিচাদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি নির্ণয় করো।



চিত্র 12.15

সমাধান : ABCD বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 56 \times 56$ মি^{2} (1)

ধরি, $OA = OB = x$ মিটার

সুতরাং, $x^2 + x^2 = 56^2$

বা, $2x^2 = 56 \times 56$

বা, $x^2 = 28 \times 56$ (2)

এখন, OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{90}{360} \times \pi x^2 = \dfrac{1}{4} \times \pi x^2$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{22}{7} \times 28 \times 56$ মি^{2} [(2) হতে] (3)

আবার, $\Delta\, OAB$ -এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{4} \times 56 \times 56$ মি^{2} $(\angle AOB = 90°)$ (4)

অতএব, AB বাহু দ্বারা আবৃত ফুলবাগিচার ক্ষেত্রফল $= \left(\dfrac{1}{4} \times \dfrac{22}{7} \times 28 \times 56 - \dfrac{1}{4} \times 56 \times 56\right)$ মি^{2}

[(3) এবং (4) হতে]

$= \dfrac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\dfrac{22}{7} - 2\right)$ মি^{2}

$= \dfrac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \dfrac{8}{7}$ মি^{2} (5)

অনুরূপভাবে, অপর ফুলবাগিচার ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \dfrac{8}{7}$ মি^{2} (6)

অতএব, মোট ক্ষেত্রফল $= \left(56 \times 56 + \dfrac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \dfrac{8}{7}\right.$

$\left. + \dfrac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \dfrac{8}{7}\right)$ মি^{2} [(1), (5) এবং (6) হতে]

$= 28 \times 56 \left(2 + \dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{7}\right)$ মি^{2}

$= 28 \times 56 \times \dfrac{18}{7}$ মি^{2} $= 4032$ মি^{2}

বিকল্প সমাধান :

$$\text{মোট ক্ষেত্রফল} = \text{OAB বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} + \text{ODC বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল} + \Delta\,\text{OAD-এর ক্ষেত্রফল} + \Delta\,\text{OBC-এর ক্ষেত্রফল}$$

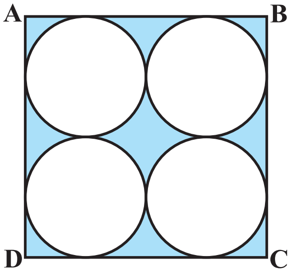
$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{ মি}^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} + \frac{22}{7} + 2 + 2\right) \text{ মি}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7}(22 + 22 + 14 + 14) \text{ মি}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ মি}^2 = 4032 \text{ মি}^2$$

উদাহরণ 5 : চিত্র 12.16-এ ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যেখানে ABCD 14 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র।



চিত্র 12.16

সমাধান : ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 14 \times 14 \text{ সেমি}^2 = 196 \text{ সেমি}^2$$

$$\text{প্রতিটি বৃত্তের ব্যাস} = \frac{14}{2} \text{ সেমি} = 7 \text{ সেমি}$$

সুতরাং, $\text{প্রতিটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ} = \frac{7}{2} \text{ সেমি}$

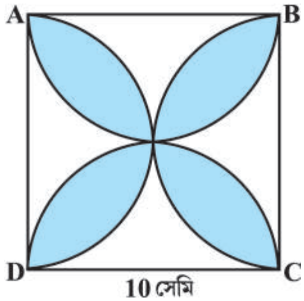
সুতরাং, $\text{একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \text{ সেমি}^2$

$$= \frac{154}{4} \text{ সেমি}^2 = \frac{77}{2} \text{ সেমি}^2$$

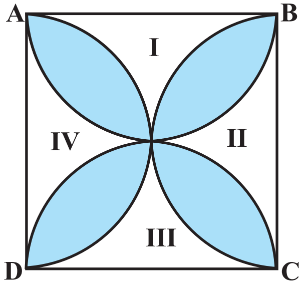
অতএব, $\text{চারটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল} = 4 \times \frac{77}{2} \text{ সেমি}^2 = 154 \text{ সেমি}^2$

অতঃপর, $\text{ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল} = (196 - 154) \text{ সেমি}^2 = 42 \text{ সেমি}^2$।

উদাহরণ 6 : চিত্র 12.17-এ ছায়াবৃত নক্‌শার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যেখানে ABCD 10 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র এবং বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুকে ব্যাস ধরে অর্ধবৃত্তগুলো অঙ্কন করা হল। (ধরো, $\pi = 3.14$)



চিত্র 12.17



চিত্র 12.18

সমাধান : চলো আমরা চারটি অনাবৃত অঞ্চলকে I, II, III এবং IV দিয়ে চিহ্নিত করি (চিত্র 12.18 দেখো)।

I-এর ক্ষেত্রফল + III-এর ক্ষেত্রফল

= ABCD-এর ক্ষেত্রফল – 5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুটি অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল।

$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2\right)$ সেমি^{2} = (100 – 3.14 × 25) সেমি^{2}

= (100 – 78.5) সেমি^{2} = 21.5 সেমি^{2}

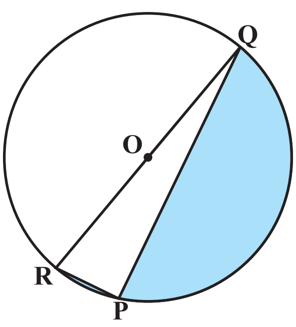
অনুরূপভাবে, II-এর ক্ষেত্রফল + IV-এর ক্ষেত্রফল = 21.5 সেমি^{2}

সুতরাং, ছায়াবৃত নক্‌শার ক্ষেত্রফল = ABCD-এর ক্ষেত্রফল – (I + II + III + IV)-এর ক্ষেত্রফল

= (100 – 2 × 21.5) সেমি^{2} = (100 – 43) সেমি^{2} = 57 সেমি^{2}

অনুশীলনী 12.3

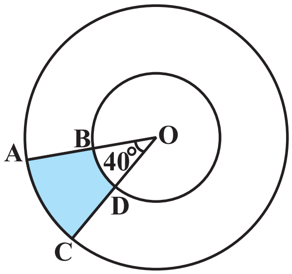
উল্লেখ করা না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো।



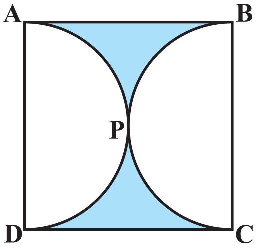
চিত্র 12.19

1. যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের PQ = 24 সেমি, PR = 7 সেমি হয়। তবে চিত্র 12.19-এ প্রদর্শিত ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

2. O কেন্দ্রবিশিষ্ট দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 7 সেমি এবং 14 সেমি এবং $\angle AOC = 40°$ হলে চিত্র 12.20 -এর ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



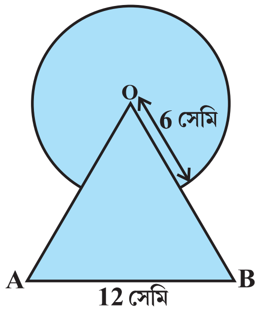
চিত্র 12.20



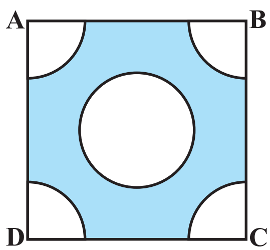
চিত্র 12.21

3. যদি ABCD 14 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র এবং APD ও BPC অর্ধবৃত্ত হয়, তবে চিত্র 12.21 -এর ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

4. যদি 12 সেমি বাহুবিশিষ্ট OAB সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু O কে কেন্দ্র করে 6 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তচাপ অঙ্কণ করা হয়, তবে চিত্র 12.22 -এ প্রদর্শিত ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.22



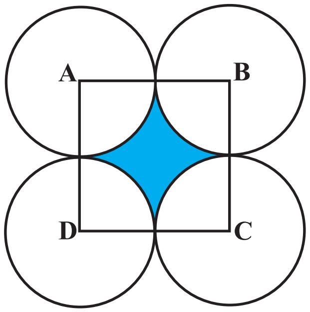
চিত্র 12.23

5. 4 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি কোণা থেকে 1 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশ এবং 2 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্ত কেটে নেওয়া হল যা চিত্র 12.23-এ দেখানো হল। বর্গক্ষেত্রের অবশিষ্ট অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

6. 32 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার টেবিল ঢাকনার মাঝখানে একটি সমবাহু ত্রিভুজাকার ক্ষেত্র ABC বাদে একটি নক্‌শা (design) তৈরি করা হল যা চিত্র 12.24-এ প্রদর্শিত। নক্‌শাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

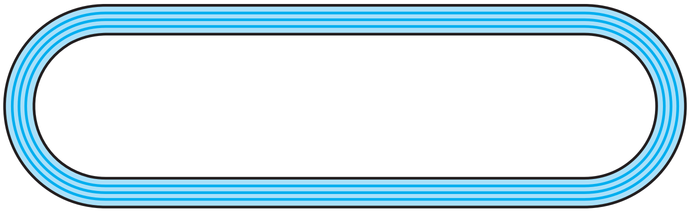
চিত্র 12.24

7. চিত্র 12.25-এ ABCD 14 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র। A, B, C এবং D-কে কেন্দ্র করে চারটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয় যেন একটি বৃত্ত অবশিষ্ট তিনটি বৃত্তের মধ্যে দুটিকে বহিঃস্পর্শ করে। ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.25

8. চিত্র 12.26-এ একটি দৌড়ের ট্র্যাক (racing track) প্রদর্শিত যার বাম এবং ডান প্রান্তগুলো অর্ধবৃত্তাকার।

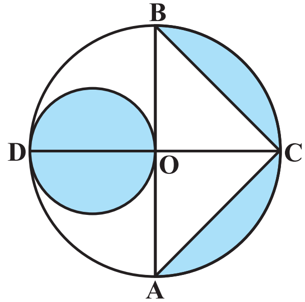


চিত্র 12.26

106 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দুটি অভ্যন্তরীণ সমান্তরাল সরলরেখাংশের মধ্যে দূরত্ব 60 মিটার। যদি ট্র্যাকটি 10 মি চওড়া হয়, তবে

(i) অভ্যন্তরীণ ধার বরাবর ট্র্যাকের দৈর্ঘ্য এবং

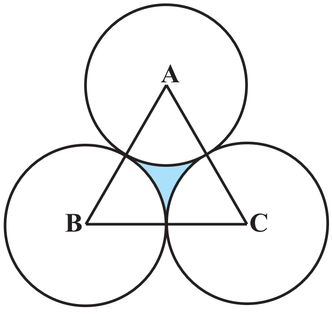
(ii) ট্র্যাকটির ক্ষেত্রফল — নির্ণয় করো।



চিত্র 12.27

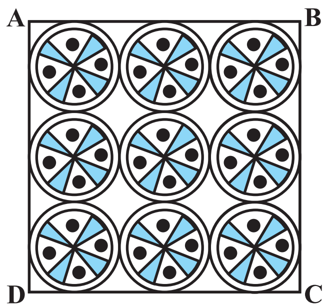
9. চিত্র 12.27-এ AB এবং CD হল বৃত্তের দুটি ব্যাস (বৃত্তের কেন্দ্র O) যারা পরস্পর লম্ব এবং OD ছোটো বৃত্তটির ব্যাস। যদি OA = 7 সেমি হয়, ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

10. ABC সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 17320.5 সেমি^{2}। ত্রিভুজের প্রতিটি কৌণিক বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি করে বৃত্ত অঙ্কন করা হল যার ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর অর্ধদৈর্ঘ্যের সমান (চিত্র 12.28 দেখো)। ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরে নাও, $\pi = 3.14$ এবং $\sqrt{3} = 1.73205$)

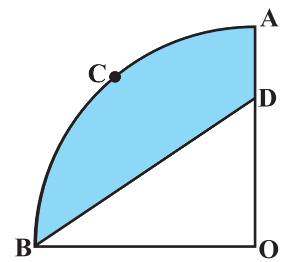


চিত্র 12.28

11. একটি বর্গাকার রুমালের উপর 7 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নয়টি বৃত্তাকার নক্‌শা তৈরি করা ছিল (চিত্র 12.29 দেখো)। রুমালটির অবশিষ্ট অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.29

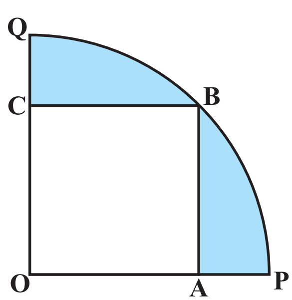


চিত্র 12.30

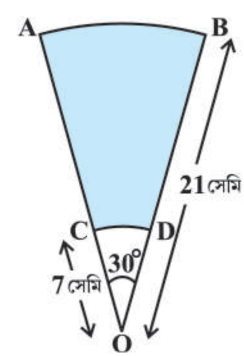
12. চিত্র 12.30-এ, OACB হল 3.5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট O কেন্দ্রীয় বৃত্তের একটি চতুর্থাংশ। যদি OD = 2 সেমি হয়, তবে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো :

(i) OACB চতুর্থাংশের, (ii) ছায়াবৃত অঞ্চলের।

13. চিত্র 12.31-এ, OABC বর্গক্ষেত্রটি OPBQ চতুর্থাংশে অন্তঃর্লিখিত। যদি OA = 20 সেমি হয়, ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরো $\pi = 3.14$)



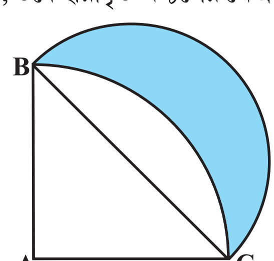
চিত্র 12.31



চিত্র 12.32

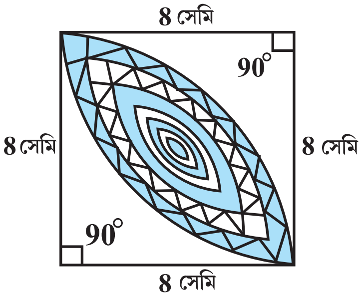
14. 21 সেমি এবং 7 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের দুটি বৃত্তচাপ যথাক্রমে AB ও CD এবং বৃত্তের কেন্দ্র O (চিত্র 12.32 দেখো)। যদি $\angle AOB = 30°$ হয়, তবে ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

15. চিত্র 12.33-এ, ABC 14 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের এক-চতুর্থাংশ এবং BC-কে ব্যাস ধরে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হল। ছায়াবৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.33

16. চিত্র 12.34 -এ নক্‌শাকৃত অঞ্চলের ক্ষেত্রফল গণনা করো যা 8 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্তের এক চতুর্থাংশের সাধারণ ক্ষেত্র।



চিত্র 12.34

12.5 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে, তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$.

2. বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$.

3. r ব্যাসার্ধ এবং ডিগ্রি পরিমাপে θ কোণ বিশিষ্ট একটি বৃত্তকলার চাপের দৈর্ঘ্য হল $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$.

4. r ব্যাসার্ধ এবং ডিগ্রি পরিমাপে θ কোণ বিশিষ্ট একটি বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল হল $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

5. বৃত্তের বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল

= অনুরূপ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল — অনুরূপ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

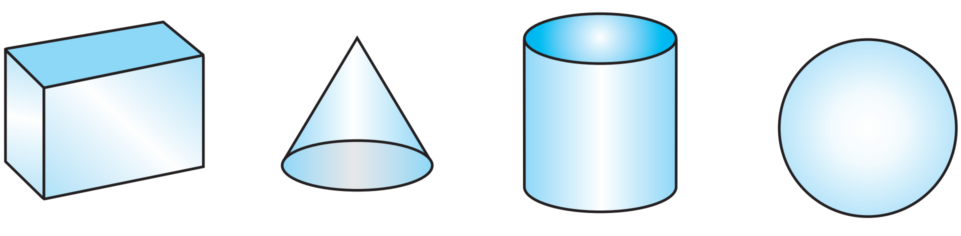
পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন

(SURFACE AREAS AND VOLUMES)

13

13.1 ভূমিকা

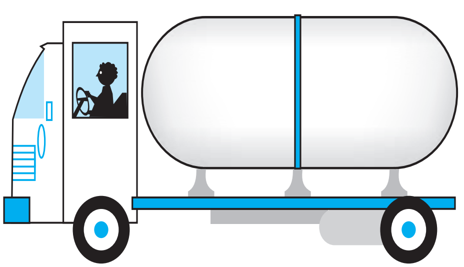
নবম শ্রেণি থেকে তোমরা কিছু ঘনবস্তুর সাথে পরিচিত হয়েছ; যেমন আয়তঘনক, শঙ্কু, চোঙ এবং গোলক (চিত্র 13.1 দেখো)। তোমরা আরও শিখেছ কীভাবে তাদের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করা যায়।



চিত্র 13.1

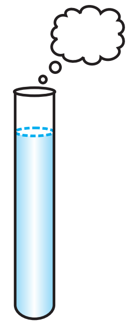
আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে আমরা এরূপ কিছু ঘনবস্তু সম্পর্কে জেনেছি যেগুলো দুই বা ততোধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে তৈরি, যেগুলো উপরের চিত্রে দেখানো হয়েছে।

তোমরা অবশ্যই লরিকে (truck)-এর পেছনে জল বা তেলপূর্ণ ট্যাঙ্ক নিয়ে এক জায়গা থেকে অন্য জায়গায় যেতে দেখেছ (চিত্র 13.2 দেখো)। এর আকৃতি কি উপরে বর্ণিত চারটি মূল ঘনবস্তুর কোনো একটির অনুরূপ? তুমি ধারণা করতে পারছ যে, এটি একটি চোঙ এবং দুটি অর্ধগোলাকার প্রান্ত দিয়ে তৈরি।



চিত্র 13.2

আবার, 13.3 নং চিত্রে তোমরা একটি বস্তু দেখতে পাচ্ছ। তোমরা কি এটির নাম জান? এটি একটি পরীক্ষা নল (test tube), সঠিক! এটি তুমি তোমাদের বিজ্ঞান পরীক্ষাগারে ব্যবহার করে থাকো। এই নলটি একটি চোঙ এবং একটি অর্ধগোলকের সমন্বয়ে তৈরি। অনুরূপভাবে, ভ্রমন করার সময় তুমি উপরে উল্লিখিত ঘনবস্তুগুলোর সমন্বয়ে গঠিত কিছু বড়ো এবং সুন্দর ভবন বা স্মৃতিসৌধ দেখেছ।

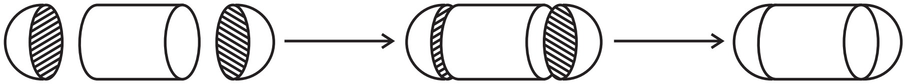

চিত্র 13.3

কোনো কারণে যদি তুমি এ ধরনের বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, আয়তন বা ধারণক্ষমতা নির্ণয় করতে চাও তবে তুমি এটি কীভাবে করবে? তোমরা এ পর্যন্ত যা অধ্যয়ন করেছ এরূপ কোনো ঘনবস্তুর সাথে আমরা এগুলোকে শ্রেণিবদ্ধ করতে পারি না।

এই অধ্যায়ে, তোমরা দেখবে যে, এই ধরনের বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন কীভাবে নির্ণয় করা যায়।

13.2 সম্মিলিত ঘনবস্তুসমূহের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল (Surface Area of a Combination of Solids)

চলো আমরা 13.2 নং চিত্রে উল্লেখিত ট্যাংকটিকে বিবেচনা করি। কীভাবে আমরা এরূপ ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব? এখন, যখনই আমরা একটি নতুন সমস্যার মুখোমুখি হই, তখন আমরা প্রথমে দেখতে চেষ্টা করি যে, আমরা এটিকে ছোটো ছোটো সমস্যায় ভেঙ্গে দিতে পারি কিনা, যা আমরা আগে সমাধান


চিত্র 13.4

করেছি। আমরা দেখতে পাই যে, এই ঘনবস্তুটি একটি চোঙ এবং দুটি অর্ধগোলক নিয়ে তৈরি, যেগুলো চোঙের উভয় পাশে আটকানো আছে। এটি দেখতে 13.4 নং চিত্রের অনুরূপ, যা আমরা সবগুলো অংশ একসাথে যুক্ত করে পাই।

আমরা যদি নতুন গঠিত বস্তুর পৃষ্ঠতল বিবেচনা করি, আমরা কেবলমাত্র দুটি অর্ধগোলকের বক্রতল এবং চোঙের বক্রতল দেখতে পাব।

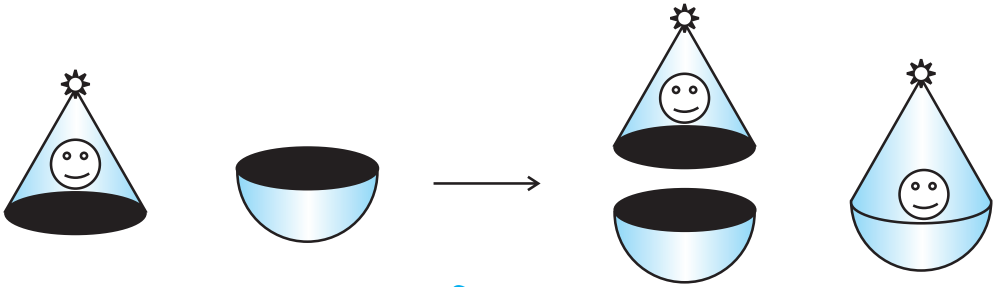
সুতরাং, নতুন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হল প্রতিটি ভিন্ন অংশের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। এ থেকে পাওয়া যায়,

নতুন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (TSA) = একটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA) + চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA) + অপর অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA)

যেখানে TSA, CSA যথাক্রমে বোঝায় 'সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল' (Total Surface Area) এবং 'বক্রতলের ক্ষেত্রফল' (Curved Surface Area)।

এখন আমরা অন্য একটি পরিস্থিতি বিবেচনা করব। ধরো আমরা একটি অর্ধগোলক এবং একটি শঙ্কু একত্রিত করে একটি খেলনা তৈরি করব। এসো আমরা যে ধাপগুলো দিয়ে অগ্রসর হচ্ছি তা দেখি।

প্রথমে, আমরা একটি শঙ্কু এবং একটি অর্ধগোলক নিই এবং এদের সমতল দুটিকে একসাথে জুড়ে দিই। এখানে, অবশ্যই আমরা অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধ এবং শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ সমান নেব। কারণ খেলনাটির একটি মসৃণ পৃষ্ঠতল আছে। সুতরাং, চিত্র 13.5 তে ধাপগুলো দেখানো হল।



চিত্র 13.5

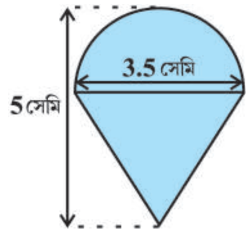
আমাদের প্রচেষ্টার শেষে, আমরা একটি সুন্দর গোলতল বিশিষ্ট খেলনা পেলাম। এখন আমরা যদি জানতে চাই যে, এই খেলনাটির পৃষ্ঠতল রঞ্জিত করতে আমাদের কতটুকু রঙ দরকার, তাহলে আমাদের কী জানতে হবে? আমাদের খেলনার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল জানতে হবে, যা অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA) এবং শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের (CSA) সমন্বয়ে তৈরি।

সুতরাং, আমরা বলতে পারি যে,

খেলনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA) + শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA)

এখন, চলো আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 1 : রশিদ তার জন্মদিনের উপহার হিসাবে একটি খেলনা লাটিম (playing top) পেয়েছে, যা আশ্চর্যজনকভাবে কোনো রঙ করা ছিল না। সে এটিকে রঙিন খড়ি দিয়ে রঞ্জিত করতে চায়। লাটিমটি দেখতে একটি শঙ্কুর উপর বসানো একটি অর্ধগোলক (চিত্র 13.6 দেখো)। সম্পূর্ণ লাটিমটির উচ্চতা 5 সেমি এবং ব্যাস 3.5 সেমি। তাকে এটির কতটুকু ক্ষেত্র রং করতে হবে। (ধরো $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.6

সমাধান : এই লাটিমটি দেখতে অবিকল চিত্র 13.5 -এর বস্তুর অনুরূপ যা আমরা আলোচনা করেছি। সুতরাং, আমরা প্রচলিত ফলাফল প্রয়োগে এই সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারি যে,

খেলনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (TSA) = অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA) + শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA)

এখন, অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi r^2$

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ সেমি}^2$$

আবার, শঙ্কুটির উচ্চতা = লাটিমের উচ্চতা – অর্ধগোলাকার অংশের উচ্চতা (ব্যাসার্ধ)

$$= \left(5 - \frac{3.5}{2}\right) \text{ সেমি} = 3.25 \text{ সেমি}$$

সুতরাং, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা $(l) = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{3.5}{2}\right)^2 + (3.25)^2}$ সেমি = 3.7 সেমি (প্রায়)।

সুতরাং, শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl = \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right)$ সেমি^{2}

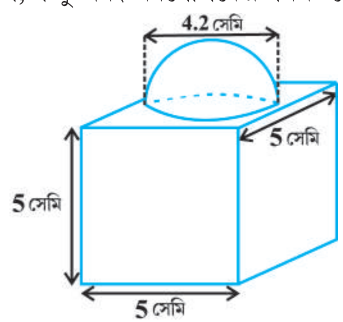
যা থেকে লাটিমটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়,

$$= \left(2 \times \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times \frac{3.5}{2}\right) \text{ সেমি}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} \times 3.7\right) \text{ সেমি}^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2}(3.5 + 3.7) \text{ সেমি}^2 = \frac{11}{2} \times (3.5 + 3.7) \text{ সেমি}^2 = 39.6 \text{ সেমি}^2 \text{ (প্রায়)।}$$

তোমরা লক্ষ করতে পার যে, লাটিমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল, শঙ্কু এবং অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান *নয়*।

উদাহরণ 2 : চিত্র 13.7 -এ প্রদর্শিত সজ্জিত ব্লকটি দুটি ঘনবস্তু — একটি ঘনক এবং একটি অর্ধগোলক দিয়ে তৈরি। ব্লকটির ভূমি ঘনকাকৃতির যার প্রতিটি বাহু 5 সেমি, এবং শীর্ষে অবস্থিত অর্ধগোলকটির ব্যাস 4.2 সেমি। ব্লকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরে নাও $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.7

সমাধান : ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6 \times (\text{বাহু})^2 = 6 \times 5 \times 5$ সেমি^{2} = 150 সেমি^{2}.

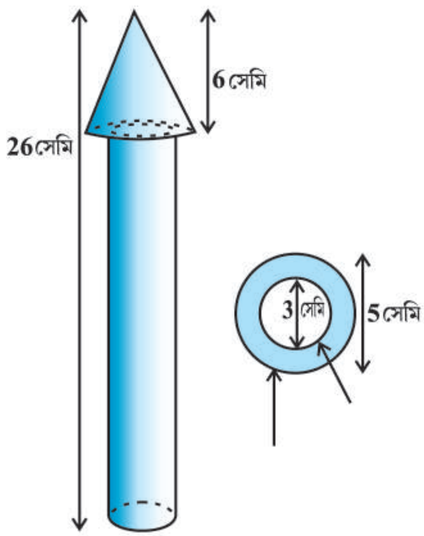
লক্ষ করো যে, ঘনকটির যে অংশে অর্ধগোলকটি যুক্ত আছে তা পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলে অন্তর্ভুক্ত নয়।

সুতরাং, ব্লকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (TSA)
– অর্ধগোলকের ভূমির ক্ষেত্রফল
+ অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (CSA)

$$= 150 - \pi r^2 + 2\pi r^2 = (150 + \pi r^2) \text{ সেমি}^2$$

$$= 150 \text{ সেমি}^2 + \left(\frac{22}{7} \times \frac{4.2}{2} \times \frac{4.2}{2}\right) \text{সেমি}^2$$
$$= (150 + 13.86) \text{ সেমি}^2 = 163.86 \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 3 : একটি কাঠের তৈরি খেলনা রকেট দেখতে একটি চোঙের উপর বসানো শঙ্কু আকৃতির যা চিত্র 13.8 তে দেখানো হয়েছে। সমগ্র রকেটের উচ্চতা 26 সেমি, যেখানে শঙ্কু আকৃতি অংশের উচ্চতা 6 সেমি। শঙ্কু আকৃতি অংশের ভূমির ব্যাস 5 সেমি, যার চোঙাকার অংশের ভূমির ব্যাস 3 সেমি। যদি শঙ্কু আকৃতির অংশকে কমলা এবং চোঙাকৃতি অংশকে হলুদ রঙে রঞ্জিত করা হয়, তবে প্রতিটি রঙে রঞ্জিত রকেটের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরে নাও $\pi = 3.14$)



চিত্র 13.8

সমাধান : শঙ্কুর ব্যাসার্ধকে r, শঙ্কুর তির্যক উচ্চতাকে l, শঙ্কুর উচ্চতাকে h, চোঙের ব্যাসার্ধকে r' এবং চোঙের উচ্চতাকে h' দিয়ে নির্দেশ করা হল। তাহলে, $r = 2.5$ সেমি, $h = 6$ সেমি, $r' = 1.5$ সেমি, $h' = 26 - 6 = 20$ সেমি এবং

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2.5^2 + 6^2} \text{ সেমি} = 6.5 \text{ সেমি}$$

এখানে, শঙ্কু আকৃতি অংশের বৃত্তাকার ভূমি যা চোঙের উপর বসানো, কিন্তু শঙ্কুর ভূমি চোঙের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং, শঙ্কুর ভূমির একটি অংশকে (একটি বলয়) রঞ্জিত করতে হবে।

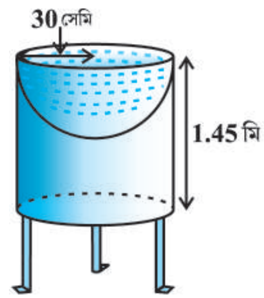
সুতরাং, কমলা রঙে রঞ্জিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল + শঙ্কুর ভূমির ক্ষেত্রফল – চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল

$$= \pi rl + \pi r^2 - \pi(r')^2$$
$$= \pi[(2.5 \times 6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \text{ সেমি}^2$$
$$= \pi[20.25] \text{ সেমি}^2 = 3.14 \times 20.25 \text{ সেমি}^2$$
$$= 63.585 \text{ সেমি}^2$$

এখন, হলুদ রঙে রঞ্জিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + চোঙের একটি ভূমির ক্ষেত্রফল

$$= 2\pi r'h' + \pi(r')^2$$
$$= \pi r'(2h' + r')$$
$$= (3.14 \times 1.5)(2 \times 20 + 1.5) \text{ সেমি}^2$$
$$= 4.71 \times 41.5 \text{ সেমি}^2$$
$$= 195.465 \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 4 : মলয় তার বাগানের জন্য একটি চোঙাকৃতি পাখির স্নানাগার তৈরি করল যার একপ্রান্ত অর্ধগোলাকার বাটি আকৃতির (চিত্র 13.9 দেখো)। চোঙের উচ্চতা 1.45 মিটার এবং এর ব্যাসার্ধ 30 সেমি। পাখির স্নানাগারটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরে নাও, $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.9

সমাধান : মনে করো, চোঙের উচ্চতা h এবং চোঙ ও অর্ধগোলকের সাধারণ ব্যাসার্ধ r । তাহলে

পাখির স্নানাগারটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$$

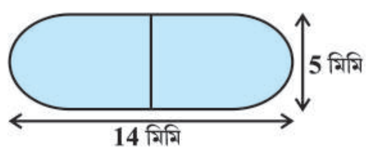
$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30(145+30) \text{ সেমি}^2$$

$$= 33000 \text{ সেমি}^2 = 3.3 \text{ মি}^2$$

অনুশীলনী 13.1

উল্লেখ না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো,

1. দুটি ঘনক যাদের প্রত্যেকটির আয়তন 64 সেমি^{3} প্রান্ত বরাবর যুক্ত করা হল। উৎপন্ন আয়তঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
2. একটি বিকারের আকৃতি হল ফাঁপা অর্ধগোলকের উপরে বসানো একটি ফাঁপা চোঙ। অর্ধগোলকটির ব্যাস 14 সেমি এবং বিকারটির মোট উচ্চতা 13 সেমি। বিকারটির ভেতরের তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. একটি খেলনার উপরের অংশ 3.5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট শঙ্কু আকৃতির যা সমান ব্যাসার্ধের একটি অর্ধগোলকের উপর বসানো। খেলনাটির মোট উচ্চতা 15.5 সেমি। খেলনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
4. 7 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনকাকৃতির ব্লকের উপর একটি অর্ধগোলক উপুড় করে বসানো। অর্ধগোলকটির ব্যাসের দৈর্ঘ্য সবচেয়ে বেশি কত হতে পারে? ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
5. একটি ঘনকাকৃতিরকাঠের ব্লকের একটি তল থেকে একটি অর্ধগোলাকার গর্ত কেটে নেওয়া হল যার অর্ধগোলাকার অংশের ব্যাস l যা ঘনকের প্রতিটি ধারের সমান। অবশিষ্ট ঘনবস্তুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
6. একটি ঔষধের ক্যাপসুল (capsule) চোঙাকৃতি, যার প্রতিটি প্রান্তে একটি অর্ধগোলক আটকানো আছে (চিত্র 13.10 দেখো)। ক্যাপসুলটির মোট দৈর্ঘ্য 14 মিমি এবং ব্যাস 5 মিমি। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

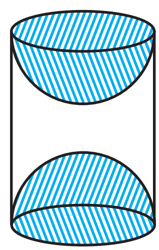


চিত্র 13.10

7. একটি চোঙাকৃতি তাঁবু যার উপরের অংশটি শঙ্কু আকৃতির। যদি চোঙাকৃতি অংশের উচ্চতা ও ব্যাস যথাক্রমে 2.1 মিটার ও 4 মিটার হয় এবং উপরের অংশের তির্যক উচ্চতা 2.8 মিটার হয়, তবে তাঁবু তৈরির জন্য ব্যবহৃত ক্যানভাসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। আবার, প্রতি বর্গমিটারে 500 টাকা হারে তাঁবুটি তৈরি করতে ব্যবহৃত ক্যানভাসের মূল্য নির্ণয় করো। (লক্ষ করো যে, তাঁবুটির ভূমি ক্যানভাস দ্বারা আবৃত নয়।)

8. একটি নিরেট চোঙ যার উচ্চতা 2.4 সেমি এবং ব্যাস 1.4 সেমি, তা থেকে সমউচ্চতা এবং সমব্যাসের একটি শঙ্কু আকৃতির অংশ কেটে বের করে নেওয়া হল। অবশিষ্ট ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নিকটতম বর্গসেমিতে নির্ণয় করো।

9. চিত্র 13.11 -এ প্রদর্শিত চোঙাকার কাঠের বস্তুটি উভয় প্রান্ত হতে দুটি অর্ধগোলাকার অংশ খোদাই করে তৈরি করা হয়েছে। যদি চোঙটির উচ্চতা 10 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3.5 সেমি হয়, বস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

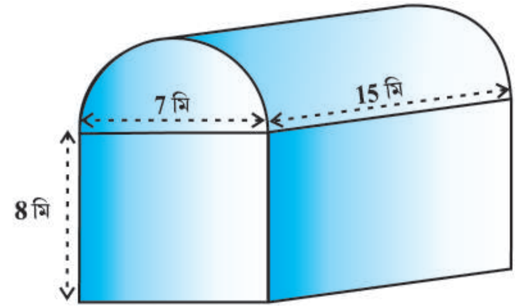


চিত্র 13.11

13.3 সম্মিলিত ঘনবস্তু সমূহের আয়তন (Volume of a Combination of Solids)

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে, আমরা দুটি মৌলিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে তৈরি ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কীভাবে বের করতে হয় তা আলোচনা করেছি। এখানে, আমরা তাদের আয়তন কীভাবে নির্ণয় করতে হয় দেখব। এটি উল্লেখ করা যেতে পারে যে, পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল গণনা করার ক্ষেত্রে, আমরা দুটি উপাদানের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল যোগ করি না, কারণ তাদেরকে যুক্ত করার সময় পৃষ্ঠতলের কিছু অংশ অদৃশ্য হয়ে যায়। যাই হোক, আয়তন গণনার ক্ষেত্রে এই বিষয়টি প্রযোজ্য নয়। দুটি মৌলিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে সঠিক ঘনবস্তুটি আসলে দুটি উপাদানের আয়তনের সমষ্টির সমান, যা নীচের উদাহরণগুলোতে আমরা দেখব।

উদাহরণ 5 : শান্তা একটি চালাঘরে (shed) তার কারখানা চালান যা একটি আয়তঘনকের উপর বসানো অর্ধচোঙাকৃতির (চিত্র 13.12)। যদি চালা ঘরটির ভূমির মাত্রা 7 মি × 15 মি এবং আয়তঘনাকার অংশের উচ্চতা 8 মিটার হয়, তবে চালা ঘরটি কী পরিমাণ বায়ু ধরে রাখতে পারবে তা নির্ণয় করো। উপরন্তু, ধরো চালাঘরের ভেতরের যন্ত্রপাতিগুলো মোট 300 মি^{3} জায়গা দখল করে রাখে এবং 20 জন কর্মী রয়েছে, যাদের প্রত্যেকে গড়ে 0.08 মি^{3} জায়গা দখল করে রাখে। তাহলে, চালাঘরের ভেতরে কতটুকু বায়ু থাকবে? (ধরে নাও $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.12

সমাধান : চালাঘরের ভিতরে বায়ুর আয়তন (যখন সেখানে কোনো মানুষ বা যন্ত্রপাতি ছিল না) হল আয়তঘনকের ভিতরে এবং অর্ধচোঙের ভিতরের বায়ুর আয়তনের সমষ্টির সমান।

এখন, আয়তঘনকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 15 মি, 7 মি এবং 8 মি।

আবার, অর্ধচোঙের ব্যাস 7 মি এবং উচ্চতা 15 মি।

সুতরাং, নির্ণেয় আয়তন $=$ আয়তঘনকের আয়তন $+ \frac{1}{2} \times$ চোঙের আয়তন

$$= \left[15 \times 7 \times 8 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15\right] \text{মি}^3 = 1128.75 \text{ মি}^3$$

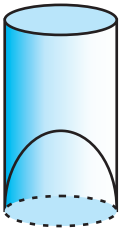
তারপর, যন্ত্রপাতি দ্বারা দখলকৃত মোট জায়গা $= 300$ মি^{3}

এবং কর্মীদের দ্বারা দখলকৃত মোট জায়গা $= 20 \times 0.08$ মি^{3} $= 1.6$ মি^{3}

সুতরাং, বায়ুর আয়তন, যখন সেখানে যন্ত্রপাতি এবং কর্মীরা ছিল

$$= 1128.75 - (300.00 + 1.60) = 827.15 \text{ মি}^3$$

উদাহরণ 6 : একজন রস (juice) বিক্রেতা তার গ্রাহকদের মধ্যে চিত্র 13.13-এ প্রদর্শিত গ্লাসের মাধ্যমে পরিবেশন করে থাকেন। চোঙাকার গ্লাসের অভ্যন্তরীণ ব্যাস ছিল 5 সেমি, কিন্তু গ্লাসটির তলদেশ উত্তোলিত (raised) অর্ধগোলাকৃতির ছিল যা গ্লাসটির ধারণ ক্ষমতা হ্রাস করে। গ্লাসটির উচ্চতা 10 সেমি হলে, গ্লাসটির আপাত ধারণ ক্ষমতা এবং প্রকৃত ধারণ ক্ষমতা নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = 3.14$)



চিত্র 13.13

সমাধান : যেহেতু, গ্লাসের ভেতরের ব্যাস $= 5$ সেমি এবং উচ্চতা $= 10$ সেমি,

গ্লাসের আপাত ধারণক্ষমতা $= \pi r^2 h$

$$= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \text{ সেমি}^3 = 196.25 \text{ সেমি}^3$$

কিন্তু গ্লাসের প্রকৃত ধারণ ক্ষমতা গ্লাসের ভূমিতে থাকা অর্ধগোলাকৃতি আয়তনের জন্য কমে যায়।

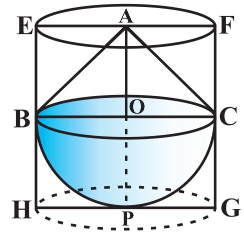
অর্থাৎ, এটির আয়তন কমবে $\frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5$ সেমি^{3} $= 32.71$ সেমি^{3}

সুতরাং, গ্লাসটির প্রকৃত ধারণ ক্ষমতা $=$ গ্লাসটির আপাত ধারণ ক্ষমতা $-$ অর্ধগোলকের আয়তন

$$= (196.25 - 32.71) \text{ সেমি}^3$$

$$= 163.54 \text{ সেমি}^3$$

উদাহরণ 7 : একটি নিরেট খেলনার নীচের অংশ অর্ধগোলাকার এবং উপরের অংশ লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু আকৃতির। শঙ্কুর উচ্চতা 2 সেমি এবং ভূমির ব্যাস 4 সেমি। খেলনাটির আয়তন নির্ণয় করো। যদি খেলনাটি একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ দ্বারা পরিবেষ্টিত হয়, তবে চোঙ এবং খেলনাটির আয়তনের পার্থক্য নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = 3.14$)



চিত্র 13.14

সমাধান : ধরো, অর্ধগোলাকার অংশটি হল BPC এবং ABC হল অর্ধগোলাকার ভূমির ওপর দণ্ডায়মান শঙ্কু (চিত্র 13.14 দেখো) অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধ BO (যা শঙ্কুর ব্যাসার্ধ) $= \frac{1}{2} \times 4$ সেমি $= 2$ সেমি.

সুতরাং, খেলনাটির আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \left[\frac{2}{3} \times 3.14 \times (2)^3 + \frac{1}{3} \times 3.14 \times (2)^2 \times 2\right]$ সেমি$^3 = 25.12$ সেমি^{3}

এখন, মনে করো লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ EFGH প্রদত্ত নিরেট বস্তুকে পরিবেষ্টিত করেছে। লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ $=$ HP $=$ BO $= 2$ সেমি, এবং এর উচ্চতা হল

EH $=$ AO $+$ OP $= (2 + 2)$ সেমি $= 4$ সেমি

সুতরাং, নির্ণেয় আয়তন $=$ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন $-$ খেলনার আয়তন

$= (3.14 \times 2^2 \times 4 - 25.12)$ সেমি^{3}

$= 25.12$ সেমি^{3}

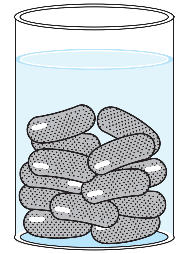
অতএব, দুটি আয়তনের নির্ণেয় পার্থক্য $= 25.12$ সেমি^{3}।

অনুশীলনী 13.2

উল্লেখ না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো।

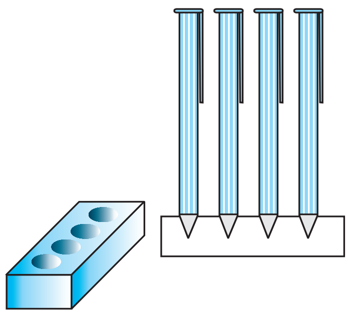
1. অর্ধগোলকের উপর দণ্ডায়মান শঙ্কু আকৃতির একটি নিরেট বস্তু, যাদের প্রত্যেকের ব্যাসার্ধ 1 সেমি এর সমান এবং শঙ্কুর উচ্চতা তার ব্যাসার্ধের সমান। π-এর মাধ্যমে নিরেট বস্তুর আয়তন নির্ণয় করো।

2. একজন ইঞ্জিনিয়ারিং-এর ছাত্র রাসেলকে একটি চোঙের দুই প্রান্তে দুটি শঙ্কুকে একটি পাতলা অ্যালুমিনিয়ামের পাত দিয়ে জোড়া লাগিয়ে একটি মডেল তৈরি করতে বলা হয়েছিল। মডেলটির ব্যাস 3 সেমি এবং এর দৈর্ঘ্য হল 12 সেমি। যদি প্রতিটি শঙ্কু 2 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট হয়, তবে রাসেলের দ্বারা নির্মিত মডেলটির ধারণকৃত বায়ুর আয়তন নির্ণয় করো। (ধরে নাও, মডেলটির বর্হিমাত্রা এবং অর্ন্তমাত্রা প্রায় একই।)



চিত্র 13.15

3. একটি *গোলাব জামুনের তার* আয়তনের 30% চিনির রস আছে। 45টি *গোলাব জামুনে* কী পরিমাণ চিনির রস আছে তা আসন্ন মানে নির্ণয় করো, প্রতিটির আকৃতি দুই প্রান্ত অর্ধগোলাকার বিশিষ্ট একটি চোঙের ন্যায়, যার দৈর্ঘ্য 5 সেমি এবং ব্যাস 2.8 সেমি (চিত্র13.15 দেখো)।
4. কাঠের তৈরি আয়তঘনাকৃতি একটি কলমদানি যার মধ্যে কলম ধারণের জন্য 4টি শঙ্কু আকৃতির গর্ত আছে। আয়তঘনের মাত্রাগুলো হল 15 সেমি × 10 সেমি × 3.5 সেমি। প্রতিটি গর্তের ব্যাসার্ধ হল 0.5 সেমি এবং গভীরতা হল 1.4 সেমি। সমগ্র কলমদানিতে কাঠের আয়তন নির্ণয় করো (চিত্র 13.16 দেখো)।

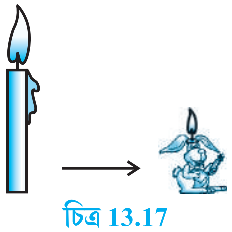


চিত্র 13.16

5. একটি উল্টানো শঙ্কু আকৃতির পাত্রের উচ্চতা 8 সেমি এবং উপরের খোলা মুখের ব্যাসার্ধ 5 সেমি। পাত্রটি জল দিয়ে কানায় কানায় পরিপূর্ণ। যখন পাত্রটিতে 0.5 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কয়েকটি গোলকাকৃতি সীসার মার্বেল ফেলা হল, তখন $\frac{1}{4}$ অংশ জল উপচে পড়ে গেল। পাত্রটিতে ফেলা সীসার মার্বেলের সংখ্যা নির্ণয় করো।
6. একটি নিরেট লোহার খুঁটি, যা 220 সেমি উচ্চতা ও 24 সেমি ভূমির ব্যাসবিশিষ্ট একটি চোঙের উপর দণ্ডায়মান আরেকটি 60 সেমি উচ্চতা ও 8 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট চোঙ নিয়ে গঠিত। খুঁটিটির ভর নির্ণয় করো, দেওয়া আছে 1 সেমি^{3} লোহার আনুমানিক ভর 8 গ্রাম। ($\pi = 3.14$ ব্যবহার করো)
7. 60 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি অর্ধগোলক এবং এর উপর দণ্ডায়মান 120 সেমি উচ্চতা ও 60 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নিয়ে গঠিত একটি নিরেট বস্তুকে জলপূর্ণ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙে খাড়াভাবে রাখা হল যাতে এটি চোঙের তলদেশ স্পর্শ করে। চোঙে অবশিষ্ট জলের আয়তন নির্ণয় করো, যদি চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ 60 সেমি এবং উচ্চতা 180 সেমি হয়।
8. 8 সেমি দীর্ঘ এবং 2 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট চোঙাকৃতি গলাযুক্ত একটি গোলাকার কাচের পাত্রের ব্যাস 8.5 সেমি। এতে যে পরিমাণ জল ধরে তা পরিমাপ করে একজন শিক্ষার্থী দেখল তার পরিমাপ 345 সেমি^{3}। উপরের পরিমাপগুলো অভ্যন্তরীণ পরিমাপ ধরে, সে সঠিক কিনা যাচাই করো (ধরো π = 3.14)।

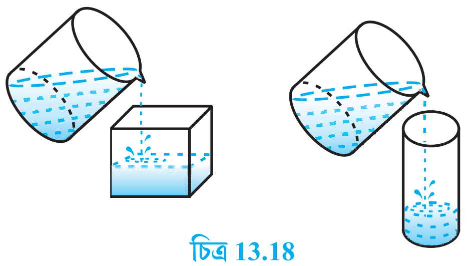
13.4 নিরেট বস্তুর এক আকৃতি থেকে অন্য আকৃতিতে রূপান্তর (Conversion of Solid from One Shape to Another)

আমরা নিশ্চিত যে, তোমরা মোমবাতি দেখেছ। সাধারণত, এদের আকৃতি একটি চোঙের মত। তোমরা এও দেখেছ যে কিছু মোমবাতির আকৃতি একটি পশুর মত (চিত্র 13.17 দেখো)।



চিত্র 13.17

এরা কীভাবে তৈরি ? যদি তোমরা যে-কোনো বিশেষ আকৃতির একটি মোমবাতি চাও, তবে তোমাদেরকে একটি ধাতব পাত্রে গালাকে উত্তপ্ত করতে হবে যতক্ষণ না পর্যন্ত এটি সম্পূর্ণরূপে তরলে পরিণত হয়। তারপর তোমরা যে আকৃতির মোমাবাতি চাও সেইরকম আকৃতির পাত্রটিকে ঐ তরল দ্বারা ভর্তি করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ, একটি নিরেট চোঙ আকৃতির মোমবাতি নিয়ে এটিকে গলাও এবং একটি খরগোশ আকৃতি বিশিষ্ট পাত্রে গলানো মোমটিকে ঢেলে সম্পূর্ণরূপে ভর্তি করো। ঠান্ডা হওয়ার পর তোমরা খরগোশ আকৃতির একটি মোমবাতি পাবে। নতুন মোমবাতির আয়তন ও পূর্বের মোমবাতির আয়তন একই হবে। এই বিষয় আমাদের তখনি মনে রাখতে হবে যখন আমরা একটি আকৃতি থেকে অপর আকৃতিতে রূপান্তর করতে চাই, অথবা যখন একটি নির্দিষ্ট আকৃতির পাত্র তরলে পূর্ণ থাকে এটিকে ভিন্ন আকৃতি বা আকারের পাত্রে ঢালা হয় যা তোমরা চিত্র 13.18-এ দেখতে পাচ্ছ।



চিত্র 13.18

উপরের যা আলোচনা হয়েছে তা বোঝার জন্য চলো আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 8: মডেল তৈরির কাদা দিয়ে একটি 24 সেমি উচ্চতা এবং 6 সেমি ভূমির ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি শঙ্কু তৈরি করা হল। একটি শিশু এটিকে একটি গোলকে পরিবর্তিত করল। গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

সমাধান : শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ সেমি^{3}

যদি গোলকের ব্যাসার্ধ r হয়, তবে এটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$.

যেহেতু, শঙ্কু এবং গোলক তৈরির জন্য কাদার আয়তন একই, তাই

$$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

অর্থাৎ, $r^3 = 3 \times 3 \times 24 = 3^3 \times 2^3$

সুতরাং, $r = 3 \times 2 = 6$

অতএব, গোলকের ব্যাসার্ধ হল 6 সেমি।

উদাহরণ 9 : সেলভির ঘরের ছাদে একটি চোঙাকৃতি ট্যাংক আছে। এটিকে আয়তঘনকাকৃতি ভূগর্ভস্থ একটি ট্যাঙ্ক হতে পাম্প দ্বারা জলপূর্ণ করা হল। ভূগর্ভস্থ আয়তঘনের মাত্রাসমূহ 1.57 মি × 1.44 মি × 95সেমি। ছাদের ট্যাংকের ভূমির ব্যাসার্ধ 60 সেমি এবং উচ্চতা 95 সেমি। জলপূর্ণ ভূগর্ভস্থ ট্যাঙ্কের জল দ্বারা ছাদের ট্যাংকটিকে সম্পূর্ণরূপে ভর্তি করার পর, ভূনিম্নস্থ ট্যাংকের অবশিষ্ট জলের উচ্চতা নির্ণয় করো। ট্যাঙ্কের ধারণ ক্ষমতার সঙ্গে ভূগর্ভস্থ ট্যাংকের ধারণ ক্ষমতার তুলনা করো। ($\pi = 3.14$ ব্যবহার করো)

সমাধান : ঘরের ছাদে অবস্থানরত ট্যাংকে জলের আয়তন ভূগর্ভস্থ ট্যাংক হতে অপসারিত জলের আয়তনের সমান।

এখন, ঘরের ছাদের ট্যাংকে (চোঙ) জলের আয়তন $= \pi r^2 h = 3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95$ মি^{3}

সম্পূর্ণ ভর্তি ভূগর্ভস্থ আয়তঘনকাকৃতি ট্যাংকের আয়তন $= l \times b \times h = 1.57 \times 1.44 \times 0.95$ মি^{3}

ছাদের ট্যাংকটিকে ভর্তি করার পর ভূগর্ভস্থ ট্যাংকে অবশিষ্ট জলের আয়তন

$= [(1.57 \times 1.44 \times 0.95) - (3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95)]$ মি^{3} $= (1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2)$ মি^{3}

সুতরাং, ভূগর্ভস্থ ট্যাংকে অবশিষ্ট জলের উচ্চতা $= \dfrac{\text{ভূগর্ভস্থ ট্যাংকের অবশিষ্ট জলের আয়তন}}{l \times b}$

$= \dfrac{1.57 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95 \times 2}{1.57 \times 1.44}$ মি

$= 0.475$ মি $= 47.5$ সেমি

আবার, $\dfrac{\text{ছাদের ট্যাংকের ধারণক্ষমতা}}{\text{ভূগর্ভস্থ ট্যাংকের ধারণক্ষমতা}} = \dfrac{3.14 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.95}{1.57 \times 1.44 \times 0.95} = \dfrac{1}{2}$

অতএব, ঘরের ছাদের ট্যাংকের ধারণক্ষমতা, ভূগর্ভস্থ ট্যাংকের ধারণ ক্ষমতার অর্ধেক।

উদাহরণ 10 : 1 সেমি ব্যাস এবং 8 সেমি দীর্ঘ একটি তামার দণ্ডকে সমবেধ বিশিষ্ট 18 মি দৈর্ঘ্যের একটি তারে পরিণত করা হল। তারের বেধ নির্ণয় করো।

সমাধান : দণ্ডের আয়তন $= \pi \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \times 8$ সেমি^{3} $= 2\pi$ সেমি^{3}

সম আয়তনের নতুন তারের দৈর্ঘ্য = 18 মি = 1800 সেমি

যদি তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ r (সেমি এককে) হয়, তবে এর আয়তন $= \pi \times r^2 \times 1800$ সেমি^{3}

সুতরাং, $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

অর্থাৎ, $r^2 = \dfrac{1}{900}$

অর্থাৎ, $r = \dfrac{1}{30}$

সুতরাং, তারের প্রস্থচ্ছেদের ব্যাস, অর্থাৎ তারের বেধ হল $\dfrac{1}{15}$ সেমি, অর্থাৎ, 0.67 মিমি (আসন্ন)।

উদাহরণ 11 : একটি জলপূর্ণ অর্ধগোলকাকৃতি ট্যাংক একটি নল দিয়ে $3\frac{4}{7}$ লিটার প্রতি সেকেন্ড হারে খালি হচ্ছে। যদি নলটির ব্যাস 3 মিটার হয়, তবে ট্যাংকটিকে অর্ধেক খালি করতে এটি কত সময় লাগবে? ($\pi = \dfrac{22}{7}$ ধরো)

সমাধান : অর্ধগোলকাকৃতি ট্যাংকের ব্যাসার্ধ $= \frac{3}{2}$ মি।

$$\text{ট্যাংকের আয়তন} = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \text{ মি}^3 = \frac{99}{14} \text{ মি}^3$$

সুতরাং,

$$\text{খালি হওয়া জলের আয়তন} = \frac{1}{2} \times \frac{99}{14} \text{ মি}^3 = \frac{99}{28} \times 1000 \text{ লিটার}$$

$$= \frac{99000}{28} \text{ লিটার}$$

যেহেতু, 1 সেকেন্ডে $\frac{25}{7}$ লিটার জল খালি হয়, সুতরাং $\frac{99000}{28}$ লিটার জল খালি হতে সময় লাগে $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ সেকেন্ড অর্থাৎ, 16.5 মিনিট।

অনুশীলনী 13.3

উল্লেখ না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরো।

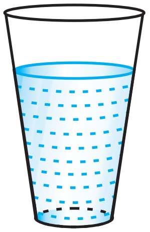
1. 4.2 সেমি ব্যাসার্ধের একটি ধাতব গোলককে গলিয়ে একটি 6 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট চোঙে পরিণত করা হল। চোঙের উচ্চতা নির্ণয় করো।
2. 6 সেমি, 8 সেমি এবং 10 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট ধাতব গোলক তিনটিকে গলিয়ে নতুন একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। নতুন গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।
3. 20 মিটার গভীর এবং 7 মিটার ব্যাসের একটি কুয়ো খনন করে যে মাটি তোলা হল তা দ্বারা একটি 22 মিটার × 14 মিটার মাপের মঞ্চ (platform) তৈরি করা হল। মঞ্চটির উচ্চতা নির্ণয় করো।
4. 14 মিটার গভীর এবং 3 মিটার ব্যাসের একটি কুয়ো খনন করে যে মাটি তোলা হল তা এর চারিদিকে ছড়িয়ে 4 মিটার প্রশস্ত একটি বৃত্তাকার বলয় আকৃতি বাঁধ (embankment) তৈরি করা হল। বাঁধের উচ্চতা নির্ণয় করো।
5. 12 সেমি ব্যাস এবং 15 সেমি উচ্চতাযুক্ত একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙাকৃতি পাত্র আইসক্রিম দিয়ে ভর্তি করা হল। 12 সেমি উচ্চতা এবং 6 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট কিছু সংখ্যক শঙ্কু আইসক্রিম দ্বারা ভর্তি করা হল, যাদের উপরিভাগ অর্ধগোলাকৃতি। আইসক্রিম দ্বারা ভর্তি এরকম শঙ্কুর সংখ্যা নির্ণয় করো।
6. 1.75 সেমি ব্যাস এবং 2 মিমি বেধবিশিষ্ট কতগুলো রূপার মুদ্রাকে গলিয়ে 5.5 সেমি × 10 সেমি × 3.5 সেমি মাত্রার একটি আয়তঘনকে পরিণত করা যায় তা নির্ণয় করো।
7. 32 সেমি উচ্চ এবং 18 সেমি ভূমির ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি বালতি বালি দিয়ে ভর্তি করা হয়। এই বালতিটিকে ভূমির উপর খালি করা হয় এবং একটি শঙ্কু আকৃতির বালির স্তূপ গঠন করা হয়। যদি শঙ্কু আকৃতির বালির স্তূপের উচ্চতা 24 সেমি হয়, তবে স্তূপটির ব্যাসার্ধ এবং তির্যক উচ্চতা নির্ণয় করো।

8. 6 মিটার প্রশস্ত এবং 1.5 মিটার গভীরতা বিশিষ্ট একটি খাল (canal) দিয়ে 10 কিমি/ঘণ্টা বেগে জল প্রবাহিত হচ্ছে। 30 মিনিটে এটি কী পরিমাণ জায়গায় জলসেচ করতে পারবে, যদি 8 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট স্থির জলের প্রয়োজন হয়?

9. একজন কৃষক 20 সেমি অন্তর্ব্যাসযুক্ত একটি নল তার জমিতে থাকা একটি চোঙাকৃতি ট্যাংকের সঙ্গো যুক্ত করেছে, যার ব্যাস 10 মিটার এবং গভীরতা 2 মিটার। যদি নলটির জলপ্রবাহের হার 3 কিমি/ঘণ্টা হয়, তবে ট্যাংকটি সম্পূর্ণ জলভর্তি হতে কত সময় লাগবে?

13.5 শীর্ষবিহীন শঙ্কু (Frustum of a Cone)

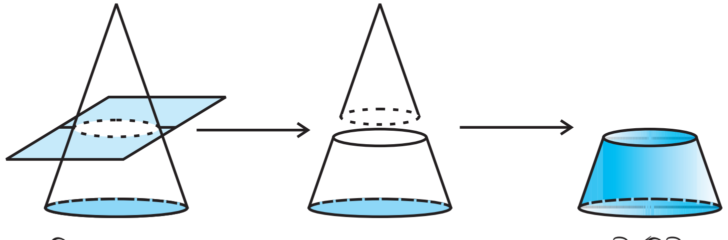
13.2 অনুচ্ছেদে, আমরা যেসব বস্তুকে লক্ষ করেছি সেগুলো দুটি নিরেট বস্তুর একত্রে সংযোগের ফলে তৈরি হয়েছে। চলো এখন আমরা এটি থেকে আলাদা কিছু করি। আমরা একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু নেব এবং এর একটি অংশ সরিয়ে দেব। এটি করার জন্য অনেকগুলো উপায় আছে। কিন্তু আমরা একটি বিশেষ যে ক্ষেত্রে আগ্রহী সেটি হল প্রদত্ত শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা শঙ্কুটিকে কেটে ছোটো লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুটি তুলে নেওয়া। তোমরা অবশ্যই লক্ষ করেছ যে, সাধারণত জল পান করার ব্যবহৃত গ্লাসগুলো (tumblers) হল এরকম আকৃতির (চিত্র 13.19 দেখো)



চিত্র 13.19

কার্যকলাপ 1 : কিছু কাদা, অথবা এরকম জাতীয় অন্য যে-কোনো পদার্থ (যেমন-নরম প্লাস্টিক ইত্যাদি) নাও এবং একটি শঙ্কু গঠন করো। ছুরি দিয়ে এটিকে তার ভূমির সমান্তরাল করে কেটে নাও। ছোটো শঙ্কুটিকে তুলে নাও। তাহলে তোমার কাছে কী অবশিষ্ট রইল? তোমার কাছে থাকা অবশিষ্ট নিরেট অংশটিই হল *শীর্ষবিহীন* শঙ্কু (*frustum* of the cone)। তোমরা দেখতে পাবে যে, এর ভিন্ন ব্যাসার্ধযুক্ত দুটি বৃত্তাকার প্রান্ত আছে।

সুতরাং, একটি শঙ্কু নিয়ে যখন আমরা এটিকে তার ভূমির সমান্তরাল বরাবর একটি সমতল দ্বারা কাটি (চিত্র 13.20 দেখো) এবং সমতলের একদিকে গঠিত শঙ্কুটিকে তুলে নেওয়ার পর এখন সমতলের অপরদিকে যে অংশটি অবশিষ্ট থাকে, তাকেই **শীর্ষবিহীন শঙ্কু (frustum* of the cone)** বলা হয়।

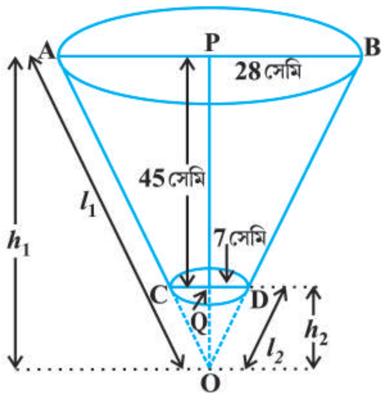


চিত্র 13.20

*'Frustum' হল একটি ল্যাটিন শব্দ যার অর্থ 'piece cut off' এবং এর বহুবচন হল 'frusta'।

কীভাবে আমরা একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করতে পারি? চলো আমরা একটি উদাহরণের মাধ্যমে আলোচনা করি।

উদাহরণ 12 : একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর প্রান্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ 28 সেমি এবং 7 সেমি এবং এর উচ্চতা 45 সেমি (চিত্র 13.21 দেখো)। এটির আয়তন, বক্রতলের ক্ষেত্রফল এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.21

সমাধান : শীর্ষবিহীন শঙ্কুটিকে দুটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু OAB এবং OCD -এর পার্থক্যরূপে দেখানো হয়েছে। (চিত্র 13.21 দেখো) মনে করো, OAB শঙ্কুর উচ্চতা (সেমি-এ) h_1 এবং তির্যক উচ্চতা l_1, অর্থাৎ, $OP = h_1$ এবং $OA = OB = l_1$। আবার, মনে করো, OCD শঙ্কুর উচ্চতা h_2 এবং তির্যক উচ্চতা l_2।

দেওয়া আছে, $r_1 = 28$ সেমি, $r_2 = 7$ সেমি

এবং শীর্ষবিহীন শঙ্কুর উচ্চতা $(h) = 45$ সেমি।

আবার, $$h_1 = 45 + h_2 \qquad (1)$$

আমাদের প্রথমে OAB এবং OCD শঙ্কু দুটির উচ্চতা যথাক্রমে h_1 এবং h_2 নির্ণয় করা দরকার।

যেহেতু, ত্রিভুজ OPB এবং ত্রিভুজ OQD পরস্পর সদৃশ (কেন?), সুতরাং আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{28}{7} = \frac{4}{1} \qquad (2)$$

(1) নং এবং (2) নং সমীকরণ থেকে, আমরা পাই $h_2 = 15$ এবং $h_1 = 60$।

এখন, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন

$$= \text{OAB শঙ্কুর আয়তন} - \text{OCD শঙ্কুর আয়তন}$$

$$= \left[\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (28)^2 \times (60) - \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times (15)\right] \text{সেমি}^3 = 48510 \text{ সেমি}^3$$

OCD এবং OAB শঙ্কুগুলোর তির্যক উচ্চতা l_2 এবং l_1 হল যথাক্রমে,

$$l_2 = \sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 16.55 \text{ সেমি (প্রায়)}$$

$$l_1 = \sqrt{(28)^2 + (60)^2} = 4\sqrt{(7)^2 + (15)^2} = 4 \times 16.55 = 66.20 \text{ সেমি}$$

অতএব, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 l_2$

$$= \frac{22}{7}(28)(66.20) - \frac{22}{7}(7)(16.55) = 5461.5 \text{ সেমি}^2$$

এখন, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$$= \text{বক্রতলের ক্ষেত্রফল} + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$= 5461.5 \text{ সেমি}^2 + \frac{22}{7}(28)^2 \text{ সেমি}^2 + \frac{22}{7}(7)^2 \text{ সেমি}^2$$

$$= 5461.5 \text{ সেমি}^2 + 2464 \text{ সেমি}^2 + 154 \text{ সেমি}^2 = 8079.5 \text{ সেমি}^2$$

মনে করো, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর উচ্চতা h , তির্যক উচ্চতা l এবং এর দুই প্রান্তের ব্যাসার্ধ r_1 এবং r_2 $(r_1 > r_2)$ । তাহলে আমরা সূত্রের সাহায্যে শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন, বক্রতলের ক্ষেত্রফল এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল সরাসরি নির্ণয় করতে পারি যা নিম্নে দেওয়া হল -

(i) *শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন* $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$.

(ii) *শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল* $= \pi(r_1 + r_2)l$

যেখানে $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ ।

(iii) *শীর্ষবিহীন শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল* $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$,

যেখানে $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ ।

ত্রিভুজের সদৃশ্যতার ধারণা ব্যবহার করে এই সূত্রগুলো নির্ণয় করা যেতে পারে কিন্তু আমরা এখানে নির্ণয় করার ধাপগুলো দেখাচ্ছি না।

চলো আমরা এই সূত্রগুলো ব্যবহার করে উদাহরণ 12 সমাধান করি :

(i) শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 45 \times \left[(28)^2 + (7)^2 + (28)(7)\right] \text{ সেমি}^3$$

$$= 48510 \text{ সেমি}^3$$

(ii) আমরা জানি, $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{(45)^2 + (28-7)^2}$ সেমি

$= 3\sqrt{(15)^2 + (7)^2} = 49.65$ সেমি

সুতরাং, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi(r_1 + r_2)\,l = \frac{22}{7}(28+7)(49.65) = 5461.5$ সেমি^{2}

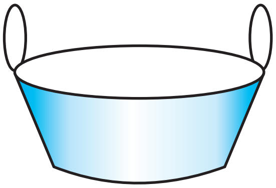
(iii) শীর্ষবিহীন শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$= \left[5461.5 + \frac{22}{7}(28)^2 + \frac{22}{7}(7)^2\right]$ সেমি$^2 = 8079.5$ সেমি^{2}

চলো আমরা এই সূত্রগুলো কিছু উদাহরণে প্রয়োগ করি।

উদাহরণ 13 : রঘুরাম এবং তার স্ত্রী ভানুমতি আখের রস হতে গুড় তৈরি করছে। তারা আখের রসকে প্রক্রিয়াজাতকরণের মাধ্যমে গুড় (molasses) তৈরি করে শীর্ষবিহীন শঙ্কু আকৃতির ছাঁচে ঢালে, যার দুই বৃত্তাকার তলের ব্যাস 30 সেমি এবং 35 সেমি এবং লম্ব উচ্চতা 14 সেমি (চিত্র 13.22 দেখো)। যদি প্রতি সেমি^{3} গুড়ের ভর প্রায় 1.2 গ্রাম হয়, তবে প্রত্যেক সাঁচে ঢালা গুড়ের ভর নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.22

সমাধান : যেহেতু ছাঁচের আকৃতি শীর্ষবিহীন শঙ্কু আকৃতির, তাই এটিতে ঢালা গুড়ের পরিমাণ (আয়তন) =

$\frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$,

যেখানে r_1 হল বৃহত্তর ভূমির ব্যাসার্ধ এবং r_2 হল ক্ষুদ্রতর ভূমির ব্যাসার্ধ।

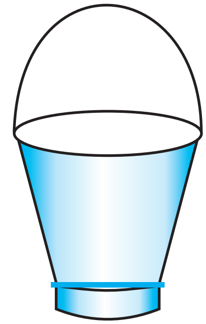
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14\left[\left(\frac{35}{2}\right)^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2} \times \frac{30}{2}\right)\right] \text{সেমি}^3 = 11641.7 \text{ সেমি}^3 \text{ ।}$$

এখানে দেওয়া আছে যে 1 সেমি^{3} গুড়ের ভর 1.2 গ্রাম।

সুতরাং, প্রত্যেক সাঁচে ঢালা গুড়ের ভর $= (11641.7 \times 1.2)$ গ্রাম।

$= 13970.04$ গ্রাম $= 13.97$ কিগ্রা $= 14$ কিগ্রা (প্রায়)।

উদাহরণ 14 : শীর্ষবিহীন শঙ্কু আকৃতির একটি খোলা ধাতব বালতি, যা একই ধাতব পাত দ্বারা তৈরি খোলা চোঙাকৃতি ভূমির উপর বসানো (চিত্র 13.23 দেখো)। বালতির দুই বৃত্তাকার প্রান্তের ব্যাসদ্বয় 45 সেমি এবং 25 সেমি, বালতির মোট লম্ব উচ্চতা 40 সেমি এবং যার চোঙাকার ভূমির উচ্চতা 6 সেমি। বালতি তৈরি করতে ব্যবহৃত ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, এখানে আমরা বালতির হাতলকে হিসাবে যুক্ত করব না। এছাড়া বালতিতে যে আয়তনের জলধারণ করে তাও নির্ণয় করো। (ধরো, $\pi = \frac{22}{7}$)



চিত্র 13.23

সমাধান : বালতির মোট উচ্চতা $= 40$ সেমি, যাতে ভূমির উচ্চতা যুক্ত আছে। সুতরাং, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর উচ্চতা $= (40 - 6)$ সেমি $= 34$ সেমি।

অতএব, শীর্ষবিহীন শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

যেখানে $r_1 = 22.5$ সেমি, $r_2 = 12.5$ সেমি এবং $h = 34$ সেমি।

সুতরাং, $l = \sqrt{34^2 + (22.5 - 12.5)^2}$ সেমি

$= \sqrt{34^2 + 10^2} = 35.44$ সেমি

ব্যবহৃত ধাতব পাতের ক্ষেত্রফল = শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল

\+ বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল

\+ চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= [\pi \times 35.44\,(22.5 + 12.5) + \pi \times (12.5)^2$

$+ 2\pi \times 12.5 \times 6]$ সেমি^{2}

$= \frac{22}{7}(1240.4 + 156.25 + 150)$ সেমি^{2}

$= 4860.9$ সেমি^{2}

এখন, যে পরিমাণ জল বালতিটি ধারণ করতে পারে তার আয়তন (বালতিটির ধারণ ক্ষমতা হিসাবেও পরিচিত)

$$= \frac{\pi \times h}{3} \times (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + 22.5 \times 12.5] \text{ সেমি}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{34}{3} \times 943.75 = 33615.48 \text{ সেমি}^3$$

$= 33.62$ লিটার (আসন্ন)।

অনুশীলনী 13.4

উল্লেখ না থাকলে $\pi = \frac{22}{7}$ ব্যবহার করো।

1. একটি পানীয় গ্লাসের আকৃতি হল 14 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কু। এটির দুটি বৃত্তাকার প্রান্তীয় তলের ব্যাস 4 সেমি এবং 2 সেমি। গ্লাসটির ধারণক্ষমতা নির্ণয় করো।
2. একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 4 সেমি এবং এটির বৃত্তাকার প্রান্তীয় তলগুলোর পরিসীমা (পরিধি) 18 সেমি এবং 6 সেমি। শীর্ষবিহীন শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. একটি *ফেজ* (*fez*), তুর্কিদের ব্যবহৃত টুপি, এর আকৃতি একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কু-এর অনুরূপ (চিত্র 13.24 দেখো)। যদি এর খোলা প্রান্তের ব্যাসার্ধ 10 সেমি, উপরের তলের ব্যাসার্ধ 4 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 15 সেমি হয়, তবে এটি তৈরি করার জন্য ব্যবহৃত পদার্থের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

চিত্র 13.24

4. একটি ধাতব পাত দিয়ে তৈরি উপর দিক খোলা একটি পাত্রের আকৃতি একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর মতো, যার উচ্চতা 16 সেমি এবং নিম্ন ও উপরের প্রান্তীয় তলগুলোর ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 8 সেমি এবং 20 সেমি। পাত্রটিকে যে পরিমাণ দুধ সম্পূর্ণরূপে ভর্তি করতে পারে প্রতি লিটার 20 টাকা হারে সেই পরিমাণ দুধের মূল্য নির্ণয় করো। পাত্রটি তৈরি করতে ব্যবহৃত ধাতব পাতের মূল্যও নির্ণয় করো, যদি প্রতি 100 বর্গসেমি ধাতব পাতের মূল্য 8 টাকা হয়। (ধরো, $\pi = 3.14$)

5. 20 সেমি উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার ধাতব শঙ্কুর শীর্ষকোণ $60°$ । শঙ্কুটিকে তার উচ্চতার মধ্যবিন্দু দিয়ে ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা দুটি অংশে বিভক্ত করা হল। এভাবে পাওয়া শীর্ষবিহীন শঙ্কুটিকে যদি $\frac{1}{16}$ সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি তারে পরিণত করা হয়, তবে তারটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

অনুশীলনী 13.5 (ঐচ্ছিক)*

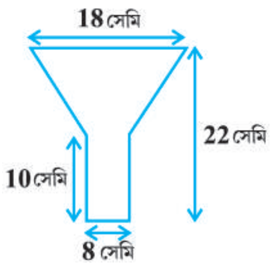
1. 3 মিমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি তামার তার দিয়ে 12 সেমি দীর্ঘ এবং 10 সেমি ব্যাসবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙকে এমনভাবে চারদিকে জড়িয়ে দেওয়া হয়, যাতে চোঙের বক্রতলটি ঢেকে যায়। তারের দৈর্ঘ্য এবং ভর নির্ণয় করো, মনে করো তামার ঘনত্ব 8.88 গ্রাম প্রতি ঘনসেমি।

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি এবং 4 সেমি (অতিভুজ ব্যতীত)। ত্রিভুজটিকে তার অতিভুজের সাপেক্ষে সম্পূর্ণ ঘোরানো হল। এভাবে গঠিত দ্বি-শঙ্কুটির আয়তন এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (π -এর উপযুক্ত মান পছন্দ করো।)

3. একটি চৌবাচ্চার ভেতরের দিকের পরিমাপ 150 সেমি $\times$ 120 সেমি $\times$ 110 সেমি, যাতে 129600 সেমি^{3} জল আছে। কানায় কানায় জলপূর্ণ না হওয়া পর্যন্ত চৌবাচ্চায় সচ্ছিদ্র ইট রাখা হল। প্রতিটি ইট তার নিজস্ব আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল শোষণ করে। কতগুলো ইট রাখা যেতে পারে যাতে করে চৌবাচ্চার জল উপচে না পড়ে, প্রতিটি ইটের মাত্রা হচ্ছে 22.5 সেমি $\times$ 7.5 সেমি $\times$ 6.5 সেমি ।

4. একটি নির্দিষ্ট মাসের এক পক্ষে (দুই সপ্তাহ) একটি নদী উপত্যকায় 10 সেমি বৃষ্টিপাত হয়েছিল। যদি উপত্যকার ক্ষেত্রফল 7280 কিমি^{2} হয়, তবে দেখাও যে, মোট বৃষ্টিপাতের পরিমাণ ছিল তিনটি নদীর স্বাভাবিক জলের মিলিত জলের প্রায় সমতুল্য, যেখানে প্রতিটি নদী 1072 কিমি দীর্ঘ, 75 মিটার প্রশস্ত এবং 3 মিটার গভীর।

5. টিনের পাত দিয়ে তৈরি একটি তেলের ফানেল 10 সেমি দীর্ঘ চোঙাকার অংশে সংযুক্ত একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কু নিয়ে গঠিত। যদি মোট উচ্চতা 22 সেমি, চোঙাকার অংশের ব্যাস 8 সেমি এবং ফানেলের শীর্ষদেশের ব্যাস 18 সেমি হয়, তবে ফানেলটি তৈরি করতে প্রয়োজনীয় টিনের পাতের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (চিত্র 13.25 দেখো)



চিত্র 13.25

* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ের অন্তর্ভুক্ত নয়।

6. আলোচিত প্রতীক ব্যবহার করে, 13.5 অনুচ্ছেদে তোমাদের দেওয়া একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য সূত্রগুলো প্রতিষ্ঠা করো।

7. আলোচিত প্রতীক ব্যবহার করে, 13.5 অনুচ্ছেদে তোমাদের দেওয়া একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন নির্ণয় করার সূত্রটি প্রতিষ্ঠা করো।

13.6 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. আয়তঘন, শঙ্কু, চোঙ, গোলক এবং অর্ধগোলক নামক মূল ঘনবস্তুগুলোর যে-কোনো দুটির সংযুক্তির ফলে গঠিত বস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা।

2. আয়তঘন, শঙ্কু, চোঙ, গোলক এবং অর্ধগোলকগুলোর যে-কোনো দুটির সংযুক্তির ফলে গঠিত বস্তুসমূহের আয়তন নির্ণয় করা।

3. একটি প্রদত্ত লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুকে এর ভূমির সমান্তরাল একটি সমতল দ্বারা কাটার পর, উপরের ছোটো শঙ্কু আকার অংশটি সরানোর ফলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে *লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর শীর্ষবিহীন শঙ্কু* বলা হয়।

4. শীর্ষবিহীন শঙ্কু সংক্রান্ত সূত্রাবলি হল :

(i) একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2\right)$.

(ii) একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi l(r_1 + r_2)$, যেখানে $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ ।

(iii) একটি শীর্ষবিহীন শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$, যেখানে

h = শীর্ষবিহীন শঙ্কুর উল্লম্ব উচ্চতা, l = শীর্ষবিহীন শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা,

r_1 এবং r_2 হল শীর্ষবিহীন শঙ্কুর প্রান্তীয় তল দুটির ব্যাসার্ধ।

রাশিবিজ্ঞান
(STATISTICS)

14

There are lies, damned lies and statistics.
– by Disraeli

14.1 ভূমিকা

নবম শ্রেণিতে তোমরা প্রদত্ত রাশি তথ্যকে অবিন্যস্ত এবং শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণিবদ্ধ করতে শিখেছ। তোমরা আরও শিখেছ যে প্রদত্ত রাশি তথ্যের চিত্ররূপ, যেমন দণ্ডচিত্র, আয়তলেখ (বিভিন্ন শ্রেণিদৈর্ঘ্য সহযোগে) এবং পরিসংখ্যা বহুভুজ এর লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন কীভাবে করা হয়। যদিও তোমরা অবিন্যস্ত রাশিতথ্যকে সংখ্যাগতভাবে প্রকাশে আরও একধাপ এগিয়ে গেছ, যাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপও বলা হয়। যেমন *মধ্যক, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান*। এই অধ্যায়ে আমরা আরও শিখব কীভাবে এই তিনটি পরিমাপক অর্থাৎ মধ্যক, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মানকে অবিন্যস্ত রাশিতথ্য থেকে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যে রূপান্তর করা হয়। আমরা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন এবং কীভাবে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা আঁকা যায়, যাকে *ওজিব* (*ogives*) বলা হয় তা নিয়ে আলোচনা করব।

14.2 শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যক বা গড়মান (Mean of Grouped Data)

আমরা জানি মধ্যক (অথবা গড়) হল পর্যবেক্ষণের মানগুলির যোগফলকে পর্যবেক্ষণের মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা। মনে করে দেখো নবম শ্রেণিতে তোমরা পড়েছ যে, যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণগুলোর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$ হয়, তবে তা বোঝায় x_1 পর্যবেক্ষণটি f_1 বার আসে; x_2 পর্যবেক্ষণটি f_2 বার আসে ইত্যাদি।

এখন, সবগুলো পর্যবেক্ষণের মানের সমষ্টি $= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n$ এবং পর্যবেক্ষণের সংখ্যা $= f_1 + f_2 + \ldots + f_n$।

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিতথ্যের মধ্যক $\bar{x}$ কে লেখা যায় —

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$

পুনরায় মনে করো, এটিকে আমরা সংক্ষেপে গ্রিক বর্ণ Σ (capital sigma) দিয়ে প্রকাশ করি, যার অর্থ সমষ্টি।

অর্থাৎ, $$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

এটিকে আরও সংক্ষিপ্ত আকারে লেখা যায়, $\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$, এখানে এটি বোঝায় যে, i এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত পরিবর্তিত হয়।

চলো নীচের উদাহরণগুলোর মধ্যক বা গড় মান নির্ণয়ের জন্য এই সূত্রটি প্রয়োগ করি।

উদাহরণ 1 : কোনো একটি বিদ্যালয়ে দশম শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীদের গণিতে 100 নম্বরের মধ্যে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নের সারণিতে দেওয়া হল। শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যক বা গড়মান নির্ণয় করো।

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	10	20	36	40	50	56	60	70	72	80	88	92	95
শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (f_i)	1	1	3	4	3	2	4	4	1	1	2	3	1

সমাধান : পুনরায় মনে করো, গড় নম্বর নির্ণয় করার জন্য আমাদের প্রতিটি x_i কে এর অনুরূপ পরিসংখ্যা f_i দিয়ে গুণ করা প্রয়োজন। সুতরাং, চলো এই গুণফলগুলোকে একটি স্তম্ভে বসাই যা সারণি 14.1-এ দেখানো হয়েছে।

সারণি 14.1

প্রাপ্ত নম্বর (x_i)	**শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (f_i)**	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
মোট	$\Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 1779$

এখন,
$$\overline{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

সুতরাং, প্রাপ্ত নম্বরের গড় মান হল 59.3।

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অধিকাংশ পরিস্থিতিতে রাশিতথ্যগুলো এত বড়ো হয় যে, তা অর্থবহ করার জন্য এদেরকে কতগুলো সরলীকৃত শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যে বিভক্ত করে নেওয়া হয়। তাই আমাদের প্রদত্ত অবিন্যস্ত রাশিতথ্যগুলোকে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যে রূপান্তরিত করা এবং তাদের গড়মান নির্ণয় করার জন্য কিছু নিয়ম বের করা প্রয়োজন।

চলো আমরা উদাহরণ 1 -এ প্রদত্ত অবিন্যস্ত রাশিতথ্যগুলোকে 15 শ্রেণিদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যে পরিবর্তিত করি। মনে রাখবে যে-কোনো পরিসংখ্যাকে প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের অন্তর্ভুক্ত করার সময় যেসব শিক্ষার্থীরা উর্ধ্বসীমায় অবস্থান করে, তাদের পরবর্তী শ্রেণিবিভাগের জন্য বিবেচনা করা হয়, উদাহরণস্বরূপ 4 জন শিক্ষার্থী যারা 40 নম্বর পেয়েছে তাদের 25-40 শ্রেণিভুক্ত না করে 40-55 শ্রেণি বিভাগের জন্য বিবেচনা করা হয়। এই প্রথা অনুসারে চলো আমরা একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের সারণি তৈরি করি (সারণি 14.2 দেখো)।

সারণি 14.2

শ্রেণিবিভাগ	10 - 25	25 - 40	40 - 55	55 - 70	70 - 85	85 - 100
শিক্ষার্থীদের সংখ্যা	2	3	7	6	6	6

এখন, প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের জন্য আমাদের একটি মান দরকার যা সম্পূর্ণ শ্রেণিটির প্রতিনিধিত্ব করবে। *এটি ধরা হয় যে, প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা তার মধ্যমানের চর্তুদিকে কেন্দ্রীভূত হয়।* তাই প্রতিটি শ্রেণির মধ্যমানকে (or *class mark*) ওই শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত পর্যবেক্ষণগুলোর প্রতিনিধি হিসেবে নির্বাচন করা হয়। মনে করো যে, কোনো শ্রেণির মধ্যমান (class mark) আমরা এই শ্রেণির উর্ধ্বসীমা এবং নিম্নসীমার গড় দিয়ে বের করি। অর্থাৎ,

$$\textbf{মধ্যমান} = \frac{\textbf{উর্ধ্বশ্রেণি সীমা + নিম্নশ্রেণি সীমা}}{\mathbf{2}}$$

সারণি 14.2 তে 10-25 শ্রেণিটির মধ্যমান হল $\frac{10+25}{2}$, অর্থাৎ, 17.5। অনুরূপভাবে আমরা অবশিষ্ট শ্রেণির মধ্যমান নির্ণয় করতে পারি। আমরা তাদেরকে সারণি 14.3 তে বসাব। এই মধ্যমানগুলো x_i রূপে কাজ করবে। সাধারণভাবে i -শ্রেণিবিভাগটির জন্য আমরা x_i মধ্যমানের অনুরূপ পরিসংখ্যা f_i পাই। এখন উদাহরণ 1 এর অনুরূপ পদ্ধতিতে গড় মান নির্ণয় করার জন্য আমরা অগ্রসর হব।

সারণি 14.3

শ্রেণিবিভাগ	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$f_i x_i$
10 - 25	2	17.5	35.0
25 - 40	3	32.5	97.5
40 - 55	7	47.5	332.5
55 - 70	6	62.5	375.0
70 - 85	6	77.5	465.0
85 - 100	6	92.5	555.0
মোট	$\Sigma f_i = 30$		$\Sigma f_i x_i = 1860.0$

শেষ স্তম্ভের মানের সমষ্টিরূপে আমরা $\Sigma f_i x_i$ পাই। সুতরাং প্রদত্ত রাশিতথ্যের মধ্যক বা গড় মান $\bar{x}$ হল

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1860.0}{30} = 62$$

মধ্যক বা গড়মান নির্ণয় করার এই নতুন পদ্ধতিকে **প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method)** বলা হয়।

আমরা লক্ষ করেছি যে, সারণি 14.1 এবং 14.3 তে গড়মান নির্ণয় করার জন্য একই রাশিতথ্য এবং সূত্র প্রয়োগ করা হয়েছে কিন্তু প্রাপ্ত ফলাফল ভিন্ন হয়। তুমি কি চিন্তা করতে পারো এরকম কেন হল, এবং কোনটি অধিক সঠিক? এই দুইটি মানের মধ্যে পার্থক্যের কারণ হল সারণি 14.3 হতে প্রাপ্ত মধ্যমান অনুমানিক। এখানে 59.3 হল সঠিক মধ্যমান। যেখানে 62 হল নিকটবর্তী গড়মান।

যখন x_i এবং f_i এর সংখ্যাগত মান বৃহত্তর হয় তখন x_i এবং f_i এর গুণফল বের করা জটিল ও সময় সাপেক্ষ হয়, তাই এই পরিস্থিতিতে চলো আমরা গণনাকে সরল করার একটি পদ্ধতি চিন্তা করি।

আমরা f_i এর কোনো পরিবর্তন করতে পারব না কিন্তু গণনা কার্য সহজ করার জন্য প্রতিটি x_i এর মান ক্ষুদ্রতর সংখ্যায় পরিবর্তন করতে পারি। আমরা কীভাবে এটি করব? প্রত্যেক x_i থেকে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা বিয়োগ করার বিষয়টি কী? চলো এই পদ্ধতিটি প্রয়োগ করি?

এখানে প্রথম ধাপটি হল প্রাপ্ত x_i গুলো হতে যে-কোনো একটিকে কল্পিত গড় (*assumed mean*) রূপে বেছে নেওয়া এবং তাকে 'a' দিয়ে চিহ্নিত করা। আমাদের গণনা কার্যকে আরও সহজ করার জন্য আমরা 'a' কে সেই x_i রূপে নেব যাতে এটি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এর কেন্দ্রস্থ মান হয়। অতএব আমরা $a = 47.5$ অথবা $a = 62.5$ বিবেচনা করতে পারি। চলো আমরা $a = 47.5$ ধরি।

পরবর্তী ধাপটি হল a এবং প্রতিটি x_i এর মধ্যে পার্থক্য d_i নির্ণয় করা। অর্থাৎ প্রতিটি x_i হতে a এর **বিচ্যুতি (deviation)**।

অর্থাৎ, $$d_i = x_i - a = x_i - 47.5$$

তৃতীয় ধাপটি হল d_i এর সাথে অনুরূপ f_i এর গুণফল নির্ণয় করা এবং সকল $f_i d_i$ গুলোর সমষ্টি নির্ণয় করা। গণনাটি সারণি 14.4. এ দেখানো হল।

সারণি 14.4

শ্রেণিবিভাগ	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$d_i = x_i - 47.5$	$f_i d_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–60
25 - 40	3	32.5	–15	–45
40 - 55	7	47.5	0	0
55 - 70	6	62.5	15	90
70 - 85	6	77.5	30	180
85 - 100	6	92.5	45	270
মোট	$\Sigma f_i = 30$			$\Sigma f_i d_i = 435$

সুতরাং, সারণি 14.4 হতে বিচ্যুতি সমূহের গড়, $\bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$ ।

চলো আমরা এখন $\bar{d}$ এবং $\bar{x}$ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি।

যেহেতু d_i নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রতিটি x_i হতে 'a' বিয়োগ করেছিলাম, সেইজন্য গড়মান $\bar{x}$ নির্ণয়ের জন্য আমাদের $\bar{d}$ এর সাথে a কে যোগ করতে হবে। এটিকে নিম্নরূপে গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়:

বিচ্যুতিসমূহের গড় $\quad \bar{d} = \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

সুতরাং,
$$\bar{d} = \frac{\Sigma f_i (x_i - a)}{\Sigma f_i}$$
$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - \frac{\Sigma f_i a}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}$$
$$= \bar{x} - a$$

সুতরাং, $\quad \bar{x} = a + \bar{d}$

অর্থাৎ, $\quad \bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

সারণি 14.4 থেকে a, $\Sigma f_i d_i$ এবং Σf_i এর মান বসিয়ে পাই,

$$\bar{x} = 47.5 + \frac{435}{30} = 47.5 + 14.5 = 62$$

সুতরাং, শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় মান হল 62 ।

উপরের আলোচ্য পদ্ধতিটিকে **কল্পিত গড় পদ্ধতি (Assumed Mean Method)** বলা হয়।

কার্যকলাপ 1 : সারণি 14.3 হতে প্রতিটি x_i কে (অর্থাৎ, 17.5, 32.5, ইত্যাদি) a ধরে গড় বের করো। তুমি কী লক্ষ করলে? তুমি দেখতে পাবে প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত গড়মান সমান হয় অর্থাৎ 62 (কেন?)

সুতরাং আমরা বলতে পারি প্রাপ্ত গড়ের মান বাছাই করা a এর উপর নির্ভর করে না।

লক্ষ করো সারণি 14.4 এর 4 নং স্তম্ভের প্রতিটি মান 15 এর গুণিতক। অতএব আমরা যদি স্তম্ভ 4 এর মানগুলোকে 15 দিয়ে ভাগ করি, তবে আমরা f_i এর সাথে গুণ করার জন্য ক্ষুদ্রতর সংখ্যা পাব। (এখানে প্রতিটি শ্রেণিবিভাগের শ্রেণি দৈর্ঘ্য হল 15)।

সুতরাং, ধরি $u_i = \frac{x_i - a}{h}$, যেখানে a হল কল্পিত গড় এবং h হল শ্রেণি দৈর্ঘ্য।

এখন আমরা এই পদ্ধতিতে u_i নির্ণয় করব এবং পূর্বের মতো করতে থাকব (অর্থাৎ $f_i u_i$ বের করার পর $\Sigma f_i u_i$ বের করো)। ধরি $h = 15$, চলো আমরা সারণি 14.5 তৈরি করি।

সারণি 14.5

শ্রেণিবিভাগ	f_i	x_i	$d_i = x_i - a$	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
10 - 25	2	17.5	–30	–2	–4
25 - 40	3	32.5	–15	–1	–3
40 - 55	7	47.5	0	0	0
55 - 70	6	62.5	15	1	6
70 - 85	6	77.5	30	2	12
85 - 100	6	92.5	45	3	18
মোট	$\Sigma f_i = 30$				$\Sigma f_i u_i = 29$

ধরি,
$$\bar{u} = \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}$$

এখানে, আমরা আবার $\bar{u}$ এবং $\bar{x}$ এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করব।

এখানে, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

সুতরাং, $\bar{u} = \dfrac{\Sigma f_i \dfrac{(x_i - a)}{h}}{\Sigma f_i} = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{\Sigma f_i x_i - a\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - a\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f_i}\right]$$

$$= \frac{1}{h}[\bar{x} - a]$$

সুতরাং, $h\bar{u} = \bar{x} - a$

অর্থাৎ, $\bar{x} = a + h\bar{u}$

তাই, $\bar{x} = a + h\left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right)$

এখন সারণি 14.5 এ $a, h, \Sigma f_i u_i$ এবং Σf_i এর মান বসিয়ে আমরা পাই

$$\bar{x} = 47.5 + 15 \times \left(\frac{29}{30}\right)$$

$$= 47.5 + 14.5 = 62$$

সুতরাং, একজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত গড় নম্বর হল 62 ।

উপরোক্ত আলোচ্য পদ্ধতিকে **ধাপ-বিচ্যুতি (Step-deviation)** পদ্ধতি বলা হয়।

আমরা লক্ষ করেছি :

- যদি প্রত্যেক d_i এর একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে তবে ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যবহার করা অধিক সুবিধাজনক।
- তিনটি পদ্ধতিতে প্রাপ্ত গড় মান সমান।
- কল্পিত গড় পদ্ধতি এবং ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি দুটি প্রত্যক্ষ পদ্ধতিটিরই সরলীকৃত রূপ।
- a এবং h এর মান উপরের প্রদত্ত মানের অনুরূপ নাম হলেও $\bar{x} = a + h\bar{u}$ সূত্রটি সিদ্ধ হয়, যেখানে u_i শূন্য নয়, এরূপ যে-কোনো সংখ্যা এমন যে, $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ ।

চলো আমরা এই পদ্ধতিগুলো অন্য উদাহরণে প্রয়োগ করি।

উদাহরণ 2 : নীচের সারণিতে ভারতের বিভিন্ন রাজ্য ও কেন্দ্রশাসিত অঞ্চলগুলোর (union territories) গ্রামীণ প্রাথমিক বিদ্যালয়গুলোর শিক্ষিকাদের শতকরা বিভাজন দেওয়া হল। এই অনুচ্ছেদে আলোচ্য তিনটি পদ্ধতি প্রয়োগ করে শিক্ষিকাদের শতকরা পরিমাণ নির্ণয় করো :

শিক্ষিকাদের শতকরা হার	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
রাজ্য/ কেন্দ্রশাসিত অঞ্চলের সংখ্যা	6	11	7	4	4	2	1

উৎস : *NCERT দ্বারা সংগৃহীত সপ্তম সর্বভারতীয় বিদ্যালয় শিক্ষা জরিপ (Survey)।*

সমাধান : চলো আমরা প্রতিটি শ্রেণির জন্য মধ্যমান x_i নির্ণয় করি এবং মানগুলো একটি স্তম্ভে রাখি (সারণি 14.6 দেখো)।

সারণি 14.6

শিক্ষিকাদের শতকরা হার	রাজ্য/ কেন্দ্রশাসিত অঞ্চলের সংখ্যা (f_i)	x_i
15 - 25	6	20
25 - 35	11	30
35 - 45	7	40
45 - 55	4	50
55 - 65	4	60
65 - 75	2	70
75 - 85	1	80

এখানে, $a = 50, h = 10$, তখন $d_i = x_i - 50$ এবং $u_i = \dfrac{x_i - 50}{10}$ ।

আমরা এখন d_i এবং u_i নির্ণয় করব এবং সারণি 14.7 এ বসাব।

সারণি 14.7

শিক্ষিকাদের শতকরা হার	রাজ্য/ কেন্দ্র শাসিত অঞ্চলের সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 50$	$u_i = \frac{x_i - 50}{10}$	$f_i x_i$	$f_i d_i$	$f_i u_i$
15 - 25	6	20	–30	–3	120	–180	–18
25 - 35	11	30	–20	–2	330	–220	–22
35 - 45	7	40	–10	–1	280	–70	–7
45 - 55	4	50	0	0	200	0	0
55 - 65	4	60	10	1	240	40	4
65 - 75	2	70	20	2	140	40	4
75 - 85	1	80	30	3	80	30	3
মোট	**35**				**1390**	**–360**	**–36**

উপরের সারণি থেকে আমরা পাই, $\Sigma f_i = 35$, $\Sigma f_i x_i = 1390$,

$\Sigma f_i d_i = -360$, $\Sigma f_i u_i = -36$.

প্রত্যক্ষ পদ্ধতি ব্যবহার করে, $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{1390}{35} = 39.71$

কল্পিত গড় পদ্ধতি ব্যবহার করে,

$$\bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i} = 50 + \frac{(-360)}{35} = 39.71$$

ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যবহার করে,

$$\bar{x} = a + \left(\frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h = 50 + \left(\frac{-36}{35}\right) \times 10 = 39.71$$

সুতরাং, গ্রামাঞ্চলের প্রাথমিক বিদ্যালয়গুলোর শিক্ষিকাদের শতকরা গড় মান হল 39.71 ।

মন্তব্য : তিনটি পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ফল সমান। সুতরাং, বাছাই করা যে পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হবে তা x_i এবং f_i এর সাংখ্যমানের উপর নির্ভর করে। যদি x_i এবং f_i খুবই ছোটো হয় তবে প্রত্যক্ষ পদ্ধতিটি হবে সঠিক বাছাই। যদি x_i এবং f_i এর সংখ্যাগত মান বড়ো হয়, তখন আমরা কল্পিত গড় পদ্ধতি বা ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যবহার করব। যদি শ্রেণি দৈর্ঘ্য অসমান হয় এবং x_i গুলোর মান সংখ্যাগতভাবে বড়ো হয় তখন আমরা সকল d_i গুলোর একটি সুবিধাজনক উৎপাদক h নিয়ে ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি প্রয়োগ করতে পারব।

উদাহরণ 3 : নিম্নে প্রদত্ত বিন্যাসটি হল এক দিবসীয় ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় বোলারদের দ্বারা অর্জিত উইকেটের সংখ্যা। একটি সুবিধাজনক পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রাপ্ত উইকেটের সংখ্যার গড় মান বের করো। এখানে গড় মান কী তাৎপর্য ব্যাখ্যা করে ?

উইকেটের সংখ্যা	20 - 60	60 - 100	100 - 150	150 - 250	250 - 350	350 - 450
বোলারদের সংখ্যা	7	5	16	12	2	3

সমাধান : এখানে শ্রেণিদৈর্ঘ্য বিভিন্ন প্রকার এবং x_i এর মান বড়ো। চলো আমরা তারপরও $a = 200$ এবং $h = 20$ নিয়ে ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি ব্যবহার করি। তারপর আমরা সারণি 14.8 এর অনুরূপ রাশিতথ্য পাব।

সারণি 14.8

প্রাপ্ত উইকেটের সংখ্যা	বোলারদের সংখ্যা (f_i)	x_i	$d_i = x_i - 200$	$u_i = \frac{d_i}{20}$	$u_i f_i$
20 - 60	7	40	–160	–8	–56
60 - 100	5	80	–120	–6	–30
100 - 150	16	125	–75	–3.75	–60
150 - 250	12	200	0	0	0
250 - 350	2	300	100	5	10
350 - 450	3	400	200	10	30
মোট	**45**				**–106**

সুতরাং, $\bar{u} = \frac{-106}{45}$. অতএব, $\bar{x} = 200 + 20\left(\frac{-106}{45}\right) = 200 - 47.11 = 152.89.$

এ থেকে বলা যায় যে, এক দিবসীয় ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় 45 জন বোলারদের প্রাপ্ত উইকেটের গড় মান হল 152.89।

চলো আমরা দেখি, এই অনুচ্ছেদে আলোচ্য ধারণাকে তোমরা কত ভালোভাবে প্রয়োগ করতে পারো।

কার্যকলাপ 2 :

তোমাদের শ্রেণিকক্ষের শিক্ষার্থীদের তিনটি দলে ভাগ করো এবং প্রতিটি দলকে নিম্নলিখিত কার্যকলাপের যে-কোনো একটি করতে বলো।

1. তোমাদের বিদ্যালয় দ্বারা পরিচালিত সর্বশেষ গণিত পরীক্ষায় তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরগুলো সংগ্রহ করো। প্রাপ্ত রাশিতথ্য থেকে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করো।
2. তোমাদের শহরে 30 দিনের দৈনিক সর্বোচ্চ তাপমাত্রা সংগ্রহ করো। এই রাশিতথ্যগুলো একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন সারণিতে উপস্থাপন করো।
3. তোমাদের শ্রেণিকক্ষের সকল শিক্ষার্থীদের উচ্চতা (সেন্টিমিটারে) পরিমাপ করো এবং এই রাশিতথ্যগুলোর একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের সারণি গঠন করো।

সকল দলগুলোর রাশিতথ্য সংগ্রহ করার পর একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন সারণি তৈরি করবে। প্রতিটি দল বাছাইকৃত সঠিক পদ্ধতি দ্বারা প্রতিক্ষেত্রে গড় মান নির্ণয় করবে।

অনুশীলনী 14.1

1. একদল শিক্ষার্থী তাদের পরিবেশ সচেতনতা অভিযানের অঙ্গ হিসাবে একটি জরিপ করেছিল, যেখানে তারা একটি এলাকার 20 টি বাড়ির মধ্যে গাছের সংখ্যার নিম্নলিখিত রাশিতথ্য সংগ্রহ করেছিল। প্রতিটি বাড়ির গাছের সংখ্যার গড় মান নির্ণয় করো।

গাছের সংখ্যা	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14
বাড়ির সংখ্যা	1	2	1	5	6	2	3

গড় মান নির্ণয় করার কোন্ পদ্ধতিটি তুমি ব্যবহার করবে এবং কেন?

2. একটি কারখানার 50 জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরির বিভাজন নিম্নরূপ :

দৈনিক মজুরি (টাকায়)	500 - 520	520 -540	540 - 560	560 - 580	580 -600
শ্রমিকের সংখ্যা	12	14	8	6	10

একটি উপযুক্ত পদ্ধতি ব্যবহার করে কারখানার শ্রমিকদের দৈনিক মজুরির গড় মান নির্ণয় করো।

3. নীচের বিভাজনটি একটি এলাকার শিশুদের দৈনিক পকেট খরচ দেখাচ্ছে। গড় পকেট খরচ হচ্ছে 18 টাকা। লুপ্ত পরিসংখ্যা f এর মান নির্ণয় করো।

দৈনিক পকেট খরচ (টাকায়)	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	23 - 25
শিশুদের সংখ্যা	7	6	9	13	f	5	4

4. একটি হাসপাতালে একজন চিকিৎসক দিয়ে ত্রিশ জন মহিলাকে পরীক্ষা করা হয় এবং প্রতি মিনিটে হৃৎস্পন্দনের হার লিপিবদ্ধ করা হয় এবং সংক্ষিপ্ত আকারে তা নিম্নরূপ। একটি সুবিধাজনক পদ্ধতি প্রয়োগ করে এই মহিলাদের প্রতি মিনিটে হৃৎস্পন্দনের গড়মান নির্ণয় করো।

প্রতি মিনিটে হৃৎস্পন্দনের সংখ্যা	65 - 68	68 - 71	71 - 74	74 - 77	77 - 80	80 - 83	83 - 86
মহিলাদের সংখ্যা	2	4	3	8	7	4	2

5. একটি খুচরো বাজারে ফল বিক্রেতার প্যাকিং বাক্সে রাখা আম বিক্রি করছিল। এই বাক্সগুলোতে আমের সংখ্যা ভিন্ন ভিন্ন ছিল। বাক্সগুলোর সংখ্যা অনুসারে আমগুলোর বিভাজন নিম্নরূপ ছিল।

আমের সংখ্যা	50 - 52	53 - 55	56 - 58	59 - 61	62 - 64
বাক্সের সংখ্যা	15	110	135	115	25

একটি প্যাকিং বাক্সে রাখা আমের সংখ্যার গড়মান নির্ণয় করো। গড়মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে তুমি কোন পদ্ধতিটি নির্বাচন করেছ?

6. নীচের সারণিটি কোনো একটি এলাকার 25টি পরিবারের খাদ্য বাবদ দৈনিক খরচ দেখাচ্ছে।

দৈনিক খরচ (টাকায়)	100 - 150	150 - 200	200 - 250	250 - 300	300 - 350
পরিবারের সংখ্যা	4	5	12	2	2

একটি সুবিধাজনক পদ্ধতি প্রয়োগ করে খাদ্যের দৈনিক গড় খরচ নির্ণয় করো।

7. বাতাসে SO_2 এর ঘনত্ব [দশ লক্ষের এক অংশে (in parts per million, অর্থাৎ, ppm)] নির্ণয়ের জন্য একটি শহরের 30টি এলাকার রাশিতথ্য সংগ্রহ করা হয় যা নিম্নরূপ :

SO_2 এর ঘনত্ব (ppm এ)	পরিসংখ্যা
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2

বাতাসে SO_2 এর গড় ঘনত্ব নির্ণয় করো।

8. একজন শ্রেণি শিক্ষক একটি শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর সম্পূর্ণ মেয়াদকালীন অনুপস্থিতি নিম্নলিখিতরূপে লিপিবদ্ধ করল। একজন শিক্ষার্থীর অনুপস্থিতির গড় মান নির্ণয় করো।

দিনের সংখ্যা	0 - 6	6 - 10	10 - 14	14 - 20	20 - 28	28 - 38	38 - 40
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	11	10	7	4	4	3	1

9. নীচের সারণিতে 35টি শহরে সাক্ষরতার হার (শতকরায়) দেওয়া হল। গড় সাক্ষরতার হার নির্ণয় করো।

সাক্ষরতা হার (%)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95
শহরের সংখ্যা	3	10	11	8	3

14.3 শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান (Mode of Grouped Data)

নবম শ্রেণিতে তোমরা পড়েছ, কোনো পর্যবেক্ষণের মধ্যে যে মানটি সর্বাধিক বার থাকে অর্থাৎ পর্যবেক্ষণের যে মানের পরিসংখ্যা সর্বাধিক সেই মানকে সংখ্যাগুরু মান বলা হয়। এছাড়াও আমরা অবিন্যস্ত রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচনা করেছিলাম। এখানে আমরা শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচনা করব। এটি সম্ভব যে একাধিক মানের একই সর্বাধিক পরিসংখ্যা থাকতে পারে। এক্ষেত্রে এটিকে বহু সংখ্যাগুরু মান বিশিষ্ট রাশিতথ্য বলে। যদিও শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্য বহু সংখ্যাগুরু মান (multimodal) বিশিষ্ট হতে পারে, তথাপি আমরা নিজেদের একক সংখ্যাগুরু মান বিশিষ্ট সমস্যার মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখব।

চলো আমরা নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে অবিন্যস্ত রাশিতথ্য থেকে কীভাবে সংখ্যাগুরুর মান নির্ণয় করা হয়েছিল তা প্রথমে স্মরণ করি।

উদাহরণ 4 : একজন বোলার দ্বারা 10 টি ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় প্রাপ্ত উইকেটের সংখ্যা নিম্নরূপ :

2 6 4 5 0 2 1 3 2 3

এই রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

সমাধান : চলো আমরা প্রদত্ত রাশিতথ্য নিয়ে নিম্নরূপে পরিসংখ্যা বিভাজন সারণি গঠন করি :

উইকেটের সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6
প্রতিযোগিতার সংখ্যা	1	1	3	2	1	1	1

স্পষ্টতই বেশির ভাগ ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় (অর্থাৎ 3 টি) বোলার দ্বারা অর্জিত উইকেট সংখ্যা 2 । সুতরাং এই রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান হল 2 ।

একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রদত্ত পরিসংখ্যাগুলো লক্ষ করে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। এক্ষেত্রে আমরা শুধুমাত্র সর্বাধিক পরিসংখ্যা বিশিষ্ট শ্রেণিটিকে চিহ্নিত করব, যাকে **সংখ্যাগুরু শ্রেণি (modal class)** বলা হয়। সংখ্যাগুরু শ্রেণির অন্তর্গত একটি মান হবে সংখ্যাগুরু মান এবং এটিকে নিম্নে প্রদত্ত সূত্র দ্বারা উপস্থাপন করা হয় :

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

যেখানে $l =$ সংখ্যাগুরু শ্রেণির নিম্ন সীমানা,

$h =$ সংখ্যাগুরু শ্রেণির দৈর্ঘ্য (সকল শ্রেণির দৈর্ঘ্য সমান হতে হবে),

$f_1 =$ সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরিসংখ্যা,

$f_0 =$ সংখ্যাগুরু শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা,

$f_2 =$ সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা।

চলো আমরা এই সূত্রটি নীচের উদাহরণের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করি।

উদাহরণ 5 : একদল শিক্ষার্থী দ্বারা একটি এলাকার 20 টি পরিবারের সদস্য সংখ্যার জরিপের (Survey) পরিসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

পরিবারের সদস্য সংখ্যা	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
পরিবারের সংখ্যা	7	8	2	2	1

এই রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা হল 8, এবং এই পরিসংখ্যার অনুরূপ শ্রেণিটি হল $3 - 5$ । সুতরাং, সংখ্যাগুরু শ্রেণি হল $3 - 5$ ।

এখন

সংখ্যাগুরু শ্রেণি $= 3 - 5$, সংখ্যাগুরু শ্রেণির নিম্নসীমানা $(l) = 3$, শ্রেণি দৈর্ঘ্য $(h) = 2$

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_1) = 8$,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_0) = 7$,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_2) = 2$ ।

এখন, চলো আমরা এই মানগুলো প্রদত্ত সূত্রে বসাই,

$$\text{সংখ্যাগুরু মান (Mode)} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8-7}{2 \times 8 - 7 - 2}\right) \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

সুতরাং, উপরের রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান হল 3.286 ।

উদাহরণ 6 : গণিতের একটি পরীক্ষায় 30 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের বিভাজন উদাহরণ 1 -এ সারণি 14.3 তে দেওয়া আছে। প্রদত্ত রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো। প্রাপ্ত সংখ্যাগুরু মান এবং গড় মানের তুলনা ও ব্যাখ্যা করো।

সমাধান : উদাহরণ 1-এর সারণি 14.3 দেখো। যেহেতু, 40 - 55 শ্রেণিভুক্ত শিক্ষার্থীরা সর্বাধিক নম্বর (অর্থাৎ 7) পেয়েছে, সুতরাং 40 - 55 শ্রেণিটি হল সংখ্যাগুরু শ্রেণি। এখানে,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির নিম্ন সীমানা $(l) = 40$,

শ্রেণিদৈর্ঘ্য $(h) = 15$,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_1) = 7$,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_0) = 3$,

সংখ্যাগুরু শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা $(f_2) = 6$ ।

এখন, সূত্রটি প্রয়োগ করে পাই,

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h,,$$

আমরা পাই,

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = 40 + \left(\frac{7-3}{14-6-3}\right) \times 15 = 52$$

সুতরাং, সংখ্যাগুরু নম্বরটি হল 52 ।

এখন উদাহরণ 1 থেকে তোমরা জান যে, গড় নম্বরটি হল 62 ।

সুতরাং, বেশিরভাগ শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর হল 52, যেখানে প্রতিটি শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত গড় নম্বর হল 62।

মন্তব্য :

1. উদাহরণ 6 এ সংখ্যাগুরু মান গড় মান থেকে ছোটো। কিন্তু অপর কয়েকটি সমস্যায় এটি গড় মানের সমান বা অধিক হতেও পারে।

2. আমরা হয় শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নতুবা অধিকাংশ শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত নম্বরের গড় নিয়ে আগ্রহী হব তা নির্ভর করবে পরিস্থিতির উপর। প্রথম পরিস্থিতিতে গড়মান এবং দ্বিতীয় পরিস্থিতিতে সংখ্যাগুরু মান দরকার।

কার্যকলাপ 3 : কার্যকলাপ 2 -এর গঠিত দলগুলো একই রেখে এবং দলগুলোর উপর প্রদত্ত পরিস্থিতি বজায় রেখে প্রতিটি দলকে প্রদত্ত রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করতে বলা হবে। তারা গড় মানের সাথে প্রাপ্ত মানের তুলনা করবে এবং উভয়ের অর্থ ব্যাখ্যা করবে।

মন্তব্য : অসমান শ্রেণি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের ক্ষেত্রেও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা যায়। যদিও আমরা আলোচনা করব না।

অনুশীলনী 14.2

1. এক বছরে একটি হাসপাতালে ভর্তি হওয়া রোগীদের বয়স নীচের সারণিতে দেওয়া হল :

বয়স (বছরে)	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65
রোগীর সংখ্যা	6	11	21	23	14	5

উপরে দেওয়া রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান এবং গড় মান নির্ণয় করো। এই দুটি কেন্দ্রীয় প্রবণতার তুলনা করো এবং ব্যাখ্যা করো।

2. নিম্নলিখিত রাশিতথ্যটিতে 225 টি বৈদ্যুতিক সরঞ্জামের জীবনকাল (ঘণ্টায়) দেওয়া হল :

জীবনকাল (ঘন্টায়)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
পরিসংখ্যা	10	35	52	61	38	29

বৈদ্যুতিক সরঞ্জামের সংখ্যাগুরু জীবনকাল নির্ণয় করো।

3. নীচের রাশিতথ্যটিতে কোনো একটি গ্রামের 200টি পরিবারের মাসিক খরচের বিভাজন দেওয়া হল। পরিবারের মাসিক খরচের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো। মাসিক খরচের গড় মানও নির্ণয় করো।

খরচ (টাকায়)	পরিবারের সংখ্যা
1000 - 1500	24
1500 - 2000	40
2000 - 2500	33
2500 - 3000	28
3000 - 3500	30
3500 - 4000	22
4000 - 4500	16
4500 - 5000	7

4. নীচের বিভাজনটিতে ভারতের উচ্চতর মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের রাজ্যভিত্তিক শিক্ষক-শিক্ষার্থীর অনুপাত দেওয়া হল। প্রদত্ত রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান এবং গড় মান নির্ণয় করো। দুটি পরিমাপ ব্যাখ্যা করো।

শিক্ষক প্রতি শিক্ষার্থীদের সংখ্যা	রাজ্য/ কেন্দ্রশাসিত অঞ্চলের সংখ্যা
15 - 20	3
20 - 25	8
25 - 30	9
30 - 35	10
35 - 40	3
40 - 45	0
45 - 50	0
50 - 55	2

5. এক দিবসীয় ক্রিকেট প্রতিযোগিতায় বিশ্বের কিছু শ্রেষ্ঠ ব্যাটস্‌ম্যান দ্বারা অর্জিত রানের বিভাজন নিম্নে দেওয়া হল।

অর্জিত রান	ব্যাটস্‌ম্যানের সংখ্যা
3000 - 4000	4
4000 - 5000	18
5000 - 6000	9
6000 - 7000	7
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3
9000 - 10000	1
10000 - 11000	1

প্রদত্ত রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

6. একজন শিক্ষার্থী একটি রাস্তার কোনো একটি নির্দিষ্ট স্থান (spot) দিয়ে প্রতি 3 মিনিটে অতিক্রম করা গাড়ির সংখ্যা 100 বার পর্যবেক্ষণ করে লিপিবদ্ধ করল, যা সংক্ষিপ্ত আকারে নীচের সারণিতে দেওয়া হল। এই রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

গাড়ির সংখ্যা	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
পরিসংখ্যা	7	14	13	12	20	11	15	8

14.4 শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যমা (Median of Grouped Data)

নবম শ্রেণিতে তোমরা পড়েছ প্রদত্ত রাশি তথ্যের ঠিক মাঝের পর্যবেক্ষণের মানটিকে মধ্যমা বলা হয় যা কেন্দ্রীয় প্রবণতার আরেকটি পরিমাপক। মনে করে দেখো অবিন্যস্ত রাশিতথ্যের মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রথমে পর্যবেক্ষণের মানগুলোকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে ছিলাম। এক্ষেত্রে n অযুগ্ম হলে, মধ্যমা হবে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পর্যবেক্ষণ এবং যদি n যুগ্ম হয়, তখন মধ্যমা হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণের গড়।

ধরে নেওয়া যাক, নীচের রাশিতথ্য থেকে একটি 50 নম্বরের পরীক্ষায় 100 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যমা নির্ণয় করতে হবে :

প্রাপ্ত নম্বর	20	29	28	33	42	38	43	25
শিক্ষার্থীদের সংখ্যা	6	28	24	15	2	4	1	20

প্রথমে আমরা প্রাপ্ত নম্বরগুলো মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজাই এবং নিম্নলিখিতরূপে পরিসংখ্যা সারণি তৈরি করি :

সারণি 14.9

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থীর সংখ্যা (পরিসংখ্যা)
20	6
25	20
28	24
29	28
33	15
38	4
42	2
43	1
মোট	**100**

এখানে $n = 100$, যা একটি যুগ্ম সংখ্যা। এখানে $\frac{n}{2}$ তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণের গড় মান হল মধ্যমা। অর্থাৎ 50 তম এবং 51 তম পর্যবেক্ষণ। আমরা নিম্নলিখিতভাবে এই পর্যবেক্ষণগুলো নির্ণয় করব।

সারণি 14.10

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা
20	6
25 পর্যন্ত	6 + 20 = 26
28 পর্যন্ত	26 + 24 = 50
29 পর্যন্ত	50 + 28 = 78
33 পর্যন্ত	78 + 15 = 93
38 পর্যন্ত	93 + 4 = 97
42 পর্যন্ত	97 + 2 = 99
43 পর্যন্ত	99 + 1 = 100

এখন আমরা এই রাশি তথ্যগুলো আরেকটি স্তম্ভের আকারে উপরের পরিসংখ্যা সারণিতে যুক্ত করব যাকে *ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা স্তম্ভ* বলা হয়।

সারণি 14.11

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থীর সংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
20	6	6
25	20	26
28	24	50
29	28	78
33	15	93
38	4	97
42	2	99
43	1	100

উপরের সারণি থেকে, আমরা দেখতে পাই :

50 তম পর্যবেক্ষণটি হল 28 (কেন?)

51 তম পর্যবেক্ষণটি হল 29

সুতরাং, মধ্যমা $= \dfrac{28 + 29}{2} = 28.5$

মন্তব্য : সারণি 14.11 এর স্তম্ভ 1 এবং স্তম্ভ 3, অংশ দুটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা সারণি নামে পরিচিত। নম্বরের মধ্যমা 28.5 থেকে জানা যায় প্রায় 50% শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 28.5 থেকে কম এবং অপর 50% শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 28.5 এর বেশি।

এখন, চলো আমরা দেখি এই পরিস্থিতিতে কীভাবে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করা যায়।

কোনো একটি 100 নম্বরের পরীক্ষায় 53 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে বিবেচনা করা হল :

সারণি 14.12

নম্বর	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
0 - 10	5
10 - 20	3
20 - 30	4
30 - 40	3
40 - 50	3
50 - 60	4
60 - 70	7
70 - 80	9
80 - 90	7
90 - 100	8

উপরের সারণি থেকে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

কতজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 10 এর কম? স্পষ্টতই উত্তরটি হল 5 ।

কতজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 20 এর কম ? লক্ষ করো 20 থেকে কম নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের মধ্যে সেই শিক্ষার্থীদেরকে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে যাদের প্রাপ্ত নম্বর 0 - 10 এবং সেই সব শিক্ষার্থীদেরও, যাদের প্রাপ্ত নম্বর 10 - 20 এর মধ্যে ছিল। সুতরাং, 20 থেকে কম নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের মোট সংখ্যা হল 5 + 3, অর্থাৎ 8 । আমরা বলতে পারি 10 -20 শ্রেণিটির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা হল 8 ।

অনুরূপে, আমরা অন্যান্য শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলো নির্ণয় করতে পারি। অর্থাৎ, 30 থেকে কম নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা, 40 থেকে কম ...... 100 থেকে কম। এই মানগুলো নিম্নে 14.13 সারণিতে দেওয়া হল।

সারণি 14.13

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা)
10 থেকে কম	5
20 থেকে কম	5 + 3 = 8
30 থেকে কম	8 + 4 = 12
40 থেকে কম	12 + 3 = 15
50 থেকে কম	15 + 3 = 18
60 থেকে কম	18 + 4 = 22
70 থেকে কম	22 + 7 = 29
80 থেকে কম	29 + 9 = 38
90 থেকে কম	38 + 7 = 45
100 থেকে কম	45 + 8 = 53

উপরের প্রদত্ত বিভাজনটিকে *ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষুদ্রতর সূচক* বলা হয়। এখানে 10, 20, 30, . . . 100, হল অনুরূপ শ্রেণিবিভাগ সমূহের ঊর্ধ্বসীমা।

আমরা 0 থেকে বেশি বা তার সমান, 10 থেকে বেশি বা সমান, 20 থেকে বেশি বা তার সমান ইত্যাদি নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের জন্যও অনুরূপে একটি সারণি তৈরি করতে পারি। সারণি 14.12 থেকে আমরা দেখতে পাই 53 শিক্ষার্থীর সবার প্রাপ্ত নম্বর 0 থেকে বেশি বা তার সমান। যেহেতু 5 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 0 - 10 শ্রেণিবিভাগের অন্তর্ভুক্ত। এর অর্থ হল $53 - 5 = 48$ জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর হল 10 থেকে বেশি বা তার সমান। এভাবে একই নিয়মে আমরা পাই 20 বা তার বেশি নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $48 - 3 = 45$, 30 বা তার বেশি নম্বর প্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের সংখ্যা $45 - 4 = 41$, ইত্যাদি যা সারণি 14.14-এ দেখানো হল।

সারণি 14.14

প্রাপ্ত নম্বর	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা)
0 থেকে বেশি বা তার সমান	53
10 থেকে বেশি বা তার সমান	53 – 5 = 48
20 থেকে বেশি বা তার সমান	48 – 3 = 45
30 থেকে বেশি বা তার সমান	45 – 4 = 41
40 থেকে বেশি বা তার সমান	41 – 3 = 38
50 থেকে বেশি বা তার সমান	38 – 3 = 35
60 থেকে বেশি বা তার সমান	35 – 4 = 31
70 থেকে বেশি বা তার সমান	31 – 7 = 24
80 থেকে বেশি বা তার সমান	24 – 9 = 15
90 থেকে বেশি বা তার সমান	15 – 7 = 8

উপরের সারণিটিকে একটি *ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের বৃহত্তর সূচক* বলা হয়। এখানে 0, 10, 20, . . ., 90 হল প্রদত্ত অনুরূপ শ্রেণি বিভাগের নিম্ন সীমা।

এখন, শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যমা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমরা যে-কোনো একটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন ব্যবহার করতে পারি।

নিম্নের 14.15 সারণিটি পাওয়ার জন্য চলো আমরা সারণি 14.12 এবং সারণি 14.13 সংযুক্ত করি।

সারণি 14.15

নম্বর	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	3	8
20 - 30	4	12
30 - 40	3	15
40 - 50	3	18
50 - 60	4	22
60 - 70	7	29
70 - 80	9	38
80 - 90	7	45
90 - 100	8	53

এখন একটি শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা লক্ষ করে পর্যবেক্ষণের মধ্যমান নির্ণয় করতে পারি না, কেন না পর্যবেক্ষণের মধ্যমান শ্রেণিবিভাগের কোনো একটি মান হয়ে থাকে। অতএব, একটি শ্রেণির অন্তর্গত মানটি খুঁজে বের করা প্রয়োজন যা সমগ্র বিভাজনটিকে দুটি সমান ভাগে বিভক্ত করে। কিন্তু এই শ্রেণিটি কোন্‌টি হওয়া উচিত?

এই শ্রেণিটি নির্ণয় করার জন্য আমরা সকল শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা এবং $\frac{n}{2}$ বের করব। এখন আমরা এমন শ্রেণিটি সনাক্ত করব যার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{n}{2}$ থেকে বড়ো (এবং নিকটতম)। এটিকে *মধ্যমা শ্রেণি* বলা হয়। উপরের বিভাজনটিতে $n = 53$ । সুতরাং, $\frac{n}{2} = 26.5$। এখন $60 - 70$ হল এরূপ শ্রেণি যার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 29, যা $\frac{n}{2}$ অর্থাৎ 26.5 থেকে বড়ো (এবং নিকটতম)।

সুতরাং, $60 - 70$ হল **মধ্যমা শ্রেণি (median class)**।

মধ্যমা শ্রেণি নির্ণয় করার পর আমরা মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য নীচের সূত্রটি প্রয়োগ করব।

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

যেখানে, $l =$ মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন সীমা,

$n =$ পর্যবেক্ষণের সংখ্যা,

$\text{cf} =$ মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা,

$f =$ মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা,

$h =$ শ্রেণির দৈর্ঘ্য (শ্রেণি দৈর্ঘ্য সমান ধরে)।

উপরের সূত্রে $\frac{n}{2} = 26.5$, $l = 60$, $\text{cf} = 22$, $f = 7$, $h = 10$ বসিয়ে পাই,

$$\text{মধ্যমা} = 60 + \left(\frac{26.5 - 22}{7}\right) \times 10$$

$$= 60 + \frac{45}{7}$$

$$= 66.4$$

অতএব, প্রায় অর্ধেক শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 66.4 থেকে কম এবং অপর অর্ধেক শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর 66.4 থেকে বেশি।

উদাহরণ 7 : একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 51 জন ছাত্রীর উচ্চতার (সেমি-এ) সমীক্ষা করা হয়েছিল এবং নিম্নলিখিত রাশিতথ্য পাওয়া গিয়েছিল :

উচ্চতা (সেমি)	ছাত্রীর সংখ্যা
140 থেকে কম	4
145 থেকে কম	11
150 থেকে কম	29
155 থেকে কম	40
160 থেকে কম	46
165 থেকে কম	51

মধ্যমা উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধান : মধ্যমা উচ্চতা নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রতিটি শ্রেণিবিভাগ এবং সংশ্লিষ্ট শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা নির্ণয় করব।

প্রদত্ত বিভাজনটি *ক্ষুদ্রতর সূচক* হওয়ার ফলে শ্রেণিবিভাগগুলোর অনুরূপ ঊর্ধ্বসীমা হবে 140, 145, 150, . . ., 165 ।সুতরাং, শ্রেণিবিভাগগুলো 140 অপেক্ষা কম, 140 – 145, 145 – 150, ..., 160 – 165 হবে। প্রদত্ত বিভাজন থেকে লক্ষ করা যায় 4 জন ছাত্রীর উচ্চতা 140 এর কম। অর্থাৎ 140 এর নীচের শ্রেণিবিভাগের পরিসংখ্যা হল 4। এখানে 11 জন ছাত্রীর উচ্চতা 145 এর কম এবং 4 জন ছাত্রীর উচ্চতা 140 এর কম। সুতরাং, 140 - 145 উচ্চতাবিশিষ্ট শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত ছাত্রীর সংখ্যা হল $11 – 4 = 7$। অনুরূপে 145 - 150 শ্রেণির পরিসংখ্যা হল $29 – 11 = 18$, 150 - 155 শ্রেণির জন্য এটি হল $40 – 29 = 11$, ইত্যাদি। সুতরাং, প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা সম্মিলিত আমাদের পরিসংখ্যা বিভাজন সারণিটি হল নিম্নরূপ :

সারণি 14.16

শ্রেণিবিভাগ	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
140 এর নীচে	4	4
140 - 145	7	11
145 - 150	18	29
150 - 155	11	40
155 - 160	6	46
160 - 165	5	51

এখানে, $n = 51$, অতএব $\frac{n}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$ । এই পর্যবেক্ষণটি 145 - 150 শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত। যেখানে,

l (নিম্ন সীমা) = 145,

cf (145 - 150 শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা) = 11,

f (মধ্যমা শ্রেণি 145 - 150 এর পরিসংখ্যা) = 18,

h (শ্রেণি দৈর্ঘ্য) = 5.

মধ্যমা $= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h$, সুত্রটি প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\text{মধ্যমা} = 145 + \left(\frac{25.5 - 11}{18}\right) \times 5$$

$$= 145 + \frac{72.5}{18} = 149.03.$$

সুতরাং, ছাত্রীদের মধ্যমা উচ্চতা হল 149.03 সেমি।

এটির অর্থ হল প্রায় 50 শতাংশ ছাত্রীর উচ্চতা এই উচ্চতা থেকে কম এবং 50 শতাংশ এই উচ্চতা থেকে বেশি।

উদাহরণ 8 : নীচের রাশি তথ্যটির মধ্যমা হল 525। যদি মোট পরিসংখ্যা 100 হয়, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।

শ্রেণিবিভাগ	পরিসংখ্যা
0 - 100	2
100 - 200	5
200 - 300	x
300 - 400	12
400 - 500	17
500 - 600	20
600 - 700	y
700 - 800	9
800 - 900	7
900 - 1000	4

সমাধান :

শ্রেণিবিভাগ	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 - 100	2	2
100 - 200	5	7
200 - 300	x	$7+x$
300 - 400	12	$19+x$
400 - 500	17	$36+x$
500 - 600	20	$56+x$
600 - 700	y	$56+x+y$
700 - 800	9	$65+x+y$
800 - 900	7	$72+x+y$
900 - 1000	4	$76+x+y$

দেওয়া আছে, $n=100$

সুতরাং, $76+x+y=100$, অর্থাৎ, $x+y=24$ (1)

মধ্যমা হল 525, যা 500 – 600 শ্রেণির অন্তর্ভুক্ত।

সুতরাং, $l=500$, $f=20$, $\mathrm{cf}=36+x$, $h=100$

সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই, মধ্যমা $= l+\left(\dfrac{\frac{n}{2}-\mathrm{cf}}{f}\right)\times h,$

$$525 = 500+\left(\frac{50-36-x}{20}\right)\times 100$$

অর্থাৎ, $525-500 = (14-x)\times 5$

অর্থাৎ, $25 = 70-5x$

অর্থাৎ, $5x = 70-25=45$

অতএব, $x = 9$

সুতরাং, 1 নং থেকে আমরা পাই, $9+y = 24$

অর্থাৎ, $y = 15$

এখন, কেন্দ্রীয় প্রবণতার তিনটি পরিমাপের সবগুলো তোমরা অধ্যয়ন করেছ, তার মধ্যে **কোনো বিশেষ প্রয়োজনে কোন্ পরিমাপটি সর্বোত্তম হবে** চলো আমরা আলোচনা করি।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার বহুল ব্যবহৃত পরিমাপটি হল মধ্যক বা গড়মান, কারণ এটি সমস্ত পর্যবেক্ষণের সাথে যুক্ত থাকে এবং এটি প্রান্তীয় মানগুলোর মধ্যবর্তী অর্থাৎ সমগ্র রাশিতথ্যের পর্যবেক্ষণগুলোর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের অন্তবর্তী হয়। এটি আমাদের দুই বা ততোধিক বিভাজনের মধ্যে তুলনা করতে সাহায্য করে। উদাহরণস্বরূপ, একটি নির্দিষ্ট পরীক্ষায় বিভিন্ন বিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীদের গড় (মধ্যক) ফলাফল তুলনা করে আমরা কোন্ বিদ্যালয়টির ফলাফল ভালো সেই সিদ্ধান্তে আসতে পারি।

যদিও গড় মান প্রদত্ত রাশিতথ্যের প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত হয়। উদাহরণস্বরূপ কম বা বেশি পরিসংখ্যা বিশিষ্ট শ্রেণিগুলোর গড় একই রাশি তথ্যগুলোর একটি ভালো প্রতিনিধিত্বকারী। যদি একটি শ্রেণির পরিসংখ্যা 2 হয় এবং অন্যান্য 5টি শ্রেণির পরিসংখ্যা যথাক্রমে 20, 25, 20, 21, 18 হয় তখন রাশিতথ্যের আচরণকে গড় মান অবশ্যই প্রভাবিত করবে না। সুতরাং এই ক্ষেত্রে গড় মান প্রদত্ত রাশিতথ্যের একটি ভালো প্রতিনিধিত্বকারী নয়।

যেসব সমস্যাগুলোতে পৃথক পর্যবেক্ষণ গুরুত্বপূর্ণ নয় এবং যেখানে আমরা একটি প্রতিনিধিত্বমূলক (typical) পর্যবেক্ষণ খুঁজে পেতে চাই, এসব ক্ষেত্রে মধ্যমা হল অধিকতর উপযুক্ত। উদাহরণস্বরূপ শ্রমিকদের সাধারণ উৎপাদনশীলতার হার, একটি দেশের গড় মজুরি ইত্যাদি খুঁজে বের করা। এই পরিস্থিতিতে প্রান্তীয় মান থাকতেও পারে। সুতরাং, গড় -এর পরিবর্তে আমরা মধ্যমাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি উত্তম পরিমাপক হিসাবে গ্রহণ করতে পারি।

যেসব পরিস্থিতিতে সর্বাধিক পুনরাবৃত্ত মান বা সবচেয়ে জনপ্রিয় বিষয় প্রতিষ্ঠা করার প্রয়োজন হয়, সেসব ক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান হল সর্বোত্তম পছন্দ। উদাহরণস্বরূপ T.V.তে দেখা সর্বাধিক জনপ্রিয় অনুষ্ঠানটি বের করা, ভোক্তাদের সর্বাধিক চাহিদাকৃত দ্রব্য, বেশিরভাগ লোকের ব্যবহৃত যানবাহনের রং ইত্যাদি।

মন্তব্য :

1. কেন্দ্রীয় প্রবণতার তিনটি পরিমাপকের মধ্যে স্থূল (empirical) সম্পর্কটি হল :

$$\mathbf{3 \times \text{মধ্যমা} = \text{সংখ্যাগুরু মান} + 2 \times \text{গড় মান}}$$

2. অসমান শ্রেণিদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যমাও গণনা করা যেতে পারে। যদিও এখানে আমরা এটি আলোচনা করব না।

অনুশীলনী 14.3

1. নীচের পরিসংখ্যা বিভাজনটি হল একটি এলাকার 68 জন ভোক্তার মাসিক বিদ্যুতের ব্যবহার। প্রদত্ত রাশিতথ্যের মধ্যমা, গড়মান এবং সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো এবং তাদের তুলনা করো।

মাসিক ব্যবহার (এককে)	ভোক্তার সংখ্যা
65 - 85	4
85 - 105	5
105 - 125	13
125 - 145	20
145 - 165	14
165 - 185	8
185 - 205	4

2. নীচের বিভাজনটির মধ্যমা 28.5 হলে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।

শ্রেণিবিভাগ	পরিসংখ্যা
0 - 10	5
10 - 20	x
20 - 30	20
30 - 40	15
40 - 50	y
50 - 60	5
মোট	60

3. একজন জীবনবিমা এজেন্ট 100 জন বিমা গ্রাহকের বয়সের তথ্য সংগ্রহ করল। যদি বিমা 18 বছরের বেশি কিন্তু 60 বছরের কম এরূপ গ্রাহকদের জন্য হয় তবে মধ্যমা বয়স নির্ণয় করো।

বয়স (বছরে)	বিমা গ্রাহকের সংখ্যা
20 এর নীচে	2
25 এর নীচে	6
30 এর নীচে	24
35 এর নীচে	45
40 এর নীচে	78
45 এর নীচে	89
50 এর নীচে	92
55 এর নীচে	98
60 এর নীচে	100

4. একটি গাছের 40টি পাতার দৈর্ঘ্য উপযুক্ত নিকটতম মিলিমিটারে পরিমাপ করা হল এবং প্রাপ্ত রাশি তথ্যগুলো নীচের সারণিতে দেওয়া হল :

দৈর্ঘ্য (মিলিমিটারে)	পাতার সংখ্যা
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

পাতার মধ্যমা দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(**ইঙ্গিত :** মধ্যমা নির্ণয়ের প্রদত্ত রাশি তথ্যগুলোকে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিতে রূপান্তরিত করতে হবে, যেহেতু সূত্রটি অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি বিশিষ্ট। পরিবর্তিত শ্রেণিটি হবে 117.5 - 126.5, 126.5 - 135.5, . . ., 171.5 - 180.5 ।)

5. 400টি নিয়ন (neon) বাতির জীবনকালের বিভাজন নীচের সারণিতে দেওয়া হল :

জীবনকাল (ঘণ্টায়)	বাতির সংখ্যা
1500 - 2000	14
2000 - 2500	56
2500 - 3000	60
3000 - 3500	86
3500 - 4000	74
4000 - 4500	62
4500 - 5000	48

একটি বাতির জীবনকালের মধ্যমা নির্ণয় করো।

6. একটি স্থানীয় টেলিফোন ডিরেকটরি থেকে যথেচ্ছভাবে 100টি পদবি বাছাই করা হয়েছিল এবং পদবিগুলোতে ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষর সংখ্যার পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নরূপ :

অক্ষরের সংখ্যা	1 - 4	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19
পদবির সংখ্যা	6	30	40	16	4	4

পদবিগুলোতে অক্ষরের মধ্যমা সংখ্যা নির্ণয় করো। পদবিগুলোতে অক্ষরের গড়মান নির্ণয় করো? পদবিসমূহের অক্ষরের সংখ্যাগুরু আকার নির্ণয় করো।

7. কোনো একটি শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর ওজনের বিভাজনটি নিম্নরূপ। শিক্ষার্থীদের ওজনের মধ্যমা নির্ণয় করো।

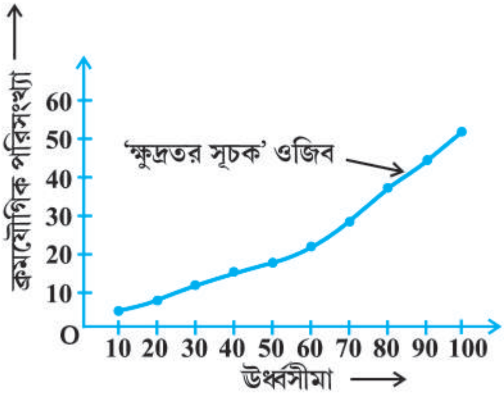
ওজন (কেজিতে)	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75
শিক্ষার্থীদের সংখ্যা	2	3	8	6	6	3	2

14.5 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপন (Graphical Representation of Cumulative Frequency Distribution)

আমরা সবাই জানি শব্দের চেয়ে ছবি ভালো কথা বলে। একটি লৈখিক উপস্থাপন আমাদের প্রদত্ত রাশিতথ্যকে এক নজরে বুঝতে সাহায্য করে। নবম শ্রেণিতে আমরা প্রদত্ত রাশিতথ্য দণ্ডচিত্র, আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজের মাধ্যমে উপস্থাপন করেছিলাম। চলো আমরা এখন ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনকে লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করি।

উদাহরণস্বরূপ, আমরা সারণি 14.13 এর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনটি বিবেচনা করি।

মনে করো, 10, 20, 30,. . ., 100 হল সংশ্লিষ্ট শ্রেণি বিভাগের উর্ধ্বসীমা। প্রদত্ত সারণির রাশি তথ্যগুলো লেখচিত্রের আকারে উপস্থাপন করার জন্য উভয় অক্ষের একটি সুবিধাজনক স্কেল নিয়ে প্রতিটি শ্রেণির উর্ধ্বসীমাকে অনুভূমিক অক্ষ (x-অক্ষ) এবং তাদের অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে উল্লম্ব অক্ষ (y-অক্ষ) বরাবর চিহ্নিত করা হয়। উভয় অক্ষের স্কেল সমান নাও হতে পারে। চলো আমরা এখন ক্রমিত জোড় (ordered pairs) (প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমা এবং এর অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নিয়ে গঠিত) বিন্দুগুলো অর্থাৎ (10, 5), (20, 8), (30, 12), (40, 15), (50, 18), (60, 22), (70, 29), (80, 38), (90, 45), (100, 53) কে ছক কাগজের যথাস্থানে বসিয়ে তাদের মুক্ত হাতে মসৃণ বক্ররেখা দিয়ে যুক্ত করি। প্রাপ্ত বক্ররেখাটিকে **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা বা ওজিব (ogive)** বলা হয় (ক্ষুদ্রতর সূচকের) (চিত্র 14.1 দেখো)।

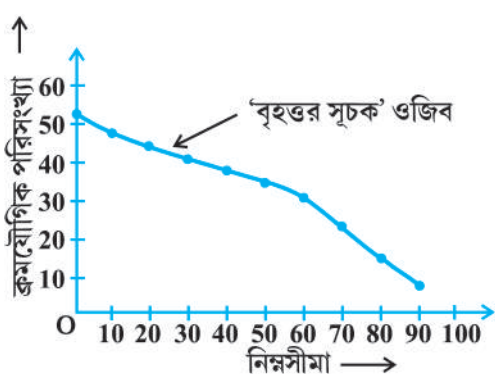


চিত্র 14.1

'ogive' শব্দটি 'ojeev' রূপে উচ্চারিত হয় এবং শব্দটি **ogee** থেকে উৎপন্ন হয়। Ogee হল একটি উত্তল চাপের পর একটি অবতল চাপের প্রবাহের ফলে গঠিত আকৃতি, যা উল্লম্ব প্রান্ত দুটির সঙ্গে একটি S-আকৃতির বক্র গঠন করে। স্থাপত্যশিল্পে ogee আকৃতিটি চতুর্দশ এবং পঞ্চদশ শতাব্দীর গোথিক শৈলীর (Gothic style) চরিত্রগুলোর মধ্যে একটি।

আমরা আবার সারণি 14.14 এ প্রদত্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনটি বিবেচনা করি এবং তার ওজিব অঙ্কন করি (বৃহত্তর সূচকে)।

মনে করো, 0, 10, 20, . . ., 90 হল সংশ্লিষ্ট শ্রেণিবিভাগ 0 - 10, 10 - 20, . . ., 90 - 100 এর নিম্নসীমা। বৃহত্তর সূচক লেখচিত্রের আকারে উপস্থাপন করার জন্য আমরা x-অক্ষ বরাবর নিম্ন সীমা এবং y-অক্ষ বরাবর সংশ্লিষ্ট ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলো বসাব। তারপর আমরা বিন্দুগুলো (প্রতিটি শ্রেণির নিম্নসীমা এবং এর অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা) অর্থাৎ (0, 53), (10, 48), (20, 45), (30, 41), (40, 38), (50, 35), (60, 31), (70, 24), (80, 15), (90, 8), ছককাগজের যথাস্থানে বসিয়ে তাদের মুক্ত হাতে মসৃণ বক্ররেখা দিয়ে যুক্ত করি। প্রাপ্ত রেখাটিকে *ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা* বা *ওজিব (ogive)* বলা হয় (বৃহত্তর সূচকে)। (চিত্র 14.2 দেখো)।

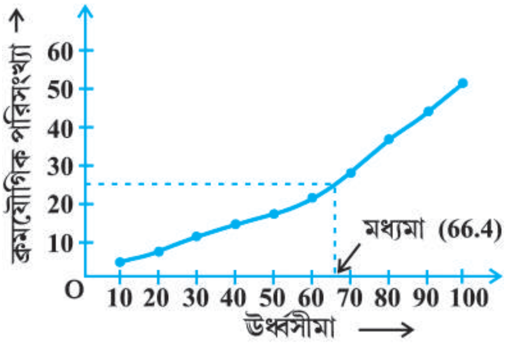


চিত্র 14.2

মন্তব্য : উল্লেখ্য যে উভয় ওজিব (চিত্র 14.1 এবং চিত্র14.2) একই রাশিতথ্যের অনুরূপ যা সারণি 14.12 এ দেওয়া হল।

এখন ওজিবগুলো কি কোনো উপায়ে মধ্যমার সাথে সম্পর্কিত? সারণি 14.12 এর রাশিতথ্য অনুসারে এই দুটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা থেকে মধ্যমা নির্ণয় করা কি সম্ভব? চলো আমরা দেখি।

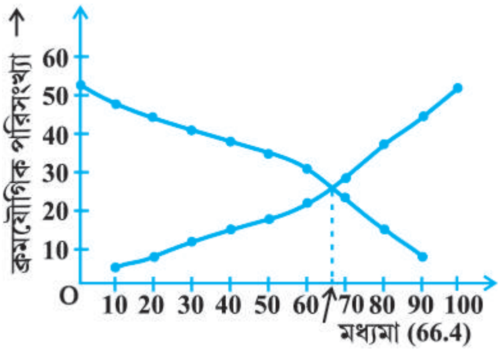
একটি সুস্পষ্ট উপায় হল y-অক্ষে $\frac{n}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$ বিন্দুটি চিহ্নিত করা (চিত্র 14.3 দেখো)। এই বিন্দু হতে x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করো যা রেখাটিকে একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। এই বিন্দু হতে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করো। লম্বরেখা এবং x-অক্ষের ছেদবিন্দুটি প্রদত্ত রাশি তথ্যের মধ্যমা নির্ধারণ করে। (চিত্র 14.3 দেখো)



চিত্র 14.3

মধ্যমা নির্ণয়ের আরেকটি উপায় নিম্নরূপ:

একই অক্ষে উভয় ওজিব (অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর সূচক এবং বৃহত্তর সূচক) অঙ্কন করো। উভয় ওজিব একই বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে। যদি আমরা এই বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব অঙ্কন করি, তাহলে লম্ব x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা মধ্যমা নির্ধারণ করে। (চিত্র 14.4 দেখো)।



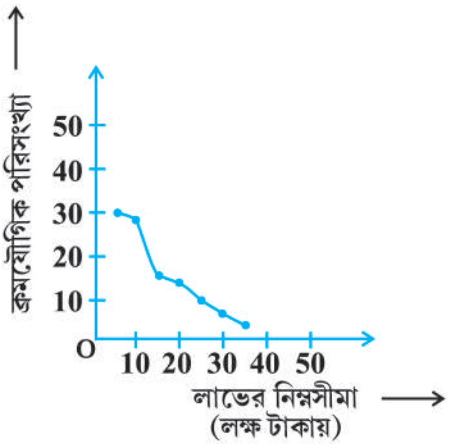
চিত্র 14.4

উদাহরণ 9 : কোনো এলাকার একটি শপিং কমপ্লেক্সের 30টি দোকানের বার্ষিক লাভের বিভাজন নিম্নরূপ:

লাভ (লক্ষ টাকায়)	দোকানের সংখ্যা (পরিসংখ্যা)
5 অপেক্ষা বেশি বা সমান	30
10 অপেক্ষা বেশি বা সমান	28
15 অপেক্ষা বেশি বা সমান	16
20 অপেক্ষা বেশি বা সমান	14
25 অপেক্ষা বেশি বা সমান	10
30 অপেক্ষা বেশি বা সমান	7
35 অপেক্ষা বেশি বা সমান	3

উপরের রাশিতথ্য থেকে উভয় ওজিব অঙ্কন করো এবং মধ্যমা লাভ নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা প্রথমে অনুভূমিক অক্ষ বরাবর লাভের নিম্নসীমা এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাসহ স্থানাঙ্ক অক্ষগুলো অঙ্কন করি। বৃহত্তর সূচক ওজিব পাওয়ার জন্য আমরা (5, 30), (10, 28), (15, 16), (20, 14), (25, 10), (30, 7) এবং (35, 3) বিন্দুগুলোকে একটি মসৃণ রেখা দ্বারা যুক্ত করি, যা চিত্র 14.5 এ দেখানো হল।



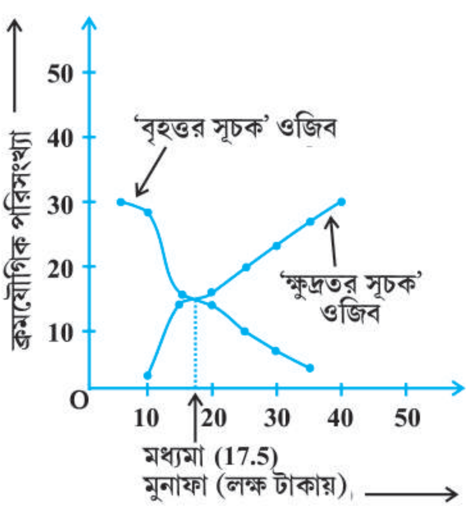
চিত্র 14.5

চলো আমরা উপরের সারণি থেকে শ্রেণি বিভাগগুলোর পরিসংখ্যা এবং ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা উপস্থাপন করি।

সারণি 14.17

শ্রেণিবিভাগ	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
দোকানের সংখ্যা	2	12	2	4	3	4	3
ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	2	14	16	20	23	27	30

এই মানগুলো ব্যবহার করে চিত্র 14.5 -এ অনুরূপ 'ক্ষুদ্রতর সূচক' ওজিব পাওয়ার জন্য আমরা (10, 2), (15, 14), (20, 16), (25, 20), (30, 23), (35, 27), (40, 30) বিন্দুগুলো উভয় অক্ষে বসাব। চিত্র 14.6 এ দেখানো হল।



চিত্র 14.6

তাদের ছেদবিন্দুর ভুজ প্রায় 17.5 , এটিই মধ্যমা। এই মানটি সূত্রের সাহায্যেও যাচাই করা যায়। সুতরাং, মধ্যমা লাভ (লক্ষ টাকায়) হল 17.5।

মন্তব্য : উপরের উদাহরণগুলো থেকে লক্ষ করা যায় শ্রেণিবিভাগগুলো অবিচ্ছিন্ন ছিল। আমাদের নিশ্চিত হতে হবে ওজিব অঙ্কন করার ক্ষেত্রে শ্রেণিবিভাগগুলো যাতে অবিচ্ছিন্ন হয়। (নবম শ্রেণির আয়তলেখ অঙ্কন প্রণালী দেখো)।

অনুশীলনী 14.4

1. একটি কারখানার 50 জন শ্রমিকের দৈনিক আয়ের বিভাজন নিম্নরূপ :

দৈনিক আয় (টাকায়)	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200
শ্রমিকের সংখ্যা	12	14	8	6	10

উপরের বিভাজনটিকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষুদ্রতর সূচকে পরিণত করো এবং তার ওজিব অঙ্কন করো।

2. একটি শ্রেণিকক্ষের 35 জন শিক্ষার্থীর স্বাস্থ্য পরীক্ষায় (medical-checkup) প্রাপ্ত ওজন নিম্নরূপে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে।

ওজন (কিলোগ্রাম)	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
38 অপেক্ষা কম	0
40 অপেক্ষা কম	3
42 অপেক্ষা কম	5
44 অপেক্ষা কম	9
46 অপেক্ষা কম	14
48 অপেক্ষা কম	28
50 অপেক্ষা কম	32
52 অপেক্ষা কম	35

প্রদত্ত রাশিতথ্যের একটি ক্ষুদ্রতর সূচক ওজিব অঙ্কন করো। লেখচিত্র থেকে মধ্যমা ওজন নির্ণয় করো এবং প্রাপ্ত ফলাফল সূত্রের সাহায্যে যাচাই করো।

3. নীচের সারণিতে একটি গ্রামের 100টি খামারে হেক্টর প্রতি গমের ফলন দেওয়া হল।

উৎপাদিত ফলন (কেজি/ হেক্টর)	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80
খামারের সংখ্যা	2	8	12	24	38	16

প্রদত্ত বিভাজনটিকে বৃহত্তর সূচক বিভাজনে রূপান্তরিত করো এবং তার ওজিব অঙ্কন করো।

14.6 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যায়ন করেছ :

1. শ্রেণিবদ্ধ তথ্যের গড় নির্ণয় করা যায় :

   (i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$

(ii) কল্পিত গড় পদ্ধতি : $\bar{x} = a + \dfrac{\Sigma f_i d_i}{\Sigma f_i}$

(iii) ধাপ বিচ্যুতি পদ্ধতি : $\bar{x} = a + \left(\dfrac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i}\right) \times h$,

এই ধারণার সাহায্যে যে, একটি শ্রেণির পরিসংখ্যা তার মধ্যবিন্দুতে কেন্দ্রীভূত হয়, যাকে শ্রেণির মধ্যমান (class mark) বলা হয়।

2. নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা যায় :

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$$

এখানে প্রতীক (symbols) গুলো তাদের প্রচলিত অর্থ বহন করে।

3. একটি শ্রেণির ক্রমযৌগিক, পরিসংখ্যা হল প্রদত্ত শ্রেণির পূর্ববর্তী সমস্ত শ্রেণির পরিসংখ্যাগুলোর সমষ্টি।

4. নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করা যায়:

$$\text{মধ্যমা} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - \text{cf}}{f}\right) \times h,$$

এখানে প্রতীক (symbols)গুলো তাদের প্রচলিত অর্থ বহন করে।

5. ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা অথবা ক্ষুদ্রতর সূচক ওজিব এবং বৃহত্তর সূচক ওজিব এর মাধ্যমে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজনের লেখচিত্রের উপস্থাপন।

6. লেখচিত্রের সাহায্যে শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের প্রাপ্ত মধ্যমা হল প্রদত্ত তথ্যের উভয় ওজিবের ছেদবিন্দুর ভুজ।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের সংখ্যাগুরু মান এবং মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য সূত্র প্রয়োগ করার পূর্বে নিশ্চিত করতে হবে যে শ্রেণিবিভাগগুলো যেন অবিচ্ছিন্ন হয়। একই অবস্থা একটি ওজিব নির্মানের জন্যও প্রযোজ্য। উপরন্তু, ওজিবের ক্ষেত্রে উভয় অক্ষের স্কেল একই নাও হতে পারে।

সম্ভাবনা
(PROBABILITY)
15

The theory of probabilities and the theory of errors now constitute of formidable body of great mathematical interest and of great practical importance.

– R.S. Woodward

15.1 ভূমিকা

নবম শ্রেণিতে তোমরা ঘটনাসমূহের পরীক্ষামূলক (বা গবেষণামূলক) সম্ভাবনা সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছ, যা বাস্তব পরীক্ষাসমূহের ফলাফলগুলোর উপর নির্ভরশীল ছিল। আমরা একটি মুদ্রাকে1000 বার নিক্ষেপ করার পরীক্ষামূলক বর্ণনা করেছিলাম, যার ফলাফলসমূহের পরিসংখ্যা নিম্নরূপ :

হেড্: 455 টেল : 545

এই পরীক্ষার ভিত্তিতে হেড্-এর গবেষণামূলক সম্ভাবনা হল $\frac{455}{1000}$, অর্থাৎ, 0.455 এবং টেল পাওয়ার সম্ভাবনা হল 0.545। (নবম শ্রেণির গণিত পাঠ্যপুস্তকের পঞ্চদশ অধ্যায়ের উদাহরণ 1 দেখো)। লক্ষ করো এই সম্ভাবনা একটি মুদ্রার 1000 বার নিক্ষেপের একটি বাস্তব পরীক্ষার ফলাফলের উপর নির্ভরশীল। এই কারণে, তাদের *পরীক্ষামূলক বা গবেষণামূলক সম্ভাবনা* বলা হয়। বস্তুত পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা বাস্তব পরীক্ষার ফলাফলসমূহ এবং কোনো ঘটনা ঘটার তথ্য লিপিবদ্ধকরণের উপর নির্ভরশীল। তাছাড়া, এই সম্ভাবনা সমূহ শুধুমাত্র অনুমেয়। যদি আমরা একই পরীক্ষা আরও 1000 বার সম্পন্ন করি, তাহলে প্রাপ্ত ভিন্ন তথ্যের সাপেক্ষে ভিন্ন সম্ভাবনা পেতে পারি।

নবম শ্রেণিতে তোমরা একটি মুদ্রাকে অনেকবার নিক্ষেপ করেছিলে এবং কতবার হেড্ এবং টেল উঠেছিল তা লিপিবদ্ধ করেছিলে (কার্যকলাপ 1 এবং 2 ; অধ্যায় 15))। তোমরা আরও লিপিবদ্ধ করেছ, যদি মুদ্রার টসের সংখ্যা বাড়ানো হয়, তবে পরীক্ষামূলক সম্ভাবনায় হেড্ (অথবা টেল) পাওয়ার সংখ্যা $\frac{1}{2}$ এর নিকট হতে নিকটতর হয়। শুধু তুমি নও, বিশ্বের বিভিন্ন প্রান্তের অনেক ব্যক্তি এই ধরনের পরীক্ষা করেছে এবং হেড্ উঠার সংখ্যা লিপিবদ্ধ করেছে যা একই ফল প্রকাশ করে।

উদাহরণস্বরূপ, অষ্টদশ শতাব্দীতে ফ্রান্সের প্রকৃতিবিদ্ Comte de Buffon একটি মুদ্রাকে 4040 বার টস্ করেছেন এবং হেড্ পেয়েছেন 2048 বার। এই শর্তটিতে হেড পাওয়ার পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা ছিল $\frac{2048}{4040}$ অর্থাৎ 0.507। ব্রিটেনের J.E. Kerrich 10000 টি মুদ্রা টস করে হেড্ লিপিবদ্ধ করেছেন 5067 বার। এই শর্তটিতে হেড্ পাওয়ার পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা ছিল $\frac{5067}{10000} = 0.5067$ । পরিসংখ্যানবিদ্ Karl Pearson আরও অনেক সময় ব্যয় করেছেন 24000টি মুদ্রা টস্ করতে। তিনি পেয়েছেন 12012 বার হেড্ এবং এইভাবে তাঁর হেড্ পাওয়ার পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা ছিল 0.5005।

এখন, আমরা যদি বলি, হেড্ পাওয়ার পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা কী হবে যদি পরীক্ষাটি করা হয় এক মিলিয়ন বার পর্যন্ত? অথবা 10 মিলিয়ন বার পর্যন্ত? এবং যদি এরূপে চলতে থাকে? তোমরা স্বাভাবিকভাবে অনুমান করতে পার যে টস্-এর সংখ্যা বৃদ্ধি পেলে হেড্ অথবা টেল পাওয়ার পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা পরিবর্তিত হতে থাকবে প্রায় 0.5 , অর্থাৎ, $\frac{1}{2}$, যাকে আমরা বলতে পারি হেড্ (অথবা টেল্) পাওয়ার *তাত্ত্বিক সম্ভাবনা* ; যা তোমরা পরবর্তী অধ্যায়ে দেখবে, এই অধ্যায়ে, আমরা কোনো একটি ঘটনার তাত্ত্বিক (প্রাচীনও বলা হয়) সম্ভাবনার পরিচয় প্রদান করেছি এবং এই ধারণার ভিত্তিতে সহজ সমস্যাবলি আলোচনা করা হয়েছে।

15.2 সম্ভাবনা — একটি তাত্ত্বিক অভিগমন (Probability — A Theoretical Approach)

নীচের বিষয়টি বিবেচনা করা যাক :

ধরা যাক একটি মুদ্রা উদ্দেশ্যহীনভাবে টস্ করা হল,

যখন আমরা কোনো মুদ্রা নিয়ে কথা বলি, আমরা ধরে নিই যে এটি পক্ষপাত শূন্য অর্থাৎ প্রতিসম তাই এখানে কোনো কারণ থাকবে না যে, দুটি পাশের কোনটি কখন আসবে। আমরা মুদ্রার এই ধর্মটিকে বলতে পারি *‘নিরপেক্ষ বা পক্ষপাত শূন্য’*। শব্দগুচ্ছ ‘যদৃচ্ছ টস্, (random toss) হতে আমরা বলতে পারি যে, মুদ্রাটিকে পক্ষপাতহীন স্বাধীনভাবে নিক্ষেপ করা হয়েছে।

আগে থেকেই আমরা জানি, যে-কোনো মুদ্রা সম্ভাব্য দুটি রকমের যে-কোনো এক রকমে ভূমিতে পড়ে হয় হেড্ পড়বে নতুবা টেল পড়বে। (মুদ্রাটি ধার বরাবর ভূমিতে পড়বে এই সম্ভাবনা আমরা বাদ দিয়ে থাকি, এটি সম্ভব হতে পারে উদাহরণস্বরূপ, যদি মুদ্রাটি বালিতে পড়ে)। আমরা স্বাভাবিকভাবে অনুমান করতে পারি যে, প্রত্যেকটি ফলাফলে হেড্ অথবা টেল, সমভাবে ঘটতে পারে। আমরা বলতে পারি যে, হেড্ এবং টেল এর *ফলাফল সমসম্ভব*।

সমভাবে সম্ভাব্য বা সমসম্ভব ফলাফলের অপর আরেকটি উদাহরণ, ধরা যাক আমরা একটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করি। এখানে ছক্কা বলতে আমরা বুঝি পক্ষপাতশূন্য ছক্কা। সম্ভাব্য ফলাফলগুলো কী হতে পারে? এগুলো হল 1, 2, 3, 4, 5, 6 ।প্রত্যেকটি সংখ্যা দেখা দেওয়ার সম্ভাবনা একই হবে। তাই একটি ছক্কা নিক্ষেপে সমসম্ভব ফলাফলগুলো হল 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6।

প্রত্যেক পরীক্ষার ফলাফলগুলো সমসম্ভব হবে কি? চলো দেখি।

ধরা যাক, একটি ব্যাগে 4টি লাল বল এবং একটি নীল বল আছে এবং তুমি না দেখে ব্যাগ থেকে একটি বল তুলেছ। ফলাফলগুলো কী হবে? একটি লাল বল এবং একটি নীল বল পাওয়া সমসম্ভব ঘটনা হবে কি? যেহেতু ব্যাগে 4টি লাল বল এবং কেবলমাত্র একটি নীল বল আছে, তুমি সম্মত হবে যে একটি নীল বল পাওয়ার চেয়ে লাল বল পাওয়ার সম্ভাবনা বেশি হবে। তাই ফলাফলগুলো (একটি লাল বল অথবা একটি নীল বল) সমসম্ভব নয়। তবে, ব্যাগ থেকে যে-কোনো রঙের একটি বল তোলার ফলাফল সমসম্ভব। সুতরাং, সব পরীক্ষায় ফলাফলগুলো সমসম্ভব হবে এটি স্বাভাবিক নয়।

তবে, এই অধ্যায়ে, **আমরা ধরে নেব যে, সব পরীক্ষাগুলোর ফলাফলসমূহ সমসম্ভব।**

নবম শ্রেণিতে, আমরা কোনো ঘটনা E-এর জন্য পরীক্ষামূলক অথবা গবেষণামূলক সম্ভাবনা P(E) সংজ্ঞায়িত করেছি,

$$P(E) = \frac{\text{ঘটনা ঘটার পক্ষে প্রচেষ্টার সংখ্যা}}{\text{মোট প্রচেষ্টার সংখ্যা}}$$

সম্ভাবনার গবেষণামূলক ব্যাখ্যা একটি পরীক্ষার সঙ্গো যুক্ত প্রতিটি ঘটনার যেগুলো অসংখ্যবার পুনরাবৃত্ত হয়, তাদের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হয়। কোনো পরীক্ষার পুনরাবৃত্তির প্রয়োজনে কিছু সীমাবদ্ধতা আছে, যেমন ব্যয়বহুল হতে পারে অথবা অনেক পরিস্থিতিতে এটি সম্পাদন করা অসম্ভব হয়। নিঃসন্দেহে মুদ্রানিক্ষেপ অথবা ছক্কা ছোড়া পরীক্ষা কার্য বিশেষ কঠিন কিছু নয়। কিন্তু বার বার উপগ্রহ উৎক্ষেপণে অসফল ঘটনার গবেষণামূলক সম্ভাবনা গণনার ক্ষেত্রে অথবা ভূমিকম্পের দরুন বহুতল বাড়ির ধ্বংসের ঘটনা গণনায় গবেষণামূলক সম্ভাবনা নির্ণয়ে বার বার পরীক্ষা কার্য সম্পাদন অনেকটাই কঠিন ব্যাপার, এক্ষেত্রে কীভাবে পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি করবে?

কোনো পরীক্ষায় যেখানে আমরা নিশ্চিত অনুমান তৈরি করতে পারি সেক্ষেত্রে আমরা পরীক্ষার পুনরাবৃত্তি বাদ দিয়ে থাকি, কেন না সঠিক অনুমান প্রকৃত (তাত্ত্বিক) সম্ভাবনা গণনায় সরাসরি সাহায্য করে। বস্তুত সমসম্ভব ফলাফলের ধারণা (যেগুলো অনেক রকম পরীক্ষায় হতে পারে, যেমন উপরের দুটি উদাহরণের একটি মুদ্রা ক্ষেপন এবং একটি ছক্কা ছোড়া) এমন একটি ধারণা যা আমাদের কোনো ঘটনার সম্ভাবনার নীচের সংজ্ঞাটিকে নির্দেশিত করে।

কোনো ঘটনা E-এর **তাত্ত্বিক সম্ভাবনা** (বা **প্রাচীন সম্ভাবনা**) P(E) দিয়ে সূচিত হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হয় -

$$\mathbf{P(E)} = \frac{\textbf{E ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা}}{\textbf{সমসম্ভব পরীক্ষার সম্ভাব্য মোট ফলাফল সংখ্যা}}$$

যেখানে আমরা ধরে নিই যে, ফলাফলগুলো *সমসম্ভব*।

আমরা সংক্ষেপে তাত্ত্বিক সম্ভাবনাকে সম্ভাবনা রূপে লিখব।

সম্ভাবনার এই সংজ্ঞাটি 1795 সালে Pierre Simon Laplace দিয়েছিলেন।

সম্ভাবনা তত্ত্বের সূচনা হয়েছিল, ষোড়শ শতাব্দীতে যখন ইতালিয়ান চিকিৎসাবিদ্ এবং গণিতবিদ্ J.Cardan প্রথম উক্ত বিষয়ের উপর যে বইটি লিখেছিলেন, তা হল *The Book on Games of Chance* । যদিও গোড়া থেকেই সম্ভাবনা নিয়ে অধ্যয়ন মহান গণিতবিদ্দের মনোযোগ আকৃষ্ট করেছিল। James Bernoulli (1654 – 1705), A. de Moivre (1667 – 1754), এবং Pierre Simon Laplace যারা এই ক্ষেত্রটিতে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রেখেছেন।1812 সালে Laplace এর *Theorie Analytique des Probabilités* তত্ত্বটি সম্ভাবনা তত্ত্বের সর্বশ্রেষ্ঠ অবদান হিসেবে বিবেচনা করা হয়ে থাকে। বর্তমানে বিভিন্ন ক্ষেত্রে সম্ভাবনার ব্যাপক প্রয়োগ হচ্ছে, যেমন- জীববিদ্যা, অর্থনীতিবিদ্যা, সুপ্রজননবিদ্যা, পদার্থবিদ্যা, সমাজবিজ্ঞান ইত্যাদির ক্ষেত্রে।

Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)

চলো আমরা পরীক্ষামূলক গবেষণার সাথে যুক্ত এমন কতকগুলো ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করব যেগুলো সমসম্ভব ঘটনা।

উদাহরণ 1 : একটি মুদ্রাকে একবার টস্ করা হলে হেড্ পড়ার সম্ভাবনা কত? এছাড়া একটি টেল্ পড়ার সম্ভাবনা কত হবে?

সমাধান : একটি মুদ্রা একবার টস্ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো : হেড্ (H) এবং টেল (T)। ধরা যাক, E হল হেড্ পাওয়ার ঘটনা, 'E' ঘটনার পক্ষে প্রাপ্ত ফলাফল সংখ্যা (অর্থাৎ একটি হেড পাওয়ার সংখ্যা) হল 1। সুতরাং,

$$P(E) = P(\text{হেড্}) = \frac{\text{E ঘটনার পক্ষে ফলাফল সংখ্যা}}{\text{মোট সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা}} = \frac{1}{2}$$

অনুরূপে, যদি 'F' টেল্ পাওয়ার ঘটনা হয় তবে,

$$P(F) = P(\text{টেল্}) = \frac{1}{2} \quad (\text{কেন?})$$

উদাহরণ 2 : একটি ব্যাগে সমান আকারের একটি লাল বল, একটি নীল বল এবং একটি হলুদ বল আছে। কৃতিকা যথেচ্ছভাবে ব্যাগ থেকে একটি বল তুলল। তার তোলা বলটি —

(i) হলুদ বল, (ii) লাল বল, (iii) নীল বল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : কৃত্তিকা যথেচ্ছভাবে ব্যাগ থেকে একটি বল তুলল। যেহেতু সে যে-কোনো একটি তুলল তাই ঘটনাগুলো সমসম্ভব।

মনে করি, 'Y হল নির্বাচিত বলটি হলুদ হওয়ার ঘটনা', 'B হল নির্বাচিত বলটি নীল হওয়ার ঘটনা' এবং 'R হল নির্বাচিত বলটি লাল হওয়ার ঘটনা'।

এখন, সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 3

(i) Y ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 1

সুতরাং, $P(Y) = \frac{1}{3}$

অনুরূপে, (ii) $P(R) = \frac{1}{3}$ এবং (iii) $P(B) = \frac{1}{3}$ ।

মন্তব্য :

1. কোনো পরীক্ষার ঘটনায় যদি একটিমাত্র ফলাফল থাকে তবে তাকে *প্রাথমিক (বা মৌলিক)* ঘটনা বলে। উদাহরণ 1-এ, E এবং F উভয়ই প্রাথমিক ঘটনা। একইভাবে উদাহরণ 2-এ Y, B এবং R তিনটি ঘটনাই প্রাথমিক ঘটনা।

2. উদাহরণ 1-এ, আমরা লক্ষ করি : $P(E) + P(F) = 1$

উদাহরণ 2-এ, আমরা লক্ষ করি : $P(Y) + P(R) + P(B) = 1$

লক্ষ করা যাচ্ছে যে, **কোনো পরীক্ষার সকল প্রাথমিক ঘটনাগুলোর সম্ভাবনার সমষ্টি** 1 । এটি সাধারণভাবেও সত্য হয়।

উদাহরণ 3 : ধরা যাক একটি লুডোর ছক্কাকে একবার নিক্ষেপ করা হল। (i) 4 থেকে বড়ো সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত? (ii) 4 অপেক্ষা ছোটো অথবা সমান এমন সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : (i) এখানে, মনে করি, 'E' হল '4 থেকে বড়ো কোনো সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা'। সকল সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সংখ্যা হল 6 (যথা 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6)। E ঘটনার অনুকূলে ফলাফলগুলো হল 5 এবং 6 । সুতরাং, E ঘটনার অনুকূলে মোট ফলাফলুগলোর সংখ্যা = 2 । তাই,

$$P(E) = P\,(4 \text{ অপেক্ষা বড়ো কোনো সংখ্যা}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) মনে করি, 'F' হল '4 অপেক্ষা ছোটো অথবা সমান কোনো সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা'।

সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 6

'F' ঘটনার অনুকূলে ফলাফলগুলো হল 1, 2, 3, 4

সুতরাং, F ঘটনার অনুকূলে মোট ফলাফল সংখ্যা = 4

সুতরাং, $P(F) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

উপরের উদাহরণটিতে E এবং F কি প্রাথমিক ঘটনা? না, তারা **নয়**, কারণ E ঘটনার 2টি ফলাফল

এবং F ঘটনার 4টি ফলাফল আছে।

মন্তব্য : উদাহরণ 1-এ আমরা লক্ষ করেছি

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad (1)$$

যেখানে 'E' হল 'হেড্ পাওয়ার' ঘটনা এবং 'F' হল 'টেল্ পাওয়ার' ঘটনা।

উদাহরণ 3 -এর (i) এবং (ii) থেকে আমরা আরও পাই,

$$P(E) + P(F) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \quad (2)$$

যেখানে 'E' হল '4 এর চেয়ে বড়ো সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা' এবং 'F' হল '4 এর চেয়ে ছোটো অথবা সমান কোনো সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা'।

উল্লেখ্য যে, 4 এর চেয়ে বড়ো নয় এমন কোনো সংখ্যা এবং 4 এর চেয়ে ছোটো অথবা 'সমান কোনো সংখ্যা পাওয়া একই এবং তা বিপরীতক্রমে সত্য।

উপরের (1) এবং (2) এ 'F' এবং 'E নয়' কি একই নয়? হ্যাঁ, একই। আমরা 'E নয়' কে $\bar{E}$ রূপে লিখব।

সুতরাং, $P(E) + P(E \text{ নয়}) = 1$

অর্থাৎ, $P(E) + P(\bar{E}) = 1$, যেখানে $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

সাধারণভাবে, যে-কোনো ঘটনা E এর জন্য এটি সত্য।

$$\mathbf{P(\bar{E}) = 1 - P(E)}$$

কোনো ঘটনা $\bar{E}$ দিয়ে 'E নয়' বোঝায়, যাকে বলা হল E এর **পূরক** ঘটনা। আমরা আরও বলতে পারি যে, E এবং $\bar{E}$ হল পরস্পর **পূরক** ঘটনা।

আরও অগ্রসর হওয়ার আগে, চলো আমরা নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দেওয়ার জন্য চেষ্টা করি :

(i) একটি লুডোর ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে 8 সংখ্যাটি পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ii) একটি লুডোর ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে 7 অপেক্ষা ছোটো কোনো সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

চলো আমরা (i) এর উত্তর নির্ণয় করি :

আমরা জানি একটি ছক্কাকে একবারমাত্র নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত ফলাফল সংখ্যা হবে 6। ফলাফলগুলো হল 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6। যদিও কোনো পার্শ্বতলেই '8' সংখ্যাটি চিহ্নিত থাকে না। তাই '8' এর অনুকুলে কোনো ফলাফল থাকবে না। অর্থাৎ, এই ধরনের ফলাফল সংখ্যা শূন্য (0)। অন্যভাবে ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে '8' সংখ্যাটি পাওয়া *অসম্ভব*।

তাই, $P(8 \text{ পাওয়া}) = \frac{0}{6} = 0$

অর্থাৎ *অসম্ভব* কোনো ঘটনার সম্ভাবনা হবে 0। এই ধরনের ঘটনাকে বলা হয় **অসম্ভব ঘটনা।**

চলো আমরা (ii) এর উত্তর নির্ণয় করি :

যদিও লুডোর ছক্কার প্রত্যেক পার্শ্বতলে নির্দেশিত সংখ্যা 7 অপেক্ষা ছোটো, এটি নিশ্চিত যে, ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে 7 অপেক্ষা ছোটো কোনো সংখ্যা আমরা পাবই। তাই ঘটনার অনুকূলে সম্ভাব্য সকল ফলাফল সংখ্যা হল 6।

সুতরাং, $P(E) = P$ (7 অপেক্ষা ছোটো কোনো সংখ্যা) $= \dfrac{6}{6} = 1$

তাই ঘটনাটির সম্ভাবনা হল **নিশ্চিত** (**sure** or **certain**) এবং তা হল 1। এই ধরনের ঘটনাকে বলা হয় **নিশ্চিত ঘটনা বা অবশ্যম্ভাবী ঘটনা।**

দ্রষ্টব্য : সম্ভাবনার P(E) সংজ্ঞা থেকে, আমরা লক্ষ করেছি যে, লব (ঘটনা E এর অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা) সর্বদা হর (সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা)-এর সমান বা এর চেয়ে ছোটো হয়। অতএব,

$$\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$$

এখন চলো আমরা তাসের সাথে সম্পর্কিত একটি উদাহরণ নিই। তোমরা কি তাসের প্যাকেট দেখেছ? তার মধ্যে 52 টি তাসের কার্ড থাকে এবং এগুলো 13টি করে 4টি গ্রুপে ভাগ করা থাকে। এই চারটি গ্রুপ হল — ইস্কাবন (spades), হরতন (hearts), রুইতন (diamonds) এবং চিড়িতন (Clubs)। চিড়িতন এবং ইস্কাবন কালো রঙের, যেখানে হরতন এবং রুইতন হল লাল রঙের। প্রতি প্রকার তাসকে মান অনুযায়ী সাজালে পাওয়া যায় — টেক্কা (ace), সাহেব (king), বিবি (queen), গোলাম (jack), 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 এবং 2। সাহেব, বিবি ও গোলাম এই তাসগুলোকে *ফেইস কার্ড* (*face cards*) বলা হয়।

উদাহরণ 4 : 52টি তাসের একটি প্যাকেট তাস থেকে যথেচ্ছভাবে 1টি তাস টেনে নেওয়া হল। টানা তাসটি —

(i) টেক্কা হওয়ার

(ii) টেক্কা না হওয়ার - সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : উত্তমরূপ মেশানো (Well-shuffling) *সমসম্ভব* ফলাফলকে নিশ্চিত করে।

(i) একটি প্যাকেটে 4টি টেক্কা আছে। মনে করি E হল তাসটি টেক্কা পাওয়ার ঘটনা।

E ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 4

সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 52 (কেন?)

সুতরাং, $P(E) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

(ii) মনে করি, F হল টানা তাসটি টেক্কা না হওয়ার ঘটনা।

F ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 52 – 4 = 48 (কেন?)

সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 52

সুতরাং, $P(F) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

মন্তব্য : লক্ষ করো যে F ঘটনাটি $\bar{E}$ ছাড়া আর কিছুই নয়। সুতরাং, আমরা P(F) ও এরূপে নির্ণয় করতে পারি যে : $P(F) = P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$.

উদাহরণ 5 : দুজন খেলোয়াড় সংগীতা এবং রেশমা একটি টেনিস ম্যাচ খেলল। এটি জানা আছে যে, সংগীতার ম্যাচ জেতার সম্ভাবনা 0.62। তাহলে রেশমার ম্যাচ জেতার সম্ভাবনা কত ?

সমাধান : মনে করি S এবং R যথাক্রমে সংগীতা এবং রেশমার ম্যাচ জেতার ঘটনাকে সূচিত করে।

সংগীতার ম্যাচ জেতার সম্ভাবনা = $P(S) = 0.62$ (প্রদত্ত)

রেশমার ম্যাচ জেতার সম্ভাবনা = $P(R) = 1 - P(S)$

[যেহেতু R এবং S পরস্পর পূরক ঘটনা]

$= 1 - 0.62 = 0.38$

উদাহরণ 6 : সবিতা এবং হামিদা, ওরা দুই বান্ধবী। এখানে, সম্ভাবনা কী হবে, যখন উভয়ের (i) জন্মদিন ভিন্ন হয়? (ii) জন্মদিন একই হয়? (লিপ-ইয়ার বাদে।)

সমাধান : দুইজন বান্ধবীর মধ্যে একজন বান্ধবী ধরা যাক, সবিতার জন্মদিন বছরের যে-কোনো একদিন হতে পারে। এখন, হামিদার জন্মদিনও বছরে 365 দিনের যে-কোনো একদিন হতে পারে।

আমরা অনুমান করতে পারি যে, এই 365 টি ফলাফল সমসম্ভব।

(i) যদি হামিদের জন্মদিন সবিতার থেকে ভিন্ন হয়, তবে তার জন্মদিনের অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 365 – 1 = 364

তাই, P (হামিদার জন্মদিন সবিতার জন্মদিন থেকে ভিন্ন হওয়ার) = $\frac{364}{365}$

(ii) P (সবিতা এবং হামিদা-এর জন্মদিন একই হওয়ার)

= 1 – P (উভয়ের জন্মদিন ভিন্ন হয়)

$= 1 - \frac{364}{365}$ [যেহেতু $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$]

$= \frac{1}{365}$

উদাহরণ 7 : কোনো স্কুলের দশম শ্রেণির 40 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 25 জন বালিকা এবং 15 জন বালক। শ্রেণি শিক্ষক একজন শিক্ষার্থীকে শ্রেণি পরিচালনার জন্য নিযুক্ত করবেন। তিনি একই রকম কার্ডের উপর প্রত্যেকের নাম আলাদা আলাদা কার্ডে লিখলেন। তারপর কার্ডগুলো একটি ব্যাগে নিয়ে তাদের এলোমেলো করে নেন। তারপর তিনি ব্যাগ থেকে একটি কার্ড তুলেন। কার্ডে লেখা নামটি (i) একজন বালিকার, (ii) একজন বালকের হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

সমাধান : 40 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কেবলমাত্র একটি নাম লেখা কার্ড নেওয়া হবে।

(i) সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 40

তোলা কার্ডটি একজন বালিকার নাম হওয়ার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 25 (কেন?)

সুতরাং, P (কার্ডটিতে একজন বালিকার নাম হওয়া) = P (বালিকা) = $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

(ii) তোলা কার্ডটি একজন বালকের নাম হওয়ার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 15 (কেন?)

সুতরাং, P (তোলা কার্ডটিতে একজন বালকের নাম) = P (বালক) = $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

দ্রষ্টব্য : আমরা P (বালক) এরূপেও নির্ণয় করতে পারি

$$P\,(\text{বালক}) = 1 - P\,(\text{বালক নয়}) = 1 - P\,(\text{বালিকা}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

উদাহরণ 8 : একটি বাক্সে 3টি নীল, 2টি সাদা এবং 4টি লাল মার্বেল আছে। যদি বাক্সটি থেকে যথেচ্ছভাবে একটি মার্বেল তোলা হয়, তাহলে

(i) সাদা, (ii) নীল, (iii) লাল, মার্বেল পাওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

সমাধান : যেহেতু মার্বেলটি যথেচ্ছভাবে তোলা হয়েছে। সুতরাং, বলা যায় প্রতিটি মার্বেল পাওয়া সমসম্ভব ঘটনা।

সুতরাং, সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা = 3 + 2 + 4 = 9 (কেন?)

মনে করি, W দিয়ে মার্বেলটি সাদা হওয়ার ঘটনা, B দিয়ে মার্বেলটি নীল হওয়ার ঘটনা এবং R দিয়ে মার্বেলটি লাল হওয়ার ঘটনাকে সূচিত করে।

(i) W ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 2

তাই, $P(W) = \frac{2}{9}$

একইভাবে, (ii) $P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ এবং (iii) $P(R) = \frac{4}{9}$

উল্লেখ্য যে, $P(W) + P(B) + P(R) = 1$.

উদাহরণ 9 : হরপ্রিত দুটি ভিন্ন মুদ্রাকে একযোগে টস্ করল। (ধরা যাক, একটি হল 1 টাকা এবং অন্যটি 2 টাকার মুদ্রা)। কমপক্ষে একটি হেড্ পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা হেড-এর জন্য H এবং টেল-এর জন্য T লিখব। যখন দুটি মুদ্রাকে একযোগে টস্ করা হয়, তখন সম্ভাব্য ফলাফলগুলো (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) যেগুলোর প্রতিটি সমভাবে সম্ভাব্য। এখানে (H, H) বোঝায় প্রথম মুদ্রাটিতে হেড্ ওঠা এবং দ্বিতীয় মুদ্রাটিতেও হেড ওঠা। অনুরূপে (H, H) বোঝায় প্রথম মুদ্রাটিতে হেড্ ওঠা এবং দ্বিতীয় মুদ্রাটি থেকে টেল্ ওঠা এবং এইরূপে

E ঘটনার অনুকূলে ফলাফলগুলো (কমপক্ষে একটি হেড্) হল (H, H), (H, T) এবং (T, H)। (কেন ?) সুতরাং, E ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 3 ।

সুতরাং, $$P(E) = \frac{3}{4}$$

অর্থাৎ, হরপ্রিতের কমপক্ষে একটি হেড্ পাওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{3}{4}$

দ্রষ্টব্য : আমরা নিম্নলিখিতরূপেও P(E) নির্ণয় করতে পারি:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \left(\text{যেহেতু } P(\bar{E}) = P(\text{হেড নয়}) = \frac{1}{4}\right)$$

তোমরা লক্ষ করেছ কি আলোচিত প্রতিটি উদাহরণে পরীক্ষাগুলোতে সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা নির্দিষ্ট ছিল ? যদি না হয়, তবে তা এখন যাচাই করো।

এমন অনেক পরীক্ষা আছে যাদের ফলাফল প্রদত্ত দুটি সংখ্যার মধ্যবর্তী যে-কোনো সংখ্যা হয় অথবা একটি বৃত্ত বা আয়তক্ষেত্র ইত্যাদির অভ্যন্তরস্থ যে-কোনো বিন্দু ফলাফল হয়। এক্ষেত্রে তোমরা কি সকল সম্ভাব্য ফলাফলগুলোর সংখ্যা গণনা করতে পারবে ? তোমরা জান, এটি সম্ভব নয়, কারণ দুটি সংখ্যার মাঝে অসংখ্য সংখ্যা থাকে। অথবা একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অসংখ্য বিন্দু থাকে। অতএব, তাত্ত্বিক সম্ভাবনার যে সংজ্ঞা আমরা আগে শিখেছি এক্ষেত্রে তা প্রযোজ্য হবে না। তাহলে উপায় কী ? তার উত্তরের জন্য, চলো আমরা নীচের উদাহরণটি দেখি :

উদাহরণ 10* : একটি মিউজিক্যাল চেয়ার খেলায় যে ব্যক্তি সংগীত পরিচালনা করছেন তাকে নির্দেশ দেওয়া হয় যে সংগীত শুরু হওয়ার 2 মিনিটের মধ্যে যে-কোনো সময়ে সংগীত বাজানো বন্ধ করতে হবে। সংগীত শুরু হওয়ার পর প্রথম অর্ধ মিনিটের মধ্যে সঙ্গীত বন্ধ হয়ে যাওয়ার সম্ভাবনা কী হবে ?

সমাধান : এখানে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হল 0 এবং 2 এর মধ্যবর্তী সকল সংখ্যা। 0 থেকে 2 পর্যন্ত সংখ্যারেখার অংশ (চিত্র 15.1 দেখো) লক্ষ করো।

চিত্র 15.1

* পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্গত নয়।

মনে করি, E হল 'প্রথম অর্ধ-মিনিটের মধ্যে সংগীত বন্ধ হওয়ার ঘটনা'।

E এর অনুকূলে ফলাফলগুলো হল সংখ্যারেখার উপর 0 হতে $\frac{1}{2}$ পর্যন্ত বিন্দুগুলো।

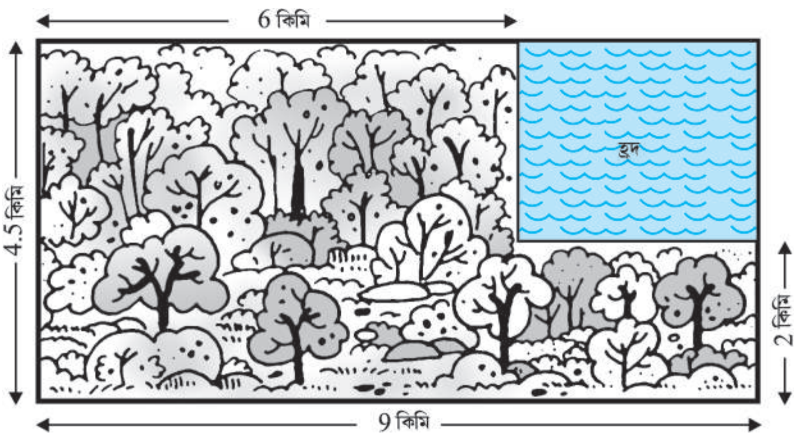
0 থেকে 2 পর্যন্ত দূরত্ব হল 2, আবার 0 থেকে $\frac{1}{2}$ পর্যন্ত দূরত্ব হল $\frac{1}{2}$ ।

যেহেতু সমস্ত ফলাফলগুলো সমসম্ভব, এজন্য আমরা একমত হতে পারি যে, মোট দূরত্ব 2-এর মধ্যে E ঘটনার অনুকূলে দূরত্ব হল $\frac{1}{2}$ ।

তাই, $$P(E) = \frac{\text{E ঘটনার অনুকূলে দূরত্ব}}{\text{সব ফলাফলগুলোর জন্য মোট দুরত্ব}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

উদাহরণ 10-এর মতো সম্ভাবনা নির্ণয়ে অনুকূলে ক্ষেত্রফলের সাথে মোট ক্ষেত্রফলের অনুপাত হিসেবে আমরা এই ধারণার সম্প্রসারণ করতে পারি কি?

উদাহরণ 11* : একটি নিখোঁজ হেলিকপ্টার সম্পর্কে জানা গেল যে, এটি চিত্র 15.2 -তে প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রের কোথাও ভেঙে পড়েছে। এটি চিত্রে দেখানো হ্রদে ভেঙে পড়ার সম্ভাবনা কী হবে?



চিত্র 15.2

সমাধান : হেলিকপ্টারটি এ অঞ্চলের যে-কোনো জায়গায় ভেঙে পড়তে পারে যা সমভাবে সম্ভাব্য।

পুরো অঞ্চলের ক্ষেত্রফল যেখানে হেলিকপ্টার ভেঙে পড়তে পারে

$$= (4.5 \times 9) \text{ কিমি}^2 = 40.5 \text{ কিমি}^2$$

* পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্গত নয়।

হ্রদের ক্ষেত্রফল $= (2.5 \times 3)$ কিমি$^2 = 7.5$ কিমি^{2}

সুতরাং, P (হেলিকপ্টারটি হ্রদে ভেঙে পড়া) $= \dfrac{7.5}{40.5} = \dfrac{75}{405} = \dfrac{5}{27}$

উদাহরণ 12 : একটি শক্ত কাগজের বাক্সে (carton) 100 টি শার্ট যাদের 88টি ভালো, 8টি সামান্য ত্রুটিযুক্ত এবং 4টি খুব বেশি ত্রুটিযুক্ত আছে। একজন ব্যবসায়ী জিমি শুধুমাত্র ভালো শার্টগুলো গ্রহণ করবে, কিন্তু অপর ব্যবসায়ী সুজাতা শুধুমাত্র খুব বেশি ত্রুটিযুক্ত শার্টগুলো বাতিল করবে। বাক্সটি থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি শার্ট তোলা হলে এটি

(i) জিমির গ্রহণযোগ্য হওয়ার

(ii) সুজাতার গ্রহণযোগ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে ?

সমাধান : 100টি শার্টের মধ্যে থেকে যথেচ্ছভাবে একটি শার্ট তোলা হল। অতএব, এখানে সমসম্ভব ফলাফল সংখ্যা হল 100।

(i) জিমির অনুকূলে (অর্থাৎ গ্রহণযোগ্য হওয়ার) ফলাফল সংখ্যা $= 88$ (কেন ?)

সুতরাং, P (শার্টটি জিমির গ্রহণযোগ্য হওয়ার) $= \dfrac{88}{100} = 0.88$

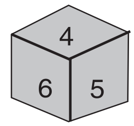
(ii) সুজাতার অনুকূলে (অর্থাৎ গ্রহণযোগ্য হওয়ার) ফলাফল সংখ্যা $= 88 + 8 = 96$ (কেন ?)

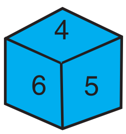
তাই, P (শার্টটি সুজাতার গ্রহণযোগ্য হওয়ার) $= \dfrac{96}{100} = 0.96$

উদাহরণ 13 : দুটি লুডোর ছক্কা, একটি নীল এবং একটি ধূসর, একই সাথে নিক্ষেপ করা হল। সকল সম্ভাব্য ফলাফলগুলো লেখো। সম্ভাবনা কী হবে যখন দুটি ছক্কার উপরিতলে আসা সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি —

(i) 8? (ii) 13? (iii) 12 বা 12 অপেক্ষা কম ?

সমাধান : যখন নীল ছক্কা '1' দেখাবে, ধূসর ছক্কা সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5, 6 এর যে-কোনো একটি দেখাতে পারে। একইরকম ভাবে সত্য হবে যখন নীল ছক্কা '2', '3', '4', '5' বা '6' দেখাবে। পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল নীচের টেবিলে তালিকাভুক্ত করা হল; প্রতিটি ক্রমিত জোড়ায় প্রথম সংখ্যাটি নীল ছক্কা এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি ধূসর ছক্কার উপরিতলের সংখ্যাকে প্রদর্শন করে।





	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

চিত্র **15.3**

এখানে উল্লেখ্য যে, (1, 4) যুগলটি (4, 1) যুগল থেকে পৃথক। (কেন?)

সুতরাং, সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যা $= 6 \times 6 = 36$।

(i) 'সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 8' এর অনুকূলে ফলাফলগুলোর ঘটনা E হলে, এক্ষেত্রে ফলাফলগুলো হল: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) (15.3 চিত্রে দেখো)

অর্থাৎ, E ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা = 5.

অতএব, $$P(E) = \frac{5}{36}$$

(ii) তোমরা চিত্র 15.3-এ দেখতে পেয়েছ যে, F 'সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 13' ঘটনার অনুকূলে কোনো ফলাফল নেই।

তাই, $$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

(iii) তোমরা চিত্র 15.3-এ দেখতে পেয়েছ যে, G 'সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি ≤ 12' ঘটনার অনুকূলে সবগুলো ফলাফলই হয়।

সুতরাং, $$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

অনুশীলনী 15.1

1. নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সম্পূর্ণ করো :

(i) কোনো ঘটনা E + 'E নয়' ঘটনার সম্ভাবনা = ________।

(ii) কোনো ঘটনা যা ঘটতে পারে না, এর সম্ভাবনা হল ________ , এমন ঘটনাকে বলা হয় ________।

(iii) কোনো ঘটনা যা নিশ্চিত ঘটতে পারে তার সম্ভাবনা হল ________ , এমন ঘটনাকে বলা হয় ________ ।

(iv) কোনো পরীক্ষার সকল প্রাথমিক ঘটনার সম্ভাবনাগুলোর সমষ্টি ________ ।

(v) কোনো ঘটনার সম্ভাবনা ________ এর চেয়ে বড়ো অথবা সমান এবং ________ এর চেয়ে ছোটো অথবা সমান।

2. নিম্নলিখিত কোন্ পরীক্ষাগুলোতে সমসম্ভব ফলাফল আছে? ব্যাখ্যা করো।

(i) একজন চালক একটি গাড়ি চালানোর চেষ্টা করেন। গাড়িটি চলবে অথবা চলবে না।

(ii) একজন খেলোয়াড় একটি বাস্কেটবল সবেগে নিক্ষেপ (shoot) করার চেষ্টা করেন। তিনি এতে সফল অথবা অসফল হবেন।

(iii) একটি সত্য-মিথ্যা প্রশ্নের উত্তর দিতে একটি প্রচেষ্টা করা হল। উত্তরটি সঠিক অথবা ভুল।

(iv) একটি শিশুর জন্ম হয়। এটি একটি ছেলে অথবা একটি মেয়ে।

3. কোনো ফুটবল খেলার শুরুতে কোন্ দল বলটি পাবে তা নির্ধারণের জন্য একটি নিখুঁত উপায় হিসেবে মুদ্রা টস্ করা হয় কেন?

4. নিম্নলিখিত কোন্ সংখ্যাটি কোনো ঘটনার সম্ভাবনা হবে না?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) -1.5 (C) 15% (D) 0.7

5. যদি $P(E) = 0.05$; তবে ‘E নয়’ এর সম্ভাবনা কত?

6. একটি ব্যাগে শুধুমাত্র লেবু স্বাদযুক্ত মিছরি আছে। মালিনী না দেখে ব্যাগ থেকে একটি মিছরি তুলে নিল। তার তুলে নেওয়া মিছরিটি —

(i) একটি কমলা স্বাদযুক্ত মিছরি হওয়ার

(ii) একটি লেবু স্বাদযুক্ত মিছরি হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

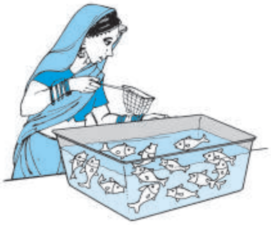
7. এটি দেওয়া হয়েছে যে, 3 জন ছাত্রের একটি গ্রুপে, 2 জন শিক্ষার্থীর একই জন্মদিন না হওয়ার সম্ভাবনা 0.992। তাহলে 2 জন শিক্ষার্থীর একই জন্মদিন হওয়ার সম্ভাবনা কত?

8. একটি ব্যাগে 3টি লাল বল এবং 5টি কালো বল আছে। ব্যাগটি থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বল তোলা হলে বলটি (i) লাল (ii) লাল নয় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

9. একটি বাক্সে 5টি লাল মার্বেল, 8টি সাদা মার্বেল এবং 4টি সবুজ মার্বেল রয়েছে। তাদের মধ্য থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি মার্বেল তোলা হল। তোলা মার্বেলটি (i) লাল (ii) সাদা (iii) ‘সবুজ না’ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

10. একটি মুদ্রা সঞ্চয়ের খেলনা ব্যাংকে (piggy bank) 100টি 50 পয়সার মুদ্রা, 50টি 1 টাকার মুদ্রা, 20টি 2 টাকার মুদ্রা এবং 10টি 5 টাকার মুদ্রা আছে। যখন ব্যাংকটিকে উপুড় করা হয় তখন কোনো একটি মুদ্রা পড়ার ঘটনা সমসম্ভব হয়, তবে মুদ্রাটি (i) 50 পয়সার মুদ্রা (ii) ‘5 টাকার মুদ্রা না’ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

11. গোপী তার অ্যাকোয়ারিয়ামের জন্য দোকান থেকে একটি মাছ কিনে নেয়। দোকানদার 5 টি পুরুষ মাছ এবং 8টি স্ত্রী মাছ ধারণকারী একটি ট্যাংক থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি মাছ ধরে দেয় (চিত্র 15.4 দেখো)। ধরা মাছটি 'একটি পুরুষ মাছ' হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।



চিত্র 15.4

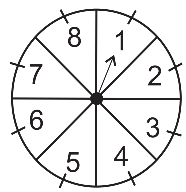
12. সুযোগের একটি খেলায় তির চিহ্নযুক্ত গোলাকার চাকতি রয়েছে। তির চিহ্নযুক্ত পাতটি ঘুরার পর 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (চিত্র 15.5 দেখো) সংখ্যাগুলোর একটিতে গিয়ে থামবে এবং এই ফলাফলগুলো সমসম্ভব হয়, তবে তির নির্দেশিত সংখ্যাটি

(i) 8 হওয়ার

(ii) একটি অযুগ্ম সংখ্যা হওয়ার

(iii) 2 অপেক্ষা বড়ো একটি সংখ্যা হওয়ার

(iv) 9 অপেক্ষা ছোটো একটি সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?



চিত্র 15.5

13. একটি লুডোর ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হল। তাহলে

(i) একটি মৌলিক সংখ্যা; (ii) 2 এবং 6 এর মধ্যবর্তী একটি সংখ্যা (iii) একটি অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

14. উত্তমরূপে মেশানো (well-shuffled) 52 টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে একটি তাস তোলা হল। তাসটি

(i) লাল রঙের রাজা (ii) একটি ফেস কার্ড (iii) একটি লাল ফেস কার্ড

(iv) হরতনের গোলাম (v) একটি ইস্কাবন (vi) রুইতনের রাণী হওয়ার

সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

15. পাঁচটি কার্ড — রুইতনের দশ, গোলাম, রানি, রাজা এবং টেক্কা, এদের উপুড় করে উত্তমরূপে মেশানো হয়েছে। তারপর উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি কার্ড তোলা হল।

(i) এই কার্ডটি রানি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) যদি রানি তোলা হয় এবং সরিয়ে রাখা হয় তবে দ্বিতীয় কার্ডটি (a) একটি টেক্কা (b) একটি রানি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

16. 12টি ত্রুটিপূর্ণ কলম ভুলবশত 132টি ভালো কলমে মিশ্রিত হয়। শুধুমাত্র দেখে একটি কলম ত্রুটিযুক্ত বা ত্রুটিমুক্ত কিনা বলা সম্ভব নয়। এদের থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি কলম নেওয়া হল। তুলে নেওয়া কলমটি ভালো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

17. (i) 20টি বাল্‌বের একটি লটের মধ্যে 4 টি ত্রুটিযুক্ত বাল্‌ব রয়েছে। এদের মধ্য থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বাল্‌ব তোলা হল। বাল্‌বটি ত্রুটিযুক্ত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) ধরা যাক (i) নং এ তোলা ববাল্‌বটি ত্রুটিযুক্ত নয় এবং প্রতিস্থাপিত করা হয়নি। এখন অবশিষ্ট

বাল্‌বগুলো থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বাল্‌ব তোলা হল। এই বাল্‌বটি ত্রুটিযুক্ত না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

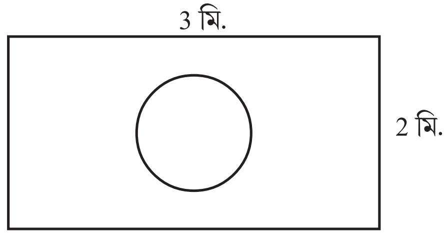
18. একটি বাক্সে 90টি ডিস্ক বা চাকতি রয়েছে যেগুলোতে 1 থেকে 90 পর্যন্ত নম্বর লিখে দেওয়া আছে। যদি বাক্স থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি ডিস্ক তোলা হয়, তবে এটি একটি (i) দুই অঙ্কের সংখ্যা (ii) পূর্ণবর্গসংখ্যা (iii) 5 দিয়ে বিভাজ্য একটি সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

19. একটি শিশুর কাছে একটি ছক্কা আছে যার ছয়টি তলে নিম্নলিখিত অক্ষরগুলো রয়েছে :

$\boxed{A}$ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ $\boxed{A}$

ছক্কাটি একবার নিক্ষেপ করা হল। তাহলে (i) A (ii) D পাওয়ার সম্ভাবনা কী হবে?

20*. মনে করো, তুমি একটি ছক্কাকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি আয়তকার অঞ্চলে ফেলেছ (চিত্র 15.6 দেখো)। ছক্কাটি 1 মি. ব্যাসবিশিষ্ট ভূমিতে পড়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।



চিত্র 15.6

21. 144 টি বল পেনের একটি লটের মধ্যে 20টি ত্রুটি যুক্ত এবং অন্যগুলো ভালো। যদি ভালো হয়, তবে নুরি একটি কলম কিনবে কিন্তু ত্রুটিযুক্ত হলে এটি কিনবে না। দোকানদার উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি কলম তোলেন এবং এটি তাকে দেন। তাহলে সে

(i) এটি কেনা

(ii) এটি না কেনার সম্ভাবনা কী হবে?

22. উদাহরণ 13 অনুযায়ী (i) নীচের সারণিটি পূরণ করো :

ঘটনা :'দুটি ছক্কায় প্রাপ্ত ফলের সমষ্টি'	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাবনা	$\frac{1}{36}$						$\frac{5}{36}$				$\frac{1}{36}$

(ii) একজন ছাত্র যুক্তি করে যে, এখানে 11টি সম্ভাব্য ফলাফল 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 এবং 12। অতএব, তাদের প্রতিটির সম্ভাবনা হল $\frac{1}{11}$ । তুমি কি যুক্তিটির সাথে একমত? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

* পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্ভুক্ত নয়।

23. একটি খেলায় এক টাকার মুদ্রা 3 বার টস্ করা হল এবং প্রতিটি ক্ষেত্রে তার ফলাফল উল্লেখ করা হয়। হানিফ জিতবে যদি টস্ করা প্রতিটি ফল একই হয় অর্থাৎ তিনটি হেড্ অথবা তিনটি টেল্ অন্যথায় সে হারবে। হানিফের খেলাতে হারার সম্ভাবনা গণনা করো।

24. একটি লুডোর ছক্কা দুবার নিক্ষেপ করা হল। তবে —

(i) 5 সংখ্যাটি কোনো ক্ষেত্রে আসবে না (ii) 5 সংখ্যাটি আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

[**সংকেত :** একটি ছক্কা দুবার নিক্ষেপ এবং একই সাথে দুটি ছক্কা নিক্ষেপ করা একই পরীক্ষা নির্দেশ করবে।]

25. নীচের কোন্ বিবৃতিটি সঠিক এবং কোন্টি সঠিক নয়। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(i) যদি দুটি মুদ্রা একযোগে টস্ করা হলে তিনটি সম্ভাব্য ফলাফল — দুটি হেড্, দুটি টেল্ অথবা প্রতিটির একটি। অতএব, এই প্রতিটি ফলাফলগুলোর প্রতিটির সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ ।

(ii) যদি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়, তবে সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা 2টি — অযুগ্ম সংখ্যা অথবা যুগ্ম সংখ্যা। অতএব, একটি অযুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ ।

অনুশীলনী 15.2 (ঐচ্ছিক)*

1. একই সপ্তাহে (মঙ্গলবার থেকে শনিবার) শ্যাম ও একতা দুজন গ্রাহক একটি বিশেষ দোকান পরিদর্শন করেন। তারা প্রত্যেকে যে-কোনো ভিন্ন দিনে বা একই দিনে দোকানে যেতে পারে। তবে (i) একই দিনে (ii) পরপর দিনগুলোতে (iii) বিভিন্ন দিনে, দোকানটি উভয়ের পরিদর্শনের সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

2. একটি ছক্কায় এমনভাবে নম্বর করা হয় যে তার উপরিতলের সংখ্যাগুলো 1, 2, 2, 3, 3, 6 দেখায়। এটিকে দুইবার নিক্ষেপ করা হয় এবং দুইবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত মোট স্কোরগুলো লক্ষ করা হয়। নীচের সারণিটিতে দুইবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত স্কোরের কয়েকটির যোগফল দেওয়া হয়েছে, সারণিটি পূর্ণ করো।

প্রথম নিক্ষেপে সংখ্যা

দ্বিতীয় নিক্ষেপে সংখ্যা	+	1	2	2	3	3	6
	1	2	3	3	4	4	7
	2	3	4	4	5	5	8
	2					5	
	3						
	3			5			9
	6	7	8	8	9	9	12

* এই অনুশীলনীটি পরীক্ষা সংক্রান্ত বিষয়ে অন্তর্ভুক্ত নয়।

প্রাপ্ত ফলের যোগফলের মান

(i) যুগ্ম (ii) 6 (iii) অন্তত 6 হওয়ার সম্ভাবনা কত?

3. একটি ব্যাগে 5টি লাল বল এবং কিছু নীল বল রয়েছে। যদি একটি নীল বল তোলার সম্ভাবনা একটি লাল বলের সম্ভাবনার *দ্বিগুণ* হয়, তবে ওই ব্যাগের নীল বলের সংখ্যা নির্ণয় করো।

4. একটি বাক্সে 12টি বল রয়েছে যার মধ্যে x টি কালো। বাক্স থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি বল তোলা হলে, এটি একটি কালো বল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।
যদি বাক্সে আরও 6টি কালো বল রাখা হয়, তবে কালো বল তোলার সম্ভাবনা আগের চেয়ে দ্বিগুণ হয়। x এর মান নির্ণয় করো।

5. একটি বয়ামে 24টি মার্বেল রয়েছে। এই মার্বেলগুলোর কয়েকটি সবুজ ও কয়েকটি নীল রঙের। উদ্দেশ্যহীনভাবে বয়াম থেকে একটি মার্বেল তোলা হল। ওই মার্বেলটি সবুজ হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$ হলে বয়ামটিতে নীল মার্বেলের সংখ্যা কত?

15.3 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নীচের বিষয়গুলো জেনেছ :

1. পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা এবং তাত্ত্বিক সম্ভাবনার পার্থক্য।

2. কোনো ঘটনা E এর তাত্ত্বিক (প্রাচীন) সম্ভাবনা, লেখা হয় P(E) দিয়ে যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

$$P(E) = \frac{E \text{ ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা}}{\text{পরীক্ষার সকল সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা}}$$

যেখানে আমরা ধরে নিই যে, পরীক্ষার ফলাফলগুলো সমসম্ভব।

3. একটি নিশ্চিত (অথবা অবশ্যম্ভাবী) ঘটনার সম্ভাবনার মান 1

4. একটি অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনার মান 0

5. একটি সাধারণ ঘটনা E এর সম্ভাবনা P(E) হলে $0 \le P(E) \le 1$ হয়।

6. যে ঘটনার একটি ফলাফল থাকে তাকে প্রাথমিক বা মৌলিক ঘটনা বলে। কোনো একটি পরীক্ষার সঙ্গে জড়িত সবগুলো প্রাথমিক (মৌলিক) ঘটনার সম্ভাবনার সমষ্টি 1 হয়।

7. কোনো একটি ঘটনা E এর ক্ষেত্রে $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ হয়। যেখানে $\bar{E}$ বোঝায় 'E নয়'। E এবং $\bar{E}$ পরস্পর পূরক ঘটনা।

পাঠকের উদ্দেশ্যে একটি বিষয়

কোনো একটি ঘটনার পরীক্ষামূলক বা গবেষণামূলক সম্ভাবনা আসলে কী ঘটছে তার উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়। অপরদিকে কোনো ঘটনার তাত্ত্বিক সম্ভাবনা নির্ণয়ে কী ঘটবে তা নির্দিষ্ট অনুমানের ভিত্তিতে পূর্বাভাস দেওয়ার প্রচেষ্টা করে। কোনো পরীক্ষায় প্রচেষ্টা সংখ্যা বৃদ্ধি করা হলে, আমরা আশা করতে পারি যে, পরীক্ষামূলক এবং তাত্ত্বিক সম্ভাবনা প্রায় একই হবে।

গাণিতিক প্রমাণ
(PROOFS IN MATHEMATICS)

A1

A1.1 ভূমিকা

যুক্তিপ্রদান এবং পরিষ্কারভাবে চিন্তা করার ক্ষমতা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে অত্যন্ত দরকারি। উদাহরণস্বরূপ, ধরো একজন রাজনীতিবিদ তোমাকে বলল, 'যদি তুমি একটি স্বচ্ছ সরকারে আগ্রহী হও তবে তোমার আমাকে ভোট দেওয়া উচিত'। সে আসলে তোমাকে বিশ্বাস করাতে চাইছে যে, তুমি তাকে ভোট না দিলে তুমি একটি স্বচ্ছ সরকার পাবে না। অনুরূপভাবে, যদি একটি কোম্পানি বিজ্ঞাপন দিয়ে তোমায় বলে, 'বুদ্ধিমানরা XYZ প্রকারের জুতো পরিধান করে', তাহলে কোম্পানিটি তোমাকে বোঝাতে চায় যে যদি তুমি XYZ জুতো না পরিধান কর তবে তুমি যথেষ্ট বুদ্ধিমান নও। তুমি নিজে পর্যবেক্ষণ করতে পারবে যে উপরের উভয় বিবৃতি সাধারণ জনগণকে বিভ্রান্ত করতে পারে। সুতরাং, যদি আমরা যুক্তি সঠিকভাবে বুঝতে পারি তবে আমরা অজ্ঞাতসারে এই ধরনের ফাঁদে পড়ব না।

যুক্তির সঠিক ব্যবহার হল গণিতের গুরুত্বপূর্ণ অংশ, বিশেষ করে প্রমাণের ক্ষেত্রে। নবম শ্রেণিতে, এই প্রমাণগুলোর ধারণা সম্পর্কে তোমাদের পরিচিত করা হয়েছিল এবং তোমরা আসলে বিভিন্ন উক্তি (বিবৃতি) প্রমাণ করেছ বিশেষ করে জ্যামিতিতে। পুনরায় স্মরণ করো যে, একটি প্রমাণ কয়েকটি গাণিতিক বিবৃতি (উক্তি) দিয়ে তৈরি, যার প্রতিটি যৌক্তিকভাবে প্রমাণিত, পূর্বের প্রমাণে ব্যবহৃত বিবৃতিগুলো থেকে অথবা পূর্বের প্রমাণিত একটি উপপাদ্য থেকে, অথবা একটি স্বতঃসিদ্ধ থেকে, অথবা একটি প্রকল্প থেকে আমরা একটা প্রমাণ করতে গিয়ে যে মূল উপাদান ব্যবহার করি তা অবরোহী যুক্তির একটি প্রক্রিয়া।

গাণিতিক যুক্তি কি এর পর্যালোচনা নিয়ে আমরা এই অধ্যায় শুরু করব। তারপরে, বিভিন্ন উদাহরণ ব্যবহার করে আমাদের দক্ষতাগুলোকে ন্যায়সম্মত যুক্তির মাধ্যমে বিকশিত করার জন্য অগ্রসর হব। আমরা না-ক্রিয়ার (negation) ধারণাগুলো নিয়ে আলোচনা করব এবং একটি প্রদত্ত বিবৃতির না-ক্রিয়া নির্ণয় করব। তারপর, আমরা একটি প্রদত্ত বিবৃতির বিপরীত বিবৃতিটি কী বোঝায় তা আলোচনা করব। অবশেষে, আমরা নবম শ্রেণিতে বিশ্লেষণের মাধ্যমে কিছু উপপাদ্যের প্রমাণ করেছি এমন প্রমাণের উপাদানগুলোর পর্যালোচনা করব। এখানে, আমরা বিরোধী উক্তির (কল্পনা বিরোধের) দ্বারা প্রমাণের ধারণাও আলোচনা করব, যা তোমরা নবম শ্রেণিতে এবং এই বইয়ের অন্যান্য কিছু অধ্যায়ে জেনে এসেছ।

A1.2 গাণিতিক উক্তির (বা বিবৃতির) পুনরালোচনা (Mathematical Statements Revisited)

পুনরায় স্মরণ করে দেখো যে, একটি উক্তি হল একটি অর্থপূর্ণ বাক্য, আদেশ বা বিস্ময়াদিবোধক বা প্রশ্নবোধক হয় না। উদাহরণস্বরূপ, 'কোন দুটি দল বিশ্বকাপ ক্রিকেটের ফাইনাল ম্যাচটি খেলছে?' এটি হল একটি প্রশ্ন, একটি উক্তি নয়। 'যাও এবং তোমার বাড়ির কাজ শেষ করো' হল একটি আদেশ, এটি উক্তি নয়। 'কী একটি চমৎকার গোল (goal) ! এটি হল একটি বিস্ময়, একটি উক্তি নয়।

মনে রাখবে, সাধারণভাবে, উক্তি নিম্নলিখিতগুলোর একটি হতে পারে :

- *সর্বদাই সত্য*
- *সর্বদাই মিথ্যা*
- *দ্ব্যর্থক*

নবম শ্রেণির গণিতে তোমার জেনেছ যে, **একটি উক্তি গ্রহণযোগ্য হবে একমাত্র যদি এটি হয় সর্বদাই সত্য বা সর্বদাই মিথ্যা।** সুতরাং, দ্ব্যর্থযুক্ত বাক্যগুলো গাণিতিক উক্তি হিসেবে বিবেচিত হবে না।

চলো আমরা কিছু উদাহরণের সাহায্যে আমাদের বোধগম্য বিষয়গুলো পর্যালোচনা করি।

উদাহরণ 1 : নীচের উক্তিগুলো কি সর্বদাই সত্য, নাকি সর্বদাই মিথ্যা অথবা দ্ব্যর্থক তা উল্লেখ করো। উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) সূর্য পৃথিবীর চারিদিকে ঘোরে।

(ii) যানবাহনের চারটি চাকা আছে।

(iii) আলোর গতিবেগ আনুমানিক 3×10^5 কিমি/সেকেন্ড।

(iv) কোলকাতা যাওয়ার একটি রাস্তা নভেম্বর থেকে মার্চ মাস পর্যন্ত বন্ধ থাকবে।

(v) সকল মানুষই মরনশীল।

সমাধান :

(i) এই উক্তিটি সর্বদাই মিথ্যা, যেহেতু জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা আবিষ্কার করেছেন যে পৃথিবী সূর্যের চারিদিকে ঘোরে।

(ii) এই উক্তিটি দ্ব্যর্থক, কারণ এটি সর্বদা সত্য কিনা বা সর্বদা মিথ্যা কিনা তা আমরা নির্ধারণ করতে পারি না। এটি নির্ভর করে এটি কী ধরনের যানবাহন — যানবাহনের 2, 3, 4, 6, 10 ইত্যাদি সংখ্যক চাকা থাকতে পারে।

(iii) এই উক্তিটি সর্বদাই সত্য, যা পদার্থবিদ্‌দের দ্বারা যাচাই করা।

(iv) এই উক্তিটি দ্ব্যর্থক, কারণ এটি পরিষ্কার নয় যে কোন রাস্তাটির কথা বলা হয়েছে।

(v) এই উক্তিটি সর্বদাই সত্য, যেহেতু প্রত্যেক মানুষকেই কোনো না কোনো সময় মরতে হবে।

উদাহরণ 2 : নীচের উক্তিগুলো সত্য নাকি মিথ্যা তা উল্লেখ করো এবং তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) সকল সমবাহু ত্রিভুজই সমদ্বিবাহু।

(ii) কিছু সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সমবাহু হয়।

(iii) সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজই সমবাহু।

(iv) কিছু মূলদ সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা হয়।
(v) কিছু মূলদ সংখ্যা অখণ্ড সংখ্যা নয়।
(vi) সকল অখণ্ড সংখ্যাই মূলদ নয়।
(vii) যে-কোনো দুটি মূলদ সংখ্যার মাঝে কোনো মূলদ সংখ্যা নেই।

সমাধান :

(i) এই উক্তিটি সত্য, কারণ সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান, এবং সেইজন্য এটি সমদ্বিবাহু।
(ii) এই উক্তিটি সত্য, কারণ যে সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় $60°$ সেগুলো সমবাহু।
(iii) এই উক্তিটি মিথ্যা। এর একটি বিপরীত উদাহরণ দাও।
(iv) এই উক্তিটি সত্য, যেহেতু $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যাসমূহ (যেখানে p একটি অখণ্ড সংখ্যা এবং $q = 1$), একটি অখণ্ড সংখ্যা হয়। (উদাহরণস্বরূপ, $3 = \frac{3}{1}$)।
(v) এই উক্তিটি সত্য, যেহেতু $\frac{p}{q}$ আকারের মূলদ সংখ্যাগুলো অখণ্ড সংখ্যা নয়, যেখানে p, q হল অখণ্ড সংখ্যা এবং q দিয়ে p বিভাজ্য নয় (উদাহরণস্বরূপ, $\frac{3}{2}$)।
(vi) এই উক্তিটিকে আমরা এরকমভাবে বলতে পারি যে, 'একটি অখণ্ড সংখ্যা যা মূলদ সংখ্যা নয়'। এটি মিথ্যা, কারণ সকল অখণ্ড সংখ্যাই হল মূলদ সংখ্যা।
(vii) এই উক্তিটি মিথ্যা, যেহেতু তোমরা জান যে, r এবং s দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে $\frac{r+s}{2}$ অবস্থিত, যা একটি মূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ 3 : যদি $x < 4$, নীচের কোন্ উক্তিগুলো সত্য ? তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) $2x > 8$ (ii) $2x < 6$ (iii) $2x < 8$

সমাধান :

(i) এই উক্তিটি মিথ্যা, কারণ উদাহরণস্বরূপ, $x = 3 < 4$ অসমীকরণ $2x > 8$-কে সিদ্ধ করে না।
(ii) এই উক্তিটি মিথ্যা, কারণ উদাহরণস্বরূপ, $x = 3.5 < 4$ অসমীকরণ $2x < 6$ -কে সিদ্ধ করে না।
(iii) এই উক্তিটি সত্য, কারণ এটি $x < 4$ এর অনুরূপ।

উদাহরণ 4 : উপযুক্ত শর্ত প্রয়োগ করে, নিম্নলিখিত উক্তিগুলোকে নতুন করে বিবৃত করো, যাতে সত্য হয় :

(i) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণগুলো সমান হয়, তবে এটি একটি আয়তক্ষেত্র।
(ii) একটি সরলরেখা ত্রিভুজের দুটি বাহুর উপর দুটি বিন্দুকে যুক্ত করলে তা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।
(iii) সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা p-এর জন্য $\sqrt{p}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
(iv) সকল দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বাস্তব বীজ আছে।

সমাধান :

(i) যদি একটি সামান্তরিকের কর্ণগুলো সমান হয়, তবে এটি একটি আয়তক্ষেত্র।

(ii) একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

(iii) সকল মৌলিক সংখ্যা p-এর জন্য $\sqrt{p}$ অমূলদ।

(iv) সকল দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বাধিক দুটি বাস্তব বীজ আছে।

মন্তব্য : উপরোক্ত উক্তিগুলোকে অন্যভাবেও বলা যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, (iii) কে অন্যভাবে বলা যায় যে, 'পূর্ণবর্গ নয় এরকম সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা p-এর জন্য $\sqrt{p}$ অমূলদ সংখ্যা হয়।

অনুশীলনী A1.1

1. নীচের উক্তিগুলো কি সর্বদাই সত্য, নাকি সর্বদাই মিথ্যা অথবা দ্ব্যর্থক। তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) গণিতের সকল পাঠ্যপুস্তকই মজাদার।

(ii) পৃথিবী থেকে সূর্য্যের দূরত্ব আনুমানিক 1.5×10^8 কিমি।

(iii) সকল মানুষই বৃদ্ধ হয়।

(iv) উত্তরকাশি থেকে হারসিল পর্যন্ত ভ্রমণ ক্লান্তিকর।

(v) মহিলাটি একজোড়া দূরবিন দিয়ে একটি হাতি দেখেছিল।

2. নীচের উক্তিগুলো সত্য নাকি মিথ্যা তা উল্লেখ করো। তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) সকল ষড়ভুজই বহুভুজ।

(ii) কিছু বহুভুজ হল পঞ্চভুজ।

(iii) সকল যুগ্ম সংখ্যা 2 দিয়ে বিভাজ্য নয়।

(iv) কিছু বাস্তব সংখ্যা অমূলদ।

(v) সকল বাস্তব সংখ্যা মূলদ নয়।

3. ধরো a ও b বাস্তব সংখ্যা যেখানে $ab \neq 0$ । তখন নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর মধ্যে কোনগুলো সত্য? তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

(i) a এবং b উভয় অবশ্যই শূন্য হবে।

(ii) a এবং b উভয় অবশ্যই অশূন্য হবে।

(iii) হয় a অথবা b অবশ্যই অশূন্য হবে।

4. উপযুক্ত শর্ত প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত উক্তিগুলোকে নতুন করে বিবৃত করো, যাতে সত্য হয়।

(i) যদি $a^2 > b^2$ হয়, তবে $a > b$ হবে।

(ii) যদি $x^2 = y^2$ হয়, তবে $x = y$ হবে।

(iii) যদি $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ হয়, তবে $x = 0$ হবে।

(iv) চতুর্ভুজের কর্ণগুলো পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

A1.3 অবরোহী যুক্তি (Deductive Reasoning)

নবম শ্রেণিতে, অবরোহী যুক্তির ধারণা সম্পর্কে তোমরা পরিচিত হয়েছ। এখানে, আমরা আরো কিছু উদাহরণ নিয়ে কাজ করব, যেগুলো ব্যাখ্যা করবে যে, কীভাবে অবরোহী যুক্তি ব্যবহার করে প্রদত্ত উক্তি যাকে সত্যি ধরা

হয়েছে সেই সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যায়। প্রদত্ত উক্তিটিকে বলা হয় 'প্রতিজ্ঞা' (পূর্বানুমান) অথবা 'প্রকল্প'। আমরা কিছু উদাহরণ নিয়ে শুরু করব।

উদাহরণ 5 : দেওয়া আছে যে, বিজাপুর কর্ণাটক রাজ্যে অবস্থিত এবং মনে করো, শাবানা বিজাপুরে বসবাস করে। শাবানা কোন্ রাজ্যে বসবাস করে?

সমাধান : এখানে দুটি প্রতিজ্ঞা আছে :

(i) বিজাপুর কর্ণাটক রাজ্যে অবস্থিত (ii) শাবানা বিজাপুরে বসবাস করে।

এই প্রতিজ্ঞাগুলো থেকে আমরা বলতে পারি যে, শাবানা কর্ণাটক রাজ্যে বসবাস করে।

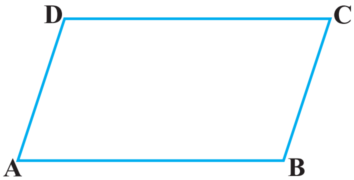
উদাহরণ 6 : দেওয়া আছে যে, গণিতের সকল পাঠ্যপুস্তক মজাদার এবং মনে করো, তুমি গণিতের একটি পাঠ্যপুস্তক পড়েছ। তুমি যে পাঠ্যপুস্তকটি পড়ছ তা থেকে আমরা কী সিদ্ধান্তে আসতে পারি?

সমাধান : দুটি প্রতিজ্ঞা (অথবা প্রকল্প) থেকে আমরা বলতে পারি যে, তুমি কি মজাদার পাঠ্যপুস্তক পড়ছ।

উদাহরণ 7 : দেওয়া আছে যে, $y = -6x + 5$, এবং ধরো, $x = 3$ । y-এর মান কত?

সমাধান : প্রদত্ত দুটি প্রকল্প হতে, আমরা পাই $y = -6(3) + 5 = -13$

উদাহরণ 8 : দেওয়া আছে যে, ABCD একটি সামান্তরিক এবং ধরো AD = 5 সেমি, AB = 7 সেমি (চিত্র A1.1 দেখো)। তোমরা DC এবং BC এর দৈর্ঘ্য সম্পর্কে কী সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পার?



চিত্র A1.1

সমাধান : আমাদের দেওয়া আছে যে, ABCD একটি সামান্তরিক। সুতরাং, একটি সামান্তরিক যে ধর্মগুলো মেনে চলে সেগুলো ABCDও মেনে চলবে। অতএব, বিশেষ করে, 'সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান' এ ধর্মটি মেনে চলে। যেহেতু আমরা জানি AD = 5 সেমি, আমরা বলতে পারি যে, BC = 5 সেমি। অনুরূপভাবে, আমরা বলতে পারি, DC = 7 সেমি।

মন্তব্য : এই উদাহরণে, আমরা দেখেছি যে, কীভাবে একটি প্রদত্ত প্রতিজ্ঞাতে (পূর্বানুমানে) লুকানো ধর্মগুলো নির্ণয় করা এবং ব্যবহার করা আমাদের প্রায়শই প্রয়োজন হয়।

উদাহরণ 9 : দেওয়া আছে যে, সকল মৌলিক সংখ্যা p-এর জন্য $\sqrt{p}$ অমূলদ, এবং ধরো 19423 একটি মৌলিক সংখ্যা। তুমি $\sqrt{19423}$ সম্পর্কে কী সিদ্ধান্তে নিতে পার?

সমাধান : আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, $\sqrt{19423}$ অমূলদ।

উপরের উদাহরণগুলোতে তোমরা লক্ষ করতে পারবে যে, আমরা জানি না প্রকল্পগুলো সত্য কিনা মিথ্যা। আমরা ধরে নিই যে, এগুলো সত্য এবং তখন অবরোহী যুক্তি প্রয়োগ করি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, উদাহরণ 9-এ আমরা পরীক্ষা করিনি যে 19423 একটি মৌলিক সংখ্যা কিনা; আমাদের যুক্তির কারণে আমরা এটিকে মৌলিক সংখ্যা

ধরে নিয়েছি। প্রদত্ত একটি বিশেষ বিবৃতির মাধ্যমে সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে আমরা কীভাবে অবরোহী ব্যবহার করব, সেটির উপর আমরা এই অনুচ্ছেদে অধিক গুরুত্ব দেওয়ার চেষ্টা করব। বাস্তবে এখানে বিষয়গুলো হল যুক্তির সঠিক পদ্ধতি ব্যবহার করা এবং যুক্তির এই পদ্ধতি প্রকল্পের সত্যতা বা মিথ্যার উপর নির্ভর না করা। যদিও এটি অবশ্যই লক্ষ করতে হবে যে, আমরা যদি একটি ভুল প্রতিজ্ঞা (অথবা প্রকল্প) দিয়ে শুরু করি, আমরা একটি ভুল সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারি।

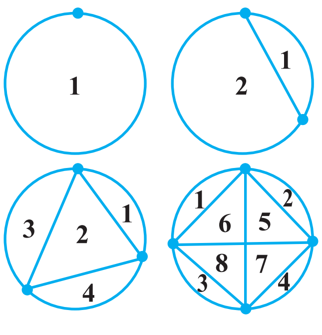
অনুশীলনী A1.2

1. দেওয়া আছে যে, সকল মহিলারা মরণশীল এবং মনে করো, A একজন মহিলা, তাহলে আমরা A সম্পর্কে কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারি ?
2. দেওয়া আছে যে, দুটি মূলদ সংখ্যার গুনফল একটি মূলদ সংখ্যা, এবং ধরো, a এবং b হল মূলদ সংখ্যা, তবে ab সম্পর্কে তোমরা কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পার ?
3. দেওয়া আছে যে, অমূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তৃতি হল অসীম, অনাবৃত্ত এবং $\sqrt{17}$ হল অমূলদ। তাহলে আমরা $\sqrt{17}$ এর দশমিক বিস্তৃতি সম্পর্কে কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারি ?
4. দেওয়া আছে যে, $y = x^2 + 6$ এবং $x = -1$, y এর মান সম্পর্কে আমরা কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারি ?
5. দেওয়া আছে যে, ABCD একটি সামন্তরিক এবং $\angle B = 80°$ । সামন্তরিকের অপর কোণগুলো সম্পর্কে তোমরা কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুঁতে পার ?
6. দেওয়া আছে যে, PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং এর কর্ণগুলোও পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এই চতুর্ভুজ সম্পর্কে তোমরা কী সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পার ?
7. দেওয়া আছে সকল মৌলিক সংখ্যা p-এর জন্য $\sqrt{p}$ অমূলদ সংখ্যা এবং আরো ধরো যে, 3721 একটি মৌলিক সংখ্যা। তোমরা কি বলতে পার যে, $\sqrt{3721}$ একটি অমূলদ সংখ্যা ? তোমার সিদ্ধান্ত কি সঠিক ? কেন ? অথবা কেন না ?

A1.4 অনুমান, উপপাদ্য, প্রমাণ এবং গাণিতিক যুক্তি (Conjectures, Theorems, Proofs and Mathematical Reasoning)

চিত্র A1.2. বিবেচনা করো। প্রথম বৃত্তের উপর একটি বিন্দু আছে, দ্বিতীয় বৃত্তের উপর দুটি বিন্দু, তৃতীয় বৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু ইত্যাদি। প্রতিক্ষেত্রে বিন্দুগুলোর সংযোগকারী সকল সম্ভাব্য রেখা অঙ্কন করা হল।

রেখাগুলো বৃত্তটিকে পরস্পর পৃথক অঞ্চলে (কোনো সাধারণ অংশ নেই) বিভক্ত করে। আমরা এইগুলোকে গণনা করতে পারি এবং প্রাপ্ত ফলাফলগুলোকে সারণিতে দেখানো হয়েছে :



চিত্র A1.2

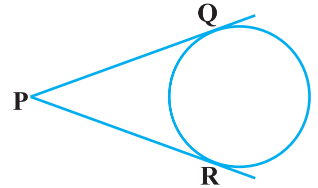
বিন্দুর সংখ্যা	অঞ্চলের সংখ্যা
1	1
2	2
3	4
4	8
5	
6	
7	

তোমাদের অনেকেই হয়তো এই সূত্রটি প্রাপ্ত করেছ যা প্রয়োগ করে প্রদত্ত বিন্দুর সংখ্যা থেকে অঞ্চলের সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করতে পারো। নবম শ্রেণি হতে, তোমরা স্মরণ করতে পার যে, এই বুদ্ধি সম্মত পূর্বানুমানকে '*অনুমান*' (*conjecture*) বলে।

মনে করো, তোমাদের অনুমান এই যে বৃত্তের উপরিস্থ 'n' সংখ্যক প্রদত্ত বিন্দু, তবে বিন্দুগুলোর দ্বারা সম্ভাব্য সকল সংযোগকারী রেখার সাহায্যে সৃষ্ট পরস্পর পৃথক অঞ্চলের সংখ্যা 2^{n-1} । এটি একটি অত্যন্ত বিচক্ষণযুক্ত অনুমান বলে মনে হয় এবং যদি কেউ $n = 5$ যাচাই করে, আমরা 16 টি অঞ্চল পাই। সুতরাং, 5 টি বিন্দুর জন্য সূত্রটি যাচাই করে, তোমরা কি সন্তোস্ট যে-কোনো n -সংখ্যক বিন্দুর জন্য 2^{n-1} অঞ্চল আছে? যদি তাই হয়, তবে কেউ যদি তোমাকে বিজ্ঞাসা করে যে, $n = 25$ এর জন্য এটি কীভাবে সুনিশ্চিত করবে তখন তোমার প্রতিক্রিয়া কী হবে? এই ধরনের প্রশ্নের মোকাবিলা করতে, তোমার এমন একটি প্রমাণের প্রয়োজন যা নিঃসন্দেহে দেখায় যে, ফলাফলটি সত্য অথবা বিপরীত উদাহরণ নিয়ে দেখাও যে, n-এর কিছু মানের জন্য ফলাফলটি সঠিক নয়। প্রকৃতপক্ষে, যদি তোমরা ধৈর্য সহকারে $n = 6$ মানের জন্য চেস্টা কর তবে তোমরা 31 টি অঞ্চল এবং $n = 7$ এর জন্য সেখানে 57টি অঞ্চল পাবে। সুতরাং, $n = 6$ উপরিউক্ত অনুমানের একটি বিপরীত উদাহরণ। এটি একটি বিপরীত উদাহরণের ক্ষমতা প্রদর্শন করে। তোমরা স্মরণ করতে পারো যে, নবম শ্রেণিতে আমরা আলোচনা করেছি যে, **একটি উক্তি ভুল প্রমাণের জন্য, একটি মাত্র বিপরীত উদাহরণই যথেস্ট।**

তোমরা লক্ষ করেছ যে, আমরা $n = 1, 2, 3, 4$ এবং 5 এর ফলাফল যাচাই করা সত্যেও অঞ্চলের সংখ্যা প্রমাণের উপর জোড় দিয়েছি। চল আমরা আরও কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি। তোমরা নিম্নের ফলাফল সম্পর্কে অবগত আছ (পঞ্চম অধ্যায়ে দেওয়া আছে) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ । এর বৈধতা প্রমাণের জন্য, $n = 1, 2, 3$ .. ইত্যাদি মানের জন্য ফলাফলটি যাচাই করা যথেস্ট নয়, কারণ n-এর এমন কিছু মান থাকতে পারে যার জন্য ফলাফলটি সত্য নয় (উপরের উদাহরণের মতো, ফলাফলটি $n = 6$-এর জন্য সঠিক নয়)। আমাদের এমন একটি প্রমাণের প্রয়োজন হবে যা নিঃসন্দেহে এটির সত্যতা প্রতিস্টা করে। তুমি উচ্চতর শ্রেণিতে এর প্রমাণ করতে শিখবে।

এখন, চিত্র A1.3 বিবেচনা করো, যেখানে PQ এবং PR হল P বিন্দু হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক।



চিত্র A1.3

তোমরা প্রমাণ করেছ যে, PQ = PR (উপপাদ্য 10.2)। তোমরা শুধুমাত্র এই ধরনের কয়েকটি চিত্র অঙ্কন করে, অনুরূপ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে এবং প্রতিটি ক্ষেত্রে ফলাফলের সত্যতা যাচাই করেই সন্তুষ্ট ছিলে না।

তোমাদের কি মনে আছে, এর প্রমাণে কী কী বিষয় ছিল? এটি বিকৃতিসমূহের (যা **বৈধ যুক্তি** বলে পরিচিত) অনুক্রম নিয়ে গঠিত হয়েছিল, যেখানে প্রমাণের মধ্যে প্রতিটি বিবৃতি পূর্ববর্তী বিবৃতি হতে, অথবা যা প্রমাণ করতে হবে তা থেকে স্বতন্ত্র পূর্বে প্রমাণিত (জানা) ফলাফল হতে, অথবা স্বতঃসিদ্ধ হতে, অথবা সংজ্ঞা হতে, অথবা তোমাদের দ্বারা তৈরি কল্পনাগুলো হতে এবং এরপর তোমরা তোমাদের প্রমাণ PQ = PR বিবৃতি দিয়ে সমাপ্ত করেছিলে অর্থাৎ, তোমরা যে বিবৃতিটি প্রমাণ করতে চেয়েছিলে। এটিই হল কোনো প্রমাণ তৈরি করার পদ্ধতি।

আমরা এখন কিছু উদাহরণ এবং উপপাদ্য নেব এবং এদের প্রমাণগুলো বিশ্লেষণ করবো যাতে করে এরা কীভাবে গঠিত হয় সে সম্পর্কে আরও ভালোভাবে বুঝতে আমাদের সহায়তা হয়।

আমরা শুরু করব প্রমাণের তথাকথিত 'প্রত্যক্ষ' অথবা 'অবরোহী' পদ্ধতি ব্যবহার করে। এই পদ্ধতিতে, আমরা কিছু বিবৃতি তৈরি করি। প্রতিটি **পূর্ববর্তী বিবৃতির উপর ভিত্তি করে** তৈরি হয়। যদি প্রতিটি বিবৃতি যুক্তি সহকারে সঠিক হয় (অর্থাৎ, একটি বৈধ যুক্তি), এটি একটি যৌক্তিকভাবে সঠিক সিদ্ধান্তের দিকে পরিচালিত করে।

উদাহরণ 10 : দুটি মূলদ সংখ্যার যোগফল একটি মূলদ সংখ্যা।

সমাধান :

ক্রমিক নং	বিবৃতি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধরো x এবং y মূলদ সংখ্যা	যেহেতু ফলাফলগুলো মূলদ সংখ্যা নিয়ে, আমরা x এবং y সংখ্যাগুলো মূলদ দিয়ে শুরু করব।
2.	ধরো $x = \frac{m}{n}, n \neq 0$ এবং $y = \frac{p}{q}, q \neq 0$ যেখানে m, n, p এবং q হল অখণ্ড সংখ্যা।	মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা ব্যবহার করো।
3.	সুতরাং, $x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$	ফলাফল মূলদ সংখ্যার যোগফলকে বিবৃত করে, তাই আমরা $x + y$ নেব।

4.	অখণ্ড সংখ্যার ধর্ম ব্যবহার করে, আমরা দেখতে পাই যে, $mq + np$ এবং nq হল অখণ্ড সংখ্যা।	অখণ্ড সংখ্যার জানা ধর্মগুলো ব্যবহার করে।
5.	যেহেতু $n \neq 0$ এবং $q \neq 0$, তাই $nq \neq 0$.	অখণ্ড সংখ্যার জানা ধর্মগুলো ব্যবহার করে।
6.	অতএব, $x + y = \dfrac{mq + np}{nq}$ একটি মূলদ সংখ্যা	মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা ব্যবহার করে।

মন্তব্য : উল্লেখ্য যে, উপরোক্ত প্রমাণের প্রতিটি বিবৃতি পূর্বে প্রতিষ্ঠিত কোনো তথ্য বা সংজ্ঞার উপর ভিত্তি করে তৈরি হয়েছে।

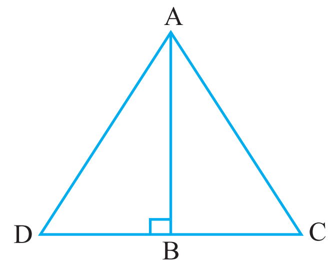
উদাহরণ 11 : 3 অপেক্ষা বৃহত্তর প্রতিটি মৌলিক সংখ্যা $6k + 1$ অথবা $6k + 5$ আকারের হয়, যেখানে k একটি অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান :

ক্রমিক নং	বিবৃতি	বিশ্লেষণ/মন্তব্য
1.	ধরো p , 3 অপেক্ষা বৃহত্তর একটি মৌলিক সংখ্যা।	যেহেতু ফলাফলটি 3 অপেক্ষা বৃহত্তর মৌলিক সংখ্যা নিয়ে করতে হবে, তাই আমরা এরূপ একটি সংখ্যা দিয়ে শুরু করব।
2.	p কে 6 দ্বারা ভাগ করে, আমরা পাই যে p সংখ্যাটি $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$, অথবা $6k + 5$ আকারের হতে পারে, যেখানে k একটি অখণ্ড সংখ্যা।	ইউক্লিডের ভাগ-সহায়ক উপপাদ্য ব্যবহার করে।
3.	কিন্তু $6k = 2(3k)$, $6k + 2 = 2(3k + 1)$, $6k + 4 = 2(3k + 2)$, এবং $6k + 3 = 3(2k + 1)$। অতএব, এরা মৌলিক সংখ্যা নয়।	যেহেতু p মৌলিক সংখ্যা তাই আমরা ভাগশেষগুলো বিশ্লেষণ করি।
4.	সুতরাং, p কে $6k + 1$ বা $6k + 5$ আকারের হতে বাধ্য করা হয়, যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা k-এর জন্য।	আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছতে অন্য বিকল্পগুলো বাদ দিয়েছি।

মন্তব্য : উপরের উদাহরণে, আমরা বিকল্প উপায়গুলোকে বাদ দিয়ে আমরা সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছি। এই পদ্ধতি কখনও কখনও **ক্লান্তিকর প্রমাণ (Proof by Exhaustion)** হিসেবে উল্লেখিত হয়।

উপপাদ্য A1.1 *পিথাগোরাসের বিপরীত উপপাদ্য (Converse of the Pythagoras Theorem) : যদি একটি ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গ অপর দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রথম বাহুর বিপরীত কোণটি একটি সমকোণ।*



চিত্র A1.4

প্রমাণ :

ক্রমিক নং	বিবৃতি	বিশ্লেষণ
1.	ধরো ΔABC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ প্রকল্পকে সিদ্ধ করে।	যেহেতু আমরা এরকম ত্রিভুজের সাথে সম্পর্কযুক্ত বিবৃতি প্রমাণ করছি, তাই আমাদের এটিকে নিয়েই শুরু করতে হবে।
2.	AB এর উপর BD লম্ব অঙ্কন করো, যেন $BD = BC$, এবং A কে D পর্যন্ত যুক্ত করো।	এটি একটি সংজ্ঞাত ধাপ যা সম্পর্কে আমরা বলেছি যে, উপপাদ্য প্রমাণে আমাদের প্রায়ই প্রয়োজন হয়।
3.	অঙ্কন অনুসারে, ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং পীথাগোরাসের উপপাদ্য হতে আমরা পাই, $AD^2 = AB^2 + BD^2$	আমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করেছি, যা পূর্বেই প্রমাণিত।
4.	অঙ্কন অনুসারে, $BD = BC$ । অতএব আমরা পাই $AD^2 = AB^2 + BC^2$	যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ।
5.	অতএব, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AD^2$	কল্পনা এবং পূর্ববর্তী বিবৃতি ব্যবহার করে।
6.	যেহেতু AC এবং AD ধনাত্মক, তাই আমরা পাই $AC = AD$.	সংখ্যার জানা ধর্মের ব্যবহার করে।
7.	আমরা এইমাত্র দেখিয়েছি $AC = AD$ । আবার অঙ্কন অনুসারে $BC = BD$ এবং AB হল সাধারণ। অতএব, SSS অনুসারে $\Delta ABC \cong \Delta ABD$.	জানা উপপাদ্য ব্যবহার করে।
8.	যেহেতু $\Delta ABC \cong \Delta ABD$, আমরা পাই $\angle ABC = \angle ABD$, যা একটি সমকোণ।	যৌক্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ, পূর্বের প্রতিষ্ঠিত সত্যের উপর ভিত্তি করে নেওয়া হয়।

মন্তব্য : উপরের ফলাফলের প্রতিটি প্রমাণ করা হয়েছে কতগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত ক্রমিক ধাপের মাধ্যমে। তাদের ক্রম খুব গুরুত্বপূর্ণ। এই প্রমাণের প্রতিটি ধাপ পূর্বের ধাপ এবং পূর্বের জ্ঞাত ফলাফল থেকে পেয়েছি। (উপপাদ্য 6.9 দেখো)।

অনুশীলনী A1.3

নীচের প্রতিটি প্রশ্নে, তোমাদেরকে বিবৃতি প্রমাণ করতে বলা হয়েছে। প্রতিটি প্রমাণের ধাপগুলো তালিকাভুক্ত করো এবং প্রতিটি ধাপের কারণ দাও।

1. প্রমাণ করো যে, দুটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল 4 দ্বারা বিভাজ্য।

2. দুটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যা নাও। তাদের বর্গের যোগফল নির্ণয় করো এবং তারপর ফলাফলের সঙ্গো 6 যোগ করো। প্রমাণ করো যে, নতুন সংখ্যাটি সর্বদা 8 দ্বারা বিভাজ্য।

3. যদি $p \geq 5$ একটি মৌলিক সংখ্যা হয় তবে দেখাও যে, $p^2 + 2$, 3 দ্বারা বিভাজ্য।
[**ইঙ্গিত :** উদাহরণ 11 ব্যবহার করো]।

4. ধরো, x এবং y মূলদ সংখ্যা। দেখাও যে, xy একটি মূলদ সংখ্যা।

5. যদি a এবং b ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তখন তোমরা জান যে, $a = bq + r, 0 \leq r < b$, যেখানে q একটি সমগ্র সংখ্যা। প্রমাণ করো যে, গ.সা.গু. (a, b) = গ.সা.গু. (b, r) ।
[**ইঙ্গিত :** ধরো গ.সা.গু. $(b, r) = h$ । সুতরাং, $b = k_1 h$ এবং $r = k_2 h$, যেখানে k_1 এবং k_2 পরস্পর মৌলিক সংখ্যা।]

6. ত্রিভুজ ABC এর BC বাহুর সমান্তরাল রেখা AB এবং AC কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ ।

A1.5 একটি বিবৃতির না-ক্রিয়া (Negation of a Statement)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা একটি বিবৃতির না-ক্রিয়া বলতে কী বোঝায় তা আলোচনা করব। আলোচনা শুরু করার পূর্বে আমরা কিছু চিহ্ন সম্পর্কে সূচিত করতে চাই, যা এই ধারণাগুলো বোঝতে সহজতর করে। শুরুতে, চলো আমরা একটি বিবৃতিকে একটি একক হিসেবে মনে করি এবং এর একটি নামাকরণ করি। উদাহরণ হিসেবে, '2005 সালের সেপ্টেম্বরের 1 তারিখে দিল্লিতে বৃষ্টি হয়েছিল' উক্তিটিকে আমরা p দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। আমরা এটিকে আবার লিখতে পারি যে,

p: 2005 সালের পয়লা সেপ্টেম্বর দিল্লিতে বৃষ্টি হয়েছিল।

অনুরূপে, চলো আমরা দেখি

q: সকল শিক্ষকরাই মহিলা।

r: মাইকের কুকুরটির একটি কালো লেজ আছে।

s: $2 + 2 = 4$.

t: ত্রিভুজ ABC সমবাহু।

এই চিহ্নগুলো এখন উক্তির ধর্মগুলো এবং এদের কীভাবে যুক্ত করতে পারা যায় তা আলোচনা করতে আমাদের সাহায্য করবে। শুরুতে আমরা 'সরল' উক্তিগুলো নিয়ে কাজ করব এবং পরে 'যৌগিক' উক্তিগুলোর দিকে অগ্রসর হব।

এখন নীচের সারণিটি বিবেচনা করি যেখানে আমরা প্রতিটি প্রদত্ত উক্তি থেকে একটি নতুন উক্তি তৈরি করি।

মূল উক্তি	নতুন উক্তি
p: পয়লা সেপ্টেম্বর, 2005 এ দিল্লিতে বৃষ্টি হয়েছিল।	$\sim p$: এটি মিথ্যা যে, পয়লা সেপ্টেম্বর 2005-এ দিল্লিতে বৃষ্টি হয়েছিল।
q: সকল শিক্ষকই মহিলা।	$\sim q$: এটি মিথ্যা যে, সকল শিক্ষকই মহিলা।
r: মাইকের কুকুরটির একটি কালো ল্যাজ আছে।	$\sim r$: এটি মিথ্যা যে, মাইকের কুকুরটির কালো ল্যাজ আছে।
s: $2+2=4$ ।	$\sim s$: এটি মিথ্যা যে, $2+2=4$ ।
t: ত্রিভুজ ABC সমবাহু।	$\sim t$: এটি মিথ্যা যে, ত্রিভুজ ABC সমবাহু।

সারণিতে প্রতিটি নতুন উক্তি সংশ্লিষ্ট মূল উক্তির *না-ক্রিয়া*। অর্থাৎ $\sim p, \sim q, \sim r, \sim s$ এবং $\sim t$ হল যথাক্রমে p, q, r, s এবং t উক্তির না-ক্রিয়া। এখানে $\sim p$ কে পড়া হয় 'p নয়'। p যে উক্তিটি বিবৃতি করে $\sim p$ ঐ উক্তিটিকে অস্বীকার করে। লক্ষ করো যে, সাধারণ কথাবার্তায় আমরা $\sim p$ কে সাধারণভাবে বুঝব যে, '1লা সেপ্টেম্বর 2005-এ দিল্লিতে বৃষ্টিপাত হল না'। যদিও, এসব করার ক্ষেত্রে আমাদের সতর্ক থাকা প্রয়োজন'। তোমরা দেখবে যে একজন একটি উক্তির না-ক্রিয়া প্রদত্ত উক্তির উপযুক্ত স্থানে 'না' শব্দটি বসিয়ে পেতে পারে। যখন এটি p-এর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সমস্যাটি তখনই আসে যখন একটি উক্তি 'সকল' দিয়ে শুরু হয়। উদাহরণস্বরূপ, উক্তি q: 'সকল শিক্ষকই মহিলা' বিবেচনা করো। আমরা এই উক্তিটির না-ক্রিয়া বলব $\sim q$: এটি মিথ্যা যে, সকল শিক্ষকই মহিলা। এটির অনুরূপ উক্তিটি হল 'কিছু শিক্ষক আছে যারা পুরুষ'। চলো এখন আমরা দেখি যদি q-তে কেবল 'না' শব্দটি যুক্ত করি, তখন কী হয়। এর ফলে আমরা উক্তিটি পাব : 'সকল শিক্ষকরা মহিলা নন', অথবা আমরা উক্তিটি এমন পেতে পারি : 'এটি এমন নয় যে সকল শিক্ষকই মহিলা'। প্রথম উক্তিটি মানুষকে বিভ্রান্ত করতে পারে। এটি ইঙ্গিত করতে পারে (যদি আমরা 'সকল' শব্দটির উপর গুরুত্ব দিই) যে সকল শিক্ষকই পুরুষ! এটি অবশ্যই q এর না-ক্রিয়া নয়। যদিও দ্বিতীয় উক্তিটি $\sim q$-এর সঠিক অর্থ প্রদান করে। অর্থাৎ, এখানে কমপক্ষে একজন শিক্ষক আছেন যিনি মহিলা নন। সুতরাং, কোনো উক্তির না-ক্রিয়া লেখার সময় সাবধানতা অবলম্বন করা দরকার !

সুতরাং, কীভাবে আমরা সিদ্ধান্ত নেব যে, আমরা যে না-ক্রিয়াটি পেয়েছি তা সঠিক কিনা? আমরা নিম্নলিখিত মানদণ্ডগুলো ব্যবহার করব।

ধরো, p হল একটি উক্তি এবং $\sim p$ হল এটি না-ক্রিয়া। তখন $\sim p$ মিথ্যা যখন p সত্য, এবং $\sim p$ সত্য যখন p মিথ্যা।

উদাহরণস্বরূপ, যদি এটি সত্য যে, মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ আছে, তখন এটি মিথ্যা যে মাইকের কুকুরের কালো ল্যাজ নেই। যদি এটি মিথ্যা যে 'মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ আছে', তখন এটি সত্য যে 'মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ নাই'।

অনুরূপভাবে, উক্তি s এবং t এর না-ক্রিয়াগুলো হল :

s: $2 + 2 = 4$; না-ক্রিয়া, $\sim s$: $2 + 2 \neq 4$.

t: ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ ; না-ক্রিয়া, $\sim t$: ABC সমবাহু ত্রিভুজ নয়।

এখন, $\sim(\sim s)$ কি? এটি হবে $2 + 2 = 4$, যা হল s । আবার, $\sim(\sim t)$ কি ? এটি হবে 'ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ', অর্থাৎ t । যদিও, **যে-কোনো উক্তি p-এর জন্য $\sim(\sim p)$ হল p ।**

উদাহরণ 12 : নীচের উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া উল্লেখ করো :

(i) মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ নেই।

(ii) সকল অমূলদ সংখ্যা হল বাস্তব সংখ্যা।

(iii) $\sqrt{2}$ হল অমূলদ সংখ্যা।

(iv) কিছু মূলদ সংখ্যা হল অখণ্ড সংখ্যা।

(v) এটি এমন নয় যে, সকল শিক্ষকরাই পুরুষ।

(vi) কিছু সংখ্যক ঘোড়া বাদামি রঙের হয়।

(vii) এমন কোনো বাস্তব সংখ্যা x নেই, যাতে $x^2 = -1$ হয়।

সমাধান :

(i) এটি মিথ্যা যে মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ নেই, অর্থাৎ, মাইকের কুকুরের একটি কালো ল্যাজ আছে।

(ii) এটি মিথ্যা যে সকল অমূলদ সংখ্যা হল বাস্তব সংখ্যা, অর্থাৎ, কিছু (কমপক্ষে একটি) অমূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা নয়। কেউ এটিকে এরূপও লিখতে পারে যে, 'সকল অমূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা নয়'।

(iii) এটি মিথ্যা যে, $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা, অর্থাৎ, $\sqrt{2}$ অমূলদ সংখ্যা নয়।

(iv) এটি মিথ্যা যে, কিছু মূলদ সংখ্যা হল অখণ্ড সংখ্যা, অর্থাৎ, কোনো মূলদ সংখ্যাই অখণ্ড সংখ্যা নয়।

(v) এটি মিথ্যা যে, সকল শিক্ষক পুরুষ নন, অর্থাৎ, সকল শিক্ষকই পুরুষ।

(vi) এটি মিথ্যা যে, কিছু সংখ্যক ঘোড়া বাদামি রঙের নয়, অর্থাৎ, সকল ঘোড়াই বাদামি রঙের।

(vii) এটি মিথ্যা যে, এমন কোনো বাস্তব সংখ্যা x নেই, যাতে $x^2 = -1$ হয়, অর্থাৎ কমপক্ষে একটি বাস্তব সংখ্যা x আছে, যাতে $x^2 = -1$ হয়।

মন্তব্য : উপরের আলোচনা থেকে, একটি উক্তির না-ক্রিয়া পাওয়ার জন্য তোমার নিম্নলিখিত '**কার্যকরী নিয়ম**'গুলোতে পৌঁছতে পারো :

(i) প্রথমে 'না' দিয়ে উক্তিটি লেখো।

(ii) যদি কোনো সন্দেহ থাকে, উপযুক্ত সংশোধন (modification) করবে, বিশেষত 'সকল' বা 'কিছু' এরূপ শব্দযুক্ত উক্তির ক্ষেত্রে।

অনুশীলনী A1.4

1. নীচের উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া উল্লেখ করো :

(i) মানুষ মরণশীল।

(ii) l সরলরেখা m সরলরেখার সমান্তরাল।

(iii) এই অধ্যায়ে অনেকগুলো অনুশীলনী আছে।

(iv) সকল অখণ্ড সংখ্যা হল মূলদ সংখ্যা।

(v) কিছু মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম হয়।

(vi) কোনো ছাত্রই অলস নয়।

(vii) কিছু সংখ্যক বিড়াল কালো রঙের নয়।

(viii) এরকম কোনো বাস্তব সংখ্যা x নেই, যেন $\sqrt{x} = -1$ ।

(ix) ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a, 2 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

(x) অখণ্ড সংখ্যাদ্বয় a এবং b পরস্পর মৌলিক।

2. নীচের প্রতিটি প্রশ্নে দুটি করে উক্তি আছে। উল্লেখ করো যে, দ্বিতীয়টি প্রথমটির না-ক্রিয়া কিনা।

(i) মুমতাজ ক্ষুধার্ত।
মুমতাজ ক্ষুধার্ত নয়।

(ii) কিছু বিড়াল কালো রঙের হয়।
কিছু বিড়াল বাদামি রঙের হয়।

(iii) সকল হাতিই বিশাল আকৃতির।
সকল হাতিই বিশাল আকৃতির নয়।

(iv) সকল অগ্নি নির্বাপক যন্ত্র লাল রঙের হয়।
সকল অগ্নি নির্বাপক যন্ত্র লাল রঙের হয় না।

(v) কোনো লোকই গোরু নয়।
কিছু লোক গোরু হয়।

A1.6 একটি উক্তির বিপরীত (Converse of a Statement)

আমরা এখন একটি উক্তির বিপরীত ধারণা পরীক্ষা করব। তার জন্য, আমাদের একটি 'যৌগিক' (compound) উক্তির ধারণা দরকার, অর্থাৎ, একটি উক্তি যা একটি অথবা অধিক 'সরল' উক্তির সমন্বয়ে তৈরি। যৌগিক উক্তি তৈরি করার অনেকগুলো পদ্ধতি আছে, কিন্তু আমরা লক্ষ করব সেগুলোর উপর যেগুলো দুটি উক্তিকে 'যদি' এবং 'তখন' শব্দ দ্বারা যুক্ত করে তৈরি হয়। উদাহরণ হিসাবে, 'যদি বৃষ্টি হয়, তখন বাইসাইকেলে যাওয়া কষ্টকর', উক্তিটি দুটি সরল উক্তি নিয়ে গঠিত :

p: বৃষ্টি হচ্ছে।

q: বাইসাইকেলে যাওয়া কষ্টকর।

আমাদের পূর্বের সংকেত ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি : যদি p, তখন q । আমরা আরো বলতে পারি 'p-এর ফলস্বরূপ q' এবং এটি প্রকাশ করা হয় $p \Rightarrow q$ দ্বারা।

এখন, ধরো একটি উক্তি 'যদি জলাধারটি কালো রঙের হয়, তখন এটি পানযোগ্য জল ধারণ করে।' এটি $p \Rightarrow q$ আকারের, যেখানে p হল প্রকল্প (জলাধারটি কালো রঙের) এবং সিদ্ধান্ত হল q (জলাধারটি পানযোগ্য জল ধারণ করে)। ধরো আমরা প্রকল্প এবং সিদ্ধান্ত পরস্পর বিনিময় করলে, আমরা কী পাব? আমরা পাব $q \Rightarrow p$, অর্থাৎ, যদি জলাধারের জল পানযোগ্য হয়, তখন জলাধারটি অবশ্যই কালো রঙের হবে। এই উক্তিটিকে $p \Rightarrow q$ এর **বিপরীত** বলা হয়।

সাধারণত, $p \Rightarrow q$ উক্তিটির **বিপরীত** হল $q \Rightarrow p$, যেখানে p এবং q হল উক্তি। লক্ষ করো যে, $p \Rightarrow q$ এবং $q \Rightarrow p$ হল পরস্পরের বিপরীত।

উদাহরণ 13 : নীচের উক্তিগুলোর বিপরীত উক্তি লেখো :

(i) যদি জামিলা একটি বাইসাইকেল চালায়, তবে 17 ই আগস্ট রবিরাব পরে।

(ii) যদি 17 ই আগস্ট রবিবার হয়, তবে জামিলা একটি বাইসাইকেল চালায়।

(iii) যদি পাওলিন রাগান্বিত হয়, তবে তার মুখমণ্ডল লাল হয়ে যায়।

(iv) যদি একটি লোকের শিক্ষার ডিগ্রি থাকে, তবে তাকে শেখানোর অনুমতি দেওয়া হয়।

(v) যদি কোনো লোকের ভাইরাস সংক্রমণ হয়, তবে তার প্রচণ্ড জ্বর হয়েছে।

(vi) যদি আহম্মদ মুম্বাইয়ে থাকেন, তবে তিনি ভারতে আছেন।

(vii) যদি ABC সমবাহু ত্রিভুজ হয়, তবে ত্রিভুজটির সকল অন্তঃস্থ কোণগুলো সমান হয়।

(viii) যদি x অমূলদ সংখ্যা হয়, তবে x এর দশমিক বিস্তৃতি হল অসীম অনাবৃত্ত।

(ix) যদি $x - a$ বহুপদরাশি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $p(a) = 0$ ।

সমাধান : উপরের প্রতিটি উক্তি $p \Rightarrow q$ আকারের। সুতরাং, বিপরীত উক্তিটি নির্ণয়ের জন্য, আমরা প্রথমে p এবং q কে চিহ্নিত করি এবং $q \Rightarrow p$ আকারে লিখি।

(i) p : জামিলা একটি বাইসাইকেল চালায়, এবং q : 17 আগস্ট রবিবার। অতএব, বিপরীতটি হল : যদি 17 আগস্ট রবিবার পরে, তবে জামিলা একটি বাইসাইকেল চালায়।

(ii) এটি (i) -এর বিপরীত। অতএব, এর বিপরীত উক্তিটি উপরের (i)-এ দেওয়া আছে।

(iii) যদি পাওলিনের মুখমণ্ডল লাল হয়, তবে সে রাগান্বিত হয়।

(iv) যদি একজন লোককে শেখানোর অনুমতি দেওয়া হয়, তবে তার শিক্ষার ডিগ্রি আছে।

(v) যদি একজন লোকের প্রচণ্ড জ্বর হয়, তবে তার ভাইরাস সংক্রমণ হয়েছে।

(vi) যদি আহম্মদ ভারতে থাকেন, তবে তিনি মুম্বাইয়ে আছেন।

(vii) যদি ত্রিভুজ ABC-এর সকল অন্তঃস্থ কোণ সমান হয়, তবে ইহা একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

(viii) যদি x-এর দশমিক বিস্তৃতি অসীম অনাবৃত্ত হয়, তবে x একটি অমূলদ সংখ্যা।

(ix) যদি $p(a) = 0$ হয়, তবে $x - a$ হল বহুপদরাশি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক।

লক্ষ করো যে, উক্তিগুলো সত্য কিনা মিথ্যা তা চিন্তা না করেই সাধারণভাবে উপরের প্রতিটি উক্তির একটি বিপরীত উক্তি লেখা হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, নীচের উক্তিটি বিবেচনা করো : যদি আহম্মদ মুম্বাইয়ে থাকেন, তবে তিনি ভারতে আছেন। এই উক্তিটি সত্য। এখন বিপরীতটি বিবেচনা কর : যদি আহম্মদ ভারতে থাকেন তবে তিনি মুম্বাইয়ে আছেন। দরকার নেই যে, এটি সর্বদাই সত্য হবে — তিনি ভারতের যে-কোনো অংশে থাকতে পারেন।

গণিতে, বিশেষ করে জ্যামিতিতে, তোমরা এরূপ অনেক পরিস্থিতির সম্মুখীন হবে যেখানে $p \Rightarrow q$ সত্য হয়, এবং আমাদের নির্ধারণ করতে হবে যে বিপরীতটি, অর্থাৎ, $q \Rightarrow p$ ও সত্য।

উদাহরণ 14 : নীচের উক্তিগুলোর বিপরীতটি উল্লেখ করো। প্রতিটি ক্ষেত্রে এটিও বিবেচনা করো যে, বিপরীতটি সত্য কিনা মিথ্যা।

(i) যদি n একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $2n+1$ একটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

(ii) যদি একটি বাস্তব সংখ্যার দশমিক বিস্তৃতিটি সসীম হয়, তবে সংখ্যাটি মূলদ।

(iii) যদি একটি ভেদক দুটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে, তবে প্রতি জোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়।

(iv) যদি একটি চতুর্ভুজের প্রতি জোড়া বিপরীত বাহুদ্বয় সমান হয়, তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হয়।

(v) যদি দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হয়, তবে এদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়।

সমাধান :

(i) বিপরীতটি হল 'যদি $2n + 1$ একটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে n একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা'। এই উক্তিটি মিথ্যা (উদাহরণস্বরূপ, $15 = 2(7) + 1$, এবং 7 হল অযুগ্ম)।

(ii) 'যদি একটি বাস্তব সংখ্যা মূলদ হয়, তবে তার দশমিক বিস্তৃতিটি সসীম হয়', হল তার বিপরীত। এই উক্তিটি মিথ্যা, কারণ একটি মূলদ সংখ্যারও অসীম আবৃত্ত দশমিক বিস্তৃতি থাকতে পারে।

(iii) বিপরীতটি হল 'যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এরকম ভাবে ছেদ করে যাতে প্রতিজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়, তবে দুটি রেখা সমান্তরাল হয়'। নবম শ্রেণির পাঠ্যবইয়ে স্বতঃসিদ্ধ 6.4 দ্বারা। আমরা ধরেছি, যে এই উক্তিটি সত্য।

(iv) 'যদি একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয়, তবে প্রতিজোড়া বিপরীত বাহু সমান হয়', হল বিপরীত উক্তি। এটি সত্য (উপপাদ্য 8.1, নবম শ্রেণি)।

(v) 'যদি দুটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণদ্বয় সমান হয়, তবে এরা সর্বসম' হল বিপরীত উক্তি। এই উক্তিটি মিথ্যা। আমরা এর উপযুক্ত বিপরীত উদাহরণের জন্য তোমাদের উপর ছেড়েছি।

অনুশীলনী A1.5

1. নীচের উক্তিগুলোর বিপরীতটি লেখো।

(i) যদি টোকিওতে গরম হয়, তবে শরণের প্রচণ্ড ঘাম হয়।

(ii) যদি শালিনী ক্ষুধার্ত হয়, তবে তার পেট গুড়গুড় করতে থাকে।

(iii) যদি যশোবন্তের একটি ছাত্রবৃত্তি থাকে, তবে সে একটি ডিগ্রি পেতে পারে।

(iv) যদি একটি গাছে ফুল থাকে, তবে এটি জীবিত।

(v) যদি বিড়াল একটি প্রাণী হয়, তবে এর একটি ল্যাজ আছে।

2. নীচের উক্তিগুলোর বিপরীতটি লেখো। প্রতিটি ক্ষেত্রে বিপরীতটি সত্য কিনা মিথ্যা তাও বিবেচনা করো।

(i) যদি ত্রিভুজ ABC সমদ্বিবাহু হয়, তবে এর ভূমি সংলগ্ন কোণগুলো সমান।

(ii) যদি একটি অখণ্ড সংখ্যা অযুগ্ম হয়, তবে এর বর্গ একটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

(iii) যদি $x^2 = 1$ হয়, তবে $x = 1$।

(iv) যদি ABCD একটি সামন্তরিক হয়, তবে AC এবং BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(v) যদি a, b এবং c পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $a + (b + c) = (a + b) + c$ ।

(vi) যদি x এবং y দুটি অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে $x + y$ একটি যুগ্ম সংখ্যা।

(vii) যদি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলো একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়, তবে এটি একটি আয়তক্ষেত্র।

A1.7 কল্পনা বিরুদ্ধ (বিরোধ উক্তি)-এর মাধ্যমে প্রমাণ (Proof by Contradiction)

এ পর্যন্ত, আমরা সকল উদাহরণগুলোর ফলাফলের সত্যতা স্থাপনের জন্য প্রত্যক্ষ যুক্তি ব্যবহার করেছি। এখন, আমরা 'পরোক্ষ' যুক্তিগুলোকে খুঁজে বের করব, বিশেষ করে, গণিতের অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার যা 'কল্পনা বিরুদ্ধ (বিরোধ উক্তি) প্রমাণ হিসাবে পরিচিত। আমরা ইতোমধ্যে এই পদ্ধতি অধ্যায় 1-এ বিভিন্ন সংখ্যার অমূলদ সত্তা প্রতিষ্ঠিত করতে এবং অন্যান্য অধ্যায়ে কিছু উপপাদ্য প্রমাণেও ব্যবহার করেছি। এখানে আমরা ধারণা বর্ণিত করার জন্য আরও কিছু ভিন্ন উদাহরণ নিই।

শুরু করার আগে, চলো আমরা বর্ণনা করি '*কল্পনা বিরুদ্ধ*' কী? গণিতে, কল্পনা বিরুদ্ধ তখনই হয়, যখন আমরা একটি উক্তি p কে পাই যেন p সত্য হয় এবং $\sim p$, এর না-ক্রিয়াও সত্য হয়। উদাহরণস্বরূপ,

p: $x = \dfrac{a}{b}$, যেখানে a এবং b পরস্পর মৌলিক।

q: 'a' এবং 'b' উভয়েই 2 দ্বারা বিভাজ্য।

যদি আমরা ধরে নিই যে p সত্য এবং দেখাতে পারি যে q ও সত্য, তখন আমরা একটি কল্পনার বিরুদ্ধে পৌঁছাব, কারণ q দেয় যে p-এর না-ক্রিয়াটি সত্য। যদি তোমরা স্মরণ কর, যখন আমরা $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা প্রমাণ করার চেষ্টা করেছিলাম তখন যা ঘটেছিল এটা ঠিক তাই। (অধ্যায় 1 দেখো)।

কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ কীভাবে কাজ করে? চলো আমরা একটি সুনির্দিষ্ট উদাহরণের সাহায্যে এটি দেখি।

মনে করো, নীচের উক্তিগুলো আমাদের দেওয়া আছে :

সকল মহিলারা মরণশীল। A একজন মহিলা। প্রমাণ করো যে, A মরনশীল।

যদিও এটি একটি অধিকতর সহজ উদাহরণ, চলো দেখি কল্পনা বিরুদ্ধ দ্বারা এটি আমরা কীভাবে প্রমাণ করতে পারি।

- চলো মনে করি যে, আমরা p উক্তিটির সত্যতা প্রতিষ্ঠিত করতে চাই (এখানে আমরা দেখাতে চাই যে p : 'A মরণশীল' হল সত্য)।

- সুতরাং, উক্তিটি সত্য নয় এটি মনে করে আমরা শুরু করব, তার মানে, আমরা মনে করব p এর না-ক্রিয়াটি সত্য (অর্থাৎ, A মরণশীল নয়)।
- আমরা তারপর p-এর না-ক্রিয়ার সত্যতার উপর ভিত্তি করে কিছু অবরোহী যুক্তির শ্রেণির মধ্য দিয়ে শুরু করব। (যেহেতু A মরণশীল নয়, এই উক্তিটির একটি বিপরীত উদাহরণ হল 'সকল মহিলারা মরণশীল'। সুতরাং, এটি মিথ্যা যে সকল মহিলারা মরণশীল।)
- যদি এটি একটি অসঙ্গতিকে পরিচালিত করে, তবে আমাদের ভ্রান্ত ধারণার কারণে এই দ্বন্দ্বের উদ্ভব হয় যার জন্য p সত্য নয়। (এটি একটি কল্পনা বিরুদ্ধ ধারণা, যেহেতু আমরা দেখিয়েছি যে উক্তিটি 'সকল মহিলারা মরণশীল' এবং এর না-ক্রিয়া, 'সকল মহিলারা মরণশীল নয়' একযোগে এরা সত্য। এই দ্বন্দ্বের সৃষ্টির কারণ হল আমরা ধরেছিলাম যে A মরণশীল নয়।)
- অতএব, আমাদের ধারণা ভুল ছিল, অর্থাৎ, p সত্যই হতে হবে। (সুতরাং, A মরণশীল।)

চলো আমরা গণিতের কিছু উদাহরণ নিয়ে দেখি।

উদাহরণ 15 : শূন্য ব্যতীত একটি মূলদ সংখ্যা এবং একটি অমূলদ সংখ্যার গুণফল অমূলদ।

সমাধান :

উক্তি	বিশ্লেষণ / মন্তব্য
আমরা কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণের ব্যবহার করব। ধরো r একটি শূন্য নয় এরূপ মূলদ সংখ্যা এবং x একটি অমূলদ সংখ্যা। ধরো $r = \frac{m}{n}$, যেখানে m, n হল অখণ্ড সংখ্যা এবং $m \neq 0$, $n \neq 0$। আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে, rx অমূলদ।	
মনে করো rx হল মূলদ	এখানে, আমরা উক্তির না-ক্রিয়া কল্পনা করেছি যা আমাদের প্রমাণ করা প্রয়োজন।
তখন $rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, যেখানে p এবং q হল অখণ্ড সংখ্যা	এটি পূর্বের উক্তি এবং মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞাকে অনুসরণ করে।
$rx = \frac{p}{q}$, $q \neq 0$, সমীকরণকে পুনরায় সাজিয়ে এবং $r = \frac{m}{n}$ শর্ত প্রয়োগ করে, আমরা পাই $x = \frac{p}{rq} = \frac{np}{mq}$।	

যেহেতু np এবং mq অখণ্ড সংখ্যা এবং $mq \neq 0$, x একটি মূলদ সংখ্যা	অখণ্ড সংখ্যার ধর্ম এবং মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞা ব্যবহার করে।
এটি কল্পনা বিরুদ্ধ, কারণ আমরা দেখিয়েছি x একটি মূলদ সংখ্যা, কিন্তু আমাদের প্রকল্প হতে আমরা পাই x হল অমূলদ সংখ্যা।	এটি হল তাই যা আমরা খুঁজছিলাম - যা কল্পনা বিরুদ্ধ।
এই কল্পনা বিরুদ্ধ যে rx একটি মূলদ সংখ্যা, এই ভ্রান্ত ধারণা থেকে উদয় হয়েছে। অতএব rx একটি অমূলদ।	অবরোহী যুক্তি।

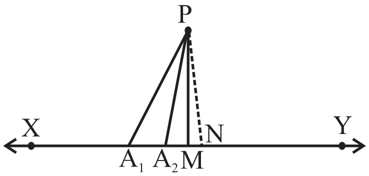
আমরা এখন উদাহরণ 11 প্রমাণ করব, কিন্তু এটি কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহারে করব। প্রমাণটি নীচে দেওয়া হল :

উক্তি	বিশ্লেষণ / মন্তব্য
চলো আমরা ধরি যে উক্তিটি সত্য নয়	পূর্বে আমরা দেখেছি যে, 'কল্পনা বিরুদ্ধ এর মাধ্যমে প্রমাণ' এর ব্যবহার যুক্তির একটি প্রারম্ভিক পর্ব।
সুতরাং, আমরা মনে করি যে, মৌলিক সংখ্যা p-এর অস্তিত্ব আছে $(p > 3)$, যা $6n + 1$ অথবা $6n + 5$ আকারে নয়, যেখানে n একটি সমগ্র সংখ্যা।	এটি উক্তিটির একটি না-ক্রিয়ার ফলস্বরূপ।
6 দ্বারা ভাগের ক্ষেত্রে ইউক্লিডের ভাগ সহায়ক উপপাদ্য এবং p সংখ্যাটি $6n + 1$ অথবা $6n + 5$ আকারের নয়, এই শর্তটি ব্যবহার করে আমরা পাই $p = 6n$ বা $6n + 2$ বা $6n + 3$ বা $6n + 4$ ।	পূর্বে প্রমাণিত ফলাফলগুলো ব্যবহার করে।
অতএব, p হয় 2 নতুবা 3 দ্বারা বিভাজ্য।	অবরোহী যুক্তির মাধ্যমে।
সুতরাং, p মৌলিক নয়।	অবরোহী যুক্তির মাধ্যমে।
এটি কল্পনা বিরুদ্ধ, কারণ আমাদের প্রকল্প অনুযায়ী p মৌলিক।	সঠিকভাবে যা আমরা চাই !
এই কল্পনা বিরুদ্ধ ধারণাটির উদয় হয়েছে। কারণ আমরা ধরেছি যে, একটি মৌলিক সংখ্যা p এর অস্তিত্ব আছে ($p > 3$) যা $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকারের নয়।	
সুতরাং, 3 অপেক্ষা বৃহত্তর সকল মৌলিক সংখ্যা $6n + 1$ বা $6n + 5$ আকারের হয়।	আমরা সিদ্ধান্তে পৌঁছলাম।

মন্তব্য : উপরের প্রমাণগুলোর উদাহরণ তোমাদের আবারও দেখাচ্ছে যে, একটি ফলাফল প্রমাণের অনেকগুলো উপায় থাকতে পারে।

উপপাদ্য A1.2 : *একটি বিন্দু এবং ওই বিন্দুগামী নয় এমন কোনো সরলরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী সংযোজক রেখাংশগুলোর মধ্যে ক্ষুদ্রতম রেখাংশটি ওই সরলরেখাটির উপর লম্ব হয়।*

প্রমাণ :



চিত্র A1.5

উক্তি	বিশ্লেষণ / মন্তব্য
ধরো XY প্রদত্ত রেখা, P একটি বিন্দু যা XY-এর উপর অবস্থিত নয় এবং P বিন্দু থেকে XY রেখার উপর PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি রেখাংশগুলো অঙ্কন করা হল, যার মধ্যে PM হল ক্ষুদ্রতম (চিত্র A1.5 দেখো)।	যেহেতু আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে সকল রেখাংশ PM, PA_1, PA_2, . . ইত্যাদির মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি হল XY-এর উপর লম্ব, তাই আমরা শুরু করব এই সকল রেখাংশগুলোকে নিয়ে।
ধরো XY-এর উপর PM লম্ব নয়।	এটি উক্তিটির না-ক্রিয়া যা কল্পনা বিরুদ্ধ দ্বারা প্রমাণ করা যায়।
XY রেখার উপর PN লম্ব অঙ্কন করা হল, চিত্র A1.5-এ বিন্দুরেখা (dotted lines) দ্বারা দেখানো হয়েছে।	আমাদের ফলাফল প্রমাণের জন্য প্রায়শই অঙ্কনের প্রয়োজন হয়।
PM, PA_1, PA_2, . . . ইত্যাদি রেখাংশগুলোর মধ্যে PN হল ক্ষুদ্রতম। অর্থাৎ $PN < PM$ ।	সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তার অতিভুজ অপেক্ষা ছোটো এবং সংখ্যার জ্ঞাত ধর্মের ব্যবহারে।
এটি আমাদের প্রকল্পের কল্পনা বিরুদ্ধ, যে PM সকল রেখাংশগুলোর মধ্যে ক্ষুদ্রতম।	সঠিকভাবে যা আমরা চাই!
অতএব, PM রেখাংশটি XY-এর উপর লম্ব।	আমরা সিদ্ধান্তে পৌঁছালাম।

অনুশীলনী A1.6

1. মনে করো, $a+b=c+d$, এবং $a<c$ । কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে দেখাও যে, $b>d$ ।
2. ধরো, r একটি মূলদ সংখ্যা এবং x একটি অমূলদ সংখ্যা। কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে দেখাও যে, $r+x$ একটি অমূলদ সংখ্যা।
3. কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, কোনো অখণ্ড সংখ্যা a-এর জন্য, a^2 একটি যুগ্ম সংখ্যা, তারপর a ও এর অনুরূপ। [**ইঙ্গিত :** ধরো a যুগ্ম সংখ্যা নয়, অর্থাৎ এটি $2n+1$ আকারের, যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা n এর জন্য এবং তারপর অগ্রসর হও।]
4. কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, কোনো অখণ্ড সংখ্যা a-এর জন্য a^2 , 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, a ও 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।
5. কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে দেখাও যে, n-এর এরূপ কোনো মান নেই যার জন্য 6^n এর শেষ অঙ্ক শূন্য হয়।
6. কল্পনা বিরুদ্ধ প্রমাণ ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, একই সমতলে অবস্থিত দুটি ভিন্ন রেখা এক এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

A1.8 সারসংক্ষেপ

এই পরিশিষ্টে, তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একটি প্রমাণের বিভিন্ন উপাদান এবং নবম শ্রেণিতে পড়েছ এরূপ সহকারী ধারণা।
2. একটি উক্তির না-ক্রিয়া।
3. একটি উক্তির বিপরীত।
4. কল্পনা বিরুদ্ধ বা বিরোধ উক্তি-এর মাধ্যমে প্রমাণ।

গাণিতিক মডেলিং
(MATHEMATICAL MODELLING) A2

A2.1 ভূমিকা

- একজন প্রাপ্তবয়স্ক মানুষের শরীরে প্রায় 1,50,000 কিমি ধমনি এবং শিরা থাকে যা রক্ত পরিবহন করে।
- মানুষের হৃৎপিণ্ড প্রতি 60 সেকেন্ডে শরীরে 5 থেকে 6 লিটার রক্ত পাম্প (Pump) করে।
- সূর্য পৃষ্ঠের তাপমাত্রা প্রায় 6,000° C।

তোমরা কি সবসময় এই ভেবে বিস্মিত হচ্ছ না যে, কীভাবে আমাদের বিজ্ঞানী এবং গণিতবিদ্‌গণ সম্ভাব্য এই ফলাফলগুলো অনুমান করেছেন? তারা কি কিছু প্রাপ্তবয়স্ক মৃতদেহ থেকে শিরা এবং ধমনি টেনে বের করে এনে এদের পরিমাপ করেছিলেন? তাঁরা কি এই ফলাফলে পৌঁছতে রক্ত নিষ্কাশন করেছিলেন? তাঁরা কি একটি থার্মোমিটার নিয়ে সূর্যের তাপমাত্রা পেতে সূর্যে ভ্রমণ করেছিলেন? অবশ্যই না। তাহলে তাঁরা কীভাবে এই পরিসংখ্যানগুলো পেয়েছিলেন?

আচ্ছা, উত্তরটা **গাণিতিক মডেলিং**-এ রয়েছে, যা আমরা তোমাদের নবম শ্রেণিতে উপস্থাপন করেছি। মনে করে দেখো যে, একটি গাণিতিক মডেল হল কিছু বাস্তব জীবন পরিস্থিতির একটি গাণিতিক বর্ণনা। আরও মনে করে পাই যে, গাণিতিক মডেলিং হল একটি সমস্যার গাণিতিক মডেল তৈরি করার প্রক্রিয়া এবং এটিকে ব্যবহার করে সমস্যাটিকে বিশ্লেষণ এবং সমাধান করা।

অতএব, গাণিতিক মডেলিং-এ, আমরা একটি বাস্তব জগতের সমস্যা নিয়ে এটিকে সমতুল্য একটি গাণিতিক সমস্যায় রূপান্তরিত করি। আমরা তখন গাণিতিক সমস্যাটিকে সমাধান করি এবং বাস্তব জগতের সমস্যার পরিস্থিতি অনুসারে এর সমাধান ব্যাখ্যা করি। তখন এটি দেখা গুরুত্বপূর্ণ যে প্রাপ্ত সমাধানটি ধারণা তৈরি করে, যা মডেলটির মান্যতাকরণের মঞ্চ। কিছু উদাহরণ, যেখানে গাণিতিক মডেলিং অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ, তা নীচে দেওয়া হল :

(i) নদীর যে স্থানে পৌঁছানো যায় না সেই স্থানের চওড়া এবং গভীরতা নির্ণয় করা।

(ii) পৃথিবী এবং অন্যান্য গ্রহের ভরের আনুমানিক পরিমাপ করা।

(iii) পৃথিবী এবং অন্য যে-কোনো গ্রহের মধ্যকার দূরত্বের আনুমানিক পরিমাপ করা।

(iv) কোনো দেশে মৌসুমি জলবায়ু আগমনের ভবিষ্যৎবাণী করা।

(v) স্টক মার্কেট (stock market)-এর ঝোঁক নিয়ে ভবিষ্যৎবাণী করা।

(vi) একজন মানুষের শরীরের অভ্যন্তরে রক্তের পরিমাণের আনুমানিক পরিমাপ করা।

(vii) 10 বছর পরে একটি শহরের জনসংখ্যার ভবিষ্যৎবাণী করা।

(viii) একটি গাছে পাতার সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করা।

(ix) কোনো শহরের বায়ুমণ্ডলে উপস্থিত বিভিন্ন দূষকের ppm-এর আনুমানিক হিসাব করা।

(x) পরিবেশের ওপর দূষকের প্রভাবের আনুমানিক পরিমাপ করা।

(xi) সূর্যপৃষ্ঠের তাপমাত্রার আনুমানিক পরিমাপ করা।

এই অধ্যায়ে আমরা গাণিতিক মডেলিং প্রক্রিয়ার পুনর্বিচার করব এবং এর স্পষ্টীকরণের জন্য আমাদের চারপাশের জগৎ থেকে কিছু উদাহরণ নেব। A2.2 অনুচ্ছেদে আমরা একটি মডেল নির্মাণ সম্পর্কিত সব ধাপের সঙ্গে তোমাদের পরিচয় ঘটাব। A2.3 অনুচ্ছেদে আমরা বিভিন্ন প্রকার উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করব। A2.4 অনুচ্ছেদে আমরা গাণিতিক মডেলিং-এর গুরুত্ব-এর সঙ্গে সম্পর্কিত কারণগুলোর ওপর বিচার করব।

একটি বিষয় মনে রাখা দরকার যে, এখানে আমাদের লক্ষ্য হল এমন একটি গুরুত্বপূর্ণ দিকের সঙ্গে তোমাদের অবগত করা যেখানে গণিত বাস্তব-জগতের সমস্যাগুলোর সমাধানে সাহায্য করে। যদিও, বাস্তবে গাণিতিক মডেলিং-এর ক্ষমতা উপলব্ধি করার জন্য তোমাদের গণিতের আরও কিছু জানা দরকার। উচ্চ শ্রেণিতে এর সাথে সম্পর্কিত আরও কিছু উদাহরণ দেখবে।

A2.2 গাণিতিক মডেলিং-এর ধাপসমূহ (Stages in Mathematical Modelling)

নবম শ্রেণিতে আমরা মডেলিং ব্যবহারের কিছু উদাহরণ বিবেচনা করেছিলাম। এই উদাহরণগুলো থেকে তোমাদের মডেলিং প্রক্রিয়া এবং এর সঙ্গে সম্পর্কিত ধাপগুলো সম্বন্ধে কোনো সূক্ষ্ম ধারণা হয়েছিল কি? চলো আমরা গাণিতিক মডেলিং-এর সঙ্গে সম্পর্কিত প্রধান ধাপগুলো সম্বন্ধে পুনরায় আলোচনা করি।

ধাপ 1 (সমস্যাটি বোঝা) : বাস্তব সমস্যাটিকে সংজ্ঞায়িত করো এবং যদি দলগতভাবে কাজ কর, তাহলে তোমরা যে সমস্যাগুলো বোঝাতে চেয়েছ সেগুলো আলোচনা করো। কিছু কল্পনা করে এবং কিছু উপাদান উপেক্ষা করে সমস্যাটি সরলীকরণ কর যাতে সমাধানযোগ্য হয়।

উদাহরণস্বরূপ, মনে করো আমাদের সমস্যাটি হল একটি জলাশয়ে মাছের সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করা। এটি সম্ভব নয় যে, প্রতিটি মাছকে জলাশয় থেকে ধরা এবং তারপর এদের গণনা করা। আমরা সম্ভাব্য একটি নমুনা (sample) সংগ্রহ করতে পারি এবং এটি হতে জলাশয়ের মোট মাছের সংখ্যা নির্ণয়ের চেষ্টা এবং অনুমান করতে হবে।

ধাপ 2 (গাণিতিক বিবরণ এবং সূত্র গঠন) : গাণিতিক পদে সমস্যার বিভিন্ন দিকগুলো বর্ণনা করো। গাণিতিক বৈশিষ্ট্যগুলো বর্ণনা করার কিছু উপায় হল এইরকম :

- চলরাশিগুলো সংজ্ঞায়িত করা
- সমীকরণ অথবা অসমীকরণগুলো লেখা
- তথ্য সংযোজন করা এবং সারণির আকারে সাজানো

- লেখচিত্র অঙ্কন করা
- সম্ভাবনাসমূহ হিসাব করা

উদাহরণস্বরূপ, ধাপ-1 এ আলোচিত, নমুনা হতে আমরা কীভাবে মোট মাছের সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করব ? তাহলে আমরা নমুনা মাছগুলোকে চিহ্নিত করে জলাশয়ের বাকি মাছগুলোর সাথে মিশিয়ে দিই, তারপর পুনরায় জলাশয় থেকে একটি নমুনা সংগ্রহ করি এবং লক্ষ করি নতুন নমুনাতে পূর্বে চিহ্নিত কতগুলো মাছ আছে। তারপর, অনুপাত এবং সমানুপাত ব্যবহার করে, আমরা মোট মাছের সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, চলো আমরা জলাশয়টি থেকে 20টি মাছের নমুনা সংগ্রহ করি এবং এদেরকে চিহ্নিত করি এবং এদেরকে এই জলাশয়ে ছেড়ে দিই, যাতে এরা বাকি মাছগুলোর সাথে মিশে যায়। এরপর আমরা মিশ্রিত মাছগুলো থেকে আরেকটি নমুনা (ধরো 50) নিই এবং লক্ষ করি কতগুলো চিহ্নিত। সুতরাং, আমরা তথ্যগুলো একত্রিত করি এবং এটিকে বিশ্লেষণ করি।

একটি গুরুত্বপূর্ণ ধারণা করা হচ্ছে যে, চিহ্নিত মাছগুলো অবশিষ্ট মাছগুলোর সাথে সমভাবে মিশে যায় এবং আমরা যে নমুনাটি গ্রহণ করি তা সমগ্র মাছগুলোর একটি ভালো নমুনা।

ধাপ 3 (গাণিতিক সমস্যার সমাধান) : বিভিন্ন গাণিতিক প্রযুক্তি ব্যবহার করে ধাপ 2 তে উন্নীত সরলীকৃত সমস্যাটিকে তারপর সমাধান করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, মনে করো ধাপ 2 তে উদাহরণে দ্বিতীয় নমুনাটিতে 5 টি মাছ চিহ্নিত আছে। অতএব, দ্বিতীয় নমুনায় মাছের মোট সংখ্যার $\frac{5}{50}$, অর্থাৎ, $\frac{1}{10}$ অংশ চিহ্নিত। যদি এটি সমগ্র মাছ সংখ্যার প্রতিরূপ হয়, তবে মোট মাছ সংখ্যার $\frac{1}{10} = 20$.

সুতরাং, মোট মাছের সংখ্যা $= 20 \times 10 = 200$.

ধাপ 4 (সমাধানের ব্যাখ্যা) : পূর্বের ধাপে প্রাপ্ত সমাধানটিকে এখন বাস্তব জীবনের পরিস্থিতির সাথে সম্পর্কিত সমস্যাতে প্রয়োগ করব যা আমরা ধাপ 1-এ শুরু করেছিলাম।

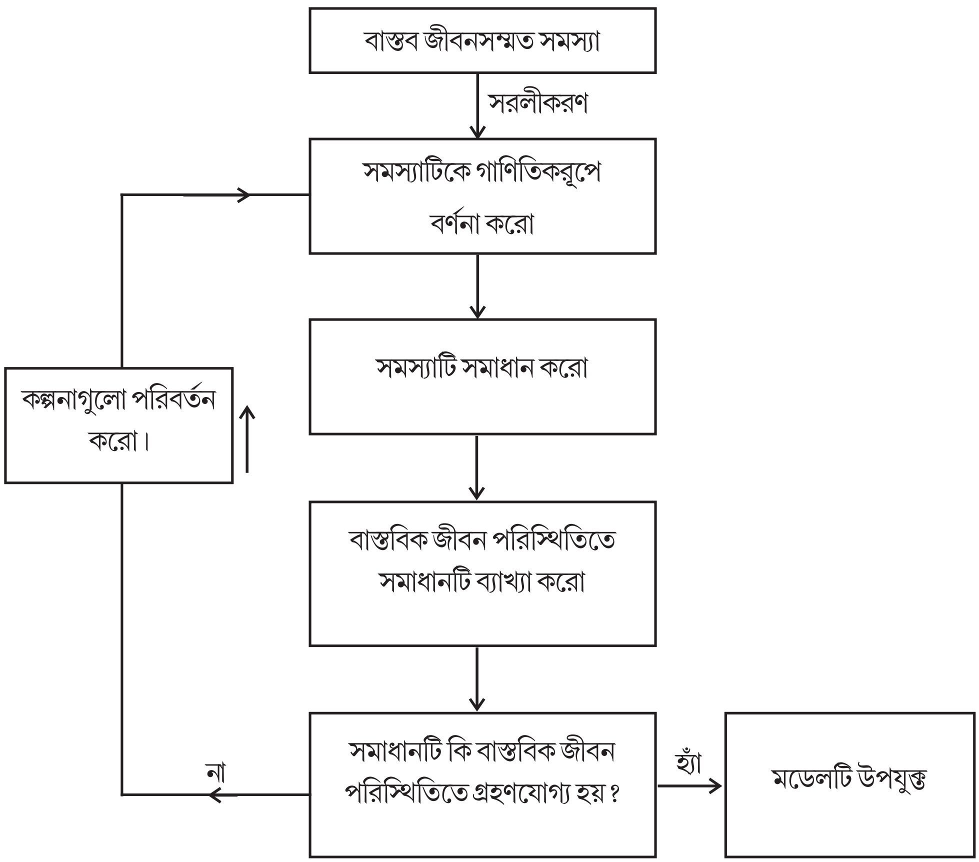
উদাহরণস্বরূপ, ধাপ 3-তে প্রদত্ত সমস্যাটির সমাধান করার পর আমরা মাছের সংখ্যা 200 পেয়েছি।

ধাপ 5 (মডেলের যাচাইকরণ): আমরা পূর্বের পরিস্থিতিতে ফিরে যাব এবং দেখব যে গাণিতিক নিয়ম অনুসারে প্রাপ্ত ফলাফল সার্থক কিনা। যদি সার্থক হয়, তবে আমরা মডেলটি ততক্ষণ পর্যন্ত ব্যবহার করব যতক্ষণ না পর্যন্ত নতুন তথ্য উপলব্ধি না হয় অথবা কল্পনা পরিবর্তিত না হয়।

অনেক সময়, সরলীকরণ করার সময় ব্যবহৃত কল্পনাগুলোর কারণে আমরা কোনো বাস্তব সমস্যার গাণিতিক বিবরণ দেওয়ার সময় প্রয়োজনীয় উপাদানগুলো হারিয়ে ফেলি। এরকম পরিস্থিতিতে সমাধানটি প্রায়শই সঠিক হতে পারে না এবং এটি বাস্তব পরিস্থিতিতে কোনো অর্থপূর্ণ হয় না। যদি এরকম হয়, তবে আমরা ধাপ 1-এর করা কল্পনাগুলো পুনরায় বিবেচনা করব এবং তাদেরকে আরও বাস্তবিক রূপ দেওয়ার জন্য, সম্ভবত আর কিছু উপাদান নিয়ে পর্যালোচনা করা হবে, যা পূর্বে বিবেচনা করা হয়নি।

উদাহরণস্বরূপ, ধাপ 3-তে আমরা মোট মাছের সংখ্যার একটা আনুমানিক হিসাব পেয়েছিলাম। এটি জলাশয়ের মাছের প্রকৃত সংখ্যা নাও হতে পারে। পরবর্তীতে আমরা ধাপ 2 এবং 3 প্রক্রিয়াগুলো পুনরাবৃত্তি করে প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর গড় মান নিয়ে দেখি এটি মোট মাছের সংখ্যার উত্তম আনুমানিক হিসাব কিনা। এটি মোট মাছের সংখ্যার একটি কাছাকাছি আনুমানিক হিসাব হয়ে যাবে।

গাণিতিক মডেলিং প্রক্রিয়া দেখানোর অন্য একটি উপায় চিত্র A2.1-এ দেখানো হল।



চিত্র **A2.1**

সমাধানটির সরলতা বজায় রাখার জন্য মডেলাররা (Modellers) সরলীকরণ (সহজ সমাধানের জন্য) এবং সঠিকতার মধ্যে সমতা বজায় রাখতে চান। তারা আশা করে যে কিছু উন্নতি করার জন্য বাস্তবতার প্রায় কাছাকাছিই যথেষ্ট সর্বোত্তম ফলাফল এটিই হবে যে, কী ঘটবে তার ভবিষ্যৎবাণী করতে সক্ষম হওয়া, অথবা যুক্তিযুক্তভাবে সঠিক ফলাফলের আনুমানিক হিসাব করতে পারা। মনে রাখবে যে, সমস্যাকে সরল করার জন্য আমরা ভিন্ন ভিন্ন কল্পনাগুলোকে ভিন্ন ভিন্ন মডেলে ব্যবহার করব। সুতরাং, কোনো মডেলই নিখুঁত হয় না। কিছু মডেল উত্তম অথবা কিছু মডেল এটি থেকেও উত্তম হতে পারে।

অনুশীলনী A2.1

1. নিম্নলিখিত পরিস্থিতিটি বিবেচনা করো :

13 তম শতাব্দীর প্রারম্ভে লিওনার্ডে ফিবোনেসি একটি প্রশ্ন করেছেন যে যদি তোমরা ঠিক দুটি খরগোশ নিয়ে তাদের মধ্যে প্রজনন ঘটানো শুরু করতে, তবে তোমাদের কাছে কতগুলো খরগোশ হত? মনে কর যে, একজোড়া খরগোশ প্রতি মাসে একজোড়া বাচ্চার জন্ম দেয় এবং প্রতি জোড়া খরগোশ প্রতি 2 মাস বয়সে তাদের প্রথম বাচ্চার জন্ম দেয়। মাসের পর মাস জোড়া খরগোশের সংখ্যা পূর্ববর্তী দুই মাসের খরগোশের সংখ্যার যোগফলের সমান, শূন্যতম মাস এবং প্রথম মাস ব্যতীত।

মাস	খরগোশের জোড়া
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597

ঠিক 16 মাস পর তোমরা প্রায় 1600 জোড়া খরগোশ পাও!

এই পরিস্থিতিতে সমস্যাটি এবং গাণিতিক মডেলিং এর বিভিন্ন পর্যায়গুলো স্পষ্টভাবে বিবৃত করো।

A2.3 কয়েকটি উদাহরণ (Some Illustrations)

চলো এখন আমরা গাণিতিক মডেলিং-এর কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 1 **(একজোড়া লুডোর ছক্কাকে গড়িয়ে দেওয়া হল) :** ধরে নাও, তোমার শিক্ষক মহাশয় নিম্নলিখিত অনুমানমূলক খেলায় তোমাকে আহ্বান জানালেন : তিনি একজোড়া লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করলেন। তার আগে তোমার লুডোর ছক্কার উপর ওঠা সংখ্যাগুলোর যোগফল অনুমান করা প্রয়োজন। প্রতিটি সঠিক উত্তরের জন্য 2 পয়েন্ট পাবে এবং ভুল অনুমানের জন্য তুমি 2 পয়েন্ট হারাবে। কোন সংখ্যাটি সর্বোত্তম অনুমান হবে?

সমাধান :

ধাপ 1 **(সমস্যাটির অনুধাবন) :** কয়েকটি সংখ্যা তোমার জানা দরকার যাদের বেশি বার ওঠার সুযোগ রয়েছে।

ধাপ 2 **(গাণিতিক বিবরণ) :** গাণিতিক রূপে, এই সমস্যাটি লুডোর ছক্কায় দেখানো বিভিন্ন সংখ্যাগুলোর সম্ভাব্য সমষ্টির সম্ভাবনা নির্ণয় করা বোঝায়।

একজোড়া লুডোর ছক্কা গড়িয়ে নিম্নলিখিত 36 জোড়া সংখ্যা থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটিকে পছন্দ করে আমরা এই পরিস্থিতিটিকে খুবই সরলভাবে উপস্থাপন করতে পারি।

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

প্রতি জোড়া লুডোর ছক্কা নিক্ষেপে প্রথম সংখ্যাটি প্রথম ছক্কাতে দৃশ্যমান সংখ্যাটিকে এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি দ্বিতীয় ছক্কাতে দৃশ্যমান সংখ্যাটিকে বুঝায়।

ধাপ 3 **(গাণিতিক সমস্যাটির সমাধান) :** উপরের প্রতি জোড়া নিক্ষেপে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলো যোগ করে আমরা দেখি যে সম্ভাব্য যোগফলগুলো হল 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 এবং 12। আমাদের এই যোগফলগুলোর প্রতিটির সম্ভাবনা বের করতে হবে, মনে করতে হবে 36 জোড়ার সবগুলো সমভাবে সম্ভব।

আমরা নিম্নলিখিত টেবিলটিতে এটি করব।

যোগফল	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাবনা	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

লক্ষ করো যে, যোগফল 7 পাওয়ার সুযোগ 1/6, যা অন্যান্য সকল প্রকার যোগফল পাওয়ার সুযোগ থেকে বেশি।

ধাপ 4 (সমাধানটির ব্যাখ্যা) : যেহেতু যোগফল 7 পাওয়ার সম্ভাবনা সবচেয়ে বেশি, তাই তোমাদের বারবার 7 সংখ্যাটিকে অনুমান করা উচিত।

ধাপ 5 (মডেলটির যাচাই) : একজোড়া লুডোর ছক্কাকে অনেকবার নিক্ষেপ কর এবং একটি সম্পর্কিত পরিসংখ্যা টেবিল প্রস্তুত কর। সম্পর্কিত পরিসংখ্যাগুলোকে তাদের অনুরূপ সম্ভাবনার সঙ্গে তুলনা করো। যদি এই তুলনাগুলো কাছাকাছি না হয়, তবে ছক্কাগুলো সম্ভবত ঝোঁকযুক্ত (biased) হবে। তখন যে সংখ্যাগুলোর দিকে ঝোঁক থাকবে সেগুলো মূল্যায়ন করতে তথ্য পেতে পারি।

পরবর্তী উদাহরণে যাওয়ার পূর্বে তোমাদের এটির কিছু পটভূমি জানা প্রয়োজন।

অনেক লোকের একটি সাধারণ অভিজ্ঞতা আছে যে, যখন তাদের টাকার প্রয়োজন হয় তখন তাদের কাছে প্রয়োজনীয় টাকা থাকে না। দৈনন্দিন জীবনে প্রয়োজনীয় জিনিসগুলো অথবা আরামদায়ক জিনিস কেনার জন্য আমাদের সর্বদাই টাকার দরকার হয়। স্কুটার, টেলিভিশন, রেফ্রিজারেটর, গাড়ি ইত্যাদি জিনিসপত্র যাতে সীমিত অর্থের মাধ্যমে গ্রাহকরা কিনতে পারে তার জন্য ব্যবসায়ীরা *কিস্তি নামক এক ধরনের যোজনা (অথবা পরিকল্পনা)* চালু করেছিল।

অনেক সময় ব্যবসায়ীরা বিপণন কৌশল হিসেবে এরকম কিস্তি যোজনা চালু করে যাতে গ্রাহকরা এসব জিনিসপত্র কিনতে আকৃস্ট হয়। কিস্তি যোজনার অন্তর্গত কোনো বস্তু কেনার সময় গ্রাহকদের বস্তুর সম্পূর্ণ দাম একসঙ্গো দিতে হয় না। তাদেরকে বস্তু কেনার সময় দামের একটা অংশ দিতে হয় এবং বাকি অংশ মাসিক, ত্রৈমাসিক, ষান্মাসিক অথবা বাৎসরিক কিস্তিতেও দিতে পারা যায়। অবশ্যই, কিস্তি যোজনা পরিকল্পনা খাতে জিনিসপত্র কিনলে ক্রেতাকে বেশি অর্থরাশি দিতে হবে, কারণ বিক্রেতা দেরিতে দেওয়া অর্থের ওপর কিছু সুদ ধার্য করে [যাকে *বিলম্বিত পরিশোধ (deferred payment)* বলা হয়।]

কিস্তি যোজনা বোঝার জন্য কিছু উদাহরণ নেওয়ার পূর্বে চলো আমরা এই ধারণার সঙ্গো সম্পর্কযুক্ত বহুল ব্যবহৃত শব্দগুলো বোঝে নিই।

একটি বস্তুর *নগদ মূল্য (cash price)* হল সেই অর্থরাশি যা গ্রাহককে বস্তুটি কেনার সময় সম্পূর্ণরূপে দিতে হয়। *নগদ প্রদেয় অর্থ (Cash down payment)* হল সেই অর্থরাশি যা গ্রাহককে বস্তুটি কেনার সময় বস্তুর মূল্যের একটি অংশ দিতে হয়।

মন্তব্য : কিস্তি যোজনাটি যদি এরকম হয় যাতে অবশিষ্ট অর্থরাশি যদি জিনিস কেনার এক বছরের মধ্যে পরিশোধ করা হয় তবে অবশিষ্ট অর্থরাশির ওপর সরলসুদ ধার্য করা হয়।

> অতীতে ঋণের টাকার ওপর ধার্য সুদকে প্রায়শই অশুভ হিসাবে গণ্য করা হত এবং বিশেষ করে দীর্ঘদিন ধরে এটি নিষিদ্ধ ছিল। গ্রাহকদের ঋণ পরিশোধ সম্বন্ধিত আইন থেকে মুক্তির জন্য একটি নিয়ম ছিল যাতে একপ্রকার মুদ্রায় ঋণ নেওয়া হত এবং পরিশোধ অপর এক মুদ্রার বিনিময়ে হত যেখানে সুদ বিনিময় হারে নিহিত ছিল।

চলো আমরা এখন এর সাথে সম্পর্কিত একটি গাণিতিক মডেলিং সমস্যায় আসি।

উদাহরণ 2 : জুহি একটি সাইকেল কিনতে চায়। সে বাজারে যায় এবং দেখে যে, সে যে সাইকেলটি পছন্দ করে তার দাম 1800 টাকা। জুহির কাছে 600 টাকা আছে। তাই সে দোকানদারকে বলল যে সে এটি কিনতে সক্ষম নয়। কিছু হিসাব করার পর দোকানদার নিম্নোক্ত প্রস্তাবটি দিল। সে জুহিকে বলল যে সে (জুহি) 600 টাকা নগদ এবং অবশিষ্ট টাকা 610 টাকার 2টি মাসিক কিস্তিতে দিতে পারবে। জুহির কাছে দুটি বিকল্প পথ আছে — একটি হল কিস্তি যোজনাতে কেনা অথবা ব্যাঙ্ক থেকে বার্ষিক 10% সরল সুদের হারে ঋণ নিয়ে নগদ অর্থ প্রদান করা। কোন বিকল্পটি তার কাছে আর্থিকভাবে অধিক লাভবান হবে?

সমাধান :

ধাপ 1 (সমস্যাটিকে বোঝা) : জুহির এটি নির্ধারণ করতে হবে যে, দোকানদারের দেওয়া প্রস্তাবটি সে গ্রহণ করবে, না করবে না। এজন্য তার দুটি সুদের হার জানা উচিত — একটি হল কিস্তি যোজনায় ধার্য সুদের হার এবং অপরটি হল ব্যাংকের ধার্য সুদের হার (অর্থাৎ, 10%)।

ধাপ 2 (গাণিতিক বিবরণ) : যোজনাটি গ্রহণ অথবা বর্জন করার জন্য, ব্যাংকের সঙ্গো তুলনা করে দোকানদারের ধার্য সুদ নির্ণয় করা প্রয়োজন। লক্ষণীয় যে, যেহেতু সম্পূর্ণ অর্থ 1 বছরের মধ্যেই প্রদান করতে হবে, তাই এক্ষেত্রে সরল সুদ ধার্য করা হবে।

আমরা জানি যে, সাইকেলের নগদ মূল্য = 1800 টাকা।

আবার, কিস্তি যোজনায় নগদ প্রদেয় অর্থ = 600 টাকা

সুতরাং, কিস্তি যোজনায় প্রয়োজনীয় অবশিষ্ট অর্থ যা প্রদান করতে হবে = (1800 – 600) টাকা = 1200 টাকা।

মনে করো, দোকানদার দ্বারা ধার্য বার্ষিক সুদের হার = r %

প্রতিটি কিস্তির পরিমাণ = 610 টাকা

দুটি কিস্তিতে মোট প্রদেয় অর্থ = (610 + 610) টাকা = 1220 টাকা

কিস্তি যোজনায় প্রদেয় সুদের পরিমাণ = (1220 – 1200) টাকা = 20 টাকা (1)

যেহেতু, জুহি একমাসের জন্য 1200 টাকা রেখেছিল,

সুতরাং, প্রথম মাসের জন্য মূলধন = 1200 টাকা

দ্বিতীয় মাসের জন্য মূলধন = (1200 – 610) টাকা = 590 টাকা

দ্বিতীয় মূলধনের পরিমাণ (590 টাকা) + ধার্য সুদ (20 টাকা) = মাসিক কিস্তি (610 টাকা) = দ্বিতীয় কিস্তির পরিমাণ

সুতরাং, 1 মাসের জন্য মোট মূলধন = (1200 + 590) টাকা = 1790 টাকা

এখন, $$\text{সুদ} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \text{ টাকা} \qquad (2)$$

ধাপ 3 (সমস্যাটির সমাধান) : (1) এবং (2) হতে পাই,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

বা, $$r = \frac{20 \times 1200}{1790} = 13.14 \text{ (আসন্ন)}$$

ধাপ 4 (সমাধানটির ব্যাখ্যা) : কিস্তি যোজনায় কার্যকর সুদের হার $= 13.14\,\%$.

ব্যাংক দ্বারা ধার্য সুদের হার $= 10\%$

সুতরাং, তার সাইকেল কেনার জন্য ব্যাঙ্ক থেকে টাকা ঋণ করাকে প্রাধান্য দেওয়া উচিত যাতে আর্থিকভাবে অধিকতর লাভবান হয়।

ধাপ 5 (মডেলটির যাচাই) : যেহেতু সংখ্যাগুলো স্থির, তাই এই পরিস্থিতিতে এ ক্ষেত্রটি এত গুরুত্বপূর্ণ নয়। যদিও, ব্যাংক থেকে ঋণ নেওয়ার ক্ষেত্রে স্টাম্প পেপার ইত্যাদির মতো নিয়মকানুনগুলো মানার জন্য প্রয়োজনীয় খরচ যদি কিস্তি যোজনার সুদের চেয়ে বেশি হয়, তবে সে তার মতামত পরিবর্তন করতে পারে।

মন্তব্য : এখনও সুদের হার সম্বলিত মডেলিং তার প্রারম্ভিক অবস্থানে রয়েছে এবং এর যাচাইকরণ ও আর্থিক বাজারে একটি সমস্যা। কিস্তি স্থির করার ক্ষেত্রে, যদি বিভিন্ন সুদের হার অন্তর্ভুক্ত হয়, তবে সেক্ষেত্রে যাচাইকরণ একটি গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা হয়ে দাঁড়ায়।

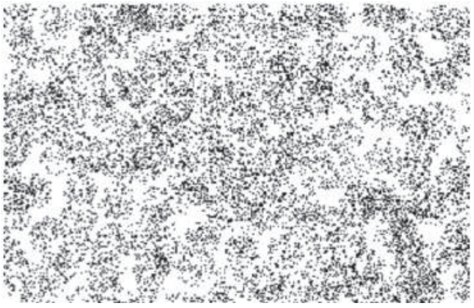
অনুশীলনী A2.2

নিম্নলিখিত প্রত্যেক সমস্যাগুলোর সমাধানের ক্ষেত্রে গাণিতিক মডেলিং-এর বিভিন্ন ধাপগুলো দেখাও।

1. একজন পক্ষী বিজ্ঞানী (ornithologist) একটি বিশালাকার মাঠে তোতাপাখির সংখ্যার আনুমানিক হিসাব করতে চান। কিছু সংখ্যক তোতাপাখিকে ধরার জন্য তিনি একটি জাল ব্যবহার করেছেন এবং 32টি তোতাপাখিকে ধরে তাদেরকে রিং পরিয়ে মুক্ত করে দিলেন। পরবর্তী সপ্তাহে তিনি 40 টি তোতা পাখিকে জালবদ্ধ করতে সক্ষম হয়েছেন যেগুলোতে 8 টি রিং-যুক্ত পাখি।

(i) দ্বিতীয়বার ধরার ক্ষেত্রে তোতাপাখির কত অংশ রিং-যুক্ত?

(ii) মাঠে উপস্থিত মোট তোতাপাখির সংখ্যার আনুমানিক হিসাব নির্ণয় করো।



2. মনে করো সংলগ্ন ছবিটি একটি উড়োজাহাজ থেকে নেওয়া একটি জঙ্গালের ছবি বোঝাচ্ছে যেখানে প্রতিটি বিন্দু একটি গাছকে নির্দেশ করে। তোমাদের উদ্দেশ্য হল পরিবেশগত আদমসুমারির অংশ হিসেবে চিহ্নিত অঞ্চলের গাছের সংখ্যা নির্ণয় করা।

3. একটি T.V. 24000 টাকা নগদ মূল্যে অথবা 8000 টাকা নগদ প্রদেয় অর্থ এবং প্রতিটি 2800 টাকার 6টি মাসিক কিস্তিতে কিনতে পারে। আলি একটি টিভি কিনতে বাজারে যায় এবং তার কাছে 8000 টাকা আছে। এখন তার কাছে দুটি বিকল্প আছে — কিস্তি যোজনায় টিভি কেনা অথবা কোনো অর্থনৈতিক সংস্থা থেকে টাকা ঋণ করে নগদ অর্থ প্রদানের মাধ্যমে কেনা। সংস্থাটি বার্ষিক 18% সরল সুদের হারে সুদ ধার্য করে। কোন্ বিকল্পটি আলির কাছে অধিকতর উত্তম?

A2.4 গাণিতিক মডেলিং কেন গুরুত্বপূর্ণ? (Why is Mathematical Modelling Important?)

আমরা উদাহরণগুলোতে দেখেছি যে, গাণিতিক মডেলিং হল একটি আন্তঃবিষয়ক শাখা। গণিতবিদ্‌গণ এবং অন্যান্য ক্ষেত্রের বিশেষজ্ঞগণ বর্তমান উপাদানগুলোর উন্নতিসাধন, আরো ভালোভাবে বিকশিত অথবা কিছু উপাদানের ব্যবহারের ভবিষ্যৎবাণী করার জন্য তাদের জ্ঞান এবং অভিজ্ঞতার আদান প্রদান করেন।

মডেলিং-এর গুরুত্বের জন্য এখানে অবশ্যই অনেক বিশেষ কারণ আছে, কিন্তু এদের অধিকাংশই নিম্নোক্ত কিছু প্রক্রিয়ার সঙ্গো সম্পর্কযুক্ত :

- *বোঝাবার ক্ষমতা বৃদ্ধি করা।* যদি আমাদের কাছে এমন একটি গাণিতিক মডেল থাকে যা বাস্তব জগতের সঙ্গো সম্পর্কযুক্ত কোনো তন্ত্রের প্রয়োজনীয় ব্যবহারগুলো প্রদর্শিত করে, তবে আমরা মডেলটির বিশ্লেষণের মাধ্যমে ঐ তন্ত্রটি ভালোভাবে বোঝতে পারি। উপরন্তু, মডেলটি নির্মাণকালে আমরা তন্ত্রটিতে কোন্ উপাদানগুলো অধিক গুরুত্বপূর্ণ তা নির্ণয় করতে পারি এবং তন্ত্রটির বিভিন্ন দিকগুলো কীভাবে একে অপরের সঙ্গো সম্পর্কযুক্ত তাও নির্ণয় করতে পারি।

- *ভবিষ্যৎবাণী, অথবা পূর্বানুমান, অথবা অনুকরণ করা।* একটি বাস্তব জগৎ তন্ত্র ভবিষ্যতে কীভাবে কাজ করবে তা জানতে আমাদের প্রায়ই ইচ্ছা হয়, কিন্তু তন্ত্রটির সাথে প্রত্যক্ষভাবে পরীক্ষা করা ব্যয় বহুল, অব্যবহারিক অথবা অসম্ভব। উদাহরণস্বরূপ, আবহাওয়ার পূর্বাভাসে, মানুষের মধ্যে ঔষধের কার্য ক্ষমতার অধ্যয়নে, পারমাণবিক চুল্লির সর্বোত্তম পরিকল্পনা নির্ণয় ইত্যাদি।

  বিভিন্ন প্রকার সংস্থাতে পূর্বানুমান করা খুবই গুরুত্বপূর্ণ, কারণ ভবিষ্যৎ- ঘটনাবলির পূর্বানুমানগুলোকে সিদ্ধান্ত তৈরি প্রক্রিয়াতে অন্তর্ভুক্ত করতে হয়। উদাহরণস্বরূপ :

  বিপনন বিভাগে, প্রয়োজনীয় নির্ভরযোগ্য পূর্বানুমানগুলো বিক্রি করার কৌশলগুলো তৈরিতে সাহায্য করে।

  বিভিন্ন জেলাতে বিদ্যালয়মুখী শিশুদের সংখ্যা বৃদ্ধির পূর্বানুমান করা বিদ্যালয় বোর্ডের দরকার, যাতে এটি নির্ণয় করা যায় যে কোথায় এবং কখন নতুন বিদ্যালয় খোলা যায়।

  বেশিরভাগ সময়, অনুমানকারীরা প্রায়ই অতীতের তথ্যাদি ভবিষ্যৎবাণী করতে ব্যবহার করে। তারা প্রথমে এরকম প্রতিরূপকে চেনার জন্য তথ্য বিশ্লেষণ করে যা এটিকে বর্ণনা করতে পারে। তখন এই তথ্যাদি এবং প্রতিরূপগুলোর পূর্বানুমান ভবিষ্যতে প্রয়োগ করা হয়। এই মূলনীতি অধিকাংশ পূর্বানুমান

পদ্ধতিতে প্রয়োগ করা হয় এবং এটি এরকম কল্পনার ওপর নির্ভর করে গঠিত হয়, যাতে এটি যেরকম প্রতিরূপ হিসাবে পরিচিত, ভবিষ্যতেও সেভাবে চলতে থাকবে।

- *অনুমান করা।* প্রায়শই, আমাদের বড়ো মানগুলোর অনুমান করা দরকার হয়। তোমরা এই সম্বন্ধে একটি জঙ্গালে গাছ, একটি জলাশয়ে মাছের আনুমানিক হিসাব ইত্যাদি সম্বন্ধীয় উদাহরণ দেখেছ। অন্য আর একটি উদাহারণ হিসাবে, নির্বাচনের পূর্বে নির্বাচনে অংশগ্রহণকারী প্রতিযোগী দলগুলো তাদের নিজের দলের জয়ের সম্ভাবনার ভবিষ্যৎবাণী করতে চায়। বিশেষ করে, তারা তাদের নিজেদের বিধানসভা কেন্দ্রে কত লোক তাদের নিজ নিজ দলকে ভোট দিয়েছে তার আনুমানিক হিসাব করতে চায়। তাদের ভবিষ্যৎবাণীর ওপর নির্ভর করে, তারা নির্বাচনী প্রচারের রণনীতি ঠিক করতে চায়। একটি রাজনৈতিক দল নির্বাচনে কত আসন পেতে পারে তার ভবিষ্যৎবাণী করতে নিষ্ক্রমণ সমীক্ষা (Exit polls) ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

অনুশীলনী A2.3

1. বিগত পাঁচ বছরের তথ্যের ওপর ভিত্তি করে বছরের শেষে তোমার বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির বোর্ড পরীক্ষায় গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের শতকরা গড়মান (average percentage)-এর পূর্বানুমান করো।

A2.5 সার সংক্ষেপ

এই পরিশিষ্টে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. গাণিতিক মডেল হল বাস্তব জীবনের সঙ্গো সম্বন্ধযুক্ত কোনো পরিস্থিতির গাণিতিক বর্ণনা। গাণিতিক মডেলিং হল বাস্তব জীবনের সঙ্গো সম্বন্ধযুক্ত কোনো সমস্যার সমাধান এবং এর প্রয়োগ করার জন্য গাণিতিক মডেল তৈরি করার পদ্ধতি।
2. মডেলিং-এর সম্বন্ধযুক্ত বিভিন্ন ধাপগুলো হল : সমস্যাটি বোঝা, গাণিতিক মডেলকে সূত্রবদ্ধ করা, এর সমাধান এবং এটিকে ব্যবহার করে বাস্তব জীবনের পরিস্থিতির সাথে ব্যাখ্যা করা এবং অধিকতর গুরুত্ব সহকারে মডেলটিকে যাচাই করা।
3. কয়েকটি গাণিতিক মডেলকে বিকাশ সাধন করা।
4. গাণিতিক মডেলিং-এর গুরুত্ব।

উত্তরমালা / সংকেত
(ANSWERS/HINTS)

অনুশীলনী 1.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
2. অখণ্ড সংখ্যার আকার হতে পারে $6q, 6q+1, 6q+2, 6q+3, 6q+4$ অথবা $6q+5$ ।
3. 8 টি সারি
4. অখণ্ড সংখ্যার আকার হতে পারে $3q, 3q+1$ অথবা $3q+2$ । প্রদত্ত অখণ্ড সংখ্যাগুলোর বর্গ করো।
5. অখণ্ড সংখ্যার আকার হতে পারে $9q, 9q+1, 9q+2, 9q+3, \ldots,$ অথবা $9q+8$ ।

অনুশীলনী 1.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$
   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$
2. (i) ল.সা.গু. $= 182$; গ.সা.গু. $= 13$ (ii) ল.সা.গু. $= 23460$; গ.সা.গু. $= 2$
   (iii) ল.সা.গু. $= 3024$; গ.সা.গু. $= 6$
3. (i) ল.সা.গু. $= 420$; গ.সা.গু. $= 3$ (ii) ল.সা.গু. $= 11339$; গ.সা.গু. $= 1$
   (iii) ল.সা.গু. $= 1800$; গ.সা.গু. $= 1$
4. 22338
7. 36 মিনিট।

অনুশীলনী 1.4

1. (i) সসীম (ii) সসীম
   (iii) অসীম আবৃত্ত (iv) সসীম
   (v) অসীম আবৃত্ত (vi) সসীম
   (vii) অসীম আবৃত্ত (viii) সসীম
   (ix) সসীম (x) অসীম আবৃত্ত
2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375
   (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) মূলদ, q এর মৌলিক উৎপাদকগুলো হয় 2 অথবা 5 অথবা উভয়ই।

(ii) মূলদ নয়।

(iii) মূলদ, q এর মৌলিক উৎপাদক 2 অথবা 5 ছাড়াও অন্য আরেকটি উৎপাদক আছে।

অনুশীলনী 2.1

1. (i) কোনো শূন্য নেই (ii) 1 (iii) 3 (iv) 2 (v) 4 (vi) 3

অনুশীলনী 2.2

1. (i) $-2, 4$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$

(iv) $-2, 0$ (v) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (vi) $-1, \frac{4}{3}$

2. (i) $4x^2 - x - 4$ (ii) $3x^2 - 3\sqrt{2}\,x + 1$ (iii) $x^2 + \sqrt{5}$

(iv) $x^2 - x + 1$ (v) $4x^2 + x + 1$ (vi) $x^2 - 4x + 1$

অনুশীলনী 2.3

1. (i) ভাগফল $= x - 3$ এবং ভাগশেষ $= 7x - 9$

(ii) ভাগফল $= x^2 + x - 3$ এবং ভাগশেষ $= 8$

(iii) ভাগফল $= -x^2 - 2$ এবং ভাগশেষ $= -5x + 10$

2. (i) হ্যাঁ (ii) হ্যাঁ (iii) না **3.** $-1, -1$ **4.** $g(x) = x^2 - x + 1$

5. (i) $p(x) = 2x^2 - 2x + 14, g(x) = 2, q(x) = x^2 - x + 7, r(x) = 0$

(ii) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 1, r(x) = 2x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2, g(x) = x^2 - 1, q(x) = x + 2, r(x) = 4$

(i), (ii) এবং (iii) প্রত্যেকের বিভিন্ন উদাহরণ হতে পারে।

অনুশীলনী 2.4 (ঐচ্ছিক)*

2. $x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ **3.** $a = 1, b = \pm\sqrt{2}$

4. $-5, 7$ **5.** $k = 5$ এবং $a = -5$

অনুশীলনী 3.1

1. বীজগাণিতিকভাবে এই দুটি পরিস্থিতিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

$x - 7y + 42 = 0; x - 3y - 6 = 0$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে আফতাব এবং তার কন্যার বর্তমান বয়স।

পরিস্থিতিগুলোকে লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য, তোমরা দুটি রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অংকন করতে পারো।

2. বীজগাণিতিকভাবে এই দুটি পরিস্থিতিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

$x + 2y = 1300$; $x + 3y = 1300$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে একটি ব্যাট এবং একটি বলের মূল্য (টাকায়)। পরিস্থিতিগুলোকে লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য, তোমরা দুটি রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অংকন করতে পারো।

3. বীজগাণিতিকভাবে এই দুটি পরিস্থিতিকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

$2x + y = 160$; $4x + 2y = 300$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে প্রতি কেজি (টাকায়) আপেল এবং আঙুরের মূল্য। পরিস্থিতিগুলোকে লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার জন্য, তোমরা দুটি রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারো।

অনুশীলনী 3.2

1. (i) নির্ণেয় রৈখিক সমীকরণযুগল হল —

$x + y = 10$; $x - y = 4$, যেখানে x এবং y হল যথাক্রমে বালক এবং বালিকার মোট সংখ্যা। পরিস্থিতিগুলোকে সমাধানের জন্য সমীকরণগুলোকে ছক কাগজের একই অক্ষের উপর অংকন করো। বালিকা = 7, বালক = 3 ।

(ii) নির্ণেয় রৈখিক সমীকরণযুগল হল —

$5x + 7y = 50$; $7x + 5y = 46$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে একটি পেনসিল এবং একটি কলমের মূল্য (টাকা)। পরিস্থিতিগুলোকে সমাধানের জন্য সমীকরণগুলোকে ছক কাগজের একই অক্ষের উপর অংকন করো। একটি পেনসিলের মূল্য = 3, একটি কলমের মূল্য = 5 ।

2. (i) একটি বিন্দুতে ছেদ করে (ii) সমপাতিত (iii) সমান্তরাল

3. (i) সংগতিপূর্ণ (ii) অসংগতিপূর্ণ (iii) সংগতিপূর্ণ (iv) সংগতিপূর্ণ (v) সংগতিপূর্ণ

4. (i) সংগতিপূর্ণ (ii) অসংগতিপূর্ণ (iii) সংগতিপূর্ণ (iv) অসংগতিপূর্ণ

উপরের (i) নং এর সমাধান হল $y = 5 - x$, যেখানে x এর মান যে-কোনো হতে পারে অর্থাৎ এখানে অসংখ্য সমাধান থাকবে।

উপরের (iii) নং এর সমাধান হল $x = 2, y = 2$, অর্থাৎ একটিমাত্র সমাধান থাকবে।

5. দৈর্ঘ্য = 20 মি. এবং প্রস্থ = 16 মি।

6. তিনটি শর্তের জন্য একটি সম্ভাব্য উত্তর হল :

(i) $3x + 2y - 7 = 0$ (ii) $2x + 3y - 12 = 0$ (iii) $4x + 6y - 16 = 0$

7. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হল $(-1, 0)$, $(4, 0)$ এবং $(2, 3)$ ।

অনুশীলনী 3.3

1. (i) $x = 9,\ y = 5$ (ii) $s = 9,\ t = 6$ (iii) $y = 3x - 3$,

যেখানে x এর মান যে-কোনো হতে পারে অর্থাৎ অসংখ্য সমাধান থাকবে।

(iv) $x = 2,\ y = 3$ (v) $x = 0,\ y = 0$ (vi) $x = 2,\ y = 3$

2. $x = -2,\ y = 5;\ m = -1$

3. (i) $x - y = 26,\ x = 3y$, যেখানে x এবং y দুটি সংখ্যা $(x > y)$; $x = 39, y = 13$ ।

(ii) $x - y = 18,\ x + y = 180$, যেখানে x এবং y হল দুটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ; $x = 99,\ y = 81$ ।

(iii) $7x + 6y = 3800, 3x + 5y = 1750$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে একটি ব্যাট এবং একটি বলের মূল্য (টাকায়) ; $x = 500, y = 50$ ।

(iv) $x + 10y = 105,\ x + 15y = 155$, যেখানে x হল নির্দিষ্ট ভাড়া (টাকায়) এবং y হল ভাড়া (প্রতি কিমি); $x = 5,\ y = 10$; 255 টাকা।

(v) $11x - 9y + 4 = 0,\ 6x - 5y + 3 = 0$, যেখানে x এবং y হল ভগ্নাংশটির লব এবং হর ; $\frac{7}{9}$ $(x = 7,\ y = 9)$.

(vi) $x - 3y - 10 = 0, x - 7y + 30 = 0$, যেখানে x এবং y হল জেকব এবং তার পুত্রের বয়স (বছর); $x = 40, y = 10$.

অনুশীলনী 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5},\ y = \frac{6}{5}$ (ii) $x = 2,\ y = 1$ (iii) $x = \frac{9}{13}, y = -\frac{5}{13}$

(iv) $x = 2,\ y = -3$

2. (i) $x - y + 2 = 0, 2x - y - 1 = 0$, যেখানে x এবং y হল ভগ্নাংশটির লব ও হর ; $\frac{3}{5}$.

(ii) $x - 3y + 10 = 0,\ x - 2y - 10 = 0$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে নুরী ও সনু-এর বয়স (বছরে)। নুরীর বয়স $(x) = 50$, সনুর বয়স $(y) = 20$ ।

(iii) $x + y = 9,\ 8x - y = 0$, যেখানে x এবং y যথাক্রমে সংখ্যাটির একক এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক; 18।

(iv) $x + 2y = 40,\ x + y = 25$, যেখানে x এবং y হল যথাক্রমে 50 টাকা এবং 100 টাকা নোটের সংখ্যা; $x = 10, y = 15$.

(v) $x + 4y = 27,\ x + 2y = 21$, যেখানে x হল ধার্যমূল্য (টাকায়) এবং y হল প্রত্যেক অতিরিক্ত দিনের ধার্যমূল্য (টাকায়); $x = 15,\ y = 3$ ।

অনুশীলনী 3.5

1. (i) কোনো সমাধান থাকবে না। (ii) একটি মাত্র সমাধান; $x = 2,\ y = 1$

(iii) অসংখ্য সমাধান থাকবে (iv) একটি মাত্র সমাধান; $x = 4,\ y = -1$

2. (i) $a = 5, b = 1$ (ii) $k = 2$ **3.** $x = -2,\ y = 5$

4. (i) $x + 20y = 1000,\ x + 26y = 1180$, যেখানে x হল নির্দিষ্ট খরচ (টাকায়) এবং y হল প্রতিদিনের খাবার খরচ (টাকায়); $x = 400,\ y = 30$ ।

(ii) $3x - y - 3 = 0,\ 4x - y - 8 = 0$, যেখানে x এবং y হল ভগ্নাংশটির লব ও হর ; $\frac{5}{12}$

(iii) $3x - y = 40,\ 2x - y = 25$, যেখানে x এবং y হল সঠিক উত্তর ও ভুল উত্তরের সংখ্যা ; 20।

(iv) $u - v = 20,\ u + v = 100$, যেখানে u এবং v হল গাড়ি দুটির গতিবেগ (কিমি/ঘন্টা) ; $u = 60, v = 40$।

(v) $3x - 5y - 6 = 0,\ 2x + 3y - 61 = 0$, যেখানে x এবং y হল যথাক্রমে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ (একক); দৈর্ঘ্য $(x) = 17$, প্রস্থ $(y) = 9$ ।

অনুশীলনী 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{3}$ (ii) $x = 4,\ y = 9$ (iii) $x = \frac{1}{5},\ y = -2$

(iv) $x = 4,\ y = 5$ (v) $x = 1,\ y = 1$ (vi) $x = 1,\ y = 2$

(vii) $x = 3,\ y = 2$ (viii) $x = 1,\ y = 1$

2. (i) $u + v = 10, u - v = 2$, যেখানে u এবং v যথাক্রমে নৌকা ও স্রোতের বেগ (কিমি/ঘন্টা); $u = 6,\ v = 4$ ।

(ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4},\ \frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, যেখানে n এবং m হল একজন মহিলা এবং একজন পুরুষের সেলাই কাজটি সম্পন্ন হওয়া দিনের সংখ্যা ; $n = 18, m = 36$ ।

(iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4,\ \frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, যেখানে u এবং v যথাক্রমে ট্রেন এবং বাসের গতিবেগ (কিমি/ঘন্টা); $u = 60,\ v = 80$ ।

অনুশীলনী 3.7 (ঐচ্ছিক)*

1. অনির বয়স 19 বছর এবং বিজুর বয়স 16 বছর অথবা অনির বয়স 21 বছর এবং বিজুর বয়স 24 বছর।

2. 40 টাকা, 170 টাকা; প্রথম ব্যক্তির মূলধন x টাকা এবং দ্বিতীয় ব্যক্তির মূলধন y টাকা ।

$x + 100 = 2(y - 100), y + 10 = 6(x - 10)$

3. 600 কিমি **4.** 36 **5.** $\angle A = 20°,\ \angle B = 40°,\ \angle C = 120°$

6. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাংক হল $(1, 0), (0, -3), (0, -5)$ ।

7. (i) $x = 1,\ y = -1$ (ii) $x = \dfrac{c(a-b)-b}{a^2-b^2},\ y = \dfrac{c(a-b)+a}{a^2-b^2}$

(iii) $x = a,\ y = b$ (iv) $x = a + b,\ y = -\dfrac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2,\ y = 1$

8. $\angle A = 120°,\ \angle B = 70°,\ \angle C = 60°,\ \angle D = 110°$

অনুশীলনী 4.1

1. (i) হ্যাঁ (ii) হ্যাঁ (iii) না (iv) হ্যাঁ

(v) হ্যাঁ (vi) না (vii) না (viii) হ্যাঁ

2. (i) $2x^2 + x - 528 = 0$, যেখানে x হল জমিটির প্রস্থ (মিটারে)।

(ii) $x^2 + x - 306 = 0$, যেখানে x হল ক্ষুদ্রতর অখণ্ড সংখ্যা।

(iii) $x^2 + 32x - 273 = 0$, যেখানে x হল রোহণের বর্তমান বয়স (বছরে)।

(iv) $u^2 - 8u - 1280 = 0$, যেখানে u হল ট্রেনের গতিবেগ (কিমি/ঘণ্টায়)।

অনুশীলনী 4.2

1. (i) $-2, 5$ (ii) $-2, \dfrac{3}{2}$ (iii) $-\dfrac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$

(iv) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}$ (v) $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}$

2. (i) $9, 36$ (ii) $25, 30$

3. সংখ্যাগুলো হল 13 এবং 14।

4. ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাগুলো হল 13 এবং 14 ।

5. 5 সেমি এবং 12 সেমি

6. জিনিসের সংখ্যা $= 6$, প্রতিটি জিনিসের উৎপাদন মূল্য $= 15$ টাকা।

অনুশীলনী 4.3

1. (i) $\dfrac{1}{2}, 3$ (ii) $\dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}, \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ (iii) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) অস্তিত্ব নাই।

2. 1 এর অনুরূপ

3. (i) $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ (ii) $1, 2$

4. 7 বছর।

5. গণিতের প্রাপ্ত নম্বর $= 12$, ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বর $= 18$;
অথবা, গণিতের প্রাপ্ত নম্বর $= 13$, ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বর $= 17$

6. 120 মি, 90 মি

7. $18, 12$ অথবা $18, -12$

8. 40 কিমি/ঘণ্টা

9. 15 ঘণ্টা, 25 ঘণ্টা

10. যাত্রীবাহী রেলগাড়ির গতিবেগ = 33 কিমি/ঘন্টা, এক্সপ্রেস রেলগাড়ির গতিবেগ = 44 কিমি/ঘণ্টা।

11. 18 মি, 12 মি

অনুশীলনী 4.4

1. (i) বাস্তব বীজের অস্তিত্ব নাই (ii) বীজসমূহ সমান; $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) বীজসমূহ অসমান; $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

2. (i) $k = \pm\, 2\sqrt{6}$ (ii) $k = 6$

3. হ্যাঁ। 40 মি, 20 মি

4. না

5. হ্যাঁ। 20 মি, 20 মি

অনুশীলনী 5.1

1. (i) হ্যাঁ। 15, 23, 31, . . . পদগুলো একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে, যেহেতু প্রতিটি পরবর্তী পদ তার পূর্ববর্তী পদের সাথে 8 যোগ করে পাওয়া যায়।

(ii) না। আয়তনের সাংখ্যমানগুলো হল $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \ldots.$ (iii) হ্যাঁ। 150, 200, 250, . . . একটি সমান্তর প্রগতি গঠন করে।

(iv) না। মোট অর্থরাশিগুলো হল $10000\left(1+\frac{8}{100}\right), 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3, \ldots.$

2. (i) 10, 20, 30, 40 (ii) $-2, -2, -2, -2$ (iii) $4, 1, -2, -5$

(iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (v) $-1.25, -1.50, -1.75, -2.0$

3. (i) $a = 3,\ d = -2$ (ii) $a = -5,\ d = 4$

(iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ (iv) $a = 0.6,\ d = 1.1$

4. (i) না (ii) হ্যাঁ। $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

(iii) হ্যাঁ। $d = -2; -9.2, -11.2, -13.2$ (iv) হ্যাঁ। $d = 4;\ 6, 10, 14$

(v) হ্যাঁ। $d = \sqrt{2};\ 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$ (vi) না

(vii) হ্যাঁ। $d = -4;\ -16, -20, -24$ (viii) Yes. $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(ix) না (x) হ্যাঁ। $d = a;\ 5a, 6a, 7a$

(xi) না (xii) হ্যাঁ। $d = \sqrt{2}$; $\sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

(xiii) না (xiv) না (xv) হ্যাঁ। $d = 24$; 97, 121, 145

অনুশীলনী 5.2

1. (i) $a_n = 28$ (ii) $d = 2$ (iii) $a = 46$ (iv) $n = 10$ (v) $a_n = 3.5$

2. (i) C (ii) B

3. (i) $\boxed{14}$ (ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ (iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

(iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ (v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16 তম পদ। **5.** (i) 34 (ii) 27

6. না **7.** 178 **8.** 64

9. 5 তম পদ। **10.** 1 **11.** 65 তম পদ

12. 100 **13.** 128 **14.** 60

15. 13 **16.** 4, 10, 16, 22, . . .

17. শেষ দিক থেকে 20 তম পদ হল 158 ।

18. –13, –8, –3 **19.** 11 তম বছর **20.** 10

অনুশীলনী 5.3

1. (i) 245 (ii) –180 (iii) 5505 (iv) $\frac{33}{20}$

2. (i) $1046\frac{1}{2}$ (ii) 286 (iii) –8930

3. (i) $n = 16, S_n = 440$ (ii) $d = \frac{7}{3}, S_{13} = 273$ (iii) $a = 4, S_{12} = 246$

(iv) $d = -1, a_{10} = 8$ (v) $a = -\frac{35}{3}, a_9 = \frac{85}{3}$ (vi) $n = 5, a_n = 34$

(vii) $n = 6, d = \frac{54}{5}$ (viii) $n = 7, a = -8$ (ix) $d = 6$

(x) $a = 4$

4. 12; $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ সূত্রটিতে $a = 9, d = 8, S = 636$ বসিয়ে আমরা একটি দ্বিঘাত সমীকরণ $4n^2 + 5n - 636 = 0$ পাই। সমাধান করে, আমরা পাই $n = -\frac{53}{4}, 12$। এই দুটি বীজের মধ্যে কেবল একটি বীজ 12 গ্রহণযোগ্য।

5. $n = 16,\ d = \frac{8}{3}$ **6.** $n = 38,\ S = 6973$ **7.** যোগফল $= 1661$

8. $S_{51} = 5610$ **9.** n^2 **10.** (i) $S_{15} = 525$ (ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3, S_2 = 4;\ a_2 = S_2 - S_1 = 1;\ S_3 = 3,\ a_3 = S_3 - S_2 = -1,$
$a_{10} = S_{10} - S_9 = -15;\ a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n.$

12. 4920 **13.** 960 **14.** 625 **15.** 27750

16. পুরষ্কারগুলোর মূল্য (টাকায়) হল 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 **18.** 143 সেমি

19. 16 টি সারি, উপরের সারিতে 5টি গুঁড়ি রাখা হয়েছে।

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ সূত্রটিতে $S = 200, a = 20, d = -1$ বসিয়ে আমরা পাই, $41n - n^2 = 400$। সমাধান করে, $n = 16, 25$। সুতরাং, সারির সংখ্যা 16 অথবা 25। $a_{25} = a + 24d = -4$ অর্থাৎ, 25 তম সারিতে গুঁড়ির সংখ্যা হল -4 যাহা সম্ভব নয়। অতএব, $n = 25$ সম্ভব নয়। $n = 16$-এর জন্য, $a_{16} = 5$। সুতরাং, 16 টি সারি আছে এবং উপরের সারিতে 5 টি গুঁড়ি রাখা হয়েছে।

20. 370 মি।

অনুশীলনী 5.4 (ঐচ্ছিক)*

1. 32 তম পদ **2.** $S_{16} = 20, 76$ **3.** 385 সেমি

4. 35 **5.** 750 মি^{3}

অনুশীলনী 6.1

1. (i) সদৃশ (ii) সদৃশ (iii) সমবাহু
(iv) সমান, সমানুপাতিক **3.** না

অনুশীলনী 6.2

1. (i) 2 সেমি (ii) 2.4 সেমি

2. (i) না (ii) হ্যাঁ (iiii) হ্যাঁ

9. O বিন্দু দিয়ে DC-এর সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করো, যা AD এবং BC-কে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

অনুশীলনী 6.3

1. (i) হ্যাঁ। AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ii) হ্যাঁ। SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$
(iii) না (iv) হ্যাঁ। SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$
(v) না (vi) হ্যাঁ। AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$
2. $55°, 55°, 55°$
14. AD-কে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করো যাতে AD = DE এবং PM কে N বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করো যাতে PM = MN হয়। EC এবং NR যুক্ত করো।
15. 42 মি

অনুশীলনী 6.4

1. 11.2 সেমি 2. 4 : 1 5. 1 : 4 8. C 9. D

অনুশীলনী 6.5

1. (i) হ্যাঁ, 25 সেমি (ii) না (iii) না (iv) হ্যাঁ, 13 সেমি
6. $a\sqrt{3}$ 9. 6 মি 10. $6\sqrt{7}$ মি 11. $300\sqrt{61}$ কিমি
12. 13 মি 17. C

অনুশীলনী 6.6 (ঐচ্ছিক)*

1. R বিন্দু দিয়ে SP এর সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা অঙ্কন করো যা বর্ধিত QP কে T তে ছেদ করে। দেখাও PT = PR ।
6. এই অনুশীলনীর Q.5 এর (iii) নং এর ফলাফল ব্যবহার করো। 7. 3 মি, 2.79 মি

অনুশীলনী 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2+b^2}$
2. 39; 39 কিমি 3. না 4. হ্যাঁ 5. চম্পা সঠিক
6. (i) বর্গক্ষেত্র (ii) কোনো চতুর্ভুজ নয় (iii) সামান্তরিক
7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$ 9. ± 4, QR $= \sqrt{41}$, PR $= \sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$
10. $3x + y - 5 = 0$

অনুশীলনী 7.2

1. $(1, 3)$ 2. $\left(2, -\frac{5}{3}\right); \left(0, -\frac{7}{3}\right)$
3. $\sqrt{61}$ মি; পঞ্চম রেখা বরাবর 22.5 মি দূরত্বে 4. 2 : 7

5. $1:1;\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ **6.** $x=6,\ y=3$ **7.** $(3,-10)$

8. $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{20}{7}\right)$ **9.** $\left(-1, \frac{7}{2}\right), (0,5), \left(1, \frac{13}{2}\right)$ **10.** 24 বর্গএকক

অনুশীলনী 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ বর্গএকক (ii) 32 বর্গএকক **2.** (i) $k=4$ (ii) $k=3$

3. 1 বর্গএকক; $1:4$ **4.** 28 বর্গএকক

অনুশীলনী 7.4 (ঐচ্ছিক)*

1. $2:9$ **2.** $x+3y-7=0$ **3.** $(3,-2)$ **4.** $(1,0), (1,4)$

5. (i) (4, 6), (3, 2), (6, 5); AD এবং AB কে স্থানাংক অক্ষ ধরে

(ii) (12, 2), (13, 6), (10, 3); CB এবং CD কে স্থানাংক অক্ষ ধরে। $\frac{9}{2}$ বর্গএকক, $\frac{9}{2}$ বর্গএকক; উভয়ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল একই।

6. $\frac{15}{32}$ বর্গএকক; $1:16$

7. (i) $D\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$ (ii) $P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$

(iii) $Q\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right), R\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$ (iv) P, Q, R হল একইবিন্দু

(v) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ **8.** রম্বস

অনুশীলনী 8.1

1. (i) $\sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$ (ii) $\sin C = \frac{24}{25}, \cos C = \frac{7}{25}$

2. 0 **3.** $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}$ **4.** $\sin A = \frac{15}{17}, \sec A = \frac{17}{8}$

5. $\sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}, \tan\theta = \frac{5}{12}, \cot\theta = \frac{12}{5}, \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$

7. (i) $\frac{49}{64}$ (ii) $\frac{49}{64}$ **8.** হ্যাঁ

9. (i) 1 (ii) 0 **10.** $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$, $\tan P = \frac{12}{5}$

11. (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা (iv) মিথ্যা (v) মিথ্যা

অনুশীলনী 8.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ (iv) $\frac{43-24\sqrt{3}}{11}$ (v) $\frac{67}{12}$

2. (i) A (ii) D (iii) A (iv) C **3.** $\angle A = 45°$, $\angle B = 15°$

4. (i) মিথ্যা (ii) সত্য (iii) মিথ্যা (iv) মিথ্যা (v) সত্য

অনুশীলনী 8.3

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 0

3. $\angle A = 36°$ **5.** $\angle A = 22°$ **7.** $\cos 23° + \sin 15°$

অনুশীলনী 8.4

1. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$, $\tan A = \frac{1}{\cot A}$, $\sec A = \frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}$

2. $\sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$, $\cos A = \frac{1}{\sec A}$, $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$

$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$

3. (i) 1 (ii) 1 **4.** (i) B (ii) C (iii) D (iv) D

অনুশীলনী 9.1

1. 10 মি **2.** $8\sqrt{3}$ মি **3.** 3 মি, $2\sqrt{3}$ মি **4.** $10\sqrt{3}$ মি

5. $40\sqrt{3}$ মি **6.** $19\sqrt{3}$ মি **7.** $20(\sqrt{3}-1)$ মি **8.** $0.8(\sqrt{3}+1)$ মি

9. $16\frac{2}{3}$ মি **10.** $20\sqrt{3}$ মি, 20 মি, 60 মি **11.** $10\sqrt{3}$ মি, 10 মি **12.** $7(\sqrt{3}+1)$ মি

13. $75(\sqrt{3}-1)$ মি **14.** $58\sqrt{3}$ মি **15.** 3 সেকেণ্ড

অনুশীলনী 10.1

1. অসংখ্য

2. (i) একটি (ii) ছেদক (iii) দুটি (iv) মিলিত বিন্দু **3.** D

অনুশীলনী 10.2

1. A **2.** B **3.** A **6.** 3 সেমি

7. 8 সেমি **12.** AB = 15 সেমি, AC = 13 সেমি

অনুশীলনী 12.1

1. 28 সেমি **2.** 10 সেমি

3. স্বর্ণ : 346.5 সেমি^{2}; লাল : 1039.5 সেমি^{2}; নীল : 1732.5 সেমি^{2}; কালো : 2425.5 সেমি^{2}; সাদা: 3118.5 সেমি^{2} ।

4. 4375 **5.** A

অনুশীলনী 12.2

1. $\frac{132}{7}$ সেমি^{2} **2.** $\frac{77}{8}$ সেমি^{2} **3.** $\frac{154}{3}$ সেমি^{2}

4. (i) 28.5 সেমি^{2} (ii) 235.5 সেমি^{2}

5. (i) 22 সেমি (ii) 231 সেমি^{2} (iii) $\left(231-\frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ সেমি^{2}

6. 20.4375 সেমি^{2}; 686.0625 সেমি^{2} **7.** 88.44 সেমি^{2}

8. (i) 19.625 মি^{2} (ii) 58.875 সেমি^{2} **9.** (i) 285 মিমি (ii) $\frac{385}{4}$ মিমি^{2}

10. $\frac{22275}{28}$ সেমি^{2} **11.** $\frac{158125}{126}$ সেমি^{2} **12.** 189.97 কিমি^{2}

13. 162.68 **14.** D

অনুশীলনী 12.3

1. $\frac{4523}{28}$ সেমি^{2} **2.** $\frac{154}{3}$ সেমি^{2} **3.** 42 সেমি^{2}

4. $\left(\frac{660}{7}+36\sqrt{3}\right)$ সেমি^{2} **5.** $\frac{68}{7}$ সেমি^{2} **6.** $\left(\frac{22528}{7}-768\sqrt{3}\right)$ সেমি^{2}

7. 42 সেমি^{2} **8.** (i) $\frac{2804}{7}$ মি (ii) 4320 মি^{2}

9. 66.5 সেমি^{2} **10.** 1620.5 সেমি^{2} **11.** 378 সেমি^{2}

12. (i) $\frac{77}{8}$ সেমি^{2} (ii) $\frac{49}{8}$ সেমি^{2} **13.** 228 সেমি^{2}

14. $\frac{308}{3}$ সেমি^{2} **15.** 98 সেমি^{2} **16.** $\frac{256}{7}$ সেমি^{2}

অনুশীলনী 13.1

1. 160 সেমি^{2} **2.** 572 সেমি^{2} **3.** 214.5 সেমি^{2}

4. সর্বোচ্চ ব্যাস = 7 সেমি, তলসমূহের ক্ষেত্রফল = 332.5 সেমি^{2}

5. $\frac{1}{4}l^2\ (\pi + 24)$ **6.** 220 মিমি^{2} **7.** 44 মি^{2}, 22000 টাকা

8. 18 সেমি^{2} **9.** 374 সেমি^{2}

অনুশীলনী 13.2

1. π সেমি^{3}

2. 66 সেমি^{3}। মডেলটির ভিতরে বাতাসের আয়তন = (শঙ্কু + চোঙ + শঙ্কু)-এর ভিতরে বাতাসের আয়তন = $\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \pi r^2 h_2 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_1\right)$, যেখানে r হল শঙ্কু ও চোঙের ব্যাসার্ধ, h_1 হল শঙ্কুর উচ্চতা (দৈর্ঘ্য) এবং h_2 হল চোঙের উচ্চতা (দৈর্ঘ্য)।

নির্ণেয় আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1 + 3h_2 + h_1\right)$.

3. 338 সেমি^{3} **4.** 523.53 সেমি^{3} **5.** 100 **6.** 892.26 কেজি

7. 1.131 মি^{3} (আসন্ন) **8.** সঠিক নয়। সঠিক উত্তর হল 346.51 সেমি^{3}।

অনুশীলনী 13.3

1. 2.74 সেমি **2.** 12 সেমি **3.** 2.5 মি

4. 1.125 মি **5.** 10 **6.** 400

7. 36 সেমি; $12\sqrt{13}$ সেমি **8.** 562500 মি^{2} অথবা 56.25 হেক্টর **9.** 100 মিনিট

অনুশীলনী 13.4

1. $102\frac{2}{3}$ সেমি^{3}
2. 48 সেমি^{2}
3. $710\frac{2}{7}$ সেমি^{2}
4. দুধের মূল্য হল 209 টাকা এবং ধাতব পাতের মূল্য হল156.75 টাকা।
5. 7964.4 মি

অনুশীলনী 13.5 (ঐচ্ছিক)*

1. 1256 সেমি; 788 গ্রাম (আসন্ন)
2. 30.14 সেমি^{3}; 52.75 সেমি^{2}
3. 1792
5. $782\frac{4}{7}$ সেমি^{2}

অনুশীলনী 14.1

1. 8.1 ।আমরা প্রত্যক্ষ পদ্ধতি প্রয়োগ করব কারণ, x_i এবং f_i এর সাংখ্যমানগুলো ছোটো।
2. 545.20 টাকা
3. $f = 20$
4. 75.9
5. 57.19
6. 211 টাকা
7. 0.099 ppm
8. 12.48 সংখ্যক দিন
9. 69.43 %

অনুশীলনী 14.2

1. সংখ্যাগুরু মান = 36.8 বছর, গড় মান = 35.37 বছর। হাসপাতালে ভর্তি হওয়া অধিকাংশ রোগীর বয়স 36.8 বছর (আসন্ন), যেখানে হাসপাতালে ভর্তি হওয়া একজন রোগীর গড় বয়স 35.37 বছর।
2. 65.625 ঘন্টা
3. মাসিক খরচের সংখ্যাগুরু মান = 1847.83 টাকা, গড় মাসিক খরচ = 2662.5 টাকা।
4. সংখ্যাগুরু মান : 30.6, গড় মান = 29.2 । বেশির ভাগ রাজ্য/কেন্দ্রশাসিত অঞ্চলে শিক্ষক-ছাত্রের অনুপাত 1 : 30.6 এবং গড়ে এই অনুপাত 1: 29.2 ।
5. সংখ্যাগুরু মান = 4608.7 রান
6. সংখ্যাগুরু মান = 44.7 সংখ্যক গাড়ি।

অনুশীলনী 14.3

1. মধ্যমা = 137 একক, গড় মান = 137.05 একক, সংখ্যাগুরু মান = 135.76 একক।

   এইক্ষেত্রে তিনটি পরিমাপ প্রায় একই।
2. $x = 8, y = 7$
3. বয়সের মধ্যমা = 35.76 বছর

4. দৈর্ঘ্যের মধ্যমা = 146.75 মিমি

5. আয়ুষ্কালের মধ্যমা = 3406.98 ঘন্টা

6. মধ্যমা = 8.05, গড় মান = 8.32, সংখ্যাগুরুর আকার = 7.88

7. ওজনের মধ্যমা = 56.67 কেজি

অনুশীলনী 14.4

1.

দৈনিক আয় (টাকায়)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
120 অপেক্ষা কম	12
140 অপেক্ষা কম	26
160 অপেক্ষা কম	34
180 অপেক্ষা কম	40
200 অপেক্ষা কম	50

(120, 12), (140, 26), (160, 34), (180, 40) এবং (200, 50) বিন্দুগুলো স্থাপন করে ওজিব (Ogive) অঙ্কন করো।

2. (38, 0), (40, 3), (42, 5), (44, 9), (46, 14), (48, 28), (50, 32) এবং (52, 35) বিন্দুগুলো স্থাপন করে ওজিব অঙ্কণ করো। এখানে $\frac{n}{2} = 17.5$ । ওজিব এর উপর বিন্দুটি চিহ্নিত করো যার কোটি হল 17.5 । এই বিন্দুর x-স্থানাংকই হবে মধ্যমা।

3.

উৎপাদিত শস্য (কেজি/ হেক্টর)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
50 অথবা তার চেয়ে বেশি	100
55 অথবা তার চেয়ে বেশি	98
60 অথবা তার চেয়ে বেশি	90
65 অথবা তার চেয়ে বেশি	78
70 অথবা তার চেয়ে বেশি	54
75 অথবা তার চেয়ে বেশি	16

এখন (50, 100), (55, 98), (60, 90), (65, 78), (70, 54) এবং (75, 16) বিন্দুগুলো স্থাপন করে ওজিব অঙ্কন করো।

অনুশীলনী 15.1

1. (i) 1 (ii) 0, অসম্ভব ঘটনা (iii) 1, অবশ্যম্ভাবী বা নিশ্চিত ঘটনা
(iv) 1 (v) 0, 1

2. (iii) এবং (iv) নং পরীক্ষাগুলোতে সমসম্ভব ফলাফল আছে।

3. যখন একটি মুদ্রাকে আমরা টস্ করি, তার ফলাফল হেড্ এবং টেল সমভাবে সম্ভব। সুতরাং, একটি পৃথক মুদ্রার টসের ফলাফল সম্পূর্ণভাবে অনিশ্চিত।

4. B **5.** 0.95 **6.** (i) 0 (ii) 1

7. 0.008 **8.** (i) $\frac{3}{8}$ (ii) $\frac{5}{8}$

9. (i) $\frac{5}{17}$ (ii) $\frac{8}{17}$ (iii) $\frac{13}{17}$ **10.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

11. $\frac{5}{13}$ **12.** (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{4}$ (iv) 1

13. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$

14. (i) $\frac{1}{26}$ (ii) $\frac{3}{13}$ (iii) $\frac{3}{26}$ (iv) $\frac{1}{52}$ (v) $\frac{1}{4}$ (vi) $\frac{1}{52}$

15. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) (a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 **16.** $\frac{11}{12}$

17. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{15}{19}$ **18.** (i) $\frac{9}{10}$ (ii) $\frac{1}{10}$ (iii) $\frac{1}{5}$

19. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **20.** $\frac{\pi}{24}$ **21.** (i) $\frac{31}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$

22. (i)

দুটি ছক্কাতে প্রাপ্ত ফলের সমষ্টি	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
সম্ভাবনা	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(ii) না। 11 টি ফলের সমষ্টি সমভাবে সম্ভাব্য নয়।

23. $\frac{3}{4}$; সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হল : HHH, TTT, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH ।এখানে, THH বোঝাচ্ছে প্রথম টসে টেল, দ্বিতীয় টসে হেড্ এবং তৃতীয় টসে হেড্ এবং এভাবে চলছে।

24. (i) $\frac{25}{36}$ (ii) $\frac{11}{36}$

25. (i) সঠিক নয়। আমরা ফলাফলগুলোকে এরকমভাবে শ্রেণিবিন্যস্ত করতে পারি কিন্তু তখন এরা সমভাবে সম্ভাব্য হবে না। কারণ, প্রতিটির একটি (অর্থাৎ একটি হেড্, একটি টেল) দুভাবে ফলাফল করতে পারে — প্রথম মুদ্রায় হেড্ এবং দ্বিতীয় মুদ্রায় টেল অথবা প্রথম মুদ্রায় টেল এংব দ্বিতীয় মুদ্রায় হেড্। ইহা দুটি হেড্ (অথবা দুটি টেল) এর ফলাফলের মতো দুরকম ফলাফল তৈরি করে।

(ii) সঠিক। প্রশ্নে বিবেচ্য দুটি ফলাফল সমভাবে সম্ভাব্য।

অনুশীলনী 15.2 (ঐচ্ছিক)*

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{8}{25}$ (iii) $\frac{4}{5}$

2.

	1	2	2	3	3	6
1	2	3	3	4	4	7
2	3	4	4	5	5	8
2	3	4	4	5	5	8
3	4	5	5	6	6	9
3	4	5	5	6	6	9
6	7	8	8	9	9	12

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. 10 **4.** $\frac{x}{12}$, $x = 3$ **5.** 8

অনুশীলনী A1.1

1. (i) দ্ব্যর্থক (ii) সত্য (iii) সত্য (iv) দ্ব্যর্থক

(v) দ্ব্যর্থক

2. (i) সত্য (ii) সত্য (iii) মিথ্যা (iv) সত্য (v) সত্য

3. কেবল (ii) সত্য।

4. (i) যদি $a > 0$ এবং $a^2 > b^2$, তবে $a > b$.

(ii) যদি $xy \geq 0$ এবং $x^2 = y^2$, তবে $x = y$.

(iii) যদি $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ এবং $y \neq 0$, তবে $x = 0$.

(iv) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুশীলনী A1.2

1. A হল মরনশীল

2. ab হল মূলদ

3. $\sqrt{17}$ -এর দশমিক বিস্তৃতকরণ অসীম অনাবৃত্ত।

4. $y = 7$

5. $\angle A = 100°, \angle C = 100°, \angle D = 180°$

6. PQRS একটি আয়তক্ষেত্র।

7. হ্যাঁ, প্রাঙ্গাণের কারণে। না, কারণ $\sqrt{3721} = 61$ যা অমূলদ নয়। যেহেতু, প্রাঙ্গাণটি ভুল ছিল, সিদ্ধান্তটি মিথ্যা।

অনুশীলনী A1.3

1. $2n + 1$ এবং $2n + 3$ হিসাবে পরপর দুটি অযুগ্ম সংখ্যা নাও, যেখানে n হল অখণ্ড সংখ্যা।

অনুশীলনী A1.4

1. (i) মানুষ মরণশীল নয়।

(ii) l সরলরেখা m সরলরেখার সমান্তরাল নয়।

(iii) অধ্যায়টিতে বেশি অনুশীলনী নাই।

(iv) সকল অখণ্ড সংখ্যা মূলদ নয়।

(v) সকল মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম নয়।

(vi) কিছু ছাত্র অলস।

(vii) সকল বিড়াল কালো।

(viii) কমপক্ষে একটি বাস্তব সংখ্যা x এর অস্তিত্ব আছে, যাতে করে $\sqrt{x} = -1$ হয়।

(ix) 2 দিয়ে a ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাটি বিভাজ্য নয়।

(x) অখণ্ড সংখ্যাদ্বয় a এবং b পরস্পর মৌলিক নয়।

2. (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) না (iv) না (v) হ্যাঁ

অনুশীলনী A1.5

1. (i) যদি সরন প্রচুর পরিমাণে ঘামে, তবে টোকিও-তে গরম।
   (ii) যদি শালিনীর পেট গুড়গুড় করে, তবে সে ক্ষুধার্ত।
   (iii) যদি যশোবন্ত একটি ডিগ্রি পেতে পারে, তবে তার একটি স্কলারশিপ আছে।
   (iv) যদি একটি গাছ জীবিত থাকে, তবে এর ফুল আছে।
   (v) যদি একটি প্রাণীর একটি ল্যাজ থাকে, তবে সেটি একটি বিড়াল।
2. (i) যদি ত্রিভুজ ABC-এর ভূমিস্থ কোণগুলো সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হয়। সত্য।
   (ii) যদি একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ অযুগ্ম হয়, তবে সংখ্যাটি অযুগ্ম হবে। সত্য।
   (iii) যদি $x = 1$, তবে $x^2 = 1$। সত্য।
   (iv) যদি ABCD চতুর্ভুজের AC এবং BD পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। সত্য।
   (v) যদি $a + (b + c) = (a + b) + c$, তবে a, b এবং c সমগ্র সংখ্যা হয়। মিথ্যা।
   (vi) যদি $x + y$ একটি যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে x এবং y অযুগ্ম সংখ্যা হয়। মিথ্যা।
   (vii) যদি একটি সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে এর শীর্ষবিন্দুগুলো একটি বৃত্তের ওপর অবস্থিত হয়। সত্য।

অনুশীলনী A1.6

1. বিরুদ্ধ মন্তব্য $b \le d$ -কে মনে করো।
3. প্রথম অধ্যায়ের উদাহরণ 10 দেখো।
6. নবম শ্রেণির গণিত পাঠ্যবইয়ের উপপাদ্য 5.1 দেখো।

অনুশীলনী A2.2

1. (i) $\frac{1}{5}$ (ii) 160
2. 1 সেমি^{2} ক্ষেত্রফল নাও এবং এর ডট্ (dot)-গুলো গণনা করো। মোট গাছের সংখ্যা হবে এই ডট্গুলোর সংখ্যা এবং ক্ষেত্রফল (সেমি^{2} এককে)-এর গুণফল।
3. কিস্তি স্কিমেতে সুদের হার 17.74 %, যা 18 % অপেক্ষা কম।

অনুশীলনী A2.3

1. ছাত্ররা নিজেরা তাদের উত্তর বের করবে।