सत्यमेव जयते

ভারতের সংবিধান

প্রস্তাবনা

“আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্ররূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক, ন্যায়বিচার, চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার স্বাধীনতা, সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব গড়ে ওঠে তার জন্য সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে, আমাদের গণপরিষদে আজ, ১৯৪৯ সালের ২৬ নভেম্বর, এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।”

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

গণিত

দ্বাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই

ভাগ-১

প্রস্তুতকরণ

জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, নতুন দিল্লি ।

অনুবাদ ও অভিযোজন

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা সরকার ।

© এন সি ই আর টি কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত।

এন সি ই আর টি অনুমোদিত
প্রথম বাংলা সংস্করণ-
প্রথম প্রকাশ- মার্চ, ২০২০

দ্বাদশ শ্রেণির পাঠ্যবই

এন সি ই আর টি-র
Mathematics পাঠ্যপুস্তকের
২০১৭ সালের পুনর্মুদ্রণের অনূদিত সংস্করণ।

প্রচ্ছদ : সমীরণ দেবনাথ

অক্ষর বিন্যাস : সমীরণ দেবনাথ, শিক্ষক

মূল্য: ১৩০ টাকা মাত্র

মুদ্রক : সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ ইণ্ড্রাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড, ১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২

প্রকাশক

অধিকর্তা

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা।

ভূমিকা

২০০৬ সাল থেকে রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ প্রথম থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত প্রাথমিক ও উচ্চপ্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ ও প্রকাশের দায়িত্ব পালন করে আসছে।

রাজ্যের বিদ্যালয়স্তরে উন্নত ও সমৃদ্ধতর পাঠ্যক্রম চালু করার লক্ষ্যে ত্রিপুরা রাজ্য শিক্ষা দপ্তরের প্রচেষ্টায় প্রথম থেকে অষ্টম, নবম ও একাদশ শ্রেণির জন্য ২০১৯ শিক্ষাবর্ষ থেকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের (এন সি ই আর টি) পাঠ্যপুস্তকসমূহ গ্রহণ করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০১৯ সালে প্রথম প্রকাশ করা হয় এবং এ বছর ওইসব পুস্তকগুলোর পুনর্মুদ্রণ করা হল। পাশাপাশি দশম ও দ্বাদশ শ্রেণির বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০২০ শিক্ষাবর্ষে প্রথম প্রকাশ করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, বাংলা বিষয়ে পাঠ্যপুস্তক রচনা ও প্রকাশনার দায়িত্বও রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ পালন করে আসছে।

বিশাল এই কর্মকাণ্ডে যেসব শিক্ষক-শিক্ষিকা, অধ্যাপক-অধ্যাপিকা, শিক্ষাবিদ, অনুবাদক, অনুলেখক, মুদ্রণকর্মী ও শিল্পীরা আমাদের সঙ্গে থেকে নিরলসভাবে অক্লান্ত পরিশ্রমে এই উদ্যোগ বাস্তবায়িত করেছেন তাদের সবাইকে সকৃতজ্ঞ ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

প্রকাশিত এই পাঠ্যপুস্তকটির উৎকর্ষ ও সৌন্দর্য বৃদ্ধির জন্য শিক্ষানুরাগী ও গুণীজনের মতামত ও পরামর্শ বিবেচিত হবে।

উত্তম কুমার চাকমা
অধিকর্তা
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা।

আগরতলা
মার্চ, ২০২০

উপদেষ্টা

১। ড. অর্ণব সেন, সহ অধ্যাপক, এন ই আর আই ই, শিলং, এন সি ই আর টি।

২। ড. অরূপ কুমার সাহা, সহ অধ্যাপক, আর আই ই, ভুবনেশ্বর, এন সি ই আর টি।

পুস্তকটি যাঁরা অনুবাদ করেছেন

১। মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক
২। জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক
৩। প্রশান্ত সরকার, শিক্ষক
৪। প্রদীপ দেবনাথ, শিক্ষক
৫। সোমেন দেবনাথ, শিক্ষক
৬। সুমন দাস, শিক্ষক
৭। অমরেশ দেবনাথ, শিক্ষক
৮। মিঠুন পাল, শিক্ষক
৯। রাজেশ সাহা, শিক্ষক
১০। বিদুর দেবনাথ, শিক্ষক
১১। লিটন দত্ত, শিক্ষক

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Preface

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) had constituted 21 Focus Groups on Teaching of various subjects related to School Education, to review the National Curriculum Framework for School Education - 2000 (NCFSE - 2000) in face of new emerging challenges and transformations occurring in the fields of content and pedagogy under the contexts of National and International spectrum of school education. These Focus Groups made general and specific comments in their respective areas. Consequently, based on these reports of Focus Groups, National Curriculum Framework (NCF)-2005 was developed.

NCERT designed the new syllabi and constituted Textbook Development Teams for Classes XI and XII to prepare textbooks in mathematics under the new guidelines and new syllabi. The textbook for Class XI is already in use, which was brought in 2005.

The first draft of the present book (Class XII) was prepared by the team consisting of NCERT faculty, experts and practicing teachers. The draft was refined by the development team in different meetings. This draft of the book was exposed to a group of practicing teachers teaching mathematics at higher secondary stage in different parts of the country, in a review workshop organised by the NCERT at Delhi. The teachers made useful comments and suggestions which were incorporated in the draft textbook. The draft textbook was finalised by an editorial board constituted out of the development team. Finally, the Advisory Group in Science and Mathematics and the Monitoring Committee constituted by the HRD Ministry, Government of India have approved the draft of the textbook.

In the fitness of things, let us cite some of the essential features dominating the textbook. These characteristics have reflections in almost all the chapters. The existing textbook contain 13 main chapters and two appendices. Each Chapter contain the followings:

- Introduction: Highlighting the importance of the topic; connection with earlier studied topics; brief mention about the new concepts to be discussed in the chapter.
- Organisation of chapter into sections comprising one or more concepts/sub concepts.
- Motivating and introducing the concepts/sub concepts. Illustrations have been provided wherever possible.

- Proofs/problem solving involving deductive or inductive reasoning, multiplicity of approaches wherever possible have been inducted.
- Geometric viewing / visualisation of concepts have been emphasised whenever needed.
- Applications of mathematical concepts have also been integrated with allied subjects like science and social sciences.
- Adequate and variety of examples/exercises have been given in each section.
- For refocusing and strengthening the understanding and skill of problem solving and applicabilities, miscellaneous types of examples/exercises have been provided involving two or more sub concepts at a time at the end of the chapter. The scope of challenging problems to talented minority have been reflected conducive to the recommendation as reflected in NCF-2005.
- For more motivational purpose, brief historical background of topics have been provided at the end of the chapter and at the beginning of each chapter relevant quotation and photograph of eminent mathematician who have contributed significantly in the development of the topic undertaken, are also provided.
- Lastly, for direct recapitulation of main concepts, formulas and results, brief summary of the chapter has also been provided.

I am thankful to Professor Krishan Kumar, Director, NCERT who constituted the team and invited me to join this national endeavor for the improvement of mathematics education. He has provided us with an enlightened perspective and a very conducive environment. This made the task of preparing the book much more enjoyable and rewarding. I express my gratitude to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics, for his specific suggestions and advice towards the improvement of the book from time to time. I, also, thank Prof. G. Ravindra, Joint Director, NCERT for his help from time to time.

I express my sincere thanks to Professor Hukum Singh, Chief Coordinator and Head DESM, Dr. V. P. Singh, Coordinator and Professor S. K. Singh Gautam who have been helping for the success of this project academically as well as administratively. Also, I would like to place on records my appreciation and thanks to all the members of the team and the teachers who have been associated with this noble cause in one or the other form.

PAWAN K. JAIN
Chief Advisor
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P.K. Jain, *Professor*, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* and *Head,* DESM, NCERT, New Delhi

Members

Arun Pal Singh, *Sr. Lecturer*, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi
A.K. Rajput, *Reader*, RIE, Bhopal, M.P.
B.S.P. Raju, *Professor*, RIE Mysore, Karnataka
C.R. Pradeep, *Assistant Professor*, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka
D.R. Sharma, *P.G.T.*, JNV-Mungeshpur, Delhi
Ram Avtar, *Professor* (Retd.) and *Consultant*, DESM, NCERT, New Delhi
R.P. Maurya, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi
S.S. Khare, *Pro-Vice-Chancellor*, NEHU, Tura Campus, Meghalaya
S.K.S. Gautam, *Professor*, DESM, NCERT, New Delhi
S.K. Kaushik, *Reader*, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi
Sangeeta Arora, *P.G.T.*, Apeejay School Saket, New Delhi-110017
Shailja Tewari, *P.G.T.*, Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand
Vinayak Bujade, *Lecturer*, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra
Sunil Bajaj, *Sr. Specialist,* SCERT, Gurgaon, Haryana

Member - Coordinator

V.P. Singh, *Reader*, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Jagdish Saran, *Professor*, Deptt. of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, *Lecturer*, Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); P.K. Tewari, *Assistant Commissioner* (Retd.), Kendriya Vidyalaya Sangathan; S.B. Tripathi, *Lecturer*, R.P.V.V. Surajmal Vihar, Delhi; O.N. Singh, *Reader*, RIE, Bhubaneswar, Orissa; Miss Saroj, *Lecturer*, Govt. Girls Senior Secondary School No.1, Roop Nagar, Delhi; P. Bhaskar Kumar, *PGT*, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Anantapur, (A.P.); Mrs. S. Kalpagam, *PGT*, K.V. NAL Campus, Bangalore; Rahul Sofat, *Lecturer*, Air Force Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, District Centre, New Delhi; Janardan Tripathi, *Lecturer,* Govt. R.H.S.S. Aizawl, Mizoram and Ms. Sushma Jaireth, *Reader,* DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, *Incharge*, Computer Station, Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Nargis Islam,*D.T.P. Operators,* Monika Saxena,*Copy Editor* and Abhimanu Mohanty, *Proof Reader.*

The Contribution of APC-Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

সূচিপত্র

ভাগ-১

1.	**সম্বন্ধ ও অপেক্ষক**		**1-36**
	1.1	ভূমিকা	1
	1.2	সম্বন্ধসমূহের প্রকারভেদ	2
	1.3	অপেক্ষকের প্রকারভেদ	8
	1.4	অপেক্ষকের সংযোজন এবং বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক	13
	1.5	দ্বিপদ প্রক্রিয়া	22
2.	**ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহ**		**37-59**
	2.1	ভূমিকা	33
	2.2	প্রাথমিক ধারণা	33
	2.3	ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ধর্মাবলি	46
3.	**ম্যাট্রিক্স**		**60-106**
	3.1	ভূমিকা	60
	3.2	ম্যাট্রিক্স	60
	3.3	ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ	65
	3.4	ম্যাট্রিক্সের প্রক্রিয়াসমূহ	69
	3.5	একটি ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স	87
	3.6	প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স	89
	3.7	ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক প্রক্রিয়া (রূপান্তর)	94
	3.8	বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স	95
4.	**নির্ণায়ক**		**107-153**
	4.1	ভূমিকা	107
	4.2	নির্ণায়ক	107
	4.3	নির্ণায়কের ধর্মাবলি	113
	4.4	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	126
	4.5	মাইনর ও সহগুণনীয়ক	128
	4.6	অ্যাডজয়েন্ট এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স	132
	4.7	নির্ণায়ক এবং ম্যাট্রিক্স এর প্রয়োগ	138

5.	**সন্ততা এবং অন্তরকলণযোগ্যতা**	**154-200**
5.1	ভূমিকা	154
5.2	সন্ততা	154
5.3	অন্তরকলণযোগ্যতা	168
5.4	সূচকীয় এবং লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক	177
5.5	লগারিদমের সাহায্যে অবকলন	181
5.6	প্রাচলিক আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলজ	186
5.7	দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ	188
5.8	মধ্যম মান উপপাদ্য	191
6.	**অন্তরকলজের প্রয়োগ**	**201-258**
6.1	ভূমিকা	201
6.2	রাশিসমূহের পরিবর্তনের হার	201
6.3	বর্ধিষ্ণু ও ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক	206
6.4	স্পর্শক ও অভিলম্ব	214
6.5	আসন্নমান	221
6.6	চরম ও অবম মান	225
	পরিশিষ্ট 1: গণিতে প্রমাণ	**259-268**
	A.1.1 ভূমিকা	259
	A.1.2 প্রমাণ কী ?	259
	পরিশিষ্ট 2: গাণিতিক মডেলিং	**269-281**
	A.2.1 ভূমিকা	269
	A.2.2 গাণিতিক মডেলিং কেন ?	269
	A.2.3 গাণিতিক মডেলিং এর নীতি	271
	উত্তরমালা	**282-300**
	সংযোজিত বিষয়বস্তু	**301**

অধ্যায় 1

সম্বন্ধ ও অপেক্ষক
(Relations and Functions)

❖ ***There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. HARDY*** ❖

1.1 ভূমিকা

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

তোমরা স্মরণ করে দেখো যে একাদশ শ্রেণিতে সম্বন্ধ এবং অপেক্ষক, ক্ষেত্র(domain), উপক্ষেত্র(co-domain) এবং প্রসার (range) এসবের পাশাপাশি বিভিন্ন ধরনের নির্দিষ্ট বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক এবং এদের লেখচিত্রের সাথে পরিচিত হয়েছ। গণিতে 'সম্বন্ধ' শব্দটির ধারণা ইংরেজি ভাষায় দুটি বস্তু বা রাশির মধ্যে একটি স্বীকৃত সংযোগ বা যোগসূত্রের মাধ্যমে সম্পর্ক থেকে নেওয়া হয়েছে। ধরো A হলো কোনো একটি বিদ্যালয়ের দ্বাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সেট এবং B হল ওই একই বিদ্যালয়ের একাদশ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সেট তাহলে A থেকে B তে কয়েকটি সম্বন্ধের উদাহরণ হল

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a হল b এর ভাই$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a হল b এর বোন$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a এর বয়স b এর বয়সের চেয়ে বেশি$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: চূড়ান্ত পরীক্ষায় a এর প্রাপ্ত মোট নম্বর, চূড়ান্ত পরীক্ষায় b এর প্রাপ্ত মোট নম্বরের চেয়ে কম$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a একই এলাকায় বাস করে যেথায় b বাস করে$\}$, যা হোক, এটি থেকে গাণিতিকভাবে আমরা A থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধকে $A \times B$ এর যে-কোনো উপসেট হিসেবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

যদি $(a, b) \in R$, হয়, আমরা বলি যে R সম্বন্ধের স্বাপেক্ষে a, b এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত এবং আমরা a R b রূপে লেখি। সাধারণ ভাবে, $(a, b) \in R$, হলে আমাদের এটা ভাবার প্রয়োজন নেই যে a ও b এর মাঝে কোনো স্বীকৃত সংযোগ বা যোগসূত্র আছে কিনা। তোমরা একাদশ শ্রেণিতে পড়েছ যে অপেক্ষক এক বিশেষ ধরনের সম্বন্ধ।

এ অধ্যায়ে আমরা বিভিন্ন ধরনের সম্বন্ধ এবং অপেক্ষক, অপেক্ষকের সংযোজন, বিপরীত অপেক্ষক এবং দ্বিপদ প্রক্রিয়া সম্পর্কে অধ্যয়ন করব।

1.2 সম্বন্ধসমূহের প্রকারভেদ (Types of Relations)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা বিভিন্ন ধরনের সম্বন্ধ নিয়ে অধ্যয়ন করতে চাই। আমরা জানি যে, A সেটের একটি সম্বন্ধ $A \times A$ এর একটি উপসেট। অতএব, শূন্যসেট ϕ এবং $A \times A$ হল দুটি প্রান্তিক সম্বন্ধ। উদাহরণস্বরূপ, ধরো $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেটের একটি সম্বন্ধ R, যেখানে $R = \{(a, b): a - b = 10\}$ যেহেতু এখানে কোনো জোড় (a, b) দিয়ে $a - b = 10$ শর্ত সিদ্ধ হয় না। তাই এটি একটি শূন্য সেট।

অনুরূপে $R' = \{(a, b) : | a - b | \geq 0\}$ হল সমগ্র $A \times A$ সেট, কারণ $A \times A$ এর সকল (a, b) জোড়গুলো দিয়ে $| a - b | \geq 0$ সিদ্ধ হয়। এই দুইটি প্রান্তীয় উদাহরণ আমাদেরকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞা প্রদানে সাহায্য করবে।

সংজ্ঞা 1 A সেটের একটি সম্বন্ধ R কে *শূন্যসম্বন্ধ* বলা হয়, যদি A সেটের কোনো পদ A সেটের অপর কোনো পদের সাথে সম্বন্ধ যুক্ত না হয়, অর্থাৎ $R = \phi \subset A \times A$.

সংজ্ঞা 2 A সেটের একটি সম্বন্ধ R কে *সার্বিক সম্বন্ধ* বলা হয়, যদি A সেটের প্রতিটি পদের সাথে A সেটের প্রতিটি পদ সম্বন্ধ যুক্ত হয়, অর্থাৎ $R = A \times A$.

শূন্য সম্বন্ধ এবং সার্বিক সম্বন্ধ উভয়কেই কখনও কখনও গতানুগতিক (trivial) সম্বন্ধ বলা হয়।

উদাহরণ 1 ধরো A হলো বালকদের বিদ্যালয়ের সকল বিদ্যার্থীদের সেট। দেখাও যে A সেটে R সম্বন্ধটি, যেখানে $R = \{(a, b) : a , b$ এর বোন $\}$ হল শূন্য সম্বন্ধ এবং $R' = \{(a, b) :$ a ও b এর মধ্যে উচ্চতার পার্থক্য 3 মিটারের কম$\}$ হল সার্বিক সম্বন্ধ।

সমাধান যেহেতু বিদ্যালয়টি বালকদের বিদ্যালয়, সুতরাং এই বিদ্যালয়ের কোনো বিদ্যার্থী বিদ্যালয়টির অপর কোনো বিদ্যার্থীর বোন হতে পারে না। অতএব, $R = \phi$, যা থেকে বলা যায় R শূন্য সম্বন্ধ। এটিও স্পষ্ট যে, যে-কোনো দুইজন বিদ্যার্থীর উচ্চতার পার্থক্য 3 মিটারের চেয়ে কম হবে। যা থেকে পাওয়া যায় $R' = A \times A$ হল সার্বিক সম্বন্ধ।

মন্তব্য একাদশ শ্রেণিতে আমরা ছকবন্দিকরণ পদ্ধতি এবং ধর্মভিত্তিক পদ্ধতি এই দুই রকমে সম্বন্ধের উপস্থাপন করতে দেখেছি। যা হোক বহু লেখক $\{1, 2, 3, 4\}$ সেটে R একটি সম্বন্ধ, যেখানে $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ কে $a\ R\ b$ দিয়ে প্রকাশ করেন, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $b = a + 1$ হয়। সুবিধার জন্য আমরাও এই সংকেতের ব্যবহার করব।

যদি $(a, b) \in R$ হয়, তবে আমরা বলব a , b এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত এবং এটিকে আমরা $a \, R \, b$ দিয়ে চিহ্নিত করি।

একটি খুবই গুরুত্বপূণ সম্বন্ধ যার গণিতে এক সার্থক (significant) ভূমিকা আছে, তাকে সমতুল্যতা সম্বন্ধ (*equivalence relation*) বলা হয়। সমতুল্যতা সম্বন্ধ অধ্যয়নের জন্য আমরা মূলত তিন ধরনের সম্বন্ধ স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ সম্বন্ধের বিবেচনা করব।

সংজ্ঞা 3 A সেটে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ R কে

(i) স্বসম (*reflexive*) বলা হবে যদি, $(a, a) \in R$, প্রত্যেক $a \in A$ এর জন্য ।

(ii) প্রতিসম (*symmetric*) বলা হবে যদি $(a_1, a_2) \in R$ বোঝায় যে $(a_2, a_1) \in R$, সকল $a_1, a_2 \in A$ এর জন্য।

(iii) সংক্রমণ (*transitive*) বলা হবে যদি $(a_1, a_2) \in R$ এবং $(a_2, a_3) \in R$ বোঝায় যে, $(a_1, a_3) \in R$, সকল $a_1, a_2, a_3 \in A$ এর জন্য।

সংজ্ঞা 4 A সেটের উপর সংজ্ঞাত একটি সম্বন্ধ R কে *সমতুল্যতা সম্বন্ধ* (*equivalence relation)* বলা হবে, যদি R *স্বসম, প্রতিসম* এবং *সংক্রমণ* হয়।

উদাহরণ 2 মনে করো, কোনো সমতলে ত্রিভুজসমূহের সেট T এবং R একটি সম্বন্ধ T এর উপর এরূপে সংজ্ঞাত যে $R = \{(T_1, T_2) : T_1 , T_2$ এর সাথে সর্বসম $\}$। দেখাও যে R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান R স্বসম, যেহেতু প্রতিটি ত্রিভুজ তার নিজের সাথে সর্বসম। তাছাড়া, $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$এর সাথে সর্বসম $\Rightarrow T_2 , T_1$ এর সাথে সর্বসম $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$। সুতরাং R সম্বন্ধটি প্রতিসম। উপরন্তু, $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1 , T_2$ এর সাথে সর্বসম এবং T_2 , T_3 এর সাথে সর্বসম $\Rightarrow T_1 , T_3$ এর সাথে সর্বসম $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$ । অতএব, R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

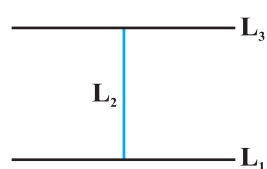
উদাহরণ 3 মনে করো, কোনো সমতলে সকল রেখাসমূহের সেট L এবং L এর উপর R সম্বন্ধটি এরূপে সংজ্ঞাত, $R = \{(L_1, L_2) : L_1 , L_2$ এর উপর লম্ব$\}$ । দেখাও যে R প্রতিসম কিন্তু স্বসম কিংবা সংক্রমণ নয়।

সমাধান R স্বসম নয়, যেহেতু কোনো রেখা তার নিজের উপর লম্ব হতে পারে না, অর্থাৎ, $(L_1, L_1) \notin R$. R প্রতিসম কারণ $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 এর উপর লম্ব

$\Rightarrow$ L_2 , L_1 এর উপর লম্ব

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$.



চিত্র 1.1

R সংক্রমণ নয়। প্রকৃতপক্ষে, যদি L_1, L_2 এর উপর লম্ব হয় এবং L_2,

L_3 এর উপর লম্ব হয়, তবে L_1 কখনও L_3 এর উপর লম্ব হতে পারে না। আসলে L_1 , L_3 এর সমান্তরাল হয়। অর্থাৎ $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ কিন্তু $(L_1, L_3) \notin R$ ।

উদাহরণ 4 দেখাও যে, R সম্বন্ধটি {1, 2, 3} সেটে R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)} দ্বারা সংজ্ঞাত হলে এটি স্বসম কিন্তু প্রতিসম কিংবা সংক্রমণ নয়।

সমাধান R স্বসম, যেহেতু (1, 1), (2, 2) এবং (3, 3) সম্বন্ধ R -এ অবস্থান করে। R প্রতিসম নয়, কারণ $(1, 2) \in R$ কিন্তু $(2, 1) \notin R$ ।অনুরূপে, R সংক্রমণ নয়, কারণ $(1, 2) \in R$ এবং $(2, 3) \in R$ কিন্তু $(1, 3) \notin R$.

উদাহরণ 5 দেখাও যে অখণ্ড সংখ্যার সেট **Z** এর উপর R সম্বন্ধটি একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ, যেখানে $R = \{(a, b) : 2$ দিয়ে $a - b$ বিভাজ্য হয়$\}$ ।

সমাধান R স্বসম, যেহেতু সকল $a \in \mathbf{Z}$ এর জন্য 2 দিয়ে $(a - a)$ বিভাজ্য হয়। তাছাড়া, যদি $(a, b) \in R$ হয়, তবে 2 দিয়ে $a - b$ বিভাজ্য হয়। অতএব, $b - a$ ও 2 দিয়ে বিভাজ্য হয়। সুতরাং, $(b, a) \in R$, যা বোঝায় যে R প্রতিসম। অনুরূপে, যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ হয়, তবে $a - b$ এবং $b - c$ উভয়েই 2 দিয়ে বিভাজ্য হয়। এখন $a - c = (a - b) + (b - c)$ যুগ্ম হয় (কেন?)। সুতরাং, $(a - c)$, 2 দিয়ে বিভাজ্য। এটি বোঝায় যে R সংক্রমণ। অতএব, **Z** সেটে R সম্বন্ধটি একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহরণ 5-এ লক্ষ করো যে, সকল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাগুলো শূন্যের সাথে সম্বন্ধযুক্ত হয়, যেহেতু, $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$ ইত্যাদি R এ আছে এবং 0, এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত কোনো অযুগ্ম সংখ্যা নেই, কারণ $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 3)$ ইত্যাদি R -এ নেই। অনুরূপে, সকল অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাগুলো এক এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত এবং এক-এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত কোনো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা নেই। অতএব **Z** এর উপসেট, সকল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার সেট E এবং সকল অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার সেট O নিম্নলিখিত শর্তগুলো মেনে চলে

(i) E এর সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত এবং O এর সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত।

(ii) E এর কোনো পদ, O এর কোনো পদের সাথে সম্বন্ধযুক্ত নয় এবং তা বিপরীতভাবে সত্য হয়।

(iii) E এবং O পৃথক এবং $\mathbf{Z} = E \cup O$.

উপসেট E কে *শূন্য সংবলিত সমতুল্যতা শ্রেণি* বলা হয় এবং তা [0] দিয়ে সূচিত হয়। অনুরূপে, O হল 1 সংবলিত সমতুল্যতা শ্রেণি এবং তা [1] দিয়ে সূচিত হয়। লক্ষ্য করো, $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ এবং $[1] = [2r + 1]$, $r \in \mathbf{Z}$ ।বাস্তবে, উপরে আমরা যা দেখেছি তা কোনো সেট X এর উপর একটি স্বেচ্ছ (arbitrary) সমতুল্যতা সম্বন্ধ R এর জন্য সত্য হয়। একটি স্বেচ্ছ সেট X এ, প্রদত্ত একটি স্বেচ্ছ সম্বন্ধ R, X কে পরস্পর পৃথক উপসেট A_i যাদেরকে X এর বিভাজন (partition) অথবা বিভাগ বলা হয়, এবং এগুলো নিম্নলিখিত শর্তগুলো সিদ্ধ করে :

(i) সকল i এর জন্য A_i গুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত।

(ii) A_i এর কোনো পদ A_j এর কোনো পদের সাথে সম্বন্ধযুক্ত হয় না, $i \neq j$ এর জন্য।

(iii) $\cup A_j = X$ এবং $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j.$

A_i উপসেটসমূহকে সমতুল্যতা শ্রেণি বলা হয়।

এই পরিস্থিতির মজার বিষয় এই যে আমরা বিপরীতক্রমেও এগোতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, ধরো $\mathbf{Z}$ সেটের উপর প্রদত্ত তিনটি পরস্পর পৃথক বিভাজন A_1, A_2 এবং A_3 উপসেটসমূহ যাদের সংযোগ $\mathbf{Z}$, যেখানে

$$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ হল } 3 \text{ এর একটি গুণিতক}\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$$

$$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 1 \text{ হল } 3 \text{ এর একটি গুণিতক}\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x - 2 \text{ হল } 3 \text{ এর একটি গুণিতক}\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$$

R একটি সম্বন্ধ $\mathbf{Z}$ সেটে সংজ্ঞায়িত এরূপে যে $R = \{(a, b) : 3 \text{ দিয়ে } a - b \text{ বিভাজ্য}\}$ । উদাহরণ 5 এ প্রযুক্ত যুক্তির সাহায্যে আমরা প্রমাণ করতে পারি R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। তাছাড়া, A_1 হল $\mathbf{Z}$ এর সেসকল অখণ্ড সংখ্যাগুলোর সেট, যেগুলো শূন্যের সাথে সম্বন্ধ যুক্ত, A_2 হল $\mathbf{Z}$ এর সেসকল অখণ্ড সংখ্যাগলুরো সেট, যেগুলো 1 এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত এবং A_3 হল $\mathbf{Z}$ এর সেসকল অখণ্ড সংখ্যাগুলোর সেট, যেগুলো 2 এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত। সুতরাং, $A_1 = [0]$, $A_2 = [1]$ এবং $A_3 = [2]$। প্রকৃতপক্ষে, $A_1 = [3r], A_2 = [3r + 1]$ এবং $A_3 = [3r + 2]$, সকল $r \in \mathbf{Z}$.

উদাহরণ 6 ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ সেটে R সম্বন্ধটি এরূপে সংজ্ঞাত যে $R = \{(a, b) : a \text{ ও } b \text{ উভয়েই হয় অযুগ্ম অথবা যুগ্ম}\}$ । দেখাও যে R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। উপরন্তু, দেখাও যে $\{1, 3, 5, 7\}$ উপসেটের সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত এবং $\{2, 4, 6\}$ উপসেটের সকলপদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত। কিন্তু $\{1, 3, 5, 7\}$ উপসেটের কোনো পদ $\{2, 4, 6\}$ উপসেটের কোনো পদের সাথে সম্বন্ধযুক্ত নয়।

সমাধান A সেটে কোনো পদ a প্রদত্ত হলে, a ও a উভয়েই হয় অযুগ্ম অথবা যুগ্ম, অতএব $(a, a) \in R$। তাছাড়া $(a, b) \in R \Rightarrow a$ ও b উভয়েই একসাথে অবশ্যই, হয় অযুগ্ম বা যুগ্ম $\Rightarrow (b, a) \in R$ । অনুরূপে, $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R \Rightarrow$ সকল পদ a, b, c, একসাথে অবশ্যই যুগ্ম অথবা অযুগ্ম $\Rightarrow (a, c) \in R$ । অতএব, R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। তাছাড়া, $\{1, 3, 5, 7\}$ সেটের সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত, কারণ এই উপসেটের সকলপদগুলো অযুগ্ম। অনুরূপে $\{2, 4, 6\}$ সেটের সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত, কারণ এদের সবই যুগ্ম। আবার $\{1, 3, 5, 7\}$ উপসেটের কোনো পদ $\{2, 4, 6\}$ উপসেটের কোনো পদের সাথে সম্বন্ধযুক্ত নয়, কারণ $\{1, 3, 5, 7\}$ এর পদগুলো অযুগ্ম, অপরদিকে $\{2, 4, 6\}$ এর পদগুলো যুগ্ম।

অনুশীলনী 1.1

1. নিম্নলিখিত সম্বন্ধগুলোর প্রতিটি স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ কিনা নির্ণয় করো :

(i) R সম্বন্ধটি $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ সেটে সংজ্ঞাত

যেখানে $R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$

(ii) R সম্বন্ধটি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট **N** এর উপর এরূপে সংজ্ঞাত,

$R = \{(x, y) : y = x + 5$ এবং $x < 4\}$

(iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সেটে R একটি সম্বন্ধ যেখানে,

$R = \{(x, y) : y, x$ দিয়ে বিভাজ্য$\}$

(iv) সকল অখণ্ড সংখ্যার সেট **Z** এর উপর R একটি সম্বন্ধ এরূপে সংজ্ঞাত যে,

$R = \{(x, y) : x - y$ একটি অখণ্ড সংখ্যা$\}$

(v) কোনো বিশেষ সময়ে কোনো শহরে বসবাসকারী মানুষের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ

(a) $R = \{(x, y) : x$ এবং y একই স্থানে কাজ করে$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ এবং y একই এলাকায় বসবাস করে$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x , y$ এর চেয়ে ঠিক 7 সেমি বেশি লম্বা $\}$

(d) $R = \{(x, y) : x$ হল y এর স্ত্রী$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x$ হল y এর পিতা$\}$

2. দেখাও যে বাস্তব সংখ্যার সেট **R** এর উপর R একটি সম্বন্ধ, যেখানে $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ স্বসম, প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।

3. R সম্বন্ধটি $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সেটে স্বসম, প্রতিসম বা সংক্রমণ কিনা যাচাই করো, যেখানে $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ।

4. দেখাও যে **R** সেটে R সম্বন্ধটি স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়, R এরূপে সংজ্ঞাত যে, $R = \{(a, b) : a \leq b\}$ ।

5. **R** সেটে R সম্বন্ধটি যেখানে $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ স্বসম, প্রতিসম বা সংক্রমণ কিনা যাচাই করো।

6. দেখাও যে $\{1, 2, 3\}$ সেটে R একটি সম্বন্ধ, যেখানে $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ প্রতিসম কিন্তু স্বসম বা সংক্রমণ নয়।

7. দেখাও যে, একটি কলেজের পাঠাগারের সমস্ত পুস্তকের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ দেওয়া হয়েছে $R = \{(x, y) : x$ অথবা y এর পৃষ্ঠা সংখ্যা সমান$\}$, একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

8. দেখাও যে, A = {1, 2, 3, 4, 5} সেটের উপর R সম্বন্ধটি যেখানে $R = \{(a, b) : |a - b|$ যুগ্ম}, একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। দেখাও যে, {1, 3, 5} এর সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত এবং {2, 4} এর সকল পদগুলো পরস্পর সম্বন্ধ যুক্ত। কিন্তু {1, 3, 5} এর কোনো পদ {2, 4} এর কোনো পদের সাথে সম্বন্ধ যুক্ত নয়।

9. দেখাও যে $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \le x \le 12\}$ সেটের উপর প্রদত্ত প্রতিটি সম্বন্ধ R

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|$ হল 4 এর একটি গুণিতক}

(ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$

একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। প্রতিটি ক্ষেত্রে 1 এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত সকল পদগুলোর সেট নির্ণয় করো।

10. এমন একটি সম্বন্ধের উদাহরণ দাও, যেটি

(i) প্রতিসম কিন্তু স্বসম কিংবা সংক্রমণ নয়।

(ii) সংক্রমণ কিন্তু স্বসম কিংবা প্রতিসম নয়।

(iii) স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণ নয়।

(iv) স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়।

(v) প্রতিসম এবং সংক্রমণ কিন্তু স্বসম নয়।

11. দেখাও যে, একটি সমতলে বিন্দুসমূহের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ দেওয়া আছে R = {(P, Q) : মূলবিন্দু থেকে P বিন্দুর দূরত্বের সমান হল, মূল বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব}, একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। উপরন্তু, দেখাও যে, $P \neq (0, 0)$ বিন্দুর সাথে সম্বন্ধযুক্ত সকল বিন্দুগুলোর সেট মূলবিন্দু কেন্দ্র বিশিষ্ট P বিন্দুগামী একটি বৃত্তকে প্রকাশ করে।

12. দেখাও যে, সকল ত্রিভূজ সমূহের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ এরূপে সংজ্ঞাত $R = \{(T_1, T_2) : T_1$, T_2 এর সাথে সদৃশ}, একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। ধরো, তিনটি সমকোণী ত্রিভূজ, T_1 যার বাহুগুলো হল 3, 4, 5, T_2 যার বাহুগুলো হল 5, 12, 13 এবং T_3 যার বাহুগুলো হল 6, 8, 10। T_1, T_2 এবং T_3 ত্রিভুজগুলোর মধ্যে কোন ত্রিভুজগুলো পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত?

13. দেখাও যে, সকল বহুভূজসমূহের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ এরূপে সংজ্ঞাত $R = \{(P_1,P_2):$ P_1 ও P_2 এর বাহুসংখ্যা সমান}, একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। 3, 4 এবং 5 দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ T এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত A সেটের সকল পদগুলোর সেট কী হবে ?

14. ধরো XY তলে সকল রেখাগুলোর সেট L এবং L এর উপর R একটি সম্বন্ধ এরূপে সংজ্ঞাত যে, $R = \{(L_1, L_2) : L_1$, L_2 এর সাথে সমান্তরাল}। দেখাও যে, R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

$y = 2x + 4$ সরলরেখার সাথে সম্বন্ধযুক্ত সকল রেখাগুলোর সেট নির্ণয় করো।

15. ধরো, {1, 2, 3, 4} সেটে R একটি সম্বন্ধ প্রদত্ত, যেখানে R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} । সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

(A) R স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণ নয়।

(B) R স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়।

(C) R প্রতিসম এবং সংক্রমণ কিন্তু স্বসম নয়।

(D) R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

16. **N** সেটের উপর R একটি সম্বন্ধ দেওয়া আছে, $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$। সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

(A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 অপেক্ষকের প্রকারভেদ (Types of Functions)

কয়েকটি বিশেষ অপেক্ষক যেমন উপাদানস্থির অপেক্ষক, ধ্রুবক অপেক্ষক, বহুপদী অপেক্ষক, মূলদ অপেক্ষক, মডিউলাস (পরমমান) অপেক্ষক, সিগ্নাম অপেক্ষক ইত্যাদি এবং এদের লেখচিত্রের ধারণা একাদশ শ্রেণিতে দেওয়া হয়েছে।

দুটি অপেক্ষকের যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ নিয়েও তোমরা অধ্যয়ন করেছ। যেহেতু গণিতশাস্ত্র এবং অপর বিভিন্ন শাখায় অপেক্ষকের ধারণা সর্বাধিক গুরুত্বপূর্ণ। তাই অপেক্ষক সম্পর্কিত অধ্যয়ন যেখানে শেষ করেছি তা থেকে এটিকে আরও সম্প্রসারণ করতে চাই। এই অনুচ্ছেদে অপেক্ষকের বিভিন্ন প্রকারভেদ সম্পর্কে আমরা অধ্যয়ন করব।

নিম্নলিখিত চিত্রগুলোতে প্রদত্ত f_1, f_2, f_3 এবং f_4 অপেক্ষকগুলোকে বিবেচনা করো।

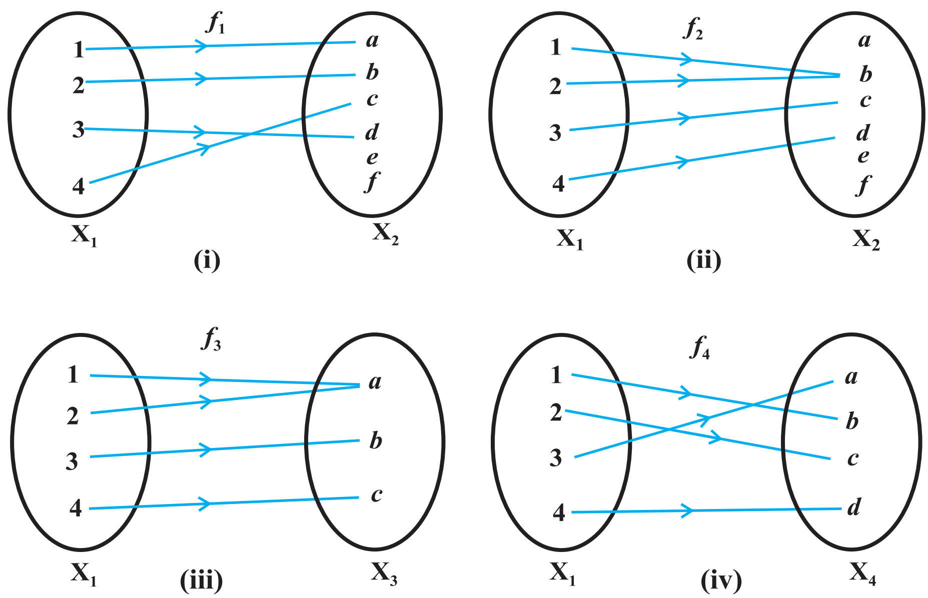
চিত্র 1.2 আমরা লক্ষ করি যে, f_1 এর সাপেক্ষে X_1 এর বিভিন্ন পদগুলোর প্রতিবিম্ব ভিন্ন হয়, কিন্তু f_2 এর সাপেক্ষে X_1 এর দুটি ভিন্ন পদ 1 এবং 2 এর প্রতিবিম্ব এক, যা হল b। তাছাড়া, X_2 তে এমন কয়েকটি পদ আছে, যেমন e এবং f যারা f_1 এর সাপেক্ষে X_1 এর কোনো পদের প্রতিবিম্ব নয়, অপরপক্ষে, X_3 এর সকল পদগুলো f_3 এর সাপেক্ষে X_1 এর কোনো একটি পদের প্রতিবিম্ব। উপরের পর্যবেক্ষণগুলোর মাধ্যমে নিম্নলিখিত সংজ্ঞাগুলো পাওয়া যায় :

সংজ্ঞা 5 একটি অপেক্ষক $f : X \to Y$ এক-এক বা একৈক (অথবা ইনজেকটিভ) রূপে সংজ্ঞায়িত হয়, যদি f এর সাপেক্ষে X এর ভিন্ন পদগুলোর প্রতিবিম্ব ভিন্ন হয়, অর্থাৎ প্রতিটি $x_1, x_2 \in X$, এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ বোঝায় $x_1 = x_2$। অন্যথায়, f কে বলা হয় বহু-এক (*many-one*)।

চিত্র 1.2 এর (i) এবং (iv) এ f_1 এবং f_4 হল এক-এক (one-one) অপেক্ষক এবং চিত্র 1.2 এর (ii) এবং (iii) এ f_2 এবং f_3 হল বহু-এক অপেক্ষক।

সংজ্ঞা 6 একটি অপেক্ষক $f : X \to Y$ কে *উপরিচিত্রণ* (বা সারজেকটিভ) বলা হবে, যদি Y এর প্রতিটি পদ f এর সাপেক্ষে এর X এর কোনো পদের প্রতিবিম্ব হয়। অর্থাৎ, প্রতিটি $y \in Y$ এর জন্য, X -এর একটি পদ x এর অস্তিত্ব আছে যেখানে, $f(x) = y$।

চিত্র 1.2 (iii) এ f_3 এবং f_4 অপেক্ষক হল উপরিচিত্রণ এবং চিত্র 1.2 (i) এ f_1 অপেক্ষকটি উপরিচিত্রণ নয়, যেহেতু X_2 এর e, f পদগুলো f_1 এর সাপেক্ষে X_1 এর কোনো পদের প্রতিবিম্ব নয়।



চিত্র 1.2 (i) থেকে (iv)

মন্তব্য $f : X \to Y$ উপরিচিত্রণ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি f এর প্রসার $= Y$ হয়।

সংজ্ঞা 7 একটি অপেক্ষক $f : X \to Y$ কে এক-এক এবং উপরিচিত্রণ (অথবা বাইজেকটিভ) বলা হয়, যদি f এক-এক এবং উপরিচিত্রণ উভয়ই হয়।

চিত্র 1.2 (iv) এ, f_4 অপেক্ষকটি হল এক-এক এবং উপরিচিত্রণ।

উদাহরণ 7 ধরো A হল একটি বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণির 50 জনের সকল শিক্ষার্থীদের সেট। ধরো $f : A \to \mathbf{N}$ অপেক্ষক এরূপে সংজ্ঞাত যে $f(x) =$ শিক্ষার্থী x এর রোল নম্বর। দেখাও যে f হল এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ।

সমাধান শ্রেণিটিতে কোনো দুইজন শিক্ষার্থীর একই রোল নম্বর থাকতে পারে না। অতএব, f অবশ্যই এক-এক। সাধারণত্বের ক্ষতিসাধন না করে আমরা ধরে নিতে পারি যে শিক্ষার্থীদের রোল নম্বর 1 থেকে 50 পর্যন্ত হয়। এটি থেকে বোঝা যায় **N** এর 51, শ্রেণিটির কোনো শিক্ষার্থীর রোল নম্বর নয়, ফলে f এর সাপেক্ষে X এর কোনো পদের প্রতিবিম্ব 51 হতে পারে না। অতএব, f উপরিচিত্রণ নয়।

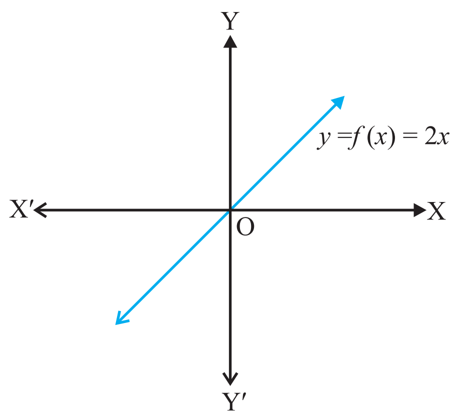
উদাহরণ 8 দেখাও যে $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, যেখানে $f(x) = 2x$, অপেক্ষকটি এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়।

সমাধান f অপেক্ষকটি এক-এক, কারণ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$। তাছাড়া, f

উপরিচিত্রণ নয়, যেহেতু $1 \in \mathbf{N}$ এর জন্য $\mathbf{N}$ এর কোনো x এর অস্তিত্ব নেই যাতে $f(x) = 2x = 1$ হয়।

উদাহরণ 9 প্রমাণ করো যে $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = 2x$, অপেক্ষকটি একটি এক-এক (এককৈক) এবং উপরিচিত্রণ।

সমাধান f হল এক-এক, যেহেতু $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$। তাছাড়া R এ প্রদত্ত যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা y-এর জন্য, R এ $\frac{y}{2}$ এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $f(\frac{y}{2}) = 2 \,.\, (\frac{y}{2}) = y$ ।
অতএব, f হল উপরিচিত্রণ।



চিত্র 1.3

উদাহরণ 10 দেখাও যে প্রতিটি $x > 2$ এর জন্য $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ অপেক্ষকটি, যেখানে $f(1) = f(2) = 1$ এবং $f(x) = x - 1$ উপরিচিত্রণ কিন্তু এক-এক নয়।

সমাধান f এক-এক নয়, যেহেতু $f(1) = f(2) = 1$। কিন্তু f উপরিচিত্রণ, কারণ প্রদত্ত যে-কোনো $y \in \mathbf{N}$, $y \neq 1$, আমরা x এর মান $y + 1$ হিসেবে নিতে পারি যাতে $f(y + 1) = y + 1 - 1 = y$ হয়। তাছাড়া $1 \in \mathbf{N}$, এর জন্য, আমরা পাই $f(1) = 1$ ।

উদাহরণ 11 দেখাও যে $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, অপেক্ষকটি $f(x) = x^2$ হিসেবে সংজ্ঞাত হলে এটি এককৈক কিংবা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়।

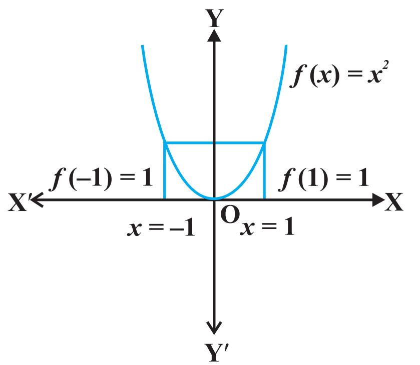
সমাধান যেহেতু $f(-1) = 1 = f(1)$, f এককৈক নয়। তাছাড়া, উপক্ষেত্র $\mathbf{R}$ এর -2 পদটি, ক্ষেত্র $\mathbf{R}$ এর

কোনো x এর প্রতিবিম্ব নয়। (কেন?) অতএব, f উপরিচিত্রণ নয়।

উদাহরণ 12 দেখাও যে $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ অপেক্ষক যেখানে,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ যদি } x \text{ অযুগ্ম হয়} \\ x-1, \text{ যদি } x \text{ যুগ্ম হয়} \end{cases}$$

এক-এক এবং উপরিচিত্রণ উভয়ই হয়।



অপেক্ষক f-এ 1 এবং –1 এর প্রতিবিম্ব হল 1

চিত্র 1.4

সমাধান ধরো $f(x_1) = f(x_2)$ । লক্ষ করো যদি x_1 অযুগ্ম এবং x_2 যুগ্ম হয়, তবে আমরা পাব $x_1 + 1 = x_2 - 1$, অর্থাৎ $x_2 - x_1 = 2$ যা অসম্ভব। অনুরূপে, x_1 যুগ্ম এবং x_2 অযুগ্ম হওয়ার সম্ভাবনা একই যুক্তিতে প্রত্যাখ্যাত হবে। অতএব, x_1 এবং x_2 উভয়েই হয় অযুগ্ম অথবা যুগ্ম হবে। ধরো x_1 এবং x_2 উভয়েই অযুগ্ম। তাহলে $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ । অনুরূপে, যদি x_1 এবং x_2 যুগ্ম হয়। তাহলেও $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ । সুতরাং, f এক-এক অপেক্ষক।

তাছাড়া, উপক্ষেত্র **N** এর অযুগ্ম সংখ্যা $2r + 1$ হল ক্ষেত্র **N** এ $2r + 2$ এর প্রতিবিম্ব এবং উপক্ষেত্র **N** এর কোনো যুগ্ম সংখ্যা $2r$ হল ক্ষেত্র **N** এ $2r - 1$ এর প্রতিবিম্ব। অতএব f হল উপরিচিত্রণ।

উদাহরণ 13 দেখাও যে একটি উপরিচিত্রণ $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ হল সর্বদা একৈক অপেক্ষক।

সমাধান ধরো f একৈক নয়। তাহলে ক্ষেত্রে দুটি পদের অস্তিত্ব আছে যেমন 1 এবং 2 যাদের জন্য উপেক্ষেত্রে একই প্রতিবিম্ব আছে। তাছাড়া f এর সাপেক্ষে 3 এর প্রতিবিম্ব কেবলমাত্র একটি পদ। অতএব উপক্ষেত্র $\{1, 2, 3\}$ এর প্রসারে সবচেয়ে বেশি দুটি পদ আছে, যা দেখাচ্ছে f উপরিচিত্রণ নয়, এটি কল্পনাবিরুদ্ধ। অতএব, f অবশ্যই একৈক।

উদাহরণ 14 দেখাও যে একটি একৈক অপেক্ষক $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ অবশ্যই উপরিচিত্রণ হবে।

সমাধান যেহেতু f একৈক, $\{1, 2, 3\}$ এর তিনটি পদ অবশ্যই f এর সাপেক্ষে উপক্ষেত্র $\{1, 2, 3\}$এর 3টি ভিন্নপদের সাথে যুক্ত হবে। অতএব f উপরিচিত্রণ হবে।

মন্তব্য উদাহরণ 13 এবং 14 এ উল্লেখিত ফলাফলসমূহ যে-কোনো একটি স্বেচ্ছ (arbitrary) সসীম সেট X, এর জন্যও সত্য হয়, অর্থাৎ প্রতিটি সসীম সেট X এর জন্য একটি একৈক অপেক্ষক $f: X \rightarrow X$ আবশ্যকভাবে উপরিচিত্রণ হয় এবং একটি উপরিচিত্রণ $f: X \rightarrow X$ আবশ্যকভাবে একৈক হয়। এর বিপরীতে, উদাহরণ 8 এবং 10 এ একটি অসীম সেটের ক্ষেত্রে এটি সত্য নাও হতে পারে। প্রকৃতপক্ষে, একটি সসীম এবং একটি অসীম সেটের মধ্যে এটি একটি বৈশিষ্ট্যগত পার্থক্য।

অনুশীলনী 1.2

1. দেখাও যে, অপেক্ষক $f: \mathbf{R}_* \rightarrow \mathbf{R}_*$ অপেক্ষকটি, $f(x) = \frac{1}{x}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে এটি একটি একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, যেখানে $\mathbf{R}_*$ হল সকল অশূন্য বাস্তব সংখ্যার সেট। যদি উপক্ষেত্র $\mathbf{R}_*$ একই রেখে, ক্ষেত্র $\mathbf{R}_*$ এর পরিবর্তে $\mathbf{N}$ হয়, তবে এই পরিণাম সত্য হবে কি?

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর ইনজেকটিভিটি এবং সারজেকটিভিটি যাচাই করো :

   (i) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ যেখানে $f(x) = x^2$

   (ii) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ যেখানে $f(x) = x^2$

   (iii) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ যেখানে $f(x) = x^2$

   (iv) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ যেখানে $f(x) = x^3$

   (v) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ যেখানে $f(x) = x^3$

3. প্রমাণ করো যে বৃহত্তম অখণ্ড অপেক্ষক $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = [x]$, একৈক কিংবা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়, এখানে $[x]$ দিয়ে x এর ছোট বা সমান হয় এমন বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাকে প্রকাশ করা হয়।

4. দেখাও যে পরমমান অপেক্ষক $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = |x|$, একৈক কিংবা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়, $|x|$ হল x, যখন x ধনাত্মক বা শূন্য হয় এবং $|x| = -x$, যখন x ঋণাত্মক হয়।

5. দেখাও যে সিগনাম অপেক্ষক $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, যেখানে

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ যখন } x > 0 \\ 0, \text{যখন} x = 0 \\ -1\text{য়খন} x < 0 \end{cases}$$

   একৈক বা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়।

6. ধরো A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} এবং ধরে নাও A থেকে B-তে f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} একটি অপেক্ষক। দেখাও যে f হল এক-এক।

7. নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি একৈক, উপরিচিত্রণ অথবা বাইজেকটিভ কিনা বিবৃত করো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

   (i) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ সংজ্ঞায়িত হয়, $f(x) = 3 - 4x$

   (ii) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ সংজ্ঞায়িত হয়, $f(x) = 1 + x^2$

8. ধরো A এবং B দুটি সেট। দেখাও যে $f: A \times B \rightarrow B \times A$, সংজ্ঞাত হয় $f(a, b) = (b, a)$, একটি বাইজেকটিভ অপেক্ষক।

9. ধরো $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ সংজ্ঞায়িত $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{যদি } n \text{ অযুগ্ম হয়} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{যদি } n \text{ যুগ্ম হয়,} \end{cases}$

সকল $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য

f বাইজেকটিভ কিনা লেখো। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

10. ধরো $A = \mathbf{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbf{R} - \{1\}$, মনে করো $f : A \to B$ অপেক্ষকটি $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f ঐকৈক এবং উপরিচিত্রণ হবে কি? তোমার উত্তরের যথার্থতা বিচার করো।

11. ধরো $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো।

(A) f এক-এক উপরিচিত্রণ (B) f বহু-এক উপরিচিত্রণ

(C) f ঐকৈক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়। (D) f ঐকৈক কিংবা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়।

12. ধরো $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো।

(A) f এক-এক উপরিচিত্রণ। (B) f বহু-এক উপরিচিত্রণ।

(C) f এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়। (D) f এক-এক কিংবা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়।

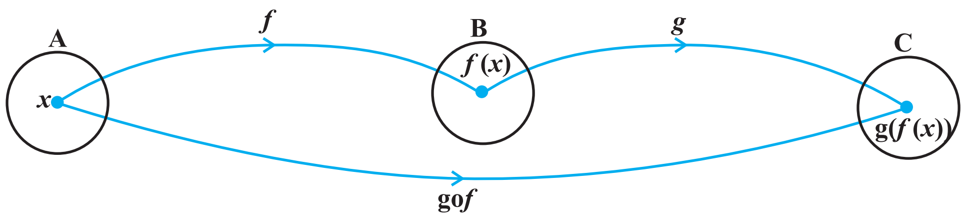
1.4 অপেক্ষকের সংযোজন এবং বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক (Composition of Functions and Invertible Function)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা অপেক্ষকের সংযোজন এবং একটি বাইজেকটিভ অপেক্ষকের বিপরীত (inverse) সম্পর্কে অধ্যয়ন করব। ধরো A হলো 2006 সালের পর্ষদের (Board-এর) দশম শ্রেণির পরীক্ষায় বসেছে এমন সব শিক্ষার্থীদের সেট। পর্ষদের পরীক্ষায় প্রতিটি পরীক্ষার্থী পর্ষদ প্রদত্ত একটি রোল নম্বরের সাথে যুক্ত হয় যা পরীক্ষার্থীকে পরীক্ষার সময় উত্তরপত্রে লিপিবদ্ধ করতে হয়। গোপনীয়তা বজায় রাখার জন্য পর্ষদ এসব রোল নম্বর গুলো মুছে এদের প্রতিটির পরিবর্তে একটি করে নকল সাংকেতিক নম্বর যুক্ত করে। ধরো $B \subset \mathbf{N}$ হল সকল রোল নম্বরগুলোর সেট এবং $C \subset \mathbf{N}$ হল সকল সাংকেতিক নম্বরগুলোর সেট। এটি থেকে দুটি অপেক্ষক পাওয়া যায় $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ যেখানে $f(a) = a$ শিক্ষার্থীদের সাথে যুক্ত রোল নম্বর এবং $g(b) = b$ রোল নম্বরের সাথে যুক্ত সাংকেতিক নম্বর। এই প্রক্রিয়ায় প্রতিটি শিক্ষার্থী f অপেক্ষকের মাধ্যমে একটি রোল নম্বরের সাথে যুক্ত হয় এবং প্রতিটি রোল নম্বর g অপেক্ষকের মাধ্যমে একটি সাংকেতিক নম্বরের সাথে যুক্ত হয়। এভাবে এই দুটি অপেক্ষকের সংযোজনের ফলে, প্রতিটি শিক্ষার্থী অবশেষে একটি সাংকেতিক নম্বরের সাথে যুক্ত হয়।

এটি থেকে নীচের সংজ্ঞাটি দেওয়া যায় :

সংজ্ঞা 8 ধরো $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ হল দুটি অপেক্ষক। তাহলে f ও g এর সংযোজন প্রকাশ করা হয় gof দ্বারা, যা সংজ্ঞায়িত হয় অপেক্ষক $gof : A \to C$, যেখানে

$$gof(x) = g(f(x)),\ \forall\ x \in A$$



চিত্র 1.5

উদাহরণ 15 ধরো $f : \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ এবং $g : \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ অপেক্ষকগুলো এরূপে সংজ্ঞায়িত যে $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ এবং $g(3) = g(4) = 7$ এবং $g(5) = g(9) = 11$ । তবে gof নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7$, $gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$, $gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ এবং $gof(5) = g(5) = 11$.

উদাহরণ 16 যদি $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যেখানে $f(x) = \cos x$ এবং $g(x) = 3x^2$ হয়, তবে gof এবং fog নির্ণয় করো। দেখাও যে $gof \neq fog$.

সমাধান আমরা পাই $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3\ (\cos x)^2 = 3\cos^2 x$ ।

অনুরূপে $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ । লক্ষ করো যে $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$, $x = 0$ এর জন্য। অতএব $gof \neq fog$.

উদাহরণ 17 দেখাও যে যদি $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$ সংজ্ঞায়িত হয় $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$ এবং $g : \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ সংজ্ঞায়িত হয় $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$, তবে $fog = I_A$ এবং $gof = I_B$, যেখানে $A = \mathbf{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = \mathbf{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$; $I_A(x) = x,\ \forall x \in A$, $I_B(x) = x,\ \forall x \in B$ হল যথাক্রমে A এবং B এর উপর উপাদান স্থির অপেক্ষক।

সমাধান আমরা পাই

$$gof(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)+4}{5\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)-3} = \frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

অনুরূপে, $$fog(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)+4}{5\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)-7} = \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

অতএব, $gof(x) = x,\ \forall x \in B$ এবং $fog(x) = x,\ \forall x \in A$, যা বোঝায় যে $gof = I_B$ এবং $fog = I_A$.

উদাহরণ 18 দেখাও যে যদি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ একৈক হয়, তবে $gof : A \to C$ অপেক্ষকটিও একৈক হয়।

সমাধান ধরো $gof(x_1) = gof(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2), \text{ যেহেতু } g \text{ একৈক}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2, \text{ যেহেতু } f \text{ একৈক}$$

অতএব, gof একৈক হয়।

উদাহরণ 19 দেখাও যে যদি $f : A \to B$ এবং $g : B \to C$ উপরিচিত্রণ হয়, তবে $gof : A \to C$ অপেক্ষকটিও উপরিচিত্রণ হয়।

সমাধান প্রদত্ত একটি যদৃচ্ছ পদ $z \in C$ এর জন্য g এর সাপেক্ষে z এর প্রাগবিম্ব *(Pre-image)* y এর অস্তিত্ব আছে, যেখানে $g(y) = z$ হয়, যেহেতু g উপরিচিত্রণ। উপরন্তু $y \in B$ এর জন্য, A তে একটি পদ x এর অস্তিত্ব আছে, যেখানে $f(x) = y$ হয়, যেহেতু f একটি উপরিচিত্রণ। অতএব, $gof(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, যা প্রমাণ করে যে gof উপরিচিত্রণ।

উদাহরণ 20 মনে করো f এবং g অপেক্ষকের সংযোজন gof দ্বারা সংজ্ঞাত এবং একৈক হয়। তাহলে f এবং g উভয়েই আবশ্যকভাবে একৈক হবে কি?

সমাধান মনে করো $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সংজ্ঞাত হয় যদি $f(x) = x,\ \forall x$ এবং $g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ সংজ্ঞাত হয় যদি $g(x) = x$, যেখানে $x = 1, 2, 3, 4$

এবং $g(5) = g(6) = 5$ । তাহলে $gof(x) = x \ \forall x$, যা থেকে প্রমাণিত হয় gof একৈক হয়। কিন্তু স্পষ্টতই g একৈক নয়।

উদাহরণ 21 যদি gof উপরিচিত্রণ হয় f এবং g উভয়েই আবশ্যকভাবে উপরিচিত্রণ হবে কি?

সমাধান মনে করো $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ এরূপে সংজ্ঞাত যে $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3, g(1) = 1, g(2) = 2$ এবং $g(3) = g(4) = 3$। এটি দেখানো যেতে পারে gof উপরিচিত্রণ কিন্তু f উপরিচিত্রণ নয়।

মন্তব্য সাধারণভাবে এটি বিচার করা যায় যে gof একৈক হলে বোঝায় f একৈক হয়। অনুরূপে, gof উপরিচিত্রণ হলে বোঝায় g উপরিচিত্রণ হয়।

এখন, এই অনুচ্ছেদের শুরুতে পর্ষদ পরীক্ষায় বর্ণিত অপেক্ষক f এবং g কে আরও ভালোভাবে দেখতে চাই। পর্ষদের পরীক্ষায় দশম শ্রেণির প্রতিটি পরীক্ষার্থী অপেক্ষক f এর মাধ্যমে একটি রোল নম্বরের সাথে যুক্ত হয় এবং প্রতিটি রোল নম্বর অপেক্ষক g এর মাধ্যমে একটি সাংকেতিক নম্বরের সাথে যুক্ত হয়। উত্তর পত্র মূল্যায়নের পর, পরীক্ষক প্রতিটি সাংকেতিক নম্বরের সাপেক্ষে প্রাপ্ত নম্বরগুলো একটি মূল্যাঙ্ক পুস্তিকায় লিপিবদ্ধ করেন এবং তা পর্ষদের কার্যালয়ে পেশ করেন। পর্ষদের আধিকারিকগণ g এর বিপরীত প্রক্রিয়ার মাধ্যমে প্রতিটি সাংকেতিক নম্বরের পরিবর্তন করে পুনরায় সংগত রোল নম্বর প্রদান করেন এবং এভাবে প্রাপ্ত নম্বর সাংকেতিক নম্বরের জায়গায় প্রকৃত রোল নম্বরের সাথে সম্বন্ধিত হয়। তারপর f এর বিপরীত প্রক্রিয়ার মাধ্যমে, প্রতিটি রোল নম্বরকে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর রোলনম্বরের সাথে যুক্ত করা হয়। এভাবে প্রাপ্ত নম্বরের সম্পর্কযুক্ত শিক্ষার্থীর নাম সংযোজিত হয়ে যায়। আমরা লক্ষ করি যে f এবং g এর সংযোজনে gof পাওয়ার ক্ষেত্রে প্রথমে আমরা f এবং তারপর g প্রয়োগ করি, অপরপক্ষে gof সংযোজনের বিপরীত প্রক্রিয়ায়, প্রথমে g এর বিপরীত প্রক্রিয়া এবং এরপর f এর বিপরীত প্রক্রিয়া প্রয়োগ করি।

উদাহরণ 22 ধরো $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ হল একৈক এবং উপরিচিত্রণ যেখানে $f(1) = a, f(2) = b$ এবং $f(3) = c$ । দেখাও যে একটি অপেক্ষকের অস্তিত্ব আছে $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ এরূপ যে $gof = I_X$ এবং $fog = I_Y$, যেখানে $X = \{1, 2, 3\}$ এবং $Y = \{a, b, c\}$.

সমাধান ধরা যাক $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ যার $g(a) = 1, g(b) = 2$ এবং $g(c) = 3$ । এটি সহজেই যাচাই করা যায় যে সংযুক্ত $gof = I_X$ হল X এর উপর উপাদান স্থির অপেক্ষক এবং সংযুক্ত $fog = I_Y$ হল Y এর উপর উপাদানস্থির অপেক্ষক।

মন্তব্য মজার ব্যাপার হল উপরোক্ত উদাহরণে উল্লেখিত ফলাফল যে-কোনো যদৃচ্ছ একৈক এবং উপরিচিত্রণ $f : X \rightarrow Y$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সত্য হয়। শুধু তাই নয়, এর বিপরীতেও সত্য হয় অর্থাৎ $f : X \rightarrow Y$ এরূপ একটি অপেক্ষক যেখানে একটি অপেক্ষক $g : Y \rightarrow X$ এর অস্তিত্ব থাকে এরূপে যে $gof = I_X$ এবং $fog = I_Y$ হয়, তবে f অবশ্যই একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়।

উপরের আলোচনা, উদাহরণ 22 এবং মন্তব্য থেকে পরবর্তী সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

সংজ্ঞা 9 একটি অপেক্ষক $f : X \to Y$ কে *বিপরীতকরণযোগ্য* বলা হবে, যদি একটি অপেক্ষক $g : Y \to X$ এর অস্তিত্ব থাকে এরূপে যে $gof = I_X$ এবং $fog = I_Y$ হয়। g অপেক্ষকটিকে বলা হয় f এর *বিপরীত* এবং f^{-1} দিয়ে সূচিত করা হয়।

অতএব, যদি f বিপরীতকরণযোগ্য হয়, তবে f অবশ্যই এক-এক (একৈক) এবং উপরিচিত্রণ হয় এবং বিপরীতক্রমে, f এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হলে, f অবশ্যই বিপরীতকরণযোগ্য হবে। এই তথ্য f এর এক-এক এবং উপরিচিত্রণ ধর্ম প্রমাণ করে। বিপরীতকরণযোগ্য হওয়ার প্রমাণে উল্লেখযোগ্য রূপে সহায়তা করে, বিশেষ করে, যেসব ক্ষেত্রে f এর বিপরীত বাস্তবে নির্ণয় করা যায়না।

উদাহরণ 23 ধরো একটি অপেক্ষক $f : \mathbf{N} \to Y$ এরূপে সংজ্ঞায়িত যে $f(x) = 4x + 3$, যেখানে $Y = \{y \in \mathbf{N} : y = 4x + 3$ কোনো $x \in \mathbf{N}$ এর জন্য$\}$ । দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য হয়। বিপরীত অপেক্ষকটি নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো y হল Y এর যে-কোনো একটি পদ। Y এর সংজ্ঞা থেকে, $y = 4x + 3$, ক্ষেত্র $\mathbf{N}$ এর কোনো x এর জন্য । এটি প্রকাশ করে $x = \frac{(y-3)}{4}$ । এখন $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ দ্বারা $g : Y \to \mathbf{N}$ কে সংজ্ঞায়িত করো। এখন, $gof(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{(4x+3-3)}{4} = x$

এবং $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$ । যা প্রমাণ করে $gof = I_N$ এবং $fog = I_Y$ এটি বোঝায় যে f বিপরীতকরণযোগ্য হয় এবং g হল f এর বিপরীত।

উদাহরণ 24 ধরো $Y = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$ । মনে করো $f : \mathbf{N} \to Y$ যেখানে $f(n) = n^2$ হয়। দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য। f এর বিপরীত নির্ণয় করো।

সমাধান কোনো $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য Y এর যে-কোনো একটি পদ y যা n^2 আকারের হয়। এটি বোঝায় যে $n = \sqrt{y}$ । এথেকে একটি অপেক্ষক $g : Y \to \mathbf{N}$, পাওয়া যায়, যা $g(y) = \sqrt{y}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। এখন $gof(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$ এবং $fog(y) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$, যা প্রকাশ করে $gof = I_N$ এবং $fog = I_Y$ । অতএব, f বিপরীতকরণযোগ্য এবং $f^{-1} = g$ ।

উদাহরণ 25 ধরো $f' : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ একটি অপেক্ষক যা $f'(x) = 4x^2 + 12x + 15$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়। দেখাও যে $f : \mathbf{N} \to S$, যেখানে S, f এর প্রসার (বা পাল্লা) হলে, বিপরীতকরণযোগ্য হয়। f এর বিপরীত নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো y হল f এর প্রসারের যে-কোনো পদ। তাহলে **N** এর কোনো x এর জন্য $y = 4x^2 + 12x + 15$ যা থেকে পাওয়া যায় $y = (2x + 3)^2 + 6$ । এথেকে পাই $x = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$, যেহেতু $y \geq 6$।

চলো আমরা $g(y) = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ দ্বারা $g : \mathrm{S} \to \mathbf{N}$ সংজ্ঞায়িত করি।

এখন, $gof(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x + 3)^2 + 6)$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{(2x+3)^2+6-6}\right)-3\right)}{2} = \frac{(2x+3-3)}{2} = x$$

এবং $fog\,(y) = f\left(\frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}\right) = \left(\frac{2\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}+3\right)^2 + 6$

$$= \left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3+3\right)^2 + 6 = \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 = y - 6 + 6 = y.$$

অতএব, $gof = \mathrm{I_N}$ এবং $fog = \mathrm{I_S}$ । এটি বোঝায় যে, f বিপরীতকরণযোগ্য এবং $f^{-1} = g$ ।

উদাহরণ 26 ধরো $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ এবং $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ এরূপে সংজ্ঞাত $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ এবং $h(z) = \sin z$, $\forall\, x, y$ এবং z হল N এর পদ। দেখাও যে $ho(gof) = (hog)\, of$ ।

সমাধান আমরা পাই

$$ho(gof)\,(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x))$$
$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4)\ \ \forall\, x \in \mathbf{N}.$$

আবার, $((hog)\, o\, f)\,(x) = (hog)\,(f(x)) = (hog)\,(2x) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4),\ \forall\, x \in \mathbf{N}.$$

এটি প্রমাণ করে যে $ho(gof) = (hog)\, o\, f$ ।

এই ফলাফল সাধারণ পরিস্থিতিতেও সত্য হয়।

উপপাদ্য 1 যদি $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ এবং $h : \mathrm{Z} \to \mathrm{S}$ অপেক্ষকসমূহ হয়, তবে

$$ho(gof) = (hog)\, o\, f.$$

প্রমাণ আমরা পাই

$ho(gof)\,(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x)))$, $\forall\, x$ হল X -এর পদ।

এবং $(hog)\, of\,(x) = hog(f(x)) = h(g(f(x)))$, $\forall\, x$ হল X - এর পদ।

অতএব, $ho(gof) = (hog)\, o\, f.$

উদাহরণ 27 ধরো $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ এবং $g : \{a, b, c\} \rightarrow \{\text{apple, ball, cat}\}$ এরূপে সংজ্ঞাত $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, g(a) = \text{apple}, g(b) = \text{ball}$ এবং $g(c) = \text{cat}$। দেখাও যে, f, g এবং gof বিপরীতকরণযোগ্য হয়। f^{-1}, g^{-1} এবং $(gof)^{-1}$ নির্ণয় করো এবং দেখাও যে $(gof)^{-1} = f^{-1}o\,g^{-1}$.

সমাধান লক্ষ করো সংজ্ঞানুযায়ী, f এবং g বাইজেকটিভ অপেক্ষক। ধরো, $f^{-1}: \{a, b, c\} \rightarrow (1, 2, 3\}$ এবং $g^{-1} : \{\text{apple, ball, cat}\} \rightarrow \{a, b, c\}$ এরূপে সংজ্ঞাত যে $f^{-1}\{a\} = 1, f^{-1}\{b\} = 2,\ f^{-1}\{c\} = 3,\ g^{-1}\{\text{apple}\} = a,\ g^{-1}\{\text{ball}\} = b$ এবং $g^{-1}\{\text{cat}\} = c$। এটি সহজেই যাচাই করা যায় যে $f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}, fo\,f^{-1} = I_{\{a, b, c\}}, g^{-1}og = I_{\{a, b, c\}}$ এবং $go\,g^{-1} = I_D$, যেখানে $D = \{\text{apple, ball, cat}\}$। এখন $gof : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{\text{apple, ball, cat}\}$ যেখানে $gof(1) = \text{apple}, gof(2) = \text{ball}, gof(3) = \text{cat}$ । আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারি

$(gof)^{-1} : \{\text{apple, ball, cat}\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ যেখানে $(gof)^{-1}(\text{apple}) = 1, (gof)^{-1}(\text{ball}) = 2$

এবং $(g\,o\,f)^{-1}(\text{cat}) = 3$ । এটি সহজে লক্ষ করা যায় যে $(g\,o\,f)^{-1}\ o\ (g\,o\,f) = I_{\{1, 2, 3\}}$ এবং $(gof)\ o\ (gof)^{-1} = I_D$ । এভাবে আমরা দেখি যে, f, g এবং gof হল বিপরীতকরণযোগ্য।

এখন, $f^{-1}og^{-1}(\text{apple}) = f^{-1}(g^{-1}(\text{apple})) = f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}(\text{apple})$

$f^{-1}og^{-1}(\text{ball}) = f^{-1}(g^{-1}(\text{ball})) = f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}(\text{ball})$ এবং

$f^{-1}og^{-1}(\text{cat}) = f^{-1}(g^{-1}(\text{cat})) = f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}(\text{cat})$.

অতএব, $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$.

উপরিউক্ত ফলাফল সাধারণ পরিস্থিতিতেও সত্য হয়।

উপপাদ্য 2 ধরো $f : X \rightarrow Y$ এবং $g : Y \rightarrow Z$ হল দুটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক। তাহলে gof ও বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ।

প্রমাণ gofকে বিপরীতকরণযোগ্য এবং $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$, সিদ্ধ করার জন্য এটি প্রমাণ করা যথেষ্ট যে $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_X$ এবং $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ হয়।

এখন,
$$(f^{-1}og^{-1})o(gof) = ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of, \text{ উপপাদ্য 1 দ্বারা}$$
$$= (f^{-1}o(g^{-1}og))\ of, \text{ উপপাদ্য 1 দ্বারা}$$
$$= (f^{-1}\,o\,I_Y)\ of, \ g^{-1} \text{ এর সংজ্ঞা থেকে}$$
$$= I_X।$$

অনুরূপে, দেখানো যেতে পারে $(gof)\,o\,(f^{-1}\ o\,g^{-1}) = I_Z$ ।

উদাহরণ 28 ধরো $S = \{1, 2, 3\}$ । নীচে সংজ্ঞায়িত $f: S \rightarrow S$ অপেক্ষকগুলোর বিপরীত আছে কিনা নির্ণয় করো। যদি অস্তিত্ব থাকে, f^{-1} নির্ণয় করো।

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

সমাধান

(a) এটি সহজে দেখানো যায় যে f একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, তাই f বিপরীতকরণযোগ্য যেখানে f এর বিপরীত হল f^{-1} এবং $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$.

(b) যেহেতু $f(2) = f(3) = 1$, f একৈক নয়, তাই বিপরীতকরণযোগ্য নয়।

(c) এটি সহজে দেখানো যায় f একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, তাই f বিপরীতকরণযোগ্য এবং $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$.

অনুশীলনী 1.3

1. ধরো $f : \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ এবং $g : \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$ যেখানে $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ এবং $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ । gof লেখো।

2. ধরো f, g এবং h হল **R** থেকে **R** পর্যন্ত অপেক্ষকসমূহ। দেখাও যে

$$(f + g) o h = foh + goh$$
$$(f . g) o h = (foh) . (goh)$$

3. gof এবং fog নির্ণয় করো, যদি

(i) $f(x) = |x|$ এবং $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ এবং $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ হয়।

4. যদি $f(x) = \dfrac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ হয়, তবে দেখাও যে $fof(x) = x$, সকল $x \neq \dfrac{2}{3}$ এর জন্য।

f এর বিপরীত কী হবে ?

5. নীচের অপেক্ষকগুলোর বিপরীত হয় কিনা যুক্তিসহ বিবৃত করো :

(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$ যেখানে
$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$

(ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ যেখানে
$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$

(iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$ যেখানে
$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$

6. দেখাও যে $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, যেখানে $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)}$ এককৈক হয়।

অপেক্ষক $f : [-1, 1] \to$ (f এর প্রসার) এর বিপরীত নির্ণয় করো।

(ইঙ্গিত: $y \in$ (f-এর প্রসার), $y = f(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $[-1, 1]$এর কোনো x এর জন্য অর্থাৎ

$x = \dfrac{2y}{(1-y)}$)

7. ধরো $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যেখানে $f(x) = 4x + 3$ হয়। দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য হয়। f এর বিপরীত নির্ণয় করো।

8. ধরো $f : \mathbf{R}_+ \to [4, \infty)$ যেখানে $f(x) = x^2 + 4$ হয়। দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য হয়। f এর বিপরীত f^{-1} হল $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$, যেখানে $\mathbf{R}_+$ হল সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা সমূহের সেট।

9. ধরো $f : \mathbf{R}_+ \to [-5, \infty)$ যেখানে $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ হয়। দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য এবং $f^{-1}(y) = \left(\dfrac{\left(\sqrt{y+6}\right)-1}{3}\right)$।

10. ধরো $f : X \to Y$ একটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক। দেখাও যে f এর বিপরীত অনন্য হয়। (ইঙ্গিত: ধরো f এর দুটি বিপরীত হল g_1 এবং g_2 । তাহলে সকল $y \in Y$ এর জন্য, $fog_1(y) = 1_Y(y) = fog_2(y)$। তারপর f-এর এককৈক নিয়ম প্রয়োগ করো)।

11. ধরো $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ যেখানে $f(1) = a$, $f(2) = b$ এবং $f(3) = c$ হয়। f^{-1} নির্ণয় করো এবং দেখাও যে $(f^{-1})^{-1} = f$ ।

12. ধরো $f: X \to Y$ হল একটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক। দেখাও যে f^{-1} এর বিপরীত f অর্থাৎ $(f^{-1})^{-1} = f$ ।

13. যদি $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যেখানে $f(x) = (3-x^3)^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে $fof(x)$ হবে

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 - x^3)$.

14. ধরো $f: \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to \mathbf{R}$ একটি অপেক্ষক $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়। f এর বিপরীত চিত্রণ g : (f এর প্রসার) $\to \mathbf{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ হল

(A) $g(y) = \frac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \frac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \frac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \frac{3y}{4-3y}$

1.5 দ্বিপদ প্রক্রিয়া (Binary Operations)

বিদ্যালয় শিক্ষাজীবনের দিনগুলোতে, তোমরা চারটি মৌলিক প্রক্রিয়া যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ-এর সংস্পর্শে এসেছ। এই প্রক্রিয়াগুলোর মূল বিশেষত্ব হল, যে-কোনো দুটি সংখ্যা a ও b কে আমরা অপর একটি সংখ্যায় $a + b$ অথবা $a - b$ অথবা ab অথবা $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ সংযোজন করি। এটি লক্ষনীয় যে কেবলমাত্র দুটি সংখ্যারই একই সাথে যোগ অথবা গুণ করা হয়। যখন আমাদের তিনটি সংখ্যাকে যোগ করার প্রয়োজন হয়, সেক্ষেত্রে প্রথমে আমরা দুটি সংখ্যাকে যোগ করি এবং তারপর প্রাপ্ত ফলকে তৃতীয় সংখ্যাটির সাথে যোগ করি। এভাবে, যোগ, গুণ, বিয়োগ এবং ভাগ প্রক্রিয়া হল দ্বিপদ প্রক্রিয়ার উদাহরণ, যেখানে 'দ্বিপদ' মানে দুটি পদ। যদি আমরা একটি সাধারণ সংজ্ঞা পেতে চাই যা এই চারটি প্রক্রিয়াকেই অন্তর্ভূক্ত করে, তাহলে আমাদের সংখ্যাগুলোর সেটকে একটি যদৃচ্ছ সেট- X এ পরিবর্তিত করতে হবে এবং তারপর সাধারণ দ্বিপদ প্রক্রিয়া হল X এর যে-কোনো a, b জোড় থেকে X এর অপর পদের সাথে সংযোজন ছাড়া আর কিছুই নয়। এথেকে নিম্নলিখিত সাধারণ সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা 10 কোনো সেট A -তে একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ হল একটি অপেক্ষক $* : A \times A \to A$। আমরা $*(a, b)$ কে $a * b$ দ্বারা সূচিত করি।

উদাহরণ 29 দেখাও যে, যোগ, বিয়োগ এবং গুণ হল $\mathbf{R}$ এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া কিন্তু $\mathbf{R}$ সেটের উপর ভাগ দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়। তাছাড়া দেখাও যে অশূন্য বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbf{R}_*$ এ ভাগ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হয়।

সমাধান $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

$(a, b) \to a + b$

$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

$(a, b) \to a - b$

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

$(a, b) \to ab$

যেহেতু '+', '–' এবং '×' হল অপেক্ষক, তারা $\mathbf{R}$ এ দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

কিন্তু $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, যেখানে $(a, b) \to \frac{a}{b}$, একটি অপেক্ষক নয়, যেহেতু $b = 0$ এর জন্য $\frac{a}{b}$ অসংজ্ঞাত এবং তাই ভাগ এক্ষেত্রে দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়।

যাহোক, $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$, যেখানে $(a, b) \to \frac{a}{b}$ একটি অপেক্ষক এবং তাই $\mathbf{R}_*$ এ এটি একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

উদাহরণ 30 দেখাও যে বিয়োগ এবং ভাগ $\mathbf{N}$ এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়।

সমাধান $- : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, যা $(a, b) \to a - b$ দ্বারা সংজ্ঞাত, দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়, যেহেতু '–' এর সাপেক্ষে (3, 5) এর প্রতিবিম্ব হল $3 - 5 = -2 \notin \mathbf{N}$ । অনুরূপে $\div : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ যা $(a, b) \to a \div b$ দ্বারা সংজ্ঞাত। একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়, যেহেতু ÷ এর সাপেক্ষে (3, 5) এর প্রতিবিম্ব $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$।

উদাহরণ 31 দেখাও যে $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যা $(a, b) \to a + 4b^2$ দ্বারা সংজ্ঞাত, একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

সমাধান যেহেতু * প্রতিটি (a, b) জোড়ের জন্য $\mathbf{R}$ এ একটি অনন্য পদ $a + 4b^2$ সংবাহন করে, * $\mathbf{R}$ এর উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

উদাহরণ 32 ধরো প্রদত্ত একটি সেট X এর সকল উপসেটসমূহের সেট হল P । দেখাও যে $\cup : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ সংজ্ঞাত হল $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ এবং $\cap : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ সংজ্ঞাত $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \to \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ হল P সেটের উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়াসমূহ।

সমাধান যেহেতু যোগ প্রক্রিয়া ∪ , P × P এর প্রত্যেক জোড় (A, B) কে P এর একটি অনন্য পদ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ কে প্রকাশ করে, তাই ∪ হল P এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া। অনুরূপে, ছেদ (intersection) প্রক্রিয়া ∩, P × P এর প্রতিটি জোড় (A, B) কে P এর একটি অনন্য পদ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ কে প্রকাশ করে। তাই ∩ হল P এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

উদাহরণ 33 দেখাও যে $\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যা সংজ্ঞাত হয় $(a, b) \to$ বৃহত্তর (max) $\{a, b\}$ দ্বারা এবং $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ যা সংজ্ঞাত হয় $(a, b) \to$ ক্ষুদ্রতর (min) $\{a, b\}$ দ্বারা, উভয়েই দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

সমাধান যেহেতু ∨ , $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ এর প্রতিটি জোড় (a, b) কে $\mathbf{R}$ এর অনন্য পদ যা a ও b এর মধ্যে বৃহত্তরটিকে সূচিত করে, অতএব, ∨ হল দ্বিপদ প্রক্রিয়া। অনুরূপে, একই যুক্তি প্রয়োগে বলা যায় যে ∧ ও একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

মন্তব্য $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, -7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ এবং $\wedge(4, -7) = -7$.

যখন কোনো সেট A এর পদসংখ্যা কম হয়, তখন A সেটে কোনো দ্বিপদ প্রক্রিয়া * কে একটি

সারণির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, A = {1, 2, 3} সেটটি বিবেচনা করো। তাহলে **উদাহরণ** 33 এ সংজ্ঞাত প্রক্রিয়া $\vee$ নিম্নলিখিত সারণি (সারণি 1.1) দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এখানে $\vee\ (1, 3) = 3$, $\vee\ (2, 3) = 3$, $\vee\ (1, 2) = 2$.

সারণি 1.1

V	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

এখানে, আমাদের প্রক্রিয়া সারণিতে 3টি সারি এবং 3 টি স্তম্ভ আছে, যেখানে (i, j) প্রকোষ্ঠে A সেটের i তম এবং j তম পদের বৃহত্তরটি লিপিবদ্ধ হয়। এটিকে কোনো সাধারণ প্রক্রিয়া $* : A \times A \to A$ এর ক্ষেত্রে সাধারণীকরণ করা যায়। যদি $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ হয়, তবে আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারি একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : A \times A \to A$ যেখানে $a_i * a_j$ = প্রক্রিয়া সারণির i তম সারি এবং j তম স্তম্ভে লিপিবদ্ধ পদ। বিপরীতরূপে, n সংখ্যক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভযুক্ত প্রদত্ত কোনো প্রক্রিয়া সারণি যার প্রত্যেক প্রকোষ্ঠে $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$-এর একটি পদ থাকে, যার জন্য আমরা এমন একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞায়িত করতে পারি, এরূপে যে, $a_i * a_j$ = প্রক্রিয়া সারণির i-তম সারি এবং j-তম স্তম্ভের প্রকোষ্ঠে যুক্ত পদ

লক্ষ করা যায়, 3 এবং 4 এর যে-কোনো ক্রমে যোগফল সমান হয়, অর্থাৎ, $3 + 4 = 4 + 3$ কিন্তু 3 এবং 4 এর ভিন্ন ক্রমের বিয়োগফল ভিন্ন হয়, অর্থাৎ $3 - 4 \neq 4 - 3$। অনুরূপে, 3 এবং 4 এর গুণনে ক্রমের গুরুত্ব নেই, কিন্তু 3 এবং 4 এর ভাগক্রিয়ায় ভিন্ন ক্রমে ভিন্ন ভাগফল হয়। অতএব, 3 এবং 4 এর যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়া অর্থপূর্ণ, কিন্তু 3 এবং 4 এর বিয়োগ এবং ভাগ প্রক্রিয়া অর্থহীন হয়। বিয়োগ এবং ভাগের ক্ষেত্রে আমাদের লিখতে হবে 4 থেকে 3 বিয়োগ, 3 থেকে 4'বিয়োগ, '3 কে 4 দিয়ে ভাগ ' ' 4 কে 3 দিয়ে ভাগ'।

এথেকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যায়:

সংজ্ঞা 11 X সেটের উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ কে *বিনিময়যোগ্য (commutative)* বলা হয়, সকল $a, b \in X$ এর জন্য যদি $a * b = b * a$ হয়।

উদাহরণ 34 দেখাও যে $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ প্রক্রিয়াগুলো বিনিময়যোগ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া, কিন্তু $- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ প্রক্রিয়াগুলো বিনিময়যোগ্য নয়।

সমাধান যেহেতু $a + b = b + a$ এবং $a \times b = b \times a$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, '+' এবং '×' হল বিনিময়যোগ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া। কিন্তু '–' বিনিময়যোগ্য নয়, যেহেতু $3 - 4 \neq 4 - 3$ ।
অনুরূপে $3 \div 4 \neq 4 \div 3$ যা প্রমাণ করে '÷' বিনিময়যোগ্য নয়।

উদাহরণ 35 দেখাও যে $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ প্রক্রিয়াটি $a * b = a + 2b$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে তা বিনিময়যোগ্য হয় না।

সমাধান $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ এবং $4 * 3 = 4 + 6 = 10$ যা প্রমাণ করে যে $*$ প্রক্রিয়াটি বিনিময়যোগ্য নয়।

যদি আমরা X সেটের তিনটি পদকে X এর উপর সংজ্ঞায়িত কোনো দ্বিপদ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে সম্বন্ধিত করতে চাই, তবে আমরা একটি স্বাভাবিক সমস্যার সম্মুখীন হই। $a * b * c$ রাশিটির বোঝায় $(a * b) * c$ অথবা $a * (b * c)$ এবং এই দুইটি এক নয়। উদাহরণস্বরূপ $(8 – 5) – 2 \neq 8 – (5 – 2)$। সুতরাং, বন্ধনী ব্যবহার না করে 'বিয়োগ' এর মাধ্যমে তিনটি সংখ্যা 8, 5 এবং 3 এর সংযোজন অর্থহীন। কিন্তু যোগ এর ক্ষেত্রে $8 + 5 + 2$ এর মান $(8 + 5) + 2$ অথবা $8 + (5 + 2)$ এর জন্য সমান হয়। সুতরাং বন্ধনী ব্যবহার না করে 3 অথবা 3 এর অধিক সংখ্যার যোগ এর মাধ্যমে সংযোজন অর্থপূর্ণ হয়।

এথেকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

সংজ্ঞা 12 একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : A \times A \to A$ সংযোজ্য *(associative)* বলা হয় যদি

$$(a * b) * c = a * (b * c),\ \forall\, a, b, c, \in A.$$

উদাহরণ 36 দেখাও যে যোগ এবং গুণ প্রক্রিয়া **R** এর উপর একটি সংযোজ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া। কিন্তু বিয়োগ প্রক্রিয়া **R** এর উপর সংযোজ্য নয়। ভাগ প্রক্রিয়া $\mathbf{R}_*$ এর উপর সংযোজ্য নয়।

সমাধান যোগ এবং ভাগ প্রক্রিয়া সংযোজ্য, যেহেতু $(a + b) + c = a + (b + c)$ এবং $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)\ \forall\ a, b, c \in R$ । কিন্তু বিয়োগ এবং ভাগ প্রক্রিয়া সংযোজ্য নয়, যেহেতু $(8 – 5) – 3 \neq 8 – (5 – 3)$ এবং $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$।

উদাহরণ 37 দেখাও যে $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ প্রক্রিয়াটি $a * b \to a + 2b$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে তা সংযোজ্য নয়।

সমাধান $*$ প্রক্রিয়াটি সংযোজ্য নয়, যেহেতু

$$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24,$$

অপরদিকে $$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30.$$

মন্তব্য একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংযোজ্য নিয়ম খুবই গুরুত্বপূর্ণ কারণ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়ার এই নিয়ম সহযোগে, আমরা $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ কে স্পষ্টরূপে লিখতে পারি। কিন্তু এই নিয়ম ব্যতিরেকে $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ এর প্রকাশ অস্পষ্ট হয় যদি না বন্ধনীসমূহের ব্যবহার না হয়। মনে করে দেখো যে পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে যখন বিয়োগ অথবা ভাগ প্রক্রিয়ায় অথবা একাধিক প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে বন্ধনীসমূহের ব্যবহার ছিল।

R এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া '+' এর ক্ষেত্রে, শূন্য সংখ্যাটির একটি মজাদার বিশেষত্ব এই যে $a + 0 = a = 0 + a$, অর্থাৎ যে-কোনো সংখ্যা শূন্যের সাথে যুক্ত হলে সংখ্যাটি অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু গুণের ক্ষেত্রে 1 সংখ্যাটি এই ভূমিকা পালন করে। যেহেতু $a \times 1 = a = 1 \times a,\ \forall\ a \in \mathbf{R}$ । এথেকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা 13 প্রদত্ত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : A \times A \to A$ এর ক্ষেত্রে, একটি পদ $e \in A$ যদি এর অস্তিত্ব থাকে, $*$ প্রক্রিয়ার জন্য *একসম (identity)* উপাদান বলা হয়, যদি $a * e = a = e * a, \ \forall \ a \in A$ ।

উদাহরণ 38 দেখাও যে, যোগের ক্ষেত্রে **R** এর উপর শূন্য হল একসম উপাদান এবং R এর উপর গুণের ক্ষেত্রে 1 হল একসম উপাদান। কিন্তু নিম্নোক্ত প্রক্রিয়াগুলোর ক্ষেত্রে কোনো একসম উপাদান নেই

$$- : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ এবং } \div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$$

সমাধান $a + 0 = 0 + a = a$ এবং $a \times 1 = a = 1 \times a, \ \forall a \in \mathbf{R}$ বোঝায় যে '+' এবং '×'প্রক্রিয়ার জন্য 0 এবং 1 হল একসম উপাদান। তাছাড়া **R** সেটে এমন কোনো পদ নেই যাতে $a - e = e - a$, $\forall a$ । অনুরূপে আমরা এমন কোন পদ e নির্ণয় করতে পারি না যার জন্য $a \div e = e \div a, \ \forall a \in \mathbf{R}_*$ অতএব '–' এবং '÷' এর একসম উপাদান নেই।

মন্তব্য শূন্য হল **R** এর উপর যোগ প্রক্রিয়ার জন্য একসম উপাদান কিন্তু এটি **N** এর উপর যোগ প্রক্রিয়ার জন্য একসম উপাদান নয়, যেহেতু $0 \notin \mathbf{N}$ । প্রকৃতপক্ষে, **N** এর উপর যোগ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে কোনো একসম উপাদান নেই।

তাছাড়া লক্ষনীয় যে, প্রদত্ত যে-কোনো $a \in \mathbf{R}$ এর জন্য যোগ প্রক্রিয়া $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এর ক্ষেত্রে, **R** সেটের $-a$ এর অস্তিত্ব থাকে এরূপে যে $a + (-a) = 0$ ('+' এর জন্য একসম উপাদান) $= (-a) + a$। অনুরূপে **R** সেটে প্রদত্ত কোনো $a \neq 0$ এর জন্য, গুণ প্রক্রিয়ায় আমরা **R** সেটের $\frac{1}{a}$ নিতে পারি যাতে $a \times \frac{1}{a} = 1$('×' এরজন্য একসম উপাদান) $= \frac{1}{a} \times a$ । এথেকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যায় :

সংজ্ঞা 14 A সেটের একসম উপাদান e হলে, প্রদত্ত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : A \times A \to A$ এর জন্য একটি পদ $a \in A$ কে $*$ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে *বিপরীতকরণযোগ্য (invertible)* বলা হয়, যদি A এর একটি পদ b এর অস্তিত্ব থাকে যাতে $a * b = e = b * a$ হয় এবং b কে বলা হয় a এর *বিপরীত (inverse)* পদ যাকে a^{-1} দ্বারা সূচিত করা হয় ।

উদাহরণ 39 দেখাও যে **R** এর উপর যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে a এর বিপরীত $-a$ এবং **R** এর উপর গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে $a \neq 0$ এর বিপরীত $\frac{1}{a}$ ।

সমাধান যেহেতু $a + (-a) = a - a = 0$ এবং $(-a) + a = 0$, $-a$ হল যোগের ক্ষেত্রে a এর বিপরীত। অনুরূপে, $a \neq 0$, $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ বোঝায় যে $\frac{1}{a}$ হল গুণের ক্ষেত্রে a এর বিপরীত।

উদাহরণ 40 দেখাও যে **N** এর উপর যোগ প্রক্রিয়া + এর সাপেক্ষে $a \in \mathbf{N}$ এর বিপরীত $-a$ হয় না এবং $a \neq 1$ এর জন্য **N** এর উপর গুণ প্রক্রিয়া × এর সাপেক্ষে $a \in \mathbf{N}$ এর বিপরীত $\frac{1}{a}$ হয় না।

সমাধান যেহেতু $-a \notin \mathbf{N}$, $-a$ যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে a এর বিপরীত হতে পারে না, যদিও a দ্বারা $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ সিদ্ধ হয়।

অনুরূপে **N** এর $a \neq 1$ এর জন্য, $\frac{1}{a} \notin \mathbf{N}$, যা বোঝায় 1 ছাড়া **N** এর কোনো পদের **N** এর উপর গুণ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিপরীত নেই।

উদাহরণ 34, 36, 38 এবং 39 এ দেখাও যে **R** এর উপর যোগ প্রক্রিয়া বিনিময়যোগ্য এবং সংযোজ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া, যার 0 হল একসম উপাদান এবং $-a$ হল a বিপরীত $\forall\, a \in \mathbf{R}$

অনুশীলনী 1.4

1. নীচে প্রদত্ত প্রতিটি সংজ্ঞাত $*$ প্রক্রিয়া একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হয় কিনা নির্ণয় করো। যেসব ক্ষেত্রে $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়, সেক্ষেত্রে যুক্তি দাও।
   (i) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর $*$ প্রক্রিয়া $a * b = a - b$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (ii) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর $*$ প্রক্রিয়া $a * b = ab$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (iii) **R** এর উপর $*$, $a * b = ab^2$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (iv) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর $*$, $a * b = |a - b|$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (v) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর $*$, $a * b = a$ দ্বারা সংজ্ঞাত
2. নীচের প্রতিটি ক্ষেত্রে সংজ্ঞায়িত $*$ প্রক্রিয়া দ্বিপদ, বিনিময়যোগ্য অথবা সংযোজ্য কিনা নির্ণয় করো ।
   (i) **Z** এর উপর, $a * b = a - b$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (ii) **Q** এর উপর, $a * b = ab + 1$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (iii) **Q** এর উপর, $a * b = \frac{ab}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (iv) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর, $a * b = 2^{ab}$ দ্বারা সংজ্ঞাত
   (v) $\mathbf{Z}^+$ এর উপর, $a * b = a^b$ দ্বারা সংজ্ঞাত

(vi) $\mathbf{R} - \{-1\}$ এর উপর, $a * b = \frac{a}{b+1}$ দ্বারা সংজ্ঞাত

3. ধরো $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ সেটের উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া $\wedge$, $a \wedge b =$ ক্ষুদ্রতর (min) $\{a, b\}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। $\wedge$ প্রক্রিয়াটির প্রক্রিয়া সারণি লেখো।

4. মনে করো $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ সেটের উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ নিম্নলিখিত প্রক্রিয়া সারণিতে (সারণি 1.2) প্রদত্ত হল।

(i) $(2 * 3) * 4$ এবং $2 * (3 * 4)$ গণনা করো।

(ii) $*$ বিনিময়যোগ্য কি ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ গণনা করো

(ইঙ্গিত: নীচের সারণি ব্যবহার করো)

সারণি 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5. ধরো $\{1,2,3,4,5\}$ সেটের উপর $*'$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া সংজ্ঞাত হয় $a *' b = a$ ও b এর গসাগু। উপরের সমস্যা 4 এ সংজ্ঞাত $*$ প্রক্রিয়ার সাথে $*'$ প্রক্রিয়া একই হবে কি? তোমার উত্তরে যথার্থতা বিচার করো।

6. ধরো $\mathbf{N}$ এর উপর $*$ দ্বিপদ প্রক্রিয়া $a * b = a$ ও b এর ল. সা. গু দ্বারা সংজ্ঞাত হয়। তবে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলো নির্ণয় করো।

(i) $5 * 7$, $20 * 16$

(ii) $*$ বিনিময়যোগ্য কিনা ?

(iii) $*$ সংযোজ্য কিনা ?

(iv) $\mathbf{N}$ সেটে $*$ এর একসম উপাদান।

(v) $*$ প্রক্রিয়ার জন্য $\mathbf{N}$ এর কোন পদগুলো বিনিময়যোগ্য ?

7. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ সেটের উপর $*$ প্রক্রিয়া $a * b = a$ ও b এর ল.সা.গু দ্বারা সংজ্ঞাত হলে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হবে কি ? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

8. ধরো $*$ হল $\mathbf{N}$ এর উপর $a * b = a$ ও b এর গ. সা. গু দ্বারা সংজ্ঞাত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। $*$ কি বিনিময়যোগ্য হয় ? $*$ কি সংযোজ্য হয়? $\mathbf{N}$ এর উপর এই দ্বিপদ প্রক্রিয়ায় একসম উপাদানের অস্তিত্ব আছে কি ?

9. মূলদ সংখ্যার সেট **Q** এর উপর $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া নিম্নরূপ :

(i) $a * b = a - b$ (ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$ (iv) $a * b = (a - b)^2$

(v) $a * b = \dfrac{ab}{4}$ (vi) $a * b = ab^2$

দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলোর কোনটি বিনিময়যোগ্য এবং কোনটি সংযোজ্য, তা নির্ণয় করো।

10. উপরোক্ত প্রক্রিয়াগুলোর কোনটিতে একসম উপাদান আছে নির্ণয় করো।

11. ধরো $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ এবং A এর উপর $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া,

$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়।

দেখাও যে $*$ বিনিময়যোগ্য এবং সংযোজ্য হয়। যদি অস্তিত্ব থাকে, A এর উপর $*$ এর একসম উপাদান নির্ণয় করো।

12. নীচের উক্তিগুলো সত্য না মিথ্যা বলো। যুক্তি দাও ।

(i) **N** সেটের উপর যে-কোনো দ্বিপদ প্রক্রিয়ার জন্য $a * a = a \ \forall a \in \mathbf{N}$.

(ii) যদি $*$ একটি **N** এর উপর একটি বিনিময়যোগ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া হয়, তবে

$a * (b * c) = (c * b) * a$

13. ধরো **N** এর উপর $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $a * b = a^3 + b^3$ দ্বারা সংজ্ঞাত। সঠিক উত্তরটি বেছে নাও।

(A) $*$ সংযোজ্য এবং বিনিময়যোগ্য উভয়ই হয় ।

(B) $*$ বিনিময়যোগ্য কিন্তু সংযোজ্য নয় ।

(C) $*$ সংযোজ্য কিন্তু বিনিময়যোগ্য নয় ।

(D) $*$ বিনিময়যোগ্য নতুবা সংযোজ্য কোনোটি নয় ।

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 41 যদি R_1 এবং R_2, A সেটে সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়, তবে দেখাও যে $R_1 \cap R_2$ ও একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান যেহেতু R_1 এবং R_2 সমতুল্যতা সম্বন্ধ, $(a, a) \in R_1$ এবং $(a, a) \in R_2 \ \forall a \in A$ ।এটি বোঝায় যে $(a, a) \in R_1 \cap R_2, \ \forall a$ যা প্রমাণ করে $R_1 \cap R_2$ স্বসম। আবার, $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ এবং $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ এবং $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$ অতএব $R_1 \cap R_2$ প্রতিসম। অনুরূপে, $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ এবং $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ এবং $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$ । যা প্রমাণ করে যে $R_1 \cap R_2$ সংক্রমণ। অতএব, $R_1 \cap R_2$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহরণ 42 ধরো অখন্ড ধনাত্মক ক্রমযুগলের সেট A এর উপর R একটি সম্বন্ধ (x, y) R (u, v) দ্বারা সংজ্ঞাত হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি $xv = yu$ হয়। দেখাও যে R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান স্পষ্টতই, (x, y) R (x, y), $\forall (x, y) \in$ A, যেহেতু $xy = yx$ হয়। এটি প্রমাণ করে যে R স্বসম। আবার, (x, y) R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ এবং তাই (u, v) R (x, y) । এটি প্রমাণ করে যে R প্রতিসম। অনুরূপে, (x, y) R (u, v) এবং (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ এবং $ub = va \Rightarrow$ $xv \frac{a}{u} = yu \frac{a}{u} \Rightarrow xv \frac{b}{v} = yu \frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ এবং তাই (x, y) R (a, b) । এভাবে R সংক্রমণ হয়। অতএব, R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহরণ 43 ধরো X = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$। ধরো X এ R_1 একটি সম্বন্ধ সংজ্ঞাত হয়, $R_1 = \{(x, y) : x - y$, 3 দ্বারা বিভাজ্য$\}$ এবং X এর উপর R_2 অপর একটি সম্বন্ধ সংজ্ঞাত হয় $R_2 = \{(x, y)$: $\{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}\}$। দেখাও যে $R_1 = R_2$ ।

সমাধান লক্ষ করো $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ এবং $\{3, 6, 9\}$ সেটগুলোর বৈশিষ্ট্য হল এই সেটগুলোর যে-কোনো দুটি পদের পার্থক্য 3 এর একটি গুণিতক হয়। অতএব, $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x - y$ হল 3 এর একটি গুণিতক $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$ । সুতরাং $R_1 \subset R_2$ । অনুরূপে $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ অথবা $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$, 3 দ্বারা বিভাজ্য $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$ । এটি প্রমাণ করে যে $R_2 \subset R_1$ । অতএব $R_1 = R_2$ ।

উদাহরণ 44 ধরো $f : X \rightarrow Y$ একটি অপেক্ষক। X সেটে R একটি সম্বন্ধ R = $\{(a, b): f(a) = f(b)\}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়। R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় কিনা পরীক্ষা করো।

সমাধান প্রতিটি $a \in$ X এর জন্য, $(a, a) \in$ R যেহেতু $f(a) = f(a)$, যা থেকে প্রমাণিত হয় R স্বসম। অনুরূপে, $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in$ R । অতএব, R হল প্রতিসম। তাছাড়া, $(a, b) \in$ R এবং $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ এবং $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in$ R যা বোঝায় যে R সংক্রমণ। অতএব, R একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহরণ 45 R এর উপর নীচের দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলোর কোনটি সংযোজ্য এবং কোনটি বিনিময়যোগ্যতা নির্ণয় করো।

(a) $a * b = 1 \;\forall\; a, b \in$ R

(b) $a * b = \frac{(a+b)}{2} \;\forall\; a, b \in$ R

সমাধান

(a) স্পষ্টতই, সংজ্ঞানুযায়ী $a * b = b * a = 1, \forall a, b \in R$ । তাছাড়া, $(a * b) * c = (1 * c) = 1$ এবং $a * (b * c) = a * (1) = 1, \forall a, b, c \in R$ । সুতরাং R সংযোজ্য এবং বিনিময়যোগ্য উভয়ই হয়।

(b) $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$, প্রমাণ করো যে * বিনিময়যোগ্য। উপরন্তু,

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c.$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}.$$

কিন্তু

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} \neq \frac{a+b+2c}{4}$$

অতএব, * সংযোজ্য নয়।

উদাহরণ 46 A = {1, 2, 3} সেট থেকে A সেটে সকল এক-এক অপেক্ষকগুলোর সংখ্যা নির্ণয় করো।

সমাধান {1, 2, 3} সেট থেকে ওর নিজের উপর এক-এক অপেক্ষক হল শুধুমাত্র 1, 2, 3 প্রতীকগুলোর একটি বিন্যাস। সুতরাং {1, 2, 3} সেট থেকে ওর নিজের উপর এক-এক চিত্রণের সংখ্যা 1, 2, 3 প্রতীকগুলোর মোট বিন্যাস সংখ্যার সমান যা হল 3! = 6 ।

উদাহরণ 47 ধরো A = {1, 2, 3}। তবে দেখাও যে (1, 2) এবং (2, 3) যুক্ত সম্বন্ধগুলোর সংখ্যা হল তিন যারা স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়।

সমাধান (1, 2) এবং (2, 3) যুক্ত সবচেয়ে ক্ষুদ্রতম সম্বন্ধ R_1 যা স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়। তা হল {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)} ।এখন, যদি আমরা R_1 এর সাথে (2, 1) যুক্ত করে R_2 পাই। তবে R_2 সম্বন্ধটি স্বসম, সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়। অনুরূপে, R_1 এর সাথে (3, 2) যুক্ত করে আমরা অভীষ্ট সম্বন্ধ R_3 পেতে পারি। যাহোক R_1 এর সাথে দুটি জোড় (2, 1), (3, 2) অথবা একটি জোড় (3, 1) যুক্ত করতে পারি না। যেহেতু এমনটি করা হলে, সংক্রমণতা বজায় রাখার জন্য আমরা অবশিষ্ট জোড়গুলোকে যুক্ত করতে বাধ্য হব এবং এক্ষেত্রে সম্বন্ধটি প্রতিসমও হবে যা অভীষ্ট নয়। সুতরাং, মোট অভীষ্ট সম্বন্ধের সংখ্যা হল তিন।

উদাহরণ 48 দেখাও যে $\{1, 2, 3\}$ সেটে $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ যুক্ত সমতুল্যতা সম্বন্ধের সংখ্যা হল দুই।

সমাধান $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ যুক্ত সবচেয়ে ক্ষুদ্রতম সমতুল্যতা সম্বন্ধ R_1 হল $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$। এখন আমাদের কাছে শুধু 4টি জোড় অর্থাৎ $(2, 3), (3, 2), (1, 3)$ এবং $(3, 1)$ জোড়গুলো বাকি আছে। যদি আমরা এদের যে-কোনোটিকে, ধরো $(2, 3)$ কে R_1 এর সাথে যুক্ত করি, তবে প্রতিসম করার জন্য আমাদের $(3, 2)$ অবশ্যই যুক্ত করতে হবে। তাছাড়া সংক্রমণতার প্রয়োজনে আমরা $(1, 3)$ এবং $(3, 1)$ যুক্ত করতে বাধ্য হব। অতএব R_1 এর চেয়ে একমাত্র বৃহত্তর সমতুল্যতা সম্বন্ধটি হল সার্বিক সম্বন্ধ (universal relation)। এটি প্রমাণ করে যে, $(1, 2)$ এবং $(2, 1)$ সমন্বিত মোট সমতুল্যতা সম্বন্ধের সংখ্যা হল 2।

উদাহরণ 49 দেখাও যে $\{1, 2\}$এর উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়া যার একসম উপাদান 1 এবং 2 এর বিপরীত 2 হবে এমন দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংখ্যা ঠিক একটি ।

সমাধান $\{1, 2\}$ এর উপর $*$ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হল $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ থেকে $\{1, 2\}$ এ একটি অপেক্ষক, অর্থাৎ$\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \to \{1, 2\}$ একটি অপেক্ষক। যেহেতু 1 হল অভীষ্ট দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ এর জন্য একসম উপাদান, তাই $*\,(1, 1) = 1$, $*\,(1, 2) = 2$, $*\,(2, 1) = 2$ এবং কেবল $(2, 2)$ জোড়টি বাছাই করতে বাকী রইল। যেহেতু 2 এর বিপরীত হল 2 অর্থাৎ $*\,(2, 2)$ অবশ্যই 1 এর সমান। সুতরাং, অভীষ্ট দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংখ্যা কেবল একটি।

উদাহরণ 50 ধরো একসম অপেক্ষক $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ সংজ্ঞাত হয় $I_N(x) = x \ \forall x \in \mathbf{N}$, দেখাও যে, I_N যদিও উপরিচিত্রণ কিন্তু $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ সংজ্ঞাত হলে

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x \text{ উপরিচিত্রণ নয়।}$$

সমাধান স্পষ্টতই I_N উপরিচিত্রণ। কিন্তু $I_N + I_N$ উপরিচিত্রণ নয়, যেহেতু উপক্ষেত্র $\mathbf{N}$ এ আমরা একটি পদ 3 পাই যার জন্য ক্ষেত্র $\mathbf{N}$ এ কোন x এর অস্তিত্ব নেই যেখানে $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ ।

উদাহরণ 51 মনে করো একটি $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ সংজ্ঞাত হয় যখন $f(x) = \sin x$ এবং $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ সংজ্ঞাত হয় যখন, $g(x) = \cos x$ । দেখাও যে f এবং g এক-এক হয়, কিন্তু $f + g$ এক-এক নয়।

সমাধান যেহেতু $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ এর দুটি ভিন্ন উপাদান x_1 এবং x_2 এর জন্য, $\sin x_1 \neq \sin x_2$ এবং $\cos x_1 \neq \cos x_2$, f এবং g উভয়েই অবশ্যই এক-এক হয়। কিন্তু $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ এবং $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ । অতএব, $f + g$ এক-এক নয়।

অধ্যায় 1 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. ধরো $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ সংজ্ঞাত হয়, $f(x) = 10x + 7$। $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ অপেক্ষকটি নির্ণয় করো যাতে $g \text{ o } f = f \text{ o } g = 1_{\mathbf{R}}$ হয়।

2. ধরো $f : W \to W$ সংজ্ঞাত হয়, $f(n) = n - 1$ যদি n অযুগ্ম হয় এবং $f(n) = n + 1$ যদি n যুগ্ম হয়। দেখাও যে f বিপরীতকরণযোগ্য। f এর বিপরীত নির্ণয় করো। এখানে, W হল সকল সমগ্র সংখ্যার সেট।

3. যদি $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ অপেক্ষকটি $f(x) = x^2 - 3x + 2$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়, তবে $f(f(x))$ নির্ণয় করো।

4. দেখাও যে $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ যেখানে $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}, x \in \mathbf{R}$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে, অপেক্ষকটি এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হয়।

5. দেখাও যে $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ অপেক্ষকটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে ইনজেকটিভ (একৈক) হয়।

6. দুটি অপেক্ষক $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ এবং $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ এর উদাহরণ দাও যাতে $g \text{ o } f$ ইনজেকটিভ হয়। কিন্তু g ইনজেকটিভ হয় না।

   (ইঙ্গিত : $f(x) = x$ এবং $g(x) = |x|$ ধরো)।

7. দুটি অপেক্ষক $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ এবং $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ এর উদাহরণ দাও যাতে $g \text{ o } f$ উপরিচিত্রণ হয় কিন্তু f উপরিচিত্রণ হয় না।

   (ইঙ্গিত : ধরো $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = \begin{cases} x-1, \text{যদি } x > 1 \\ 1, \text{ যদি } x = 1 \end{cases}$

8. প্রদত্ত একটি অশূন্য সেট X এর ক্ষেত্রে, মনে করো P(X) হল X এর সব উপসেটসমূহের সেট। P(X) এ R সম্বন্ধটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয় :

   P(X) এর দুটি উপসেট A ও B এর জন্য, ARB হয় যদি কেবলমাত্র যদি $A \subset B$ হয়। P(X) এর উপর R কি সমতুল্যতা সম্বন্ধ ? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

9. প্রদত্ত একটি অশূন্য সেট X এর ক্ষেত্রে, মনে করো একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ যা $A * B = A \cap B \ \forall A, B \in P(X)$ দ্বারা সংজ্ঞাত যেখানে P(X) হল X এর ঘাত সেট। দেখাও যে X হল এই প্রক্রিয়ার জন্য একসম উপাদান এবং $*$ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে X হলে একমাত্র বিপরীতকরণযোগ্য পদ।

10. $\{1, 2, 3, ... , n\}$ সেট থেকে তার নিজের উপর সকল উপরিচিত্রণ সমূহের সংখ্যা নির্ণয় করো।

11. ধরো $S = \{a, b, c\}$ এবং $T = \{1, 2, 3\}$। যদি অস্তিত্ব থাকে, তবে S থেকে T এর জন্য নিম্নলিখিত F অপেক্ষকের F^{-1} নির্ণয় করো।

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

12. মনে করো দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ এবং $o : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ সংজ্ঞাত হয় $a * b = |a - b|$ এবং $a \text{ o } b = a, \forall a, b \in \mathbf{R}$ । দেখাও যে $*$ বিনিময়যোগ্য কিন্তু সংযোজ্য নয়, o সংযোজ্য কিন্তু বিনিময়যোগ্য নয়। তাছাড়া, দেখাও যে, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$, $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * c)$. [যদি তা হয়, তবে আমরা বলতে পারি $*$ প্রক্রিয়াটি o প্রক্রিয়ার উপর বন্টন যোগ্য হয়] । o প্রক্রিয়া $*$ প্রক্রিয়ার উপর বন্টনযোগ্য কি ? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

13. প্রদত্ত একটি অশূন্য X সেটে, ধরো $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ সংজ্ঞাত হয় $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ । দেখাও যে শূন্য সেট ϕ হল $*$ প্রক্রিয়ার জন্য একসম উপাদান এবং $P(X)$ এর সকল পদ A বিপরীতকরণযোগ্য $A^{-1} = A$ সহযোগে হয়। (ইঙ্গিত : $(A - \phi) \cup (\phi - A) = A$ এবং $(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi$) ।

14. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ সেটের উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ নিম্নলিখিত রূপে সংজ্ঞায়িত হয়

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{যদি} \quad a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{যদি} \quad a + b \geq 6 \end{cases}$$

দেখাও যে শূন্য হল এই প্রক্রিয়ায় একসম উপাদান এবং এই সেটের প্রতিটি পদ $a \neq 0$ এর জন্য $6 - a$ হল a এর বিপরীত।

15. ধরো $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ এবং $f, g : A \to B$ অপেক্ষকসমূহ $f(x) = x^2 - x, x \in A$ এবং $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1, x \in A$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়। তবে কি f এবং g সমান? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও। (ইঙ্গিত: লক্ষনীয় যে দুটি অপেক্ষক $f : A \to B$ এবং $g : A \to B$ যেখানে $f(a) = g(a) \ \forall a \in A$, হলে অপেক্ষকগুলো সমান হয়) ।

16. ধরো $A = \{1, 2, 3\}$ । তাহলে $(1, 2)$ এবং $(1, 3)$ যুক্ত সম্বন্ধগুলো যারা স্বসম এবং প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণ নয়। এরূপ সম্বন্ধের সংখ্যা হবে :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. ধরো $A = \{1, 2, 3\}$ । তাহলে $(1, 2)$ যুক্ত সমতুল্যতা সম্বন্ধের সংখ্যা হল

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. ধরো $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ হল সিগনাম অপেক্ষক (Signum Function) যা সংজ্ঞাত হয়

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

এবং $g : R \to R$ হল বৃহত্তম অখণ্ড অপেক্ষক $g(x) = [x]$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়, যেখানে $[x]$ হল

বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা যা x এর ছোটো বা সমান। তাহলে fog এবং gof কি $(0, 1]$ এ সমাপতিত হয়?

19. $\{a, b\}$ সেটের উপর দ্বিপদ প্রক্রিয়াগুলোর সংখ্যা হল

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে, আমরা বিভিন্ন প্রকার সম্বন্ধ এবং সমতুল্যতা সম্বন্ধ, অপেক্ষকে সংযোজন, বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক এবং দ্বিপদ প্রক্রিয়া সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছি। এ অধ্যায়ের মুখ্য বিষয়গুলো নীচে দেওয়া হল :

- X সেটে $R = \phi \subset X \times X$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে R সম্বন্ধটি *শূন্য সম্বন্ধ* হয়।
- X সেটে $R = X \times X$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে R সম্বন্ধটি *সার্বিক সম্বন্ধ হয়।*
- X সেটে সম্বন্ধটির জন্য $(a, a) \in R \ \forall a \in X$ হলে R *স্বসম সম্বন্ধ* হয়।
- X সেটে R সম্বন্ধটির জন্য $(a, b) \in R$ হলে $(b, a) \in R$ হয়, তবে R *প্রতিসম সম্বন্ধ* হয়।
- X সেটে R সম্বন্ধটির জন্য $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ হলে যদি $(a, c) \in R$ হয়, তবে R *সংক্রমণ সম্বন্ধ* হয়।
- X সেটে R সম্বন্ধটি স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ হলে R *সমতুল্যতা সম্বন্ধ* হয়।
- X সেটে R সম্বন্ধটির জন্য $a \in X$ এর সমতুল্যতা শ্রেণি $[a]$ হল X এর সেসব উপসেটগুলো যারা a এর সাথে সম্বন্ধযুক্ত থাকে।
- একটি অপেক্ষক $f : X \rightarrow Y$ *এক-এক (অথবা ইনজেকটিভ)* হবে যদি $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall \ x_1, x_2 \in X$ হয়।
- একটি অপেক্ষক $f : X \rightarrow Y$ *উপরিচিত্রণ (বা সারজেকটিভ)* হবে যদি প্রদত্ত কোনো $y \in Y, \exists \ x \in X$ এরূপ যে $f(x) = y$ হয়।
- একটি অপেক্ষক $f : X \rightarrow Y$ *এক-এক এবং উপরিচিত্রণ (অথবা বাইজেকটিভ)* হবে যদি f এক-এক এবং উপরিচিত্রণ উভয়ই হয়।
- $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ অপেক্ষকগুলোর *সংযোজন* হল অপেক্ষক $gof : A \rightarrow C$ যা $gof(x) = g(f(x)) \ \forall \ x \in A$ দ্বারা সংজ্ঞাত।
- একটি অপেক্ষক $f : X \rightarrow Y$ *বিপরীতকরণযোগ্য* হবে যদি $\exists \ g : Y \rightarrow X$ এরূপ যে $gof = I_X$ এবং $fog = I_Y$ হয়।
- একটি অপেক্ষক $f : X \rightarrow Y$ *বিপরীতকরণযোগ্য* হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি f এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হয়।

- প্রদত্ত একটি সসীম X সেটে, একটি অপেক্ষক $f: X \rightarrow X$ এক-এক (যথাক্রমে উপরিচিত্রণ) হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি f উপরিচিত্রণ (যথাক্রমে এক-এক) হয়। এটি একটি সসীম সেটের বৈশিষ্ট্যগত ধর্ম। এটি অসীম সেটের ক্ষেত্রে সত্য হয় না।
- A সেটের উপর একটি ***দ্বিপদ প্রক্রিয়া*** * হল A × A থেকে A এর একটি অপেক্ষক।
- দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : X \times X \rightarrow X$ এর জন্য একটি পদ $e \in X$ ***একসম*** হবে যদি $a * e = a = e * a \ \forall a \in X$ হয়।
- দ্বিপদ প্রক্রিয়া $* : X \times X \rightarrow X$ এর জন্য একটি পদ $a \in X$ *বিপরীতকরণযোগ্য* হবে, যদি $b \in X$ এর অস্তিত্ব থাকে যাতে $a * b = e = b * a$ হয়, যেখানে দ্বিপদ প্রক্রিয়া * এর জন্য e একসম উপাদান। b পদটিকে a এর *বিপরীত* বলা হয় এবং a^{-1} দ্বারা সূচিত হয়।
- X এর উপর একটি প্রক্রিয়া * *বিনিময়যোগ্য* হবে যদি $a * b = b * a \ \forall a, b \in X$ হয়।
- X এর উপর একটি প্রক্রিয়া * *সংযোজ্য* হবে যদি $(a * b) * c = a * (b * c) \forall a, b, c \in X$ হয়।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

অপেক্ষকের ধারণা R. Descartes (1596-1650 খৃষ্টাব্দ) এর সময়কাল থেকে শুরু করে দীর্ঘ সময় অন্তরাল ধরে বিকশিত হয়। 1637 সালে Descartes, ওনার রচিত পাণ্ডুলিপি "*Geometrie*"-তে জ্যামিতিক বক্র যেমন পরাবৃত্ত, অধিবৃত্ত এবং উপবৃত্ত, এদের অধ্যয়ন করতে একটি চলরাশি x এর অখণ্ড ধনাত্মক ঘাত x^n এর মাধ্যমে অপেক্ষকের প্রয়োগ করেছিলেন। James Gregory (1636-1675খৃষ্টাব্দ) ওনার কাজ " *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*" এর মধ্যে 1667 সালে অপেক্ষককে এমন একটি রাশি হিসেবে বিবেচনা করেন যা অপর কোনো রাশি থেকে উত্তরোত্তর বীজগাণিতিক বা অন্য কোনো প্রক্রিয়ার মাধ্যমে পাওয়া যায়। পরবর্তীকালে 1673 খৃষ্টাব্দে G. W. Leibnitz (1646-1716) ওনার "*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*" পাণ্ডুলিপিতে 'অপেক্ষক' শব্দটিকে এমন কোনো একটি রাশি হিসেবে প্রয়োগ করেন যা কোনো বক্রের একটি বিন্দু থেকে অপর বিন্দুতে স্থানাঙ্কের পরিবর্তনের সময়, বক্রের নতি, বক্রের একটি বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের পরিবর্তনকে বোঝায়। যাহোক Leibnitz তাঁর "*Historia*" (1714 খৃষ্টাব্দ) পাণ্ডুলিপিতে 'অপেক্ষক' শব্দটিকে একটি চলের অধীন রাশি হিসেবে প্রয়োগ করেন। তিনি সর্বপ্রথম 'function of x' শব্দগুচ্ছটি প্রয়োগ করেন। John Bernoulli (1667-1748) প্রথম 1718 খৃষ্টাব্দে ϕx সংকেতটি x এর অপেক্ষক রূপে ব্যবহার করেন। কিন্তু অপেক্ষক নিরূপণে সংকেতগুলো যেমন f, F, ϕ, ψ ... এর ব্যাপক প্রয়োগ 1734 খৃষ্টাব্দে Leonhard Euler (1707-1783) তাঁর পাণ্ডুলিপি "*Analysis Infinitorium*" এর প্রথম খণ্ডে করেছিলেন। পরবর্তীকালে, Joeph Louis Lagrange (1736-1813) তাঁর প্রকাশিত পুস্তিকায় "*Theorie des functions analytiques*" in 1793 খৃষ্টাব্দে বিশ্লেষিত অপেক্ষকের আলোচনায় x- এর বিভিন্ন অপেক্ষকরূপে $f(x)$, F(x), $\phi(x)$ ইত্যাদি ব্যবহার করেন। Georg Cantor (1845-1918) কর্তৃক সেটতত্ত্ব বিকাশের পর Lejeunne Dirichlet (1805-1859) অপেক্ষককে সংজ্ঞায়িত করেন, যা বর্তমানে অপেক্ষকের সেটতত্ত্বগত সংজ্ঞা হিসেবে ব্যবহৃত হয়। বর্তমানে সেটতত্ত্বগত অপেক্ষকের সংজ্ঞা হল শুধুমাত্র Dirichlet প্রদত্ত সংজ্ঞার যথাযথ বিমূর্তায়ন (abstraction) ।

অধ্যায় 2

ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহ
Inverse Trigonometric Functions

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things.* — *FELIX KLEIN* ❖

2.1 ভূমিকা

প্রথম অধ্যায়ে আমরা অধ্যয়ন করেছি, f^{-1} দিয়ে সূচিত f অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব তখনই থাকে যখন f একটি এক-এক বা ঐকৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়। এরূপ অনেক অপেক্ষক রয়েছে যারা ঐকৈক চিত্রণ, উপরিচিত্রণ বা এই দুটির কোনোটিই নয় এবং এজন্য আমরা তাদের বিপরীত অপেক্ষক বলতে পারি না। একাদশ শ্রেণিতে আমরা অধ্যয়ন করেছি যে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলো তাদের স্বাভাবিক ক্ষেত্র ও প্রসারে ঐকৈক চিত্রণ এবং উপরিচিত্রণ হয় না এবং এজন্য তাদের বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব নেই। এ অধ্যায়ে আমরা ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের ক্ষেত্র ও প্রসারের সীমাবদ্ধতা নিয়ে অধ্যয়ন করব, যা তাদের বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্বকে নিশ্চিত করে এবং লৈখিক উপস্থাপনের মাধ্যমে তাদের আচরণ পর্যবেক্ষণ করব। পাশাপাশি বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের কিছু প্রাথমিক ধর্মাবলি নিয়েও আলোচনা করব।

আর্যভট্ট
(476-550 A. D.)

ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক, কলনবিদ্যায় একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে, কেননা এর সহায়তায় অনেক সমাকলন সংজ্ঞায়িত হয়। ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ধারণা বিজ্ঞান এবং প্রকৌশলবিদ্যার (engineering) ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা হয়।

2.2 প্রাথমিক ধারণা (Basic Concepts)

একাদশ শ্রেণিতে আমরা ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ নিয়ে অধ্যয়ন করেছি যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত :

সাইন (sine) অপেক্ষক, অর্থাৎ, $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

কোসাইন (cosine) অপেক্ষক, অর্থাৎ $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

ট্যানজ্যান্ট (tangent) অপেক্ষক, অর্থাৎ $\tan : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

কোট্যানজ্যান্ট (cotangent) অপেক্ষক, অর্থাৎ $\cot : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

সেক্যান্ট (secant) অপেক্ষক, অর্থাৎ $\sec : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1,1)$

কোসেক্যান্ট (cosecant) অপেক্ষক অর্থাৎ, $\text{cosec} : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1,1)$

আমরা প্রথম অধ্যায়ে আরও শিখেছি যে যদি $f: X \rightarrow Y$ এরূপ যে $f(x) = y$ একটি এককৈক ও উপরিচিত্রণ হয় তবে আমরা একটি অনন্য অপেক্ষক $g: Y \rightarrow X$ এরূপে সংজ্ঞায়িত করতে পারি যে, $g(y) = x$, যেখানে $x \in X$ এবং $y = f(x), y \in Y$ হয়। এখানে g এর ক্ষেত্র (domain) = f এর প্রসার (range) এবং g এর প্রসার = f এর ক্ষেত্র। g অপেক্ষককে বলা হয় f এর বিপরীত অপেক্ষক এবং এটি f^{-1} দিয়ে প্রকাশ করা হয়। আবার g অপেক্ষকও এককৈক ও উপরিচিত্রণ এবং g এর বিপরীত অপেক্ষক f। অতএব, $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$; আমরা আরও পাই

$$(f^{-1} \text{ o } f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

এবং $$(f \text{ o } f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

যেহেতু সাইন অপেক্ষকের ক্ষেত্র হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং প্রসার হল বদ্ধ অন্তর $[-1, 1]$। যদি আমরা এর ক্ষেত্রটিকে $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ তে সীমাবদ্ধ করি, তবে এটি প্রসার $[-1, 1]$ তে এককৈক ও উপরিচিত্রণে পরিণত হয়। বস্তুত, সাইন (sine) অপেক্ষকটি $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ইত্যাদি অন্তরালের যে কোনোটিতে সীমাবদ্ধ হলে এটি এককৈক এবং উপরিচিত্রণ হয় এবং এর প্রসার হয় $[-1,1]$। অতএব, আমরা এই অন্তরালসমূহের প্রতিটিতে সাইন অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত করতে পারি। আমরা সাইন অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষককে $\sin^{-1}$ (arc sine function) দিয়ে চিহ্নিত করি। অতএব, $\sin^{-1}$ হল একটি অপেক্ষক যার ক্ষেত্র $[-1, 1]$ এবং প্রসার হল $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ অথবা $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, ইত্যাদি অন্তরালসমূহের যেকোনোটি। এই প্রকারের প্রত্যেক অন্তরালের অনুরূপে আমরা $\sin^{-1}$ অপেক্ষকের একটি শাখা (branch) পাব। যে শাখার প্রসার $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ তাকে বলা হয় *মুখ্য মান শাখা (Principal value branch) অপরপক্ষে প্রসার রূপে অন্য অন্তরালসমূহের $\sin^{-1}$ এর ভিন্ন ভিন্ন শাখা পাওয়া যায়।* যখন আমরা $\sin^{-1}$ অপেক্ষকটি উল্লেখ করব, তখন আমরা এটিকে একটি অপেক্ষক হিসেবে ধরব যার ক্ষেত্র $[-1, 1]$ এবং প্রসার হল $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$। আমরা লিখব, $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

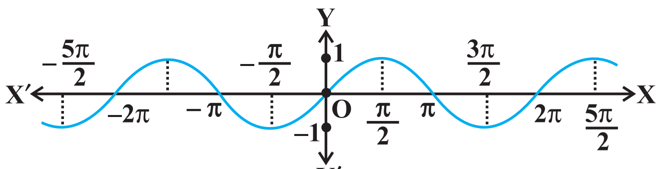
বিপরীত অপেক্ষকের সংজ্ঞা থেকে এটি পাওয়া যায় যে, $\sin(\sin^{-1} x) = x$ যদি $-1 \le x \le 1$ হয় এবং $\sin^{-1}(\sin x) = x$ যদি $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ হয়। অন্যথায়, যদি $y = \sin^{-1} x$ হয় তবে $\sin y = x$।

মন্তব্য

(i) অধ্যায় 1, থেকে আমরা জেনেছি যে যদি $y = f(x)$ একটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে $x = f^{-1}(y)$ হয়। অতএব মূল অপেক্ষকের লেখচিত্রের x এবং y অক্ষের পরিবর্তন করে আমরা $\sin^{-1}$ অপেক্ষকের লেখচিত্র পেতে পারি, অর্থাৎ যদি সাইন অপেক্ষকের উপর (a, b) একটি বিন্দু হয়, তবে সাইন অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষকের উপর অনুরূপ বিন্দুটি হবে (b, a)।

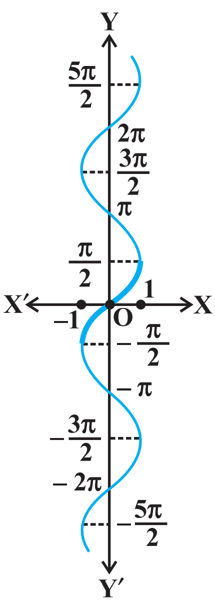
অতএব, x এবং y অক্ষকে পরিবর্তন করে $y = \sin x$ এর লেখচিত্র থেকে $y = \sin^{-1}x$ অপেক্ষকের লেখচিত্র পাওয়া যায়। $y = \sin x$ এবং $y = \sin^{-1} x$ এর লেখচিত্র, চিত্র 2.1 (i), (ii), (iii) তে দেওয়া হল। $y = \sin^{-1} x$ -এর লেখচিত্রের গাঢ় অংশটি মুখ্যমান শাখাকে প্রকাশ করে।

(ii) এটি দেখানো যায় যে, বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের লেখচিত্র হল, $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে অনুরূপ মূল অপেক্ষকের লেখচিত্রের দর্পণ প্রতিবিম্ব (অর্থাৎ, প্রতিফলন)। একই অক্ষে প্রদত্ত $y = \sin x$ এবং $y = \sin^{-1} x$ এর লেখচিত্র পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে এটিকে দেখানো যেতে পারে (চিত্র 2.1 (iii))।



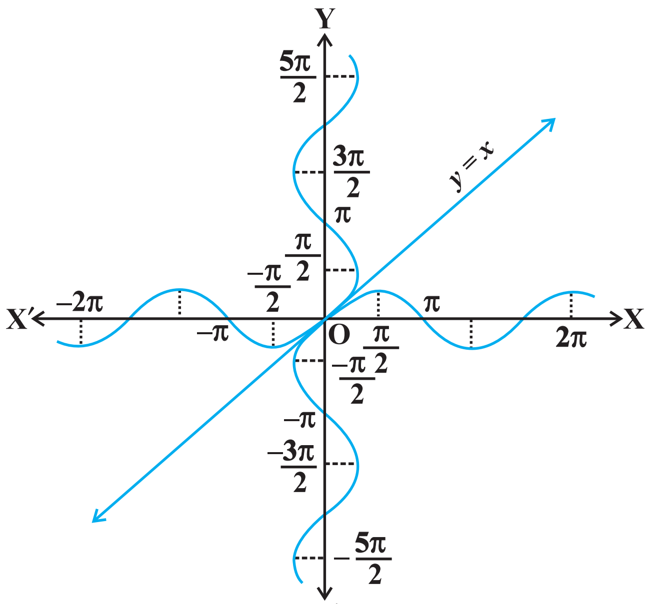
$y = \sin x$

চিত্র 2.1(i)



$y = \sin^{-1}x$

চিত্র 2.1(ii)



$y = \sin x$ এবং $y = \sin^{-1}x$

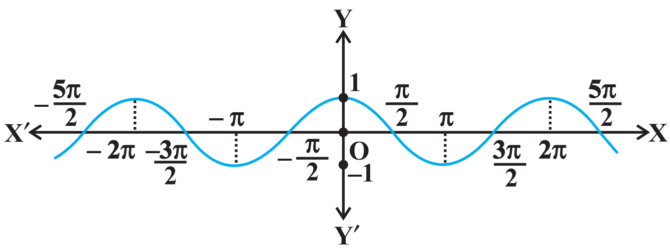
চিত্র 2.1(iii)

সাইন অপেক্ষকের অনুরূপ কোসাইন অপেক্ষক হল একটি অপেক্ষক যার ক্ষেত্র হল সকল বাস্তব সংখ্যার সেট এবং প্রসার হল $[-1, 1]$ সেট। যদি আমরা কোসাইন অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে $[0, \pi]$ তে সীমাবদ্ধ করি, তবে এটি একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, যেখানে প্রসার $[-1, 1]$। বস্তুত, কোসাইন অপেক্ষকটি

$[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ইত্যাদি অন্তরালসমূহের যে কোনোটিতে সীমাবদ্ধ হলে এটি বাইজেকটিভ হয় যেখানে প্রসার $[-1, 1]$ । অতএব, আমরা এই অন্তরালসমূহের প্রতিটিতে কোসাইন অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক সংজ্ঞায়িত করতে পারি। আমরা কোসাইন অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষককে $\cos^{-1}$ (are cosine function) দিয়ে প্রকাশ করি। অতএব $\cos^{-1}$ হল একটি অপেক্ষক যার ক্ষেত্র $[-1, 1]$ এবং প্রসার $[-\pi, 0]$, $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ইত্যাদি অন্তরালসমূহের যে-কোনো একটি। এরূপ প্রতিটি অন্তরালের অনুরূপে আমরা $\cos^{-1}$ অপেক্ষকের একটি শাখা পাই। প্রসার $[0,\pi]$ এর শাখাকে অপেক্ষকের *মুখ্যমান শাখা (principal value branch)* বলা হয়। আমরা লেখি

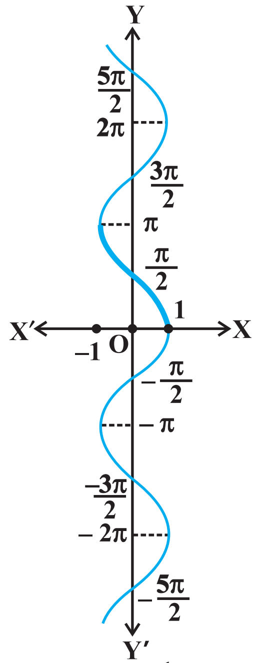
$$\cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

$y = \sin^{-1} x$ অপেক্ষকের লেখচিত্রের আলোচনার অনুরূপে $y = \cos^{-1}x$ অপেক্ষকের লেখচিত্র আঁকা যায়। $y = \cos x$ এবং $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র, চিত্র 2.2 (i) ও (ii) তে দেওয়া হল।



$y = \cos x$

চিত্র 2.2 (i)



$y = \cos^{-1} x$

চিত্র 2.2 (ii)

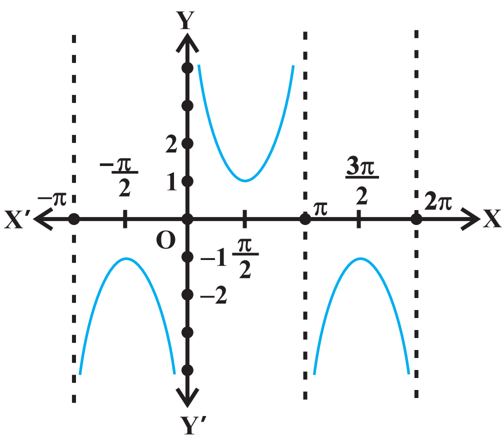
এখন চলো আমরা $\text{cosec}^{-1}x$ এবং $\sec^{-1}x$ নিয়ে আলোচনা করি:

যেহেতু, $\text{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$, তাই cosec অপেক্ষকের ক্ষেত্র হল $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ সেট এবং প্রসার হল $\{y : y \in \mathbf{R}, y \geq 1$ অথবা $y \leq -1\}$ সেট অর্থাৎ, $\mathbf{R} - (-1, 1)$ সেট। এর অর্থ হল $y = \text{cosec}\, x$ অপেক্ষকটি $-1 < y < 1$ ছাড়া সকল বাস্তব মান গ্রহণ করতে পারে এবং এটি π এর অখণ্ড গুণিতকের ক্ষেত্রে সংজ্ঞায়িত নয়। যদি আমরা cosec অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, তে সীমাবদ্ধ করি, তবে এটি প্রসার $\mathbf{R} - (-1, 1)$ সেটের ক্ষেত্রে একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়। বস্তুত, cosec অপেক্ষকটি অন্তরাল $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ ইত্যাদির কোনো একটিতে সীমাবদ্ধ হলে এটি বাইজেকটিভ হয় এবং এর প্রসার হয় সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbf{R} - (-1, 1)$।

অতএব $\operatorname{cosec}^{-1}$ কে একটি অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়, যার ক্ষেত্র হল $\mathbf{R} - (-1, 1)$এবং প্রসার হতে পারে অন্তরালসমূহ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ইত্যাদির যে-কোনো একটি। প্রসার $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ এর অনুরূপ মানকে $\operatorname{cosec}^{-1}$ এর *মুখ্য মান শাখা* (Principal value branch) বলে। অতএব আমরা মুখ্য শাখা পাই—

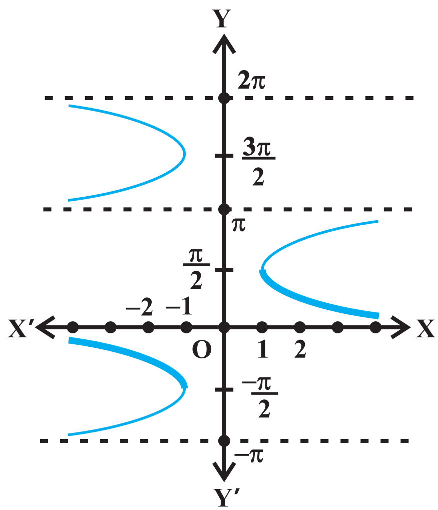
$$\operatorname{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \rightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

$y = \operatorname{cosec} x$ এবং $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ এর লেখচিত্র চিত্র 2.3 (i), (ii) -এ দেওয়া হল:



$y = \operatorname{cosec} x$

চিত্র 2.3 (i)



$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

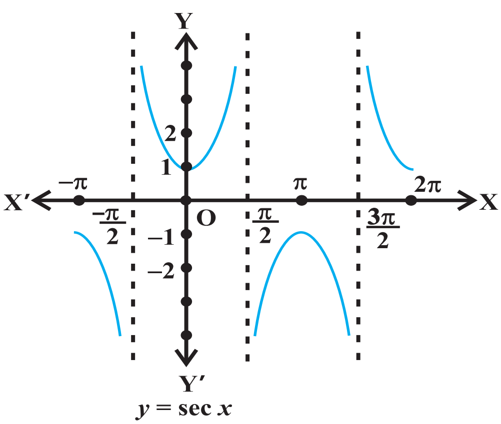
চিত্র 2.3 (ii)

আবার, যেহেতু, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, তাই, $y = \sec x$ এর ক্ষেত্র হল $\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ সেট এবং প্রসার হল $\mathbf{R} - (-1, 1)$ সেট। এর অর্থ হল sec (সেক্যান্ট অপেক্ষক) সকল বাস্তব মান গ্রহণ করে, কেবলমাত্র $-1 < y < 1$ ছাড়া এবং এটি $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতকে সংজ্ঞায়িত নয়। যদি

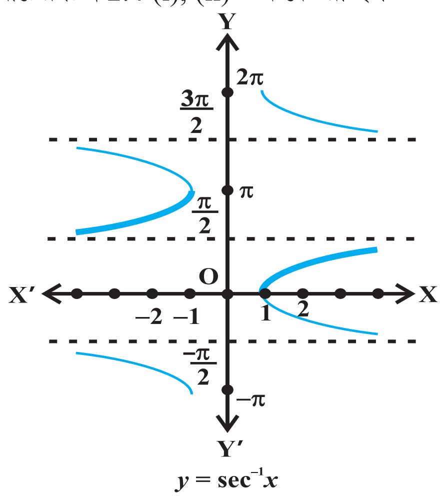
আমরা সেক্যান্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ -তে সীমাবদ্ধ করি তবে এটি একৈক এবং উপরিচিত্রণ হয়, যেখানে এটির প্রসার হয় $\mathbf{R} - (-1, 1)$ সেট। বস্তুত, অন্তরালসমূহ $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ইত্যাদির যে-কোনোটিতে সীমাবদ্ধ হলে সেক্যান্ট অপেক্ষক বাইজেকটিভ হয় এবং এটির প্রসার হল $\mathbf{R} - \{-1, 1\}$। অতএব $\sec^{-1}$ কে একটি অপেক্ষক হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা যায়, যার ক্ষেত্র $\mathbf{R} - (-1, 1)$ এবং প্রসার $[-\pi, 0] - \{\frac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\frac{3\pi}{2}\}$ ইত্যাদি অন্তরাল সমূহের যে-কোনো একটি হতে পারে। এই অন্তরালসমূহের প্রতিটির জন্য আমরা $\sec^{-1}$ অপেক্ষকের ভিন্ন ভিন্ন শাখা পাই। প্রসার $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ এর অনুরূপ শাখাকে বলা হয় $\sec^{-1}$ অপেক্ষকের *মুখ্যমান শাখা* (*principal value branch*)। অতএব আমরা পাই

$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \rightarrow [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

$y = \sec x$ এবং $y = \sec^{-1} x$ অপেক্ষকের লেখচিত্র নীচের চিত্র 2.4 (i), (ii) - এ দেওয়া হল:



চিত্র 2.4 (i)



চিত্র 2.4 (ii)

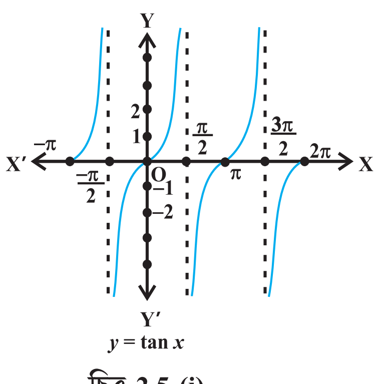
পরিশেষে, এখন আমরা $\tan^{-1}$ এবং $\cot^{-1}$ নিয়ে আলোচনা করব।

আমরা জানি যে tan অপেক্ষক (ট্যানজ্যান্ট অপেক্ষক)-এর ক্ষেত্র হল $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ এবং প্রসার হল $\mathbf{R}$। এর অর্থ হল tan অপেক্ষকটি $\frac{\pi}{2}$ এর বিজোড় গুণিতকে সংজ্ঞায়িত নয়।

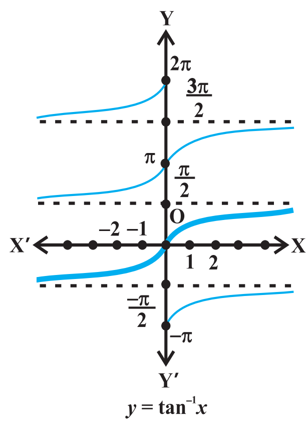
যদি আমরা ট্যানজ্যান্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ তে সীমাবদ্ধ করি তবে এটি এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হয়, যার প্রসার হয় **R** । বস্তুত, ট্যানজ্যান্ট অপেক্ষককে $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ইত্যাদি অন্তরালের যেকোনোটিতে সীমাবদ্ধ করলে এটি বাইজেকটিভ হয় এবং এর প্রসার হয় **R** । অতএব $\tan^{-1}$ কে একটি অপেক্ষক রূপে সংজ্ঞায়িত করা যায় যার ক্ষেত্র **R** এবং প্রসার হতে পারে অন্তরাল $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ইত্যাদির যেকোনোটি। এই অন্তরালসমূহ $\tan^{-1}$ অপেক্ষকের ভিন্ন ভিন্ন শাখা দেয়। প্রসার $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ এর অনুরূপ শাখাকে $\tan^{-1}$ অপেক্ষকের *মুখ্যমান শাখা (principal value branch)* বলা হয়। অতএব আমরা পাই .

$$\tan^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$y = \tan x$ এবং $y = \tan^{-1}x$ এর লেখচিত্র নীচের চিত্র 2.5 (i), (ii) তে দেওয়া হল :



চিত্র 2.5 (i)



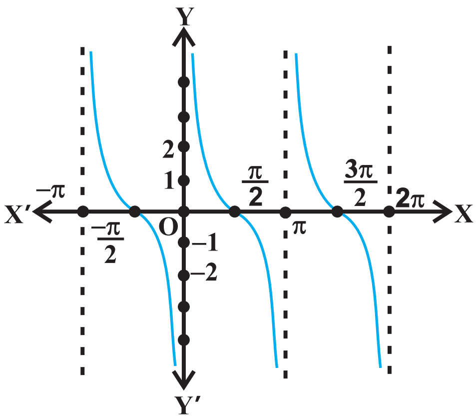
চিত্র 2.5 (ii)

আমরা জানি যে cot অপেক্ষক (কোট্যানজ্যান্ট অপেক্ষক) এর ক্ষেত্র $\{x : x \in \mathbf{R}$ এবং $x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}\}$ সেট এবং প্রসার হল **R** । এর অর্থ হল কোট্যানজ্যান্ট অপেক্ষক π এর অখণ্ড গুণিতকে সংজ্ঞায়িত নয়। যদি আমরা কোট্যানজ্যান্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রকে $(0, \pi)$তে সীমাবদ্ধ করি তবে এটি বাইজেকটিভ হয় এবং এর প্রসার হয় **R** । অর্থাৎ, কোট্যানজ্যান্ট অপেক্ষক, অন্তরালসমূহ $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ইত্যাদির যে কোনোটিতে সীমাবদ্ধ হলে বাইজেকটিভ হয় এবং এটির প্রসার হয় **R** । অতএব $\cot^{-1}$ কে একটি অপেক্ষক রূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়, যার ক্ষেত্র **R** এবং প্রসার হল $(-\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$

ইত্যাদি অন্তরালসমূহের যেকোনো একটি। এই অন্তরালসমূহ থেকে $\cot^{-1}$ অপেক্ষকের ভিন্ন ভিন্ন শাখা পাওয়া যায়। $(0, \pi)$ প্রসারের অনুরূপ শাখাকে $\cot^{-1}$ অপেক্ষকের *মুখ্য মান শাখা (principal value branch)* বলা হয়। অতএব আমরা পাই

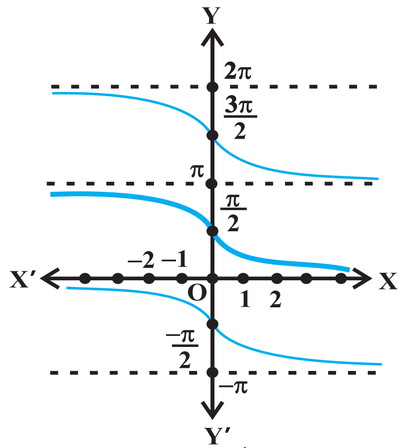
$$\cot^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$y = \cot x$ এবং $y = \cot^{-1}x$ এর লেখচিত্র নীচে চিত্র 2.6 (i), (ii) তে দেওয়া হল—



$y = \cot x$

চিত্র 2.6 (i)



$y = \cot^{-1}x$

চিত্র 2.6 (ii)

নিম্নলিখিত সারণিতে ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক (মুখ্য মান শাখা), তাদের ক্ষেত্র এবং প্রসার সহ দেওয়া হল—

$\sin^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	:	$[-1, 1]$	$\rightarrow$	$[0, \pi]$
cosec^{-1}	:	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$\sec^{-1}$	:	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\rightarrow$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cot^{-1}$	:	$\mathbf{R}$	$\rightarrow$	$(0, \pi)$

দ্রষ্টব্য

1. $\sin^{-1}x$ এবং $(\sin x)^{-1}$ এর মধ্যে বিভ্রান্ত হবে না। বাস্তবে $(\sin x)^{-1} = \dfrac{1}{\sin x}$ এবং অনুরূপভাবে অন্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের জন্যেও এটি সত্য।
2. যখন কোনো ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের কোনো শাখার উল্লেখ থাকে না, তখন এটিকে আমরা ওই অপেক্ষকের মুখ্য মান শাখা রূপে বুঝি।
3. কোনো একটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মান, যা মুখ্য শাখায় অবস্থিত হয় তাকে ওই ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মুখ্য মান *(principal value)* বলা হয়।

এখন আমরা কিছু উদাহরণ বিচার করব :

উদাহরণ 1 $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মুখ্য মান নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$ । তাহলে, $\sin y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

আমরা জানি যে $\sin^{-1}$ এর মুখ্য মান শাখার প্রসার $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ এবং $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ । অতএব, $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ এর মুখ্য মান $\dfrac{\pi}{4}$

উদাহরণ 2 $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মুখ্য মান নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ । তাহলে,

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

আমরা জানি যে, $\cot^{-1}$ এর মুখ্য মান শাখার প্রসার $(0, \pi)$ এবং $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ ।

অতএব $\cot^{-1}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ এর মুখ্য মান $\dfrac{2\pi}{3}$

অনুশীলনী 2.1

নিম্নলিখিতগুলোর মুখ্য মান নির্ণয় করো:

1. $\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
2. $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$
4. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$
5. $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$
6. $\tan^{-1}(-1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 8. $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ 9. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

নিম্নলিখিতগুলোর মান নির্ণয় করো :

11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 12. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. যদি $\sin^{-1} x = y$ হয়, তাহলে

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ এর মান হল

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ধর্মাবলি (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

এই অনুচ্ছেদে আমরা ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের কিছু ধর্ম প্রমাণ করব। এখানে এটি উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, এই সকল ফলাফলগুলো সংজ্ঞায়িত অনুরূপ ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলোর মুখ্য মান শাখায় বৈধ (valid) হয়। ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ক্ষেত্রের সকল মানের জন্য কিছু ফলাফল বৈধ নাও হতে পারে। বস্তুত, এরা x এর কিছু মানের ক্ষেত্রে বৈধ হবে, যার জন্য ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহ সংজ্ঞায়িত হয়। আমরা ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী x এর মান সমূহের বিস্তারিত আলোচনায় যাব না যেহেতু এই পাঠ্যবই-এ এটি আলোচনা করার অবকাশ নেই।

চলো আমরা স্মরণ করি, যদি $y = \sin^{-1}x$, হয়, তাহলে $x = \sin y$ এবং যদি $x = \sin y$ হয়, তবে $y = \sin^{-1}x$ হয়। এটির সমতুল্য হল

$$\sin(\sin^{-1} x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ এবং } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

অন্য পাঁচটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের জন্যেও এটি সত্য হয়। আমরা এখন ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলোর কিছু ধর্ম প্রমাণ করব।

1. (i) $\sin^{-1}\frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x,\ x \ge 1$ **অথবা** $x \le -1$

(ii) $\cos^{-1}\frac{1}{x} = \sec^{-1}x,\ x \ge 1$ **অথবা** $x \le -1$

(iii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x, x > 0$

প্রথম ফলাফলটি প্রমাণ করার জন্য আমরা $\text{cosec}^{-1} x = y$ ধরবো, অর্থাৎ, $x = \text{cosec}\, y$

সুতরাং, $\dfrac{1}{x} = \sin y$

অতএব, $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = y$

বা, $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$

অনুরূপভাবে, আমরা অপর দুটিকে প্রমাণ করতে পারি।

2. (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x, |x| \geq 1$

ধরো $\sin^{-1}(-x) = y$ অর্থাৎ, $-x = \sin y$ সুতরাং, $x = -\sin y$, অর্থাৎ, $x = \sin(-y)$.

সুতরাং, $\sin^{-1} x = -y = -\sin^{-1}(-x)$

অতএব, $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

অনুরূপভাবে, আমরা অপর দুটিকে প্রমাণ করতে পারি।

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x, |x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x, x \in \mathbf{R}$

ধরো, $\cos^{-1}(-x) = y$ অর্থাৎ $-x = \cos y$ সুতরাং $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

সুতরাং, $\cos^{-1} x = \pi - y = \pi - \cos^{-1}(-x)$

অতএব, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

অনুরূপভাবে, আমরা অপরদুটিকে প্রমাণ করতে পারি।

4. (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}, x \in \mathbf{R}$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

ধরো, $\sin^{-1} x = y$ । তাহলে $x = \sin y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$

সুতরাং, $\cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2} - y = \dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

অতএব, $$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

অনুরূপভাবে, আমরা অপর দুটিকে প্রমাণ করতে পারি।

5. (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$, $xy < 1$

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}$, $xy > -1$

(iii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \pi + \tan^{-1} \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $xy > 1$; $x, y > 0$

ধরো, $\tan^{-1} x = \theta$ এবং $\tan^{-1} y = \phi$ তাহলে $x = \tan\theta, y = \tan\phi$

এখন, $$\tan(\theta+\phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi} = \frac{x+y}{1-xy}$$

আমরা পাই, $\theta + \phi = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

অতএব, $$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$$

উপরের ফলাফলে যদি আমরা y এর পরিবর্তে $-y$ বসাই, তাহলে আমরা দ্বিতীয় ফলটি পাই এবং y এর পরিবর্তে x বসিয়ে আমরা তৃতীয় ফলটি পাই যা নীচে দেওয়া হল।

6. (i) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$, $|x| \le 1$

(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \ge 0$

(iii) $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$

ধরো $\tan^{-1} x = y$, তাহলে $x = \tan y$ । এখন,

$$\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1} \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$
$$= \sin^{-1} (\sin 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$$

আবার, $\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \cos^{-1}(\cos 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$

অনুরূপভাবে আমরা (iii) কে নির্ণয় করতে পারি।

এখন আমরা কিছু উদাহরণ বিচার করব।

উদাহরণ 3 দেখাও যে,

(i) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, \; -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \; \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

সমাধান

(i) ধরো, $x = \sin\theta$. তাহলে $\sin^{-1} x = \theta$ । আমরা পাই

$$\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2\sin^{-1} x$$

(ii) $x = \cos\theta$ ধরো, তারপর উপরের ন্যায় অগ্রসর হয়ে আমরা পাই $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$

উদাহরণ 4 দেখাও যে $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{2}{11} = \tan^{-1}\dfrac{3}{4}$

সমাধান 5 (i) ধর্ম প্রয়োগ করে আমরা পাই

$$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = \tan^{-1}\frac{15}{20} = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \text{R.H.S.}$$

উদাহরণ 5 $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1-\sin x}\right), \; \dfrac{-3\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$. কে সরলতম আকারে প্রকাশ করো।

সমাধান আমরা পাই

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

. বিকল্পপদ্ধতি,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

উদাহরণ 6 $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x > 1$ কে সরলতম আকারে লেখো।

সমাধান ধরো $x = \sec\theta$, তাহলে $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

সুতরাং, $\cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$, এটিই সরলতম আকার।

উদাহরণ 7 প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), |x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

সমাধান ধরো, $x = \tan\theta$ তাহলে, $\theta = \tan^{-1}x$ । আমরা পাই

$$\text{R.H.S.} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x + 2\tan^{-1}x$$

$$= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \text{L.H.S.}$$ (কেন?)

উদাহরণ 8 মান নির্ণয় করো : $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x), |x| \geq 1$

সমাধান আমরা পাই $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

অনুশীলনী 2.2

নিম্নলিখিতগুলো প্রমাণ করো :

1. $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3),\ x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x),\ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$

3. $\tan^{-1}\dfrac{2}{11} + \tan^{-1}\dfrac{7}{24} = \tan^{-1}\dfrac{1}{2}$

4. $2\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{7} = \tan^{-1}\dfrac{31}{17}$

নীচের অপেক্ষকসমূহকে সরলতম আকারে লেখো :

5. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

6. $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), 0 < x < \pi$

8. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right), \dfrac{-\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x|<a$

10. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x-x^3}{a^3-3ax^2}\right), a>0; \dfrac{-a}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

নিম্নলিখিতগুলোর প্রতিটির মান নির্ণয় করো :

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\dfrac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a)$

13. $\tan\dfrac{1}{2}\left[\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\dfrac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x|<1, y>0$ এবং $xy<1$

14. যদি $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{5}+\cos^{-1}x\right)=1$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।

15. যদি $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।

16 থেকে 18 নং প্রশ্নে প্রদত্ত প্রতিটি রাশির মান নির্ণয় করো :

16. $\sin^{-1}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

17. $\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\cot^{-1}\dfrac{3}{2}\right)$

19. $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}\right)$ এর মান হল

(A) $\dfrac{7\pi}{6}$ (B) $\dfrac{5\pi}{6}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{6}$

20. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\dfrac{1}{2})\right)$ এর মান হল

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) 1

21. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ এর মান হল

(A) π (B) $-\dfrac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) $2\sqrt{3}$

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 9 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা জানি, $\sin^{-1}(\sin x) = x$ । অতএব, $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}$

কিন্তু, $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, যা হল $\sin^{-1} x$ এর মুখ্য শাখা।

যা হোক, $\sin(\frac{3\pi}{5}) = \sin(\pi - \frac{3\pi}{5}) = \sin\frac{2\pi}{5}$ এবং $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

সুতরাং $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5}) = \sin^{-1}(\sin\frac{2\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$

উদাহরণ 10 দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

সমাধান ধরে নাও, $\sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ এবং $\sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

সুতরাং $\sin x = \frac{3}{5}$ and $\sin y = \frac{8}{17}$

এখন $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ (কেন ?)

এবং $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$

আমরা জানি, $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{15}{17} + \frac{3}{5}\times\frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

সুতরাং, $x - y = \cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$

অতএব, $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

উদাহরণ 11 দেখাও যে, $\sin^{-1}\dfrac{12}{13}+\cos^{-1}\dfrac{4}{5}+\tan^{-1}\dfrac{63}{16}=\pi$

সমাধান ধরো, $\sin^{-1}\dfrac{12}{13}=x,\quad \cos^{-1}\dfrac{4}{5}=y,\ \tan^{-1}\dfrac{63}{16}=z$

তাহলে, $\sin x=\dfrac{12}{13},\quad \cos y=\dfrac{4}{5},\quad \tan z=\dfrac{63}{16}$

সুতরাং $\cos x=\dfrac{5}{13},\ \sin y=\dfrac{3}{5},\ \tan x=\dfrac{12}{5}$ এবং $\tan y=\dfrac{3}{4}$

আমরা জানি, $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\dfrac{\dfrac{12}{5}+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{12}{5}\times\dfrac{3}{4}}=-\dfrac{63}{16}$

অতএব, $\tan(x+y)=-\tan z$

অর্থাৎ, $\tan(x+y)=\tan(-z)$ অথবা $\tan(x+y)=\tan(\pi-z)$

সুতরাং, $x+y=-z$ অথবা $x+y=\pi-z$

যেহেতু x, y এবং z ধনাত্মক, $x+y\neq -z$ (কেন?)

অতএব, $x+y+z=\pi$ অথবা $\sin^{-1}\dfrac{12}{13}+\cos^{-1}\dfrac{4}{5}+\tan^{-1}\dfrac{63}{16}=\pi$

উদাহরণ 12 সরল করো $\tan^{-1}\left[\dfrac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right]$, যদি $\dfrac{a}{b}\tan x>-1$

সমাধান আমরা পাই

$$\tan^{-1}\left[\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x}}{\dfrac{b\cos x+a\sin x}{b\cos x}}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{a}{b}-\tan x}{1+\dfrac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$=\tan^{-1}\frac{a}{b}-\tan^{-1}(\tan x)=\tan^{-1}\frac{a}{b}-x$$

উদাহরণ 13 সমাধান করো : $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$

সমাধান আমরা পাই $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$

বা, $\tan^{-1}\left(\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x}\right) = \frac{\pi}{4}$

অর্থাৎ $\tan^{-1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

সুতরাং, $\frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

বা $6x^2 + 5x - 1 = 0$ অর্থাৎ, $(6x - 1)(x + 1) = 0$

যা থেকে পাই $x = \frac{1}{6}$ বা $x = -1$.

যেহেতু $x = -1$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না, কারণ সমীকরণের বামপক্ষ ঋণাত্মক হয়ে যায়, তাই $x=\frac{1}{6}$ হল প্রদত্ত সমীকরণের একমাত্র সমাধান।

অধ্যায় 2 এর বিবিধ অনুশীলনী

নিম্নলিখিতগুলোর মান নির্ণয় করো :

1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

প্রমাণ করো :

3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

প্রমাণ করো :

9. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, $x \in [0, 1]$

10. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)=\frac{x}{2},\ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}x,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$ [ইঙ্গিত: $x = \cos 2\theta$ বসাও]

12. $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3}=\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

নীচের সমীকরণগুলো সমাধান করো :

13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$

14. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

15. $\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1$ এর মান হল

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ হলে, x এর মান হল

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)-\tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ এর মান হল

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{-3\pi}{4}$

সারসংক্ষেপ

- নীচের সারণীতে ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহের ক্ষেত্র (domains) এবং প্রসার (ranges) (মুখ্য মান শাখা) দেওয়া হল:

অপেক্ষক (Functions)	ক্ষেত্র (Domain)	প্রসার (Range) (মুখ্য মান শাখা) (Principal value branches)
$y = \sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \text{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = \sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$
$y = \tan^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ কে $(\sin x)^{-1}$ এর সাথে গুলিয়ে ফেলবে না। বস্তুত $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ এবং অনুরূপে সকল ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এটি সত্য।
- কোনো একটি ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের মান যা মুখ্য মান শাখায় অবস্থিত হয়, তাকে ওই ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের *মুখ্যমান (Principal Value)* বলা হয়।

ক্ষেত্রের উপযুক্ত মানের জন্য আমরা পাই —

- $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$
- $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1} x$
- $\sin (\sin^{-1} x) = x$
- $\sin^{-1} (\sin x) = x$
- $\sin^{-1} \frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$
- $\cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$
- $\cos^{-1} \frac{1}{x} = \sec^{-1}x$
- $\cot^{-1} (-x) = \pi - \cot^{-1} x$

- $\tan^{-1}\frac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, xy<1
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$, xy>-1
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}, 0 \le x \le 1$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}, |x|<1$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), xy > 1; x, y > 0$
- $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$
- $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

ত্রিকোণমিতির অধ্যয়ন সর্বপ্রথম ভারতেই শুরু হয়েছিল। প্রাচীন ভারতীয় গণিতিজ্ঞ, আর্যভট্ট (476খৃ), ব্রহ্মগুপ্ত (598 খৃ:), ভাস্কর ১ (600 খৃ:) এবং ভাস্কর ২ (1114 খৃ:) ত্রিকোণমিতির গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল নির্ণয় করেছিলেন। এই সকল জ্ঞান ভারত থেকে আরবে চলে গিয়েছিল এবং তারপর সেখান থেকে চলে যায় ইউরোপে। গ্রীকরাও ত্রিকোণমিতি নিয়ে অধ্যয়ন শুরু করেছিলেন কিন্তু তাদের পদ্ধতি এতই জটিল ছিল যে যখন ভারতীয় পদ্ধতি প্রকাশিত হল সাথে সাথেই এটি সমগ্র বিশ্ব গ্রহণ করে নেয়।

আধুনিক ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের পদ্ধতি, পূর্বে কোনো একটি কোণের সাইন (*sine*) হিসাবে ভারতে পরিচিত ছিল এবং গণিতে সাইন অপেক্ষকের সূচনা সিদ্ধান্ত (*siddhantas*) (সংস্কৃত জ্যোতির্বিদ্যা গবেষণা)এর একটি উল্লেখযোগ্য উপস্থাপনা।

ভাস্কর ১ (600 খৃ:) 90° থেকে বড়ো কোণের সাইন অপেক্ষকের মান নির্ণয়ে সূত্র দিয়েছিলেন। ষোড়শ শতাব্দির মালয়ালম কাজ *Yuktibhasa* তে sin (A + B) এর বিস্তৃতি

নির্ণয়ের প্রমাণ পাওয়া যায়। 18°, 36°, 54°, 72°, ইত্যাদির sine অথবা cosine এর বিশুদ্ধ মান ভাস্কর-২ দ্বারা প্রদত্ত হয়েছিল।

are sin x, are cos x ইত্যাদি প্রকাশের চিহ্ন $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ ইত্যাদি ব্যবহারের প্রস্তাব করেছিলেন জ্যোতির্বিদ Sir John F.W. Hersehel (1813)। Thales (600 খৃ:পূ: প্রায়) এর নাম উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ের সমস্যার সাথে অপরিহার্য রূপে জড়িয়ে আছে। মিশরের বিখ্যাত পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করার কৃতিত্বও তাঁরই। তিনি পিরামিড ও একটি উচ্চতা জানা সহায়ক দণ্ডের ছায়ার দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে এবং অনুপাত দুটি তুলনা করে পিরামিডের উচ্চতা নির্ণয় করেন :

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{S}} = \frac{h}{s} = \tan\,(\text{সূর্যের উন্নতিকোণ})$$

সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমানুপাতিক ধর্ম ব্যবহার করে সমুদ্রে অবস্থিত জাহাজের দূরত্ব নির্ণয় করার কথাও Thales বলেছিলেন। সদৃশতার ধর্ম প্রয়োগে উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ের সমস্যা সমাধানও প্রাচীন ভারতীয় গবেষণায় দেখা যায়।

অধ্যায় 3

ম্যাট্রিক্স (*Matrices*)

❖ *The essence of Mathematics lies in its freedom. — CANTOR* ❖

3.1 ভূমিকা

গণিতের বিভিন্ন শাখায় ম্যাট্রিক্সের জ্ঞান অপরিহার্য। ম্যাট্রিক্স হল গণিতের একটি খুবই শক্তিশালী সরঞ্জাম। এই গাণিতিক সরঞ্জাম অন্যান্য সরল পদ্ধতির তুলনায় আমাদের কাজকে অধিক মাত্রায় সহজতর করেছে। ম্যাট্রিক্সের ধারণার এই বিবর্তন রৈখিক সমীকরণতন্ত্রের সমাধান নির্ণয়ের একটি প্রয়াসের নিবিড় এবং সরল পদ্ধতির ফলশ্রুতি। ম্যাট্রিক্স কেবল মাত্র রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের সহগ উপস্থাপনের জন্য ব্যবহার করা হয় না, উপরন্তু ম্যাট্রিক্সের উপযোগিতা এই ব্যবহার থেকে অনেক বেশি। ম্যাট্রিক্সের প্রতীক এবং ক্রিয়াকলাপ ব্যক্তিগত কম্পিউটারে বৈদ্যুতিক স্প্রেডশিট প্রোগ্রামে (electronic spreadsheet) ব্যবহার করা হয়, যা বাণিজ্য এবং বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে যেমন বাজেট (budgeting), বিক্রয় প্রক্ষেপণ (sales projection), খরচ অনুমান (cost estimation), কোনো পরীক্ষার ফলাফল বিশ্লেষণ ইত্যাদি ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়। আরও অনেক ভৌতিক কার্যকলাপ যেমন বিবর্ধন (magnification), ঘূর্ণন (Rotation) এবং কোনো একটি তল দ্বারা প্রতিফলন, ম্যাট্রিক্সের দ্বারা গাণিতিক ভাবে উপস্থাপন করা যায়। সংকেত লিপি (cryptography) রচনা বিদ্যায়ও ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করা হয়। গণিতের এই উপাংশটি শুধুমাত্র বিজ্ঞানের কিছু নির্দিষ্ট শাখায় ব্যবহার করা হয় না, উপরন্তু এটি ব্যবহার করা হয় প্রজনন শাস্ত্রে (genetics), অর্থনীতিতে (economics), সমাজবিজ্ঞানে (sociology), আধুনিক মনোবিজ্ঞানে (modern psychology) এবং শিল্প ব্যবস্থাপনায় (industrial management)।

এই অধ্যায়ে, ম্যাট্রিক্স এবং ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের মৌলিক বিষয়গুলোর সাথে পরিচিত হওয়া আমাদের কাছে আকর্ষণীয় হয়ে উঠবে।

3.2 ম্যাট্রিক্স (Matrix)

মনে করো আমরা এই তথ্যটি প্রকাশ করতে চাই যে, রাধার 15টি খাতা আছে। আমরা এটিকে [15] হিসাবে প্রকাশ করতে পারি, যা [ ] এর ভিতরের সংখ্যাটি রাধার খাতার সংখ্যা বোঝায়। এখন, যদি আমাদের প্রকাশ করতে হয় যে রাধার 15টি খাতা এবং 6টি কলম আছে। আমরা এটিকে প্রকাশ করতে পারি [15 6] হিসেবে যা বোঝায় [ ] এর ভিতরের প্রথম সংখ্যাটি রাধার খাতার সংখ্যা এবং অপর সংখ্যাটি রাধার কলমের সংখ্যা। চলো আমরা এখন মনে করি যে, রাধা এবং তার দুই

বন্ধু জিয়া ও সিমরণের খাতা এবং কলমের সংখ্যা যা নিম্নে দেওয়া হয়েছে এই তথ্যগুলো প্রকাশ করতে চাই ঃ

রাধার	আছে	15টি	খাতা	এবং	6টি কলম,
জিয়ার	আছে	10টি	খাতা	এবং	2টি কলম,
সিমরণের	আছে	13টি	খাতা	এবং	5টি কলম।

এখন এটিকে সারণি আকারে নিম্নরূপে সাজানো যায় ঃ

	খাতার সংখ্যা	কলমের সংখ্যা
রাধা	15	6
জিয়া	10	2
সিমরণ	13	5

এবং এটিকে এভাবে প্রকাশ করা যায়

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{প্রথম সারি} \\ \leftarrow \text{দ্বিতীয় সারি} \\ \leftarrow \text{তৃতীয় সারি} \end{matrix}$$

↑ প্রথম স্তম্ভ ↑ দ্বিতীয় স্তম্ভ

অথবা,

	রাধা	**জিয়া**	**সিমরণ**
খাতার সংখ্যা	15	10	13
কলমের সংখ্যা	6	2	5

যাকে প্রকাশ করা হয় ঃ

$$\begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{প্রথম সারি} \\ \leftarrow \text{দ্বিতীয় সারি} \end{matrix}$$

↑ প্রথম স্তম্ভ ↑ দ্বিতীয় স্তম্ভ ↑ তৃতীয় স্তম্ভ

প্রথম সজ্জার (arrangement) প্রথম স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো যথাক্রমে রাধা, জিয়া এবং সিমরণের খাতার সংখ্যাকে প্রকাশ করে এবং দ্বিতীয় স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো যথাক্রমে রাধা, জিয়া এবং সিমরণের কলমের সংখ্যাকে প্রকাশ করে।

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় সজ্জায় প্রথম সারিতে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো যথাক্রমে রাধা, জিয়া এবং সিমরণের খাতার সংখ্যাকে প্রকাশ করে। দ্বিতীয় সারিতে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো যথাক্রমে রাধা, জিয়া এবং সিমরণের কলমের সংখ্যাকে প্রকাশ করে। উপরের ধরনের একটি সজ্জা বা প্রদর্শনকে *ম্যাট্রিক্স* (*matrix*) বলা হয়। সাধারণত, আমরা ম্যাট্রিক্সকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করতে পারি :

সংজ্ঞা 1 *ম্যাট্রিক্স* হল সংখ্যা অথবা অপেক্ষকসমূহের একটি ক্রমিক একটি আয়তকার সজ্জা। সংখ্যা অথবা অপেক্ষকগুলোকে ম্যাট্রিক্সের উপাদান বা পদ (entries) বলা হয়।

আমরা ম্যাট্রিক্সকে বড় হরফের ইংরেজি বর্ণ দ্বারা প্রকাশ করি। নিচে ম্যাট্রিক্সের কিছু উদাহরণ দেওয়া হল:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

উপরের উদাহরণগুলোতে অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত উপাদানগুলো ম্যাট্রিক্সের *সারি* গঠন করে এবং উলম্ব রেখায় অবস্থিত উপাদানগুলো ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ গঠন করে বলা হয়। এইভাবে A এর 3টি সারি এবং দুটি স্তম্ভ আছে, B এর 3টি সারি এবং 3টি স্তম্ভ আছে একইভাবে C এর 2টি সারি এবং 3টি স্তম্ভ আছে।

3.2.1 *ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order of a matrix)*

m টি সারি এবং n টি স্তম্ভ বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স অথবা সরলভাবে $m \times n$ ম্যাট্রিক্স বলা হয় (‘*m* by *n*’ ম্যাট্রিক্স হিসাবে পড়া হয়)। সুতরাং, উপরের ম্যাট্রিক্সগুলোর উদাহরণ অনুসরণ করে আমরা বলতে পারি A হল 3×2 ম্যাট্রিক্স, B হল 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং C হল 2×3 ম্যাট্রিক্স। আমরা দেখতে পাই যে A এর $3 \times 2 = 6$ টি উপাদান আছে, B এবং C এর যথাক্রমে 9টি ও 6টি উপাদান আছে।

সাধারণত, একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্সের নিম্নলিখিত আয়তাকার সজ্জা থাকে:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

অথবা $\quad \mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \quad i, j \in \mathrm{N}$

এইভাবে, i তম সারিটি $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in},$ উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত হয়, একইভাবে j তম স্তম্ভটি $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj},$ উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত হয়।

সাধারণত, i তম সারি এবং j তম স্তম্ভে অবস্থিত উপাদানটি হল a_{ij}। এটিকে আমরা A এর (i, j) তম উপাদানও বলতে পারি। $m \times n$ ম্যাট্রিক্সের উপাদান সংখ্যা হবে mn।

> **☞দ্রষ্টব্য** এই অধ্যায়ে
>
> 1. $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সকে $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ সংকেতের দ্বারা চিহ্নিত করব।
> 2. আমরা কেবলমাত্র ওই ম্যাট্রিক্সগুলো বিবেচনা করব যেগুলোর উপাদানগুলো হল বাস্তব সংখ্যা অথবা বাস্তব মান বিশিষ্ট্য অপেক্ষক।

আমরা একটি তলে অবস্থিত একটি বিন্দু (x, y) কে ম্যাট্রিক্স (স্তম্ভ অথবা সারি) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (অথবা $[x, y]$). দ্বারাও প্রকাশ করতে পারি। উদাহরণ হিসাবে বিন্দু P(0, 1) কে ম্যাট্রিক্স আকারে উপস্থাপন করা যায়।

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ অথবা } [0\ 1] \text{ আকারে।}$$

লক্ষ করো যে, একইভাবে সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত বন্ধ চিত্রের কৌণিক বিন্দুগুলোকে ম্যাট্রিক্স আকারেও আমরা প্রকাশ করতে পারি। উদাহরণ হিসাবে ABCD একটি চতুর্ভুজ বিবেচনা করো যার কৌণিক বিন্দুগুলো A (1, 0), B (3, 2), C (1, 3), D (–1, 2) ।

এখন, চতুর্ভুজ ABCD কে ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায়।

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{matrix} \quad \text{অথবা} \quad Y = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

এভাবে, একটি তলে অবস্থিত জ্যামিতিক চিত্রের কৌণিক বিন্দুগুলোকে উপস্থাপন করার জন্য ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করা যেতে পারে।

এখন, চলো আমরা কিছু উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 1 তিনটি কারখানা I, II এবং III এর পুরুষ এবং মহিলা কর্মী সম্পর্কিত নিম্নলিখিত তথ্য বিবেচনা করো।

	পুরুষ কর্মী	**মহিলা কর্মী**
I	30	25
II	25	31
III	27	26

উপরোক্ত তথ্যগুলো 3×2 ম্যাট্রিক্স আকারে উপস্থাপন করো। তৃতীয় সারি এবং দ্বিতীয় স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যা কোনটি?

সমাধান তথ্যগুলো 3 × 2 ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায় :

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

তৃতীয় সারি এবং দ্বিতীয় স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাটি কারখানা III এর মহিলা কর্মীর সংখ্যাকে প্রকাশ করে।

উদাহরণ 2 যদি একটি ম্যাট্রিক্সের 8 টি উপাদান থাকে, তবে এটির সম্ভাব্য ক্রমগুলো কী হতে পারে?

সমাধান আমরা জানি যে, যদি একটি ম্যাট্রিক্স $m \times n$ ক্রমের হয় তবে, এটির mn সংখ্যক উপাদান থাকে। এভাবে, 8টি উপাদান বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সের সম্ভাব্য সকল ক্রমগুলো নির্ণয়ের জন্য আমরা স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিত জোড় নির্ণয় করব, যাদের গুণফল 8 হয়।

এভাবে, সম্ভাব্য সকল ক্রমিত জোড়গুলো হল (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4)

অতএব, সম্ভাব্য ক্রমগুলো হল 1×8, 8×1, 4×2, 2×4

উদাহরণ 3 একটি 3 × 2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স গঠন করো যার উপাদানগুলো $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$ দ্বারা প্রদত্ত।

সমাধান সাধারণভাবে 3 × 2 ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স হল

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

এখন, $a_{ij} = \frac{1}{2}|i-3j|$, $i = 1, 2, 3$ এবং $j = 1, 2$ ।

সুতরাং,

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3\times1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1-3\times2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2-3\times1| = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2-3\times2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3\times1| = 0 \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3\times2| = \frac{3}{2}$$

অতএব, নির্ণেয় ম্যাট্রিক্সটি হল $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

3.3 ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Types of Matrices)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা বিভিন্ন ধরনের ম্যাট্রিক্স নিয়ে আলোচনা করব।

(i) **স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Column matrix)**

কোনো ম্যাট্রিক্সের যদি একটিমাত্র স্তম্ভ থাকে, তাহলে এটিকে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ একটি 4×1 ক্রমের ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ একটি $m \times 1$ ক্রমের স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স।

(ii) **সারি ম্যাট্রিক্স (Row matrix)**

কোনো ম্যাট্রিক্সের যদি একটি মাত্র সারি থাকে, তবে এটিকে *সারি ম্যাট্রিক্স* বলা হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$ একটি সারি ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$ একটি $1 \times n$ ক্রমের সারি ম্যাট্রিক্স।

(iii) **বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square matrix)**

যে সকল ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোর সংখ্যা এবং স্তম্ভগুলোর সংখ্যা সমান হয়, এদের *বর্গ ম্যাট্রিক্স* বলা হয়। এভাবে একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সকে একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি $m = n$ হয় এবং এটিকে 'n' ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ একটি m ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স।

☞ **দ্রষ্টব্য** যদি $A = [a_{ij}]$ একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ উপাদানগুলো (লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো) ম্যাট্রিক্স A এর কর্ণ গঠন করে।

এভাবে, যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ হয় তখন A ম্যাট্রিক্স এর কর্ণের উপাদানগুলো হল 1, 4, 6।

(iv) **কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix)**

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ কে *কর্ণ ম্যাট্রিক্স* বলা হয়, যদি এটির কর্ণ ব্যতীত সকল উপাদান শূন্য হয় অর্থাৎ, ম্যাট্রিক্স $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ কে একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি $b_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$।

উদাহরণ হিসেবে, $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, হল যথাক্রমে 1, 2, 3 ক্রমের কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

(v) **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar matrix)**

একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি এটির কর্ণের উপাদানগুলো সমান হয় অর্থাৎ, একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ কে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি

$b_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$

$b_{ij} = k$, যখন $i = j$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

উদাহরণ হিসেবে, $A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 ক্রমের স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vi) **একক ম্যাট্রিক্স (Identity matrix)**

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার কর্ণের প্রতিটি পদ 1এবং অবশিষ্ট সকল উপাদানগুলো শূন্য, এটিকে *একক ম্যাট্রিক্স* বলে। অর্থাৎ, বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ কে একক ম্যাট্রিক্স বলা হয়, যদি

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{যদি } i = j \\ 0 & \text{যদি } i \neq j \end{cases}$$

আমরা n ক্রমের একক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করি। যখন প্রাসঙ্গিক বিষয় থেকে ক্রমটি স্পষ্ট হয়, তখন আমরা এটিকে I দ্বারা সরলভাবে লিখি।

উদাহরণ হিসেবে, $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

লক্ষ করো যে, একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স একটি একক ম্যাট্রিক্স হয় যখন $k = 1$। কিন্তু প্রতিটি একক ম্যাট্রিক্স স্পষ্টতই একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vii) **শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero matrix)**

একটি ম্যাট্রিক্সকে *শূন্য ম্যাট্রিক্স (zero matrix)* অথবা *(null matrix)* বলা হয়, যদি এটির সকল উপাদানগুলো শূন্য হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $[0 \; 0]$ সবগুলো হল শূন্য ম্যাট্রিক্স। আমরা শূন্য ম্যাট্রিক্সকে O দ্বারা প্রকাশ করি। আলোচনার বিষয়বস্তু হতে এটির ক্রমটি স্পষ্ট হবে।

3.3.1 *ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of matrices)*

সংজ্ঞা 2 দুটি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ কে পরস্পর সমান ম্যাট্রিক্স বলা হয় যদি

(i) ম্যাট্রিক্স A এবং B একই ক্রমের হয়।

(ii) A এর প্রতিটি উপাদান B এর অনুরূপ উপাদানের সমান হয়, অর্থাৎ i এবং j এর সকল মানের জন্য $a_{ij} = b_{ij}$ হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ দুটি সমান ম্যাট্রিক্স কিন্তু $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ দুটি সমান ম্যাট্রিক্স নয়। যদি দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B পরস্পর সমান হয়, আমরা সাংকেতিকভাবে লিখতে পারি A = B।

যদি $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তখন $x = -1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

উদাহরণ 4 যদি $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ হয় তবে,

a, b, c, x, y এবং z এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স দুটি সমান ম্যাট্রিক্স, সুতরাং এদের অনুরূপ উপাদানগুলো অবশ্যই সমান হবে। ম্যাট্রিক্স দুটির অনুরূপ উপাদানগুলি তুলনা করে আমরা পাই,

$$x + 3 = 0, \qquad z + 4 = 6, \qquad 2y - 7 = 3y - 2,$$
$$a - 1 = -3, \qquad 0 = 2c + 2, \qquad b - 3 = 2b + 4,$$

সরল করে আমরা পাই,

$$a = -2, b = -7, c = -1, x = -3, y = -5 \text{ এবং } z = 2$$

উদাহরণ 5 নিম্নলিখিত সমীকরণ হতে a, b, c এবং d এর মান নির্ণয় করো :

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$$

সমাধান দুটি ম্যাট্রিক্সের সমতা হতে অনুরূপ উপাদানগুলো তুলনা করে আমরা পাই,

$$2a + b = 4 \qquad 5c - d = 11$$
$$a - 2b = -3 \qquad 4c + 3d = 24$$

এই সমীকরণগুলো সমাধান করে আমরা পাই,

$a = 1, b = 2, c = 3$ এবং $d = 4$

অনুশীলনী 3.1

1. ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, এর জন্য নির্ণয় করো :

(i) ম্যাট্রিক্সটির ক্রম, (ii) ম্যাট্রিক্সটির উপাদানের সংখ্যা,

(iii) ম্যাট্রিক্সের $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}$ এবং a_{23} উপাদানসমূহ।

2. যদি একটি ম্যাট্রিক্সের 24 টি উপাদান থাকে, তবে এটির সম্ভাব্য ক্রমগুলো কী হতে পারে? যদি এটির 13 টি উপাদান থাকে, তবে ক্রমগুলো কী হবে?

3. যদি একটি ম্যাট্রিক্সের 18 টি উপাদান থাকে, তবে এটির সম্ভাব্য ক্রমগুলো কী হতে পারে? যদি এটির 5 টি উপাদান থাকে, তবে ক্রমগুলো কী হবে?

4. একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ গঠন করো, যার উপাদানগুলো দ্বারা নিম্নে প্রদত্ত :

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

5. একটি 3×4 ম্যাট্রিক্স গঠন করো, যার উপাদানগুলো নিম্নে প্রদত্ত :

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলো হতে x, y এবং z -এর মান নির্ণয় করো:

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. সমীকরণ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ থেকে a, b, c এবং d এর মান নির্ণয় করো।

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হবে, যদি

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) এদের কোনটি নয়

9. x এবং y এর প্রদত্ত কোন মানগুলোর জন্য নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স জোড় সমান হয়?

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(A) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = 7$ (B) নির্ণয় করা অসম্ভব

(C) $y = 7, \quad x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{-2}{3}$

10. 3×3 ক্রমের সম্ভাব্য সকল ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা কী হবে, যাদের প্রতিটি উপাদান 0 অথবা 1 হয় :

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 ম্যাট্রিক্সের প্রক্রিয়াসমূহ (Operations on Matrices)

এই অনুচ্ছেদে আমরা ম্যাট্রিক্সের কিছু প্রক্রিয়ার সূচনা করব যেমন ম্যাট্রিক্সের যোগ, একটি স্কেলার রাশি দিয়ে ম্যাট্রিক্সের গুণ, ম্যাট্রিক্সের পার্থক্য এবং গুণ।

3.4.1 *ম্যাট্রিক্সের যোগ (Addition of matrices)*

মনে করো ফতিমার A এবং B স্থানে দুটি কারখানা আছে। প্রতিটি কারখানা বালক বালিকাদের জন্য তিনটি বিভিন্ন মূল্যে 1, 2 এবং 3 ধরনের খেলার জুতো প্রস্তুত করে। প্রতিটি কারখানার উৎপাদন সংখ্যা ম্যাট্রিক্সের আকারে নিম্নে উপস্থাপন করা হল :

A স্থানের কারখানা

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{cc} \text{বালক} & \text{বালিকা} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix}$$

B স্থানের কারখানা (বালক, বালিকা)

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix}$$

মনে করো ফতিমা বিভিন্ন মূল্যের প্রতি ধরনের তৈরি খেলার জুতোর মোট সংখ্যা জানতে চায়। এখন মোট প্রস্তুত খেলার জুতো নিম্নরূপ

1 নং মূল্য বিভাগ : বালকের জন্য (80 + 90), বালিকার জন্য (60 + 50)

2 নং মূল্য বিভাগ : বালকের জন্য (75 + 70), বালিকার জন্য (65 + 55)

3 নং মূল্য বিভাগ : বালকের জন্য (90 + 75), বালিকার জন্য (85 + 75)

এটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে এভাবে প্রকাশ করা যায় : $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$.

এই নুতন ম্যাট্রিক্সটি উপরের দুটি ম্যাট্রিক্সের **সমষ্টি**। আমরা লক্ষ করি যে, দুটি ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি হল একটি ম্যট্রিক্স যা পাওয়া যায় প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সসমূহের অনুরূপ উপাদানগুলো যোগ করে। তাছাড়া দুটি ম্যাট্রিক্সের ক্রম সমান হতে হবে।

এভাবে, যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ একটি 2 × 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স এবং $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, 2×3 ক্রমের অপর একটি ম্যাট্রিক্স হয়, তখন আমরা $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ দ্বারা নির্ধারণ করি।

সাধারণত, যদি $A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ দুটি একই ক্রম, যথা $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তাহলে দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B এর সমষ্টি ম্যাট্রিক্স $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, দ্বারা নির্ধারণ করি, যেখানে $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i এবং j এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য।

উদাহরণ 6 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, হলে A + B নির্ণয় করো।

যেহেতু A, B এর ক্রম একই অর্থাৎ 2 × 3, সুতরাং A এবং B এর যোগফল সংজ্ঞাত এবং তা হল

$$A+B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

☞ **দ্রষ্টব্য**

1. আমরা জোর দিয়ে বলতে পারি যে, যদি A এবং B একই ক্রমের না হয়, তখন A + B নির্ধারণ করা যায় না। উদাহরণ হিসেবে যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, তখন A + B অসংজ্ঞাত।

2. আমরা লক্ষ করতে পারি যে, ম্যাট্রিক্সের যোগ একই ক্রমের ম্যাট্রিক্সের সেটগুলোতে দ্বিপদ প্রক্রিয়ার একটি উদাহরণ।

3.4.2 *একটি স্কেলার দ্বারা একটি ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of a matrix by a scalar)*

এখন মনে করো যে, ফতিমা তার A স্থানের কারখানার সকল ধরনের উৎপাদন দ্বিগুণ করে দিল (3.4.1 দেখো) ।

A স্থানের কারখানায় পূর্বে উৎপাদিত সংখ্যা (প্রমাণ এককে) নিম্নরূপ ছিল

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{বালক} \quad \text{বালিকা} \\ \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

A স্থানের কারখানায় উৎপাদিত পরিবর্তিত সংখ্যা (খেলার জুতার সংখ্যা) নিম্নরূপ দেওয়া হল

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \text{বালক} \quad \text{বালিকা} \\ \begin{bmatrix} 2\times80 & 2\times60 \\ 2\times75 & 2\times65 \\ 2\times90 & 2\times85 \end{bmatrix} \end{array}$$

এটিকে ম্যাট্রিক্স আকারে $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ রূপে প্রকাশ করা যায়। আমরা লক্ষ করি যে, পূর্বের ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানকে 2 দ্বারা গুণ করে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

সাধারণত, ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণন প্রক্রিয়া আমরা নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত করতে পারি ঃ

যদি $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ একটি ম্যাট্রিক্স এবং k একটি স্কেলার রাশি হয়, তখন kA অপর একটি ম্যাট্রিক্স হয়, যা A এর প্রতিটি উপাদানকে স্কেলার রাশি k দিয়ে গুণ করে পাওয়া যায়।

অপরপক্ষে, $kA = k\,[a_{ij}]_{m \times n} = [k\,(a_{ij})]_{m \times n}$, অর্থাৎ i এবং j এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য kA এর (i, j) -তম উপাদানটি হল $k\,a_{ij}$ ।

উদাহরণ হিসেবে, যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ হয়, তবে

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

একটি ম্যাট্রিক্সের ঋণাত্মক ম্যাট্রিক্স (Negative of a matrix) একটি ম্যাট্রিক্সের ঋণাত্মক ম্যাট্রিক্সকে $-A$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আমরা $-A = (-1)\,A$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করি।

উদাহরণ হিসেবে, ধরি, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, তখন – A হল

$$-A = (-1)A = (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের অন্তর (Difference of matrices) যদি $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ একই ক্রম তথা $m \times n$ ক্রমের দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A – B অন্তরটি একটি ম্যাট্রিক্স $D = [d_{ij}]$, দ্বারা নির্ধারণ করা হয়, যেখানে i এবং j এর সকল মানের জন্য $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ । অন্যভাবে, D = A – B = A + (–1) B অর্থাৎ ম্যাট্রিক্স A এবং ম্যাট্রিক্স – B এর সমষ্টি।

উদাহরণ 7 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে 2A – B নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 *ম্যাট্রিক্স যোগ প্রক্রিয়ার ধর্মাবলি (Properties of matrix addition)*

ম্যাট্রিক্স যোগ প্রক্রিয়া নিম্নলিখিত ধর্মাবলি সিদ্ধ করে ঃ

(i) **বিনিময় নিয়ম (Commutative Law)** যদি $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ একই ক্রম তথা $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়, তখন A + B = B + A।

এখন, $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (সংখ্যার যোগফল বিনিময় যোগ্য)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) **সংযোগ নিয়ম (Associative Law)** একই ক্রম তথা $m \times n$ ক্রমের তিনটি যে কোনো ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ এর ক্ষেত্রে, (A + B) + C = A + (B + C)।

এখন, $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (কেন?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) **যোগজ অভেদের অস্তিত্ব (Existence of additive identity)** মনে করো $A = [a_{ij}]$ একটি $m \times n$ ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স, তবে $A + O = O + A = A$ । অন্যভাবে বলা যায় O হল ম্যাট্রিক্সের যোগের ক্ষেত্রে যোগজ অভেদ।

(iv) **যোগজ বিপরীতের অস্তিত্ব (The existence of additive inverse)** মনে করো $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ যে কোনো একটি ম্যাট্রিক্স, তবে $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$ অপর একটি ম্যাট্রিক্স এরূপ যেন $A + (-A) = (-A) + A = O$ । সুতরাং, $-A$ হল A এর যোগজ বিপরীত অথবা A এর ঋণাত্মক।

3.4.4 *ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণনের ধর্মাবলি (Properties of scalar multiplication of a matrix)*

যদি $A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ একই ক্রম তথা $m \times n$ ক্রমের দুটি ম্যাট্রিক্স এবং k ও l দুটি স্কেলার রাশি হয়, তবে,

(i) $k(A + B) = kA + kB$, (ii) $(k + l)A = kA + lA$

(ii) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [(k a_{ij}) + (k b_{ij})]$$
$$= [k a_{ij}] + [k b_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$$

(iii) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$

$$= [(k + l)a_{ij}] + [k a_{ij}] + [l a_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] = kA + lA$$

উদাহরণ 8 যদি $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স X নির্ণয় করো, যখন $2A + 3X = 5B$ ।

সমাধান দেওয়া আছে $2A + 3X = 5B$

বা, $2A + 3X - 2A = 5B - 2A$

বা, $2A - 2A + 3X = 5B - 2A$ (ম্যাট্রিক্সের যোগের বিনিময় নিয়ম দ্বারা)

বা, $O + 3X = 5B - 2A$ ($-2A$ হল $2A$ এর যোগজ বিপরীত)

বা, $3X = 5B - 2A$ (O হল যোগজ অভেদ)

বা, $X = \frac{1}{3}(5B - 2A)$

বা, $X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 9 যদি $X+Y=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ এবং $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে X এবং Y নির্ণয় করো।

সমাধান দেওয়া আছে $(X+Y)+(X-Y)=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

বা, $(X+X)+(Y-Y)=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X=\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

বা, $X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

আবার, $(X+Y)-(X-Y)=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

বা, $(X-X)+(Y+Y)=\begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

বা, $Y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

উদাহরণ 10 নিম্নলিখিত সমীকরণ হতে x এবং y এর মান নির্ণয় করো :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

সমাধান দেওয়া আছে

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

বা, $\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

বা, $2x + 3 = 7$ এবং $2y - 4 = 14$ (কেন ?)

বা, $2x = 7 - 3$ এবং $2y = 18$

বা, $x = \frac{4}{2}$ এবং $y = \frac{18}{2}$

অর্থাৎ $x = 2$ এবং $y = 9$

উদাহরণ 11 দুইজন কৃষক রামকিষান এবং গুরুচরণ সিংহ বাসমতী, পারমল এবং নওরা নামে তিন প্রকারের ধানের চাষ করেন। সেপ্টেম্বর এবং অক্টোবর মাসে উভয় কৃষকের এই তিন প্রকারের ধানের বিক্রি (টাকায়) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স A ও B এর মাধ্যমে দেওয়া হল।

সেপ্টেম্বর মাসের বিক্রি (টাকায়)

	বাসমতী	পারমল	নওরা	
A =	10,000	20,000	30,000	রামকিষান
	50,000	30,000	10,000	গুরুচরণ সিংহ

অক্টোবর মাসের বিক্রি (টাকায়)

	বাসমতী	পারমল	নওরা	
B =	5000	10,000	6000	রামকিষান
	20,000	10,000	10,000	গুরুচরণ সিংহ

(i) সেপ্টেম্বর ও অক্টোবর মাসে প্রতিটি কৃষকের প্রতিটি প্রকারের মোট বিক্রির পরিমাণ নির্ণয় করো।

(ii) সেপ্টেম্বর থেকে অক্টোবরে বিক্রি কতটুকু হ্রাস পায় তা নির্ণয় করো।

(iii) যদি উভয় কৃষক মোট বিক্রির উপর 2% লাভ করে, তবে প্রত্যেকের প্রতিটি প্রকারের উপর অক্টোবর মাসের লাভ গণনা করো।

সমাধান

(i) সেপ্টেম্বর এবং অক্টোবর মাসে প্রত্যেক কৃষকের প্রতিটি প্রকারের মোট বিক্রি হল

	বাসমতী	পারমল	নওরা	
A + B =	15,000	30,000	36,000	রামকিষান
	70,000	40,000	20,000	গুরুচরণ সিংহ

(ii) সেপ্টেম্বর থেকে অক্টোবরে বিক্রয়ের পরিবর্তন হল

বাসমতী পারমল নওরা

$$A - B = \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{রামকিষান} \\ \text{গুরুচরণ সিংহ} \end{matrix}$$

(iii) B এর 2% $= \frac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

বাসমতী পারমল নওরা

$$= 0.02 \begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{রামকিষান} \\ \text{গুরুচরণ সিংহ} \end{matrix}$$

বাসমতী পারমল নওরা

$$= \begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{রামকিষান} \\ \text{গুরুচরণ সিংহ} \end{matrix}$$

এভাবে, অক্টোবর মাসে রামকিষাণের প্রতিটি প্রকার ধানের বিক্রির উপর প্রাপ্ত লাভ যথাক্রমে 100 টাকা, 200 টাকা এবং 120 টাকা; গুরুচরণ সিংহের প্রতিটি প্রকার ধানের বিক্রির উপর প্রাপ্ত লাভ যথাক্রমে 400 টাকা, 200 টাকা ও 200 টাকা।

3.4.5 *ম্যাট্রিক্সের গুণ (Multiplication of matrices)*

ধরো মীরা ও নাদিম দু'জন বন্ধু। মীরা 2 টি কলম এবং 5টি গল্পের বই কিনতে চায়, যখন নাদিমের 8টি কলম এবং 10 টি গল্পের বই দরকার। তারা উভয়েই একটি দোকানে দাম জানার জন্য গেল, দামগুলো নিম্নরূপ:

প্রতিটি কলমের দাম 5 টাকা, প্রতিটি গল্পের বইয়ের দাম 50 টাকা।

প্রত্যেকের কত টাকা খরচ করতে হবে? স্পষ্টতই, মীরার প্রয়োজন $(5 \times 2 + 50 \times 5)$ টাকা অর্থাৎ 260 টাকা, যখন নাদিমের প্রয়োজন $(8 \times 5 + 50 \times 10)$ টাকা, অর্থাৎ 540 টাকা। উপরোক্ত তথ্যগুলোকে ম্যাট্রিক্স উপস্থাপনার মাধ্যমে নিম্নরূপ লিখতে পারি।

প্রয়োজনীয়তা **প্রতিটির দাম (টাকায়)** **প্রয়োজনীয় অর্থ (টাকায়)**

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 \\ 8\times5+10\times50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$$

ধরো যে তারা অন্য একটি দোকানে দাম যাচাই করল, দামগুলো নিম্নরূপ:

প্রতিটি কলমের দাম 4 টাকা, প্রতিটি গল্পের বইয়ের দাম 40 টাকা।

প্রতিটি গল্পের বইয়ের দাম 40 টাকা। এখন মীরা আর নাদিমের দ্বারা কেনার জন্য প্রয়োজনীয় অর্থরাশির পরিমাণ যথাক্রমে $(4 \times 2 + 40 \times 5)$ টাকা $=$ 208 টাকা এবং $(8 \times 4 + 10 \times 40)$ টাকা $=$ 432 টাকা।

আবার, উপরোক্ত তথ্য নিম্নরূপে উপস্থাপন করা যায়:

প্রয়োজনীয়তা	**প্রতিটির দাম (টাকায়)**	**প্রয়োজনীয় অর্থ (টাকায়)**
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\times2+40\times5 \\ 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

এখন, উভয়ক্ষেত্রের তথ্যগুলোকে যুক্ত করা যায় এবং ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়:

প্রয়োজনীয়তা	**প্রতিটির দাম (টাকায়)**	**প্রয়োজনীয় অর্থ (টাকায়)**
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times2+5\times50 & 4\times2+40\times5 \\ 8\times5+10\times50 & 8\times4+10\times40 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$$

উপরের বিবরণটি ম্যাট্রিক্স গুণনের একটি উদাহরণ। আমরা লক্ষ করেছি যে, A এবং B ম্যাট্রিক্সের গুণনের জন্য, A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভের সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান হতে হবে। তাছাড়াও ম্যাট্রিক্সগুণনের উপাদানগুলো পাওয়ার জন্য, আমরা A এর সারিগুলো এবং B এর স্তম্ভগুলো উপাদান অনুসারে গুণ করি এবং এদের যোগ করি। প্রচলিত অর্থে, আমরা ম্যাট্রিক্সের গুণনকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করি:

দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B এর গুণফল নির্ধারণ করা যায় যদি A এর স্তম্ভের সংখ্যা B এর সারির সংখ্যার সমান হয়। মনে করি $A = [a_{ij}]$ হল একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স এবং $B = [b_{jk}]$ হল একটি $n \times p$ ম্যাট্রিক্স, তবে A এবং B ম্যাট্রিক্সগুলোর গুণফল হল $m \times p$ ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স C। ম্যাট্রিক্স C এর (i, k) তম উপাদান c_{ik} পেতে, আমরা A এর i -তম সারি এবং B এর k তম স্তম্ভ উপাদান অনুসারে গুণ করি এবং গুণফলগুলোর যোগফল নির্ণয় করি। অন্যভাবে বলা যায়, যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{jk}]_{n\times p}$, হয়, তখন A এর i তম সারিটি হল $[a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}]$ এবং B এর k তম স্তম্ভটি হল $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}$, তখন $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ । ম্যাট্রিক্স $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ হল A ও B এর গুণফল।

উদাহরণ হিসেবে, যদি $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, তখন গুণফল CD নির্ণয় করা যায় এবং

গুণফলটি হল $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

এটি হল একটি 2 × 2 ম্যাট্রিক্স যার প্রতিটি উপাদান C এর কোনো সারির উপাদানগুলো এবং D এর কোনো স্তম্ভের অনুরূপ উপাদানগুলোর গুণফলের সমষ্টি। এই চারটি গণনা হল

প্রথম সারি প্রথম স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(-1)+(2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$

প্রথম সারি দ্বিতীয় স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7)+(-1)(1)+2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$

দ্বিতীয় সারি প্রথম স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2)+3(-1)+4(5) & ? \end{bmatrix}$

দ্বিতীয় সারি দ্বিতীয় স্তম্ভে লিপিবদ্ধ সংখ্যাগুলো $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7)+3(1)+4(-4) \end{bmatrix}$

এভাবে $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

উদাহরণ 12 AB নির্ণয় করো, যদি $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ হয়।

সমাধান ম্যাট্রিক্স A এর দুটি স্তম্ভ আছে যা B এর সারির সংখ্যার সমান। সুতরাং AB নির্ণয় যোগ্য। এখন

$$AB = \begin{bmatrix} 6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8) \\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix}$$

মন্তব্য যদি AB নির্ণয়যোগ্য হয়, তখন BA নির্ণয়যোগ্য নাও হতে পারে। উপরের উদাহরণে AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয় কারণ B এর 3 টি স্তম্ভ আছে যেখানে A এর মাত্র 2 টি (3 নয়) সারি আছে। যদি A, B যথাক্রমে $m \times n, k \times l$ ম্যাট্রিক্স হয়, তখন AB এবং BA উভয়েই নির্ণয়যোগ্য **যদি এবং শুধুমাত্র যদি** $n = k$ এবং $l = m$ হয়। বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি A ও B উভয়েই একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তখন AB এবং BA উভয়েই নির্ণয়যোগ্য।

ম্যাট্রিক্স গুণনে বিনিময়যোগ্যতার অমান্যতা (Non-commutativity of multiplication of matrices)

এখন, একটি উদহারণের সাহায্যে আমরা দেখব যে যদিও AB এবং BA উভয়েই নির্ণয়যোগ্য, এটি প্রয়োজনীয় নয় যে AB = BA।

উদাহরণ 13 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, তখন AB, BA নির্ণয় করো।

দেখাও যে $AB \neq BA$।

সমাধান যেহেতু A হল 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং B হল 3×2 ম্যাট্রিক্স। সুতরাং, AB এবং BA উভয়েই নির্ণয়যোগ্য এবং যথাক্রমে 2×2 এবং 3×3 ক্রমের তালিকা। লক্ষ করো যে,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-8+6 & 3-10+3 \\ -8+8+10 & -12+10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

এবং
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-12 & -4+6 & 6+15 \\ 4-20 & -8+10 & 12+25 \\ 2-4 & -4+2 & 6+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 2 & 21 \\ -16 & 2 & 37 \\ -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

স্পষ্টতই $AB \neq BA$

উপরের উদাহরণে AB এবং BA উভয়েই ভিন্ন ক্রমের, সুতরাং, $AB \neq BA$। কিন্তু, কেউ মনে করতে পারে AB এবং BA সম্ভবত সমান হতে পারে যদি এদের ক্রম একই হয়। তবে এটি তেমন নয়, এখানে আমরা একটি উদাহরণের সাহায্যে দেখাব যে যদিও AB এবং BA একই ক্রমের, তারা সমান নাও হতে পারে।

উদাহরণ 14 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তখন $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

এবং $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ স্পষ্টতই $AB \neq BA$

এভাবে, ম্যাট্রিক্সের গুণন বিনিময়যোগ্য নয়।

> **☞ দ্রষ্টব্য** এর অর্থ এই নয় যে প্রতি জোড়া ম্যাট্রিক্স A, B এর জন্য AB ≠ BA যেখানে AB এবং BA নির্ণয়যোগ্য। উদাহরণস্বরূপ,
>
> যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, তখন $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
>
> লক্ষ করো যে একই ক্রমের কর্ণ ম্যাট্রিক্স বিনিময়যোগ্য হবে।

দুটি অশূন্য ম্যাট্রিক্সের গুণফল যখন শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero matrix as the product of two non zero matrices)

আমরা জানি যে, বাস্তব সংখ্যা a, b এর জন্য যদি $ab = 0$ হয়, তখন হয় $a = 0$ অথবা $b = 0$ । এটি ম্যাট্রিক্সের জন্য সত্য হওয়ার প্রয়োজন নেই। একটি উদাহরণের সাহায্যে আমরা এটি লক্ষ করব।

উদাহরণ 15 AB নির্ণয় করো, যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$।

সমাধান দেওয়া আছে $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$।

এভাবে, যদি দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স হয়, এটি প্রয়োজনীয় নয় যে, ম্যাট্রিক্সগুলোর মধ্যে একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স।

3.4.6 *ম্যাট্রিক্স গুণনের ধর্মাবলি (Properties of multiplication of matrices)*

ম্যাট্রিক্সের গুণন নিম্নলিখিত ধর্মগুলো মেনে চলে, যা আমরা প্রমাণ ছাড়া উল্লেখ করছি।

1. **সংযোগ নিয়ম (associative law)** যেকোনো তিনটি ম্যাট্রিক্স A, B এবং C এর জন্য আমরা পাই, (AB) C = A (BC) যেখানে সমতার উভয় পার্শ্বই সংজ্ঞাত।
2. **বণ্টন নিয়ম (distributive law)** তিনটি ম্যাট্রিক্স A, B এবং C এর জন্য
   (i) A (B+C) = AB + AC
   (ii) (A+B) C = AC + BC, যেখানে সমতার উভয় পার্শ্বই সংজ্ঞাত।
3. **গুণজ অভেদের অস্তিত্ব (existence of multiplicative identity)** প্রত্যেক বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য, একই ক্রমের একটি অভেদ ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব আছে যেখানে IA = AI = A ।

এখন, এই ধর্মগুলো আমরা উদাহরণের সাহায্যে যাচাই করব।

উদাহরণ 16 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A(BC), (AB)C নির্ণয় করো এবং দেখাও যে (AB)C = A(BC)।

সমাধান আমরা পাই $AB=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+1&3+2-4\\2+0-3&6+0+12\\3+0-2&9-2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{bmatrix}$

$$(AB)\ (C)=\begin{bmatrix}2&1\\-1&18\\1&15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2&4+0&6-2&-8+1\\-1+36&-2+0&-3-36&4+18\\1+30&2+0&3-30&-4+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&4&4&-7\\35&-2&-39&22\\31&2&-27&11\end{bmatrix}$$

এখন, $BC=\begin{bmatrix}1&3\\0&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\2&0&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6&2+0&3-6&-4+3\\0+4&0+0&0-4&0+2\\-1+8&-2+0&-3-8&4+4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7&2&-3&-1\\4&0&-4&2\\7&-2&-11&8\end{bmatrix}$$

অতএব, $A(BC)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&3\\3&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&2&-3&-1\\4&0&-4&2\\7&-2&-11&8\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7+4-7&2+0+2&-3-4+11&-1+2-8\\14+0+21&4+0-6&-6+0-33&-2+0+24\\21-4+14&6+0-4&-9+4-22&-3-2+16\end{bmatrix}$$

$=\begin{bmatrix}4&4&4&-7\\35&-2&-39&22\\31&2&-27&11\end{bmatrix}$ । স্পষ্টতই, $(AB)\ C=A\ (BC)$

উদাহরণ 17 যদি $A=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

হয়, তাহলে AC, BC এবং (A + B)C নির্ণয় করো। আরো, যাচাই করো যে (A + B)C = AC + BC

সমাধান এখন, $A+B=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

সুতরাং, $$(A+B)\,C=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

আবার, $$AC=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

এবং $$BC=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $$AC+BC=\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

স্পষ্টতই, $$(A+B)\,C=AC+BC$$

উদাহরণ 18 যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে $A^3-23A-40\,I=O$

সমাধান আমরা পাই $$A^2=A.A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

এখন,

$$A^3 - 23A - 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} - 23\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 40\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

উদাহরণ 19 একটি বিধানসভা নির্বাচনে কোনো রাজনৈতিক দল তার প্রার্থীকে তিনটি উপায়ে যেমন টেলিফোনের মাধ্যমে, বাড়ি-বাড়ি গিয়ে এবং চিঠির মাধ্যমে প্রচার করার জন্য একটি জনসংযোগ সংস্থাকে নিযুক্ত করল। প্রতিটি যোগাযোগের জন্য খরচ (পয়সায়) ম্যাট্রিক্স A আকারে নিম্নে দেওয়া হল ঃ

প্রতিটি যোগাযোগের জন্য খরচ

$$A = \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{টেলিফোনের মাধ্যমে} \\ \text{বাড়ি-বাড়ি গিয়ে} \\ \text{চিঠির মাধ্যমে} \end{matrix}$$

দুটি শহর X এবং Y -এ প্রতি ধরনের যোগাযোগের সংখ্যা নিম্নে দেওয়া হল

টেলিফোন বাড়ি বাড়ি গিয়ে চিঠির মাধ্যমে

$$B = \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

দুটি শহর X এবং Y -এ ঐ দল দ্বারা মোট ব্যয়ের পরিমাণ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to X \\ \to Y \end{matrix}$$

সুতরাং দুটি শহরে ঐ দল দ্বারা মোট ব্যয়ের পরিমাণ যথাক্রমে 340,000 পয়সা এবং 720,000 পয়সা অর্থাৎ 3400 টাকা এবং 7200 টাকা

অনুশীলনী 3.2

1. ধরো $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

নিম্নের প্রতিটি নির্ণয় করো :

(i) A + B (ii) A – B (iii) 3A – C

(iv) AB (v) BA

2. নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো:

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. নির্দেশিত গুণফলগুলো নির্ণয় করো।

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \quad 3 \quad 4]$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ হয়, তাহলে (A+B) এবং (B – C) নির্ণয় করো। এছাড়াও যাচাই করো যে, $A+(B-C)=(A+B)-C$।

5. যদি $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3}\\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$ হয়, তবে 3A – 5B নির্ণয় করো।

6. সরল করো ঃ $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

7. X এবং Y নির্ণয় করো, যদি

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ এবং $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ এবং $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

8. X নির্ণয় করো, যদি $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ এবং $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$ হয়।

9. x এবং y নির্ণয় করো, যদি $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$ হয়।

10. সমীকরণটি সমাধান করে x, y, z এবং t, নির্ণয় করো, যদি $2\begin{bmatrix}x & z\\ y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ হয়।

11. যদি $x\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$ হয়, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।

12. দেওয়া আছে, $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$;x, y, z এবং w এর মান নির্ণয় করো।

13. যদি $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ হয় তবে দেখাও যে, $F(x)\,F(y)=F(x+y)$ ।

14. দেখাও যে,

(i) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

15. যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ হয়, তবে $A^2-5A+6I$ এর মান নির্ণয় করো।

16. যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $A^3-6A^2+7A+2I=0$

17. যদি $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ এবং $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তবে k এর মান নির্ণয় করো যেখানে $A^2=kA-2I$

18. যদি $A=\begin{bmatrix}0 & -\tan\dfrac{\alpha}{2}\\ \tan\dfrac{\alpha}{2} & 0\end{bmatrix}$ এবং I একটি 2য় ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স হয় তবে দেখাও যে

$$I+A=(I-A)\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

19. একটি ট্রাস্ট তহবিলে 30,000 টাকা রয়েছে, যা অবশ্যই দুটি বিভিন্ন ধরনের বন্ডে বিনিয়োগ করতে হবে। প্রথম বন্ড বার্ষিক 5% হারে সুদ দেয় এবং দ্বিতীয় বন্ড বার্ষিক 7% হারে সুদ দেয়। ম্যাট্রিক্সের গুণন ব্যবহার করে নির্ধারণ করো যে কীভাবে দুই ধরনের বন্ডের মধ্যে 30,000 টাকা ভাগ করা যায়। যদি ট্রাস্ট তহবিলের প্রাপ্ত বার্ষিক সুদের পরিমাণ অবশ্যই (a) 1800 টাকা (b) 2000 টাকা হয়।

20. একটি নির্দিষ্ট বিদ্যালয়ের বইয়ের দোকানে 10 ডজন রসায়ন বই, 8 ডজন পদার্থ বিজ্ঞানের বই, 10 ডজন অর্থনীতির বই রয়েছে। এদের প্রতিটির বিক্রয়মূল্য যথাক্রমে 80 টাকা, 60 টাকা এবং 40 টাকা। ম্যাট্রিক্স বীজগণিত ব্যবহার করে নির্ণয় করো যে সমস্ত বই বিক্রি করে বইয়ের দোকানদার কী পরিমাণ অর্থ পাবে।

মনে করো X, Y, Z, W এবং P হল যথাক্রমে $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ এবং $p \times k$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স অনুশীলনীর 21ও 22 নং প্রশ্ন থেকে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

21. PY + WY সংজ্ঞাত হওয়ার জন্য n, k এবং p এর সীমাবদ্ধতা হল :

(A) $k = 3, p = n$ (B) k হল যদৃচ্ছ (arbitrary), $p = 2$

(C) p হল যদৃচ্ছ, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. যদি $n = p$ হয়, তবে ম্যাট্রিক্স 7X – 5Z এর ক্রম হল :

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. একটি ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স এবং বিশেষ ধরনের ম্যাট্রিক্স যেমন প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জানব।

সংজ্ঞা 3 যদি $A = [a_{ij}]$ একটি $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A এর সারি এবং স্তম্ভগুলো পরস্পর স্থান বিনিময় করলে যে ম্যাট্রিক্সটি গঠিত হয়, তাকে A এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স বলে। A এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সকে A′ অথবা (A^T) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি অন্যভাবে বলা যায়, যদি $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ হয়, তবে $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ । উদাহরণ হিসেবে, যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3\times 2}$ হয়, তবে $A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2\times 3}$

3.5.1 পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সের ধর্মাবলি (Properties of transpose of the matrices)

এখন আমরা প্রমাণ ছাড়া নিম্নলিখিত পরিবর্ত ম্যাট্রিক্সগুলোর ধর্মাবলি উল্লেখ করব। এই ধর্মগুলো উপযুক্ত উদাহরণের সাহায্যে যাচাই করা যেতে পারে। A ও B এর উপযুক্ত ক্রমের যেকোনো ম্যাট্রিক্সের জন্য, আমরা পাই

(i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$ (যেখানে k যেকোনো ধ্রুবক)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(A\,B)' = B'\,A'$

উদাহরণ 20 যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে যাচাই করো যে

(i) $(A')' = A$, (ii) $(A + B)' = A' + B'$, (iii) $(kB)' = kB'$, যেখানে k যে কোনো ধ্রুবক।

সমাধান

(i) আমরা পাই

$$A=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix}3 & 4\\ \sqrt{3} & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (A')'=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}=A$$

এইভাবে $(A')' = A$

(ii) আমরা পাই

$$A=\begin{bmatrix}3 & \sqrt{3} & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}5 & \sqrt{3}-1 & 4\\ 5 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

অতএব, $$(A+B)'=\begin{bmatrix}5 & 5\\ \sqrt{3}-1 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

এখন, $$A'=\begin{bmatrix}3 & 4\\ \sqrt{3} & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ B'=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},$$

সুতরাং, $$A'+B'=\begin{bmatrix}5 & 5\\ \sqrt{3}-1 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$$

এইভাবে $(A+B)' = A' + B'$

(iii) আমরা পাই

$$kB = k\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k & -k & 2k\\ k & 2k & 4k\end{bmatrix}$$

এজন্য, $$(kB)' = \begin{bmatrix}2k & k\\ -k & 2k\\ 2k & 4k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=kB'$$

এইভাবে $(kB)' = kB'$

উদাহরণ 21 যদি $A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$ হয়, তবে $(AB)'=B'A'$।

সমাধান আমরা পাই

$$A=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

তখন
$$AB=\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 12\\4 & 12 & -24\\5 & 15 & -30\end{bmatrix}$$

এখন
$$A'=[-2\ 4\ 5],\ B'=\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}$$

$$B'A'=\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 5\\-6 & 12 & 15\\12 & -24 & -30\end{bmatrix}=(AB)'$$

স্পষ্টতই $(AB)'=B'A'$

3.6 প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

সংজ্ঞা 4 একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A=[a_{ij}]$ কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি $A'=A$ হয়, অর্থাৎ i ও j এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য $[a_{ij}]=[a_{ji}]$

উদাহরণ হিসেবে $A=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 2 & 3\\2 & -1.5 & -1\\3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, যেহেতু $A'=A$

সংজ্ঞা 5 একটি বর্গম্যাট্রিক্স $A=[a_{ij}]$কে *বিপ্রতিসম* ম্যাট্রিক্স, বলা হবে যদি $A'=-A$ হয়, অর্থাৎ i ও j এর সম্ভাব্য মানের জন্য $a_{ji}=-a_{ij}$ । এখন যদি আমরা $i=j$ বসাই, আমরা পাই $a_{ii}=-a_{ii}$ । অতএব $2a_{ii}=0$ বা $a_{ii}=0$, i -এর সকল মানের জন্য।

এটি বোঝায় যে একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের কর্ণের সকল উপাদানগুলো শূন্য হবে।

উদাহরণ হিসেবে, ম্যাট্রিক্স $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স যেহেতু $B' = -B$

এখন, আমরা প্রতিসম ও বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের কিছু ফলাফল প্রমাণ করব।

উপপাদ্য 1 বাস্তব সংখ্যা যুক্ত যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর জন্য, $A + A'$ হল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $A - A'$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

প্রমাণ ধরো $B = A + A'$, তখন

$$\begin{aligned} B' &= (A + A')' \\ &= A' + (A')' \text{ (যেহেতু } (A + B)' = A' + B') \\ &= A' + A \text{ (যেহেতু } (A')' = A) \\ &= A + A' \text{ (যেহেতু } A + B = B + A) \\ &= B \end{aligned}$$

সুতরাং, $B = A + A'$ হল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

এখন, ধরো, $C = A - A'$

$$\begin{aligned} C' &= (A - A')' = A' - (A')' \quad \text{(কেন ?)} \\ &= A' - A \quad \text{(কেন ?)} \\ &= -(A - A') = -C \end{aligned}$$

সুতরাং, $C = A - A'$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

উপপাদ্য 2 যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সকে একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যায়।

প্রমাণ ধরো, A হল একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

উপপাদ্য 1 হতে, আমরা জানি যে, $(A + A')$ হল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $(A - A')$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। যেহেতু যেকোনো ম্যাট্রিক্স A এর জন্য $(kA)' = kA'$, এটি থেকে পাই যে $\frac{1}{2}(A + A')$ হল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $\frac{1}{2}(A - A')$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স । এইভাবে, কোনো বর্গম্যাট্রিক্সকে একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 22 ম্যাট্রিক্স $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ কে একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করো।

সমাধান এখানে,

$$B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ধরো, $$P = \frac{1}{2}(B + B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

এখন, $$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

এইভাবে, $P = \frac{1}{2}(B + B')$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

আবার, ধরো $$Q' = \frac{1}{2}(B - B) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

তখন, $$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

এইভাবে, $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

এখন, $$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

এইভাবে, B কে একটি প্রতিসম ও একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি রূপে উপস্থাপন করা হয়।

অনুশীলনী 3.3

1. নিম্নলিখিত প্রতিটি ম্যাট্রিক্স-এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো :

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. যদি $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে যাচাই করো যে,

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

3. যদি $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে যাচাই করো যে,

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

4. যদি $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $(A + 2B)'$ নির্ণয় করো।

5. A এবং B ম্যাট্রিক্সগুলোর জন্য যাচাই করো যে $(AB)' = B'A'$, যেখানে

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. যদি (i) $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$ হয়, তবে যাচাই করো যে, $A'A=I$

(ii) যদি $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ হয়, তবে যাচাই করো যে, $A'A=I$

7. (i) দেখাও যে ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ -1 & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ হল একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(ii) দেখাও যে ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ হল একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

8. ম্যাট্রিক্স $A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}$ এর জন্য, যাচাই করো যে

(i) $(A+A')$ হল প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

(ii) $(A-A')$ হল বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

9. নির্ণয় করো, $\frac{1}{2}(A+A')$ এবং $\frac{1}{2}(A-A')$, যখন $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}$

10. নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলো একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করো:

(i) $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix}1 & 5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

11 ও 12 নং প্রশ্নে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

11. যদি A এবং B একই ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে AB – BA হল একটি

(A) বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (B) প্রতিসম ম্যাট্রিক্স

(C) শূন্য ম্যাট্রিক্স (D) অভেদ ম্যাট্রিক্স

12. যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ এবং $A + A' = I$ হয়, তাহলে α এর মান হল

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক প্রক্রিয়া (রূপান্তর) (Elementary Operation (Transformation) of a Matrix)

একটি ম্যাট্রিক্সের ছয়টি প্রক্রিয়া (রূপান্তর) হয়, এরমধ্যে তিনটি সারি বরাবর এবং তিনটি স্তম্ভ বরাবর, এগুলো *প্রাথমিক প্রক্রিয়া বা রূপান্তর* হিসাবে পরিচিত।

(i) *যেকোনো দুটি সারি অথবা দুটি স্তম্ভের মধ্যে পরস্পর স্থান বিনিময়* সাংকেতিকভাবে i তম এবং j তম স্তম্ভের পরস্পর স্থান বিনিময় $R_i \leftrightarrow R_j$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় এবং i তম ও j তম স্তম্ভের পরস্পর স্থান বিনিময় $C_i \leftrightarrow C_j$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ এ $R_1 \leftrightarrow R_2$ প্রয়োগ করে আমরা পাই $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$।

(ii) *যেকোনো সারি অথবা স্তম্ভের উপাদানগুলোকে একটি অশূন্য সংখ্যা দ্বারা গুণন* সাংকেতিকভাবে, i তম সারির প্রতিটি উপাদানকে k দ্বারা গুণন $R_i \to kR_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $k \neq 0$।

অনুরূপে স্তম্ভ প্রক্রিয়াটি $C_i \to k\,C_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ হিসেবে $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$-এ $C_3 \to \frac{1}{7}C_3$ প্রয়োগ করে আমরা পাই $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

(iii) *যেকোনো সারি অথবা স্তম্ভের উপাদানগুলোর সঙ্গে অপর একটি সারি অথবা স্তম্ভের অনুরূপ উপাদানগুলোকে একটি অশূন্য সংখ্যা দ্বারা গুণ করে যোগ করা* সাংকেতিকভাবে, j তম সারির উপাদানগুলোকে k দ্বারা গুণ করে i তম সারির অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ করাকে $R_i \to R_i + k\,R_j$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুরূপে স্তম্ভ প্রক্রিয়াটি $C_i \to C_i + kC_j$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ হিসেবে, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ এ $R_2 \to R_2 - 2R_1$ প্রয়োগ করে আমরা পাই $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$।

3.8 বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স (Invertible Matrices)

সংজ্ঞা 6 যদি A, m ক্রমের একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং যদি একই ক্রম m -এর অপর একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স B -এর অস্তিত্ব থাকে, যেখানে AB = BA = I, তবে B কে ম্যাট্রিক্স A -এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এটিকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে, A কে বলা হয় বিপরীতকরণযোগ্য।

উদাহরণস্বরূপ, ধরো $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হল দুটি ম্যাট্রিক্স।

এখন
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

আবার $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$। এইভাবে B হল A -এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স, অন্যভাবে বলা যায় $B = A^{-1}$ এবং A হল B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স, অর্থাৎ, $A = B^{-1}$

মন্তব্য

1. একটি আয়তকার ম্যাট্রিক্স একটি বিপরীত ম্যাট্রিক্স হতে পারে না। যেহেতু BA এবং AB গুণফলগুলো সংজ্ঞাত এবং সমান হতে হবে, এটি আবশ্যক যে A এবং B একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে।
2. যদি B, Aএর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয় তখন Aও, B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়।

উপপাদ্য 3 বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অনন্যতা (Uniqueness of inverse) যদি বিপরীত বর্গ ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকে, তবে এটি অনন্য।

প্রমাণ ধরো $A = [a_{ij}]$ একটি m ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স। যদি সম্ভব হয়, ধরো A এর দুটি বিপরীত ম্যাট্রিক্স হল B এবং C । আমরা দেখাব যে B = C।

যেহেতু, B হল A এর বিপরীত $\quad AB = BA = I \quad \ldots (1)$

যেহেতু C ও হল A এর বিপরীত $\quad AC = CA = I \quad \ldots (2)$

অতএব, $\quad B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$

উপপাদ্য 4 যদি A এবং B একই ক্রমের বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$।

প্রমাণ বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা হতে আমরা জানি

$$(AB)\,(AB)^{-1} = 1$$

বা, $A^{-1}\,(AB)\,(AB)^{-1} = A^{-1}I$ (উভয়দিকে A^{-1} দ্বারা পূর্বগুণন করে)

বা, $(A^{-1}A)\,B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$ (যেহেতু $A^{-1}\,I = A^{-1}$)

বা, $IB\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

বা, $B\,(AB)^{-1} = A^{-1}$

বা, $B^{-1}\,B\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

বা, $I\,(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

অতএব $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

3.8.1 *প্রাথমিক প্রক্রিয়া দ্বারা একটি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse of a matrix by elementary operations)*

ধরো, X, A এবং B একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স যেখানে X = AB। ম্যাট্রিক্স সমীকরণ X = AB এ ক্রমিক প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া প্রয়োগ করার জন্য, এই সারি প্রক্রিয়াগুলো একই সঙ্গে X এবং ডানপক্ষের গুণফল AB এর প্রথম ম্যাট্রিক্স A এর উপর আমরা প্রয়োগ করব।

অনুরূপে ম্যাট্রিক্স সমীকরণ X = AB -এ ক্রমিক প্রাথমিক স্তম্ভ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করার জন্য, এই প্রক্রিয়াগুলো একই সঙ্গে X এবং ডানপক্ষের গুণফল ABএর দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স B -এর উপর আমরা প্রয়োগ করব।

উপরোক্ত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে, আমরা সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, যখন A^{-1} সংজ্ঞাত, তখন প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়া ব্যবহার করে A^{-1} নির্ণয় করার জন্য A = IA লিখবে এবং ক্রমিক সারি প্রক্রিয়া A = IA এ প্রয়োগ করা হবে, যতক্ষণ না আমরা I = BA পাই। ম্যাট্রিক্স B হবে A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স। অনুরূপে, যদি আমরা স্তম্ভ প্রক্রিয়াগুলো ব্যবহার করে A^{-1} নির্ণয় করতে চাই তখন A = AI লিখবে এবং ক্রমিক স্তম্ভ প্রক্রিয়া A = AI এ প্রয়োগ করাহবে, যতক্ষণ না আমরা I = AB পাই।

মন্তব্য এই ক্ষেত্রে, এক বা ততোধিক প্রাথমিক সারি (স্তম্ভ) প্রক্রিয়াগুলো A = IA (A = AI) এ প্রয়োগ করে, যদি আমরা ম্যাট্রিক্স A এর বামপক্ষের এক বা ততোধিক সারির সকল উপাদানগুলো শূন্য পাই, তখন A^{-1} অসংজ্ঞাত।

উদাহরণ 23 প্রাথমিক প্রক্রিয়া ব্যবহার করে, ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

সমাধান প্রাথমিক সারি প্রক্রিয়াগুলো ব্যবহার করার জন্য, আমরা লিখতে পারি A = IA।

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$, তাহলে $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to R_2 - 2R_1$ প্রয়োগ করে)

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ ($R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$ প্রয়োগ করে)

বা, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A$ ($R_1 \to R_1 - 2R_2$ প্রয়োগ করে)

এইভাবে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

বিকল্পভাবে, প্রাথমিক স্তম্ভ প্রক্রিয়াগুলো ব্যবহার করার জন্য আমরা $A = AI$ লিখব, অর্থাৎ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

এখন, $C_2 \to -\frac{1}{5}C_2$ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

সর্বশেষে, $C_1 \to C_1 - 2C_2$ প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

অতএব, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$

উদাহরণ 24 প্রাথমিক প্রক্রিয়া ব্যবহার করে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}।$$

সমাধান আমরা জানি A = I A, অর্থাৎ, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_1 \leftrightarrow R_2 \text{ প্রয়োগ করে})$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \text{ প্রয়োগ করে })$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \text{ প্রয়োগ করে })$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \rightarrow R_3 + 5R_2 \text{ প্রয়োগ করে })$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_3 \rightarrow \frac{1}{2} R_3 \text{ প্রয়োগ করে })$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \text{ প্রয়োগ করে })$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 3 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 - 2R_3 \text{ প্রয়োগ করে })$$

অতএব, $$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 3 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

বিকল্পভাবে, আমরা জানি $A = AI$, অর্থাৎ,

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 - 2C_1)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 + C_2)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \quad (C_3 \to \frac{1}{2}\, C_3)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -5 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}-2 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ -4 & 0 & -1\\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 3 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 - 3C_3)$$

অতএব, $$A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 3 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

উদাহরণ 25 দেওয়া আছে $P = \begin{bmatrix}10 & -2\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ P^{-1} নির্ণয় করো, যদি এটির অস্তিত্ব থাকে।

সমাধান আমরা জানি P = I P, অর্থাৎ, $\begin{bmatrix}10 & -2\\ -5 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}P$

বা, $$\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{5}\\ -5 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}P \quad \left(R_1 \to \frac{1}{10}R_1 \text{ প্রয়োগ করে}\right)$$

বা, $$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_2 \to R_2 + 5R_1 \text{ প্রয়োগ করে })$$

আমরা পাই উপরে সমীকরণের বামপক্ষের ম্যাট্রিক্সটির দ্বিতীয় সারির সবগুলো উপাদান শূন্য। সুতরাং, P^{-1} এর অস্তিত্ব নেই।

অনুশীলনী 3.4

প্রাথমিক রূপান্তর ব্যবহার করে 1 নং হতে 17 নং প্রশ্নের প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করো, যদি এদের অস্তিত্ব থাকে।

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. ম্যাট্রিক্স A এবং B পরস্পর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হবে, শুধুমাত্র যদি

(A) AB = BA (B) AB = BA = 0

(C) AB = 0, BA = I (D) AB = BA = I

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 26 যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, যখন $n \in \mathbf{N}$।

সমাধান আমরা ফলাফলটি গণিতের আরোহণ ধর্ম ব্যবহার করে প্রমাণ করব।

আমরা জানি $P(n)$: যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, তবে $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, যখন $n \in \mathbf{N}$

$$P(1): \ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ সুতরাং } A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

সুতারাং, ফলাফলটি $n = 1$ মানের জন্য সত্য।

ধরো ফলাফলটি $n = k$ মানের জন্য সত্য।

সুতরাং, $$P(k): \ A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ তবে } A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

এখন, আমরা প্রমাণ করব যে, ফলাফলটি $n = k + 1$ মানের জন্য সিদ্ধ হয়।

এখন, $$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

অতএব, ফলাফলটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হয়। এইভাবে, গণিতের আরোহণ ধর্ম হতে, আমরা পাই সকল স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ সিদ্ধ হয়।

উদাহরণ 27 যদি A এবং B একই ক্রমের প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তখন AB প্রতিসম হয়, যদি এবং কেবলমাত্র যদি A এবং B বিনিময়যোগ্য হয়, অর্থাৎ $AB = BA$ হয়।

সমাধান যেহেতু A এবং B উভয়ই প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, সুতরাং, $A' = A$ এবং $B' = B$ ।

ধরো, AB হল প্রতিসম, তখন $(AB)' = AB$

কিন্তু $(AB)' = B'A' = BA$ (কেন ?)

সুতরাং, $BA = AB$

বিপরীতভাবে, যদি AB = BA, তবে আমরা দেখাব যে, AB হল প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

এখন, $(AB)' = B'A'$

$= BA$ (যেহেতু A এবং B প্রতিসম ম্যাট্রিক্স)

$= AB$

অতএব, AB হল প্রতিসম।

উদাহরণ 28 ধরো $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$। এমন একটি ম্যাট্রিক্স D নির্ণয় করো যেন CD – AB = O হয়।

সমাধান যেহেতু A, B, C সবগুলো দ্বিতীয় ক্রম এর বর্গম্যাট্রিক্স এবং CD – AB স্পষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত, তাই D অবশ্যই দ্বিতীয় ক্রম এর বর্গ ম্যাট্রিক্স।

ধরো, $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$। তাহলে CD – AB = 0 হতে পাই,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = O$$

বা, $$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

বা, $$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সের সমতা হতে আমরা পাই,

$$2a + 5c - 3 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$3a + 8c - 43 = 0 \quad \text{... (2)}$$

$$2b + 5d = 0 \quad \text{... (3)}$$

এবং $$3b + 8d - 22 = 0 \quad \text{... (4)}$$

(1) নং এবং (2) নং সমাধান করে আমরা পাই $a = -191, c = 77$ । (3) নং এবং (4) নং সমাধান করে আমরা পাই $b = -110, d = 44$ ।

অতএব, $$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

অধ্যায় 3 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. ধরো $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, দেখাও যে $(a\text{I} + b\text{A})^n = a^n \text{I} + na^{n-1} b\text{A}$, যেখানে I হল দ্বিতীয় ক্রম এর একটি একক ম্যাট্রিক্স এবং $n \in \mathbf{N}$।

2. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, প্রমাণ করো যে, $A^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$ ।

3. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $A^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$, যেখানে n হল যে কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

4. যদি A এবং B প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে প্রমাণ করো যে AB – BA একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

5. যদি A প্রতিসম অথবা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে দেখাও যে $B'AB$ প্রতিসম অথবা বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়।

6. যদি ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ সমীকরণ $A'A = I$ কে সিদ্ধ করে তবে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় করো।

7. x এর কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ হয় ?

8. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, দেখাও যে $A^2 - 5A + 7I = 0$।

9. যদি $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।

10. একজন প্রস্তুতকারক তিন ধরনের দ্রব্য x, y, z তৈরি করেন, যা সে দুটি বাজারে বিক্রি করেন। বার্ষিক বিক্রি নিম্নে দেওয়া হল ঃ

বাজার	দ্রব্য		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) যদি x, y এবং z দ্রব্যে প্রতিটির জন্য মূল্য যথাক্রমে 2.50 টাকা, 1.50 টাকা এবং 1.00 টাকা হয়, তবে ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের সাহায্যে প্রতিটি বাজারের মোট আয় নির্ণয় করো।

(b) যদি তিনটি দ্রব্যের প্রতিটির উৎপাদন মূল্য যথাক্রমে 2.00 টাকা, 1.00 টাকা 50 পয়সা হয়, তবে মোট লাভের পরিমাণ নির্ণয় করো।

11. ম্যাট্রিক্স X নির্ণয় করো, যখন $X\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

12. যদি A এবং B একই ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স হয়, যেখানে AB = BA , তবে আরোহণ পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে $AB^n = B^nA$ । আরো প্রমাণ করো যে $(AB)^n = A^nB^n$, সকল $n \in N$ এর জন্য । নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোতে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

13. যদি $A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ হয় যেখানে $A^2 = I$, তবে

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

14. যদি ম্যাট্রিক্স A প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম উভয়ই হয়, তবে,

(A) A হল একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স (B) A হল একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স

(C) A হল একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স (D) এদের কোনোটি নয়।

15. যদি A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যেখানে $A^2 = A$ হয়, তবে $(I + A)^3 - 7A$ এর সমান হল

(A) A (B) I – A (C) I (D) 3A

সারসংক্ষেপ

- একটি ম্যাট্রিক্স হল সংখ্যা অথবা অপেক্ষকের একটি ক্রমিত আয়তকার সজ্জা।
- m সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যক স্তম্ভ বিশিষ্ট্য ম্যাট্রিক্সকে $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ হল একটি স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ হল একটি সারি ম্যাট্রিক্স।
- $m \times n$ ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় যদি $m = n$ হয়।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয় যদি $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$ হয়।

- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স হয় যদি $a_{ij} = 0$ হয়, যখন $i \neq j$, $a_{ij} = k$ (k হল যে কোনো ধ্রুবক), যখন $i = j$ ।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ একটি একক ম্যাট্রিক্স হয়, যদি $a_{ij} = 1$ হয়, যখন $i = j$, $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$।
- একটি শূন্য ম্যাট্রিক্সের সবগুলো উপাদান শূন্য।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ হয় যদি (i) A এবং B একই ক্রমের হয়। (ii) i এবং j এর সম্ভাব্য সকল মানের জন্য $a_{ij} = b_{ij}$ হয়।
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$, যেখানে A, B এবং C একই ক্রমের।
- $k(A + B) = kA + kB$, যেখানে A এবং B একই ক্রমের এবং k একটি ধ্রুবক।
- $(k + l)A = kA + lA$, যেখানে k এবং l হল ধ্রুবক।
- যদি $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ এবং $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ হয়, তবে $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, যেখানে $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- যদি $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, হয়, তবে A' অথবা $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$, (ii) $(kA)' = kA'$, (iii) $(A + B)' = A' + B'$, (iv) $(AB)' = B'A'$
- A একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, যদি $A' = A$ ।
- A একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয় যদি $A' = -A$।
- যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সকে একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যায়।
- একটি ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক প্রক্রিয়া সমূহ নিম্নরূপ :
  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ অথবা $C_i \leftrightarrow C_j$
  (ii) $R_i \rightarrow kR_i$ অথবা $C_i \rightarrow kC_i$
  (iii) $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ অথবা $C_i \rightarrow C_i + kC_j$
- যদি A এবং B দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, এমন যে, $AB = BA = I$, তখন B হল A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং এটিকে A^{-1} দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং A হল B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স।
- যদি একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীতের অস্তিত্ব থাকে তাহলে এটি অনন্য।

অধ্যায় **4**

নির্ণায়ক *(Determinants)*

❖ *All Mathematical truths are relative and conditional. — C.P. STEINMETZ* ❖

4.1 ভূমিকা

P.S. Laplace
(1749-1827)

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে, আমরা ম্যাট্রিক্স এবং ম্যাট্রিক্সসমূহের বীজগণিত সম্বন্ধে অধ্যয়ন করেছি। আমরা আরও শিখেছি যে, একটি বীজগাণিতিক সমীকরণ তন্ত্রকে কিভাবে ম্যাট্রিক্সের আকারে প্রকাশ করা যায়। সেই অনুযায়ী একটি রৈখিক সমীকরণতন্ত্র যেমন -

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

কে $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ রূপে প্রকাশ করা যায়। এখন, এই সমীকরণ তন্ত্রের একটিমাত্র সমাধান থাকবে অথবা থাকবে না, যা $a_1 b_2 - a_2 b_1$ সংখ্যা দ্বারা নির্ধারণ করা হয়। (মনে করো, যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ অথবা $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ হয়, তবে রৈখিক সমীকরণসমূহের একটি মাত্র সমাধান থাকবে)। এই $a_1 b_2 - a_2 b_1$ সংখ্যাটি যেটি সমাধানের অনন্যতা নির্ধারণ করে, তা ম্যাট্রিক্স, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ রূপে প্রকাশ করা হয় এবং একে নির্ণায়ক A বা det A বলা হয়। ইঞ্জিনিয়ারিং, বিজ্ঞান, অর্থনীতি, সমাজবিদ্যা ইত্যাদি ক্ষেত্রে নির্ণায়ক এর ব্যাপক প্রয়োগ রয়েছে।

এই অধ্যায়ে, আমরা বাস্তব সংখ্যাসমূহের তৃতীয় ক্রম পর্যন্ত নির্ণায়ক অধ্যয়ন করব। তাছাড়া, আমরা নির্ণায়কের বিভিন্ন ধর্ম যেমন, মাইনর (minor), সহ-গুণনীয়ক (co-factor) এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, অ্যাড্‌জয়েন্ট (adjoint), বিপরীত বর্গ ম্যাট্রিক্স, রৈখিক সমীকরণসমূহের সংগত ও অসংগত হওয়ার শর্ত এবং ম্যাট্রিক্সের বিপরীত পদ্ধতিতে দুটি অথবা তিনটি চলযুক্ত রৈখিক সমীকরণসমূহের সমাধান নির্ণয় করার জন্য নির্ণায়কের প্রয়োগ অধ্যয়ন করব।

4.2 নির্ণায়ক (Determinant)

n ক্রমের প্রতিটি বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ কে আমরা একটি সংখ্যা (বাস্তব অথবা জটিল) দ্বারা সংযুক্ত করতে পারি যাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়ক বলা হয়, যেখানে a_{ij} = A এর (i, j) তম উপাদান বা পদ। এটিকে

একটি অপেক্ষক হিসেবে ভাবা যায়, যা প্রত্যেক বর্গ ম্যাট্রিক্সকে একটি অনন্য সংখ্যা (বাস্তব অথবা জটিল) দ্বারা সংযুক্ত করে। যদি M বর্গ ম্যাট্রিক্সের সেট, K (বাস্তব অথবা জটিল) সংখ্যার সেট এবং $f : M \to K$ চিত্রণ $f(A)=k$ দ্বারা সংজ্ঞাত, যেখানে $A \in M$ এবং $k \in K$, তবে অপেক্ষক $f(A)$ কে A এর নির্ণায়ক বলা হয়, তাছাড়া এটিকে $|A|$ বা det A বা Δ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

যদি $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হয়, তবে নির্ণায়ক A কে লেখা হয় $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A)$ রূপে।

মন্তব্য :

(i) কোনো ম্যাট্রিক্স A এর জন্য, $|A|$ কে পড়া হয় নির্ণায়ক A এবং এটি মডিউলাস A নয়।

(ii) কেবলমাত্র বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক আছে।

4.2.1 *প্রথম ক্রমের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক (Determinant of a matrix of order one)*

মনেকরো, $A = [a]$ হল একটি প্রথম ক্রমের ম্যাট্রিক্স, তবে A এর নির্ণায়ক হল a এর সমান।

4.2.2 *দ্বিতীয় ক্রমের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক (Determinant of a matrix of order two)*

মনে করো, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ হল 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্স,

তবে নির্ণায়ক A সংজ্ঞাত হয় :

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

উদাহরণ 1 : মান নির্ণয় করো $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

সমাধান : আমরা পাই, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(-1) = 4 + 4 = 8.$

উদাহরণ 2 : মান নির্ণয় করো $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix}$

সমাধান : আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = x(x) - (x+1)(x-1) = x^2 - (x^2 - 1) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

4.2.3 *3 × 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক (Determinant of a matrix of order 3 × 3)*

তৃতীয় ক্রমের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ককে দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়কের আকারে প্রকাশ করে নির্ণয় করা

যেতে পারে। এটি একটি সারি (অথবা একটি স্তম্ভ) বরাবর নির্ণায়কের বিস্তৃতকরণ (expansion of a determinant) হিসেবে পরিচিত। এখন তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ককে তিনটি সারি (R_1, R_2 এবং R_3) তিনটি স্তম্ভ (C_1, C_2 এবং C_3) এর প্রতিটির সাপেক্ষে মোট ছয় প্রকারে বিস্তৃত করা যায় যা নীচে দেখানো নিয়মে একই মান দেয়।

চলো বর্গ ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ কে নির্ণায়ক রূপে বিচার করব। অর্থাৎ,

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

প্রথম সারি (R_1) বরাবর বিস্তৃতি [Expansion along first Row (R_1)]

ধাপ 1 R_1 এর প্রথম পদ a_{11} কে $(-1)^{(1+1)}$, $[(-1)^{a_{11} \text{ এর নিম্নলগ্নক (suffixes) এর যোগফল}}]$ এবং $|A|$ এর প্রথম সারি (R_1) এবং প্রথম স্তম্ভ (C_1) এর পদগুলোকে বাদ দিয়ে প্রাপ্ত দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়ক দ্বারা গুণ করো। যেহেতু প্রথম সারি (R_1) এবং প্রথম স্তম্ভ (C_1) এ a_{11} অবস্থিত।

অর্থাৎ, $$(-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ধাপ 2 R_1 এর দ্বিতীয় পদ a_{12} কে $(-1)^{1+2}$, $[(-1)^{a_{12} \text{ এর নিম্নলগ্নক এর যোগফল}}]$ এবং $|A|$ এর প্রথম সারি (R_1) এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ (C_2) এর পদগুলোকে বাদ দিয়ে প্রাপ্ত দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়ক দ্বারা গুণ করো। যেহেতু প্রথম সারি (C_1) এবং দ্বিতীয় স্তম্ভ (C_2) এ a_{12} অবস্থিত।

অর্থাৎ, $$(-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ধাপ 3 R_1 এর তৃতীয় পদ a_{13} কে $(-1)^{1+3}$, $[(-1)^{a_{13} \text{ এর নিম্নলগ্নক এর যোগফল}}]$ এবং $|A|$ এর প্রথম সারি (R_1) এবং তৃতীয় স্তম্ভ (C_3) এর পদগুলোকে বাদ দিয়ে প্রাপ্ত দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়ক দ্বারা গুণ করো। যেহেতু প্রথম সারি (R_1) এবং তৃতীয় স্তম্ভ (C_3) এ a_{13} অবস্থিত।

অর্থাৎ, $$(-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ধাপ 4 এখন, নির্ণায়ক A এর বিস্তৃতকরণে, অর্থাৎ উপরে দেওয়া 1, 2 এবং 3 ধাপ থেকে প্রাপ্ত তিনটি পদের যোগফলের আকারে $|A|$ কে লেখা হয়।

$$\det A = |A| = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

বা, $|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (1)$$

দ্রষ্টব্য আমরা চারটি ধাপ এক সাথে প্রয়োগ করবো।

দ্বিতীয় সারি **(R_2)** বরাবর বিস্তৃতি

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 বরাবর বিস্তৃতিকরণে আমরা পাই,

$$|A| = (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3} a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

$$|A| = - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \quad \ldots (2)$$

প্রথম স্তম্ভ **(C_1)** বরাবর বিস্তৃতি

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1 বরাবর বিস্তৃতিকরণে আমরা পাই,

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{21}\,(a_{12}\,a_{33} - a_{13}\,a_{32}) + a_{31}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})$$

$$|\,A\,| = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{13}\,a_{32} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{13}\,a_{22}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \quad \ldots (3)$$

স্পষ্টতই, (1), (2) এবং (3) এ $|A|$ এর মান সমান। (1), (2) এবং (3) নং থেকে প্রাপ্ত $|A|$ এর মান R_3, C_2 এবং C_3 বরাবর বিস্তৃত করলে $|A|$ এর মানগুলোর সমান হবে তা যাচাই করার জন্য শিক্ষার্থীদের উদ্দেশ্যে অনুশীলনের জন্য ছেড়ে দেওয়া হল।

অতএব, যে-কোনো সারি অথবা স্তম্ভ বরাবর নির্ণায়ককে বিস্তৃত করলে একই মান পাওয়া যাবে।

মন্তব্য :

(i) গণনার সরলীকরণের জন্য, আমরা নির্ণায়কে এরূপ সারি অথবা স্তম্ভ বরাবর বিস্তৃত করব যেখানে অধিক সংখ্যক শূন্য (zeros) থাকবে।

(ii) নির্ণায়কের বিস্তৃতিকরণের সময় $(-1)^{i+j}$ দ্বারা গুণের পরিবর্তে, আমরা $(i + j)$ এর যুগ্ম অথবা অযুগ্ম অনুসারে $+1$ অথবা -1 দ্বারা গুণ করতে পারি।

(iii) মনেকরো, $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$। তাহলে, এটি সহজেই যাচাই করা যায় যে,

$A = 2B$ হয়। তাছাড়া, $|A| = 0 - 8 = -8$ এবং $|B| = 0 - 2 = -2$ হয়।

লক্ষ করো যে, $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ অথবা $|A| = 2^n|B|$, যেখানে $n = 2$ হল A এবং B বর্গ ম্যাট্রিক্সের ক্রম।

সাধারণত, যদি $A = kB$ যেখানে A এবং B হল n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স, তবে $|A| = k^n\,|B|$, যেখানে $n = 1, 2, 3$

উদাহরণ 3 নির্ণায়ক $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান লক্ষ করো যে তৃতীয় স্তম্ভে ২টি পদ শূন্য। তাই তৃতীয় স্তম্ভ (C_3) বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

উদাহরণ 4 মান নির্ণয় করো : $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$.

সমাধান R_1 বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

উদাহরণ 5 x এর মান নির্ণয় করো, যেখানে $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

সমাধান আমরা পাই $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

অর্থাৎ, $3 - x^2 = 3 - 8$

অর্থাৎ, $x^2 = 8$

অতএব $x = \pm 2\sqrt{2}$

অনুশীলনী 4.1

অনুশীলনী 1 এবং 2 এর নির্ণায়কগুলোর মান নির্ণয় করো :

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে $|2A| = 4|A|$

4. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে দেখাও যে $|3A| = 27|A|$

5. নির্ণায়কগুলোর মান নির্ণয় করো :

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $|A|$ নির্ণয় করো।

7. x এর মান নির্ণয় করো, যদি

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. যদি $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ হয়, তবে x এর মান হবে

(A) 6 (B) ± 6 (C) -6 (D) 0

4.3 নির্ণায়কের ধর্মাবলি (Properties of Determinants)

পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, আমরা নির্ণায়ককে কীভাবে বিস্তৃত করব তা শিখেছি। এই অনুচ্ছেদে, আমরা নির্ণায়কের কয়েকটি ধর্ম অধ্যয়ন করব যা একটি সারিতে বা একটি স্তম্ভে সর্বাধিক শূন্য পাওয়ার মাধ্যমে এর মান নির্ণয় সহজ করে দেয়। এই ধর্মগুলো যে-কোনো ক্রমের নির্ণায়কের জন্য সত্য হয়। যদিও আমরা কেবলমাত্র তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক পর্যন্ত নিজেদেরকে সীমাবদ্ধ রাখব।

ধর্ম 1 কোনো নির্ণায়কের সারি এবং স্তম্ভগুলো পরস্পর স্থান বিনিময় করলেও নির্ণায়কের মান অপরিবর্তিত থাকবে।

যাচাইকরণ : $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Δ এর সারি এবং স্তম্ভগুলো পরস্পর স্থান বিনিময় করে আমরা পাই,

$$\text{নির্ণায়ক } \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রথম স্তম্ভ বরাবর Δ_1 বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

অতএব $\Delta = \Delta_1$

মন্তব্য উপরের ধর্মটি থেকে এটি স্পষ্ট যে, যদি A বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় তবে det (A) = det (A′), যেখানে A′ = A এর পরিবর্ত (transpose of A) ম্যাট্রিক্স।

দ্রষ্টব্য যদি $R_i = i$ তম সারি এবং $C_i = i$ তম স্তম্ভ হয়, তবে সারি এবং স্তম্ভগুলোর পরস্পর স্থান বিনিময়কে আমরা সাংকেতিকভাবে $C_i \leftrightarrow R_i$ রূপে লিখব।

চলো আমরা উপরের ধর্মটি উদাহরণের মাধ্যমে যাচাই করি।

উদাহরণ 6 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ এর জন্য ধর্ম-1 যাচাই করো।

সমাধান নির্ণায়কটি প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (0 - 20) + 3 (- 42 - 4) + 5 (30 - 0)$$

$$= - 40 - 138 + 150 = - 28$$

সারি এবং স্তম্ভগুলোর পরস্পর স্থান বিনিময় করে আমরা পাই,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{(প্রথম স্তম্ভ বরাবর বিস্তৃতি)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(-42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= -40 - 138 + 150 = -28$$

স্পষ্টতই $\quad \Delta = \Delta_1$

অতএব, ধর্ম 1 যাচাই হল।

ধর্ম 2 যদি একটি নির্ণায়কের যে-কোনো দুটি সারি (অথবা স্তম্ভ) পরস্পর স্থান বিনিময় হয়, তখন নির্ণায়কটির চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

যাচাইকরণ মনেকরো, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃতকরণ করে আমরা পাই,

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

প্রথম ও তৃতীয় সারিদুটি পরস্পর স্থানান্তর করে প্রাপ্ত নতুন নির্ণায়কটি হল

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

তৃতীয় সারি বরাবর বিস্তৃতি করে আমরা পাই

$$\Delta_1 = a_1\,(c_2\,b_3 - b_2\,c_3) - a_2\,(c_1\,b_3 - c_3\,b_1) + a_3\,(b_2\,c_1 - b_1\,c_2)$$

$$= -\,[a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)]$$

স্পষ্টতই, $\Delta_1 = -\,\Delta$

অনুরূপভাবে, আমরা যে-কোনো দুটি স্তম্ভ পরস্পর স্থান বিনিময় করেও ফলাফলটি যাচাই করতে পারি।

দ্রষ্টব্য আমরা সারিগুলোর পরস্পর স্থান বিনিময়কে $R_i \leftrightarrow R_j$ এবং স্তম্ভগুলোর পরস্পর স্থান বিনিময়কে $C_i \leftrightarrow C_j$ দ্বারা সূচিত করতে পারি।

উদাহরণ 7 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ এর জন্য ধর্ম 2 যাচাই করো।

সমাধান $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = -28$ (উদাহরণ 6 দেখো)

R_2 এবং R_3 সারিদুটি পরস্পর স্থান বিনিময় অর্থাৎ $R_2 \leftrightarrow R_3$ করে, আমরা পাই,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

প্রথম সারি বরাবর Δ_1 নির্ণায়কটি বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(20 - 0) + 3\,(4 + 42) + 5\,(0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

স্পষ্টতই $\Delta_1 = -\Delta$

অতএব, ধর্ম- 2 যাচাই করা হয়েছে।

ধর্ম 3 যদি কোনো নির্ণায়কের যে-কোনো দুটি সারি (বা স্তম্ভ) অভিন্ন হয় (সকল অনুরূপ উপাদানগুলো একই হয়), তবে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।

প্রমাণ যদি আমরা নির্ণায়ক Δ এর অভিন্ন সারিগুলো (বা স্তম্ভগুলো) পরস্পর স্থান বিনিময় করি তবে Δ এর মান পরিবর্তিত হবে না। যদিও ধর্ম- 2 দ্বারা Δ এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয়েছে।

সুতরাং, $\Delta = -\Delta$

বা, $\Delta = 0$

চলো আমরা উপরের ধর্মটি একটি উদাহরণের মাধ্যমে যাচাই করি।

উদাহরণ 8 নির্ণয় করো $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

সমাধান প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = 3\ (6 - 6) - 2\ (6 - 9) + 3\ (4 - 6)$$
$$= 0 - 2\ (-3) + 3\ (-2) = 6 - 6 = 0$$

এখানে R_1 এবং R_3 অভিন্ন।

ধর্ম 4 যদি কোনো নির্ণায়কের একটি সারি (বা একটি স্তম্ভের) প্রত্যেক উপাদানসমূহকে ধ্রুবক সংখ্যা k দ্বারা গুণ করা হয়, তবে নির্ণায়কটির মান মূল নির্ণায়কের মানের k গুণ হবে।

যাচাইকরণ মনেকরো $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

এবং প্রথম সারির উপাদানসমূহকে k দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত নির্ণায়ক Δ_1 । তবে

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্রথম সারি বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta_1 = k\,a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - k\,b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + k\,c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)$$
$$= k\,[a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)]$$
$$= k\,\Delta$$

অতএব $$\begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

মন্তব্য

(i) এই ধর্মটির মাধ্যমে, আমরা একটি প্রদত্ত নির্ণায়কের যে-কোনো একটি সারি বা স্তম্ভ থেকে যে-কোনো সাধারণ (common) উৎপাদককে বের করে নিতে পারি।

(ii) যদি একটি নির্ণায়কের যে-কোনো দুটি সারির (বা স্তম্ভের) অনুরূপ উপাদানসমূহ সমানুপাতী (একই অনুপাতে) হয়, তবে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে। উদাহরণস্বরূপ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k\,a_1 & k\,a_2 & k\,a_3 \end{vmatrix} = 0$$ (R_1 এবং R_2 সারিগুলো সমানুপাতী)

উদাহরণ 9 মান নির্ণয় করো, $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

সমাধান লক্ষ করো যে $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(ধর্ম 3 এবং 4 ব্যবহার করে)

ধর্ম 5 যদি কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা একটি স্তম্ভের কিছু বা সকল উপাদানসমূহকে দুইটি (বা তার অধিক) পদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহলে নির্ণায়কটিকে দুইটি (বা তার অধিক) নির্ণায়কের সমষ্টি রূপে প্রকাশ করা যাবে।

উদাহরণস্বরূপ, $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

যাচাইকরণ বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

প্রথম সারি বরাবর নির্ণায়কটি বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = (a_1+\lambda_1)(b_2c_3-c_2b_3) - (a_2+\lambda_2)(b_1c_3-b_3c_1)$$
$$+ (a_3+\lambda_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$= a_1(b_2c_3-c_2b_3) - a_2(b_1c_3-b_3c_1) + a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$
$$+ \lambda_1(b_2c_3-c_2b_3) - \lambda_2(b_1c_3-b_3c_1) + \lambda_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

(পদগুলো পুনরায় সাজিয়ে)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{ডানপক্ষ}$$

একইভাবে আমরা অন্য সারিগুলো বা স্তম্ভগুলোর জন্য ধর্ম-5 যাচাই করতে পারি।

উদাহরণ 10 দেখাও যে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

সমাধান আমরা পাই $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(ধর্ম- 5 দ্বারা)

$= 0 + 0 = 0$ (ধর্ম- 3 এবং ধর্ম- 4 ব্যবহার করে)

ধর্ম 6 যদি কোনো নির্ণায়কের যে-কোনো সারির (বা স্তম্ভের) প্রত্যেক উপাদানের সাথে অপর কোনো সারির (বা স্তম্ভের) অনুরূপ প্রতিটি উপাদানের সমগুণনীয়কগুলো যোগ করা হয়, তবে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না, অর্থাৎ, কোনো নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হবে না যদি $R_i \to R_i + kR_j$ বা $C_i \to C_i + kC_j$ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা যায়।

যাচাইকরণ

মনে করো, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & a_2 + kc_2 & a_3 + kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

যেখানে $R_1 \to R_1 + kR_3$ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে Δ_1 পাওয়া গেল ।

এখানে, আমরা তৃতীয় সারির (R_3) উপাদানসমূহকে ধ্রুবক সংখ্যা k দ্বারা গুণ করে এবং প্রথম সারির (R_1) অনুরূপ উপাদানসমূহের সাথে যোগ করি।

সাংকেতিকভাবে, আমরা এই প্রক্রিয়াটিকে $R_1 \to R_1 + k R_3$ রূপে লিখব।

এখন, আবার

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$ (ধর্ম-5 ব্যবহার করে)

$= \Delta + 0$ (যেহেতু R_1 এবং R_3 সমানুপাতী)

অতএব, $\Delta = \Delta_1$

মন্তব্য

(i) যদি নির্ণায়ক Δ_1 -এ $R_i \to kR_i$ বা $C_i \to kC_i$ প্রয়োগ করে প্রাপ্ত নির্ণায়ক Δ হয়, তবে $\Delta_1 = k\Delta$।

(ii) যদি একটি ধাপে $R_i \to R_i + kR_j$ এর অনুরূপ প্রক্রিয়াটি একের অধিকবার প্রয়োগ করা হয় তবে লক্ষ রাখতে হবে যে প্রথম প্রক্রিয়া দ্বারা প্রভাবিত সারিটি যেন অন্য প্রক্রিয়ায় ব্যবহার না হয়। অনুরূপ ধর্মটি স্তম্ভ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

উদাহরণ 11 **প্রমাণ করো** $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$ ।

সমাধান প্রদত্ত নির্ণায়ক Δ তে $R_2 \to R_2 - 2R_1$ এবং $R_3 \to R_3 - 3R_1$ প্রক্রিয়া প্রয়োগে আমরা পাই,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

এখন $R_3 \to R_3 - 3R_2$, প্রয়োগে আমরা পাই

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= a(a^2 - 0) = a(a^2) = a^3$$

উদাহরণ 12 বিস্তৃত না করে প্রমাণ করো যে,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান $R_1 \to R_1 + R_2$ প্রয়োগে Δ থেকে আমরা পাই,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

যেহেতু R_1 এবং R_3 এর উপাদানসমূহ সমানুপাতী, অতএব $\Delta = 0$ ।

উদাহরণ 13 মান নির্ণয় করো

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

সমাধান $R_2 \to R_2 - R_1$ এবং $R_3 \to R_3 - R_1$ প্রয়োগে আমরা পাই,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 এবং R_3 থেকে যথাক্রমে $(b-a)$ এবং $(c-a)$ উৎপাদক common নিয়ে আমরা পাই,

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c-a)[(-b+c)]$ (প্রথম স্তম্ভ বরাবর বিস্তৃত করে)

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

উদাহরণ 14 প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

সমাধান মনে করো $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

Δ-এ $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ প্রয়োগে আমরা পাই,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 বরাবর বিস্তৃত করে আমরা পাই,

$$\Delta = 0 \begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c) \begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b) \begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$= 2c(ab + b^2 - bc) - 2b(bc - c^2 - ac)$

$= 2ab\,c + 2cb^2 - 2bc^2 - 2b^2c + 2bc^2 + 2abc$

$= 4abc$

উদাহরণ 15 যদি x, y, z প্রতিটি ভিন্ন হয় এবং $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, হয়

তবে দেখাও যে $1 + xyz = 0$

সমাধান আমরা পাই,

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \quad \text{(ধর্ম- 5 ব্যবহার করে)}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \quad \text{(} C_3 \leftrightarrow C_2 \text{ এবং তারপর } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ ব্যবহার করে)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} (1+xyz)$$

$$= (1+xyz) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} \quad (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ এবং } R_3 \to R_3 - R_1 \text{ ব্যবহার করে)}$$

R_2 থেকে $(y-x)$ এবং R_3 থেকে $(z-x)$ উৎপাদক common নিয়ে আমরা পাই,

$$\Delta = (1+xyz)(y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (1+xyz)(y-x)(z-x)(z-y) \quad \text{(} C_1 \text{ বরাবর বিস্তৃত করে)}$$

যেহেতু $\Delta = 0$ এবং x, y, z প্রত্যেকেই ভিন্ন, অর্থাৎ, $x - y \neq 0, y - z \neq 0, z - x \neq 0$, আমরা পাই $1 + xyz = 0$

উদাহরণ 16 দেখাও যে,

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$$

সমাধান R_1, R_2 এবং R_3 থেকে যথাক্রমে উৎপাদক a,b,c common নিয়ে আমরা পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

এখন $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$, $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1-0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{ডানপক্ষ}$$

দ্রষ্টব্য বিকল্পভাবে $C_1 \to C_1 - C_2$ এবং $C_3 \to C_3 - C_2$ প্রয়োগ করে, অত:পর $C_1 \to C_1 - a\, C_3$ প্রয়োগ করে চেষ্টা করো।

অনুশীলনী 4.2

বিস্তৃত না করে এবং নির্ণায়কের ধর্মাবলির প্রয়োগে 1 থেকে 7 নং প্রশ্নে প্রমাণ করো :

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

নিম্নলিখিত 8 থেকে 14 নং প্রশ্নে নির্ণায়কের ধর্মাবলির প্রয়োগে, দেখাও যে :

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

15 এবং 16 নং প্রশ্নের সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

15. মনে করো A হল একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার ক্রম 3 × 3, তবে $|k\text{A}|$ এর মান হবে—

(A) $k|\text{A}|$ (B) $k^2|\text{A}|$ (C) $k^3|\text{A}|$ (D) $3k|\text{A}|$

16. নিম্নলিখিত কোনটি সঠিক হবে—

(A) নির্ণায়ক হল একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(B) নির্ণায়ক হল একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে সম্পর্কিত একটি সংখ্যা।

(C) নির্ণায়ক হল একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের সাথে সম্পর্কিত একটি সংখ্যা।

(D) এদের কোনোটিই নয়।

4.4 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle)

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে, আমরা (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, যা $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3) + x_2\,(y_3-y_1) + x_3\,(y_1-y_2)]$ আকারে প্রদত্ত তা অধ্যয়ন করেছি। এখন নির্ণায়কের আকারে এই বিস্তৃতিটিকে নিম্নরূপে লিখতে পারি

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots (1)$$

মন্তব্য

(i) যদি ক্ষেত্রফল ধনাত্মক রাশি হয়, তাহলে আমরা সর্বদা (1) নির্ণায়কের পরম মান গ্রহণ করব।

(ii) যদি ক্ষেত্রফল প্রদত্ত হয়, তাহলে গণনার জন্য নির্ণায়কের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয় মানই ব্যবহার করতে হবে।

(iii) তিনটি সমরেখ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

উদাহরণ 17 (3, 8), (– 4, 2) এবং (5, 1) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত ত্রিভজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ (3+72-14) = \frac{61}{2}$$

উদাহরণ 18 নির্ণায়ক প্রয়োগে A(1, 3) এবং B (0, 0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো এবং k এর মান নির্ণয় করো যদি D(k, 0) বিন্দুটি এমন যে ত্রিভুজ ABD এর ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক হয়।

সমাধান মনে করো, P (x, y) হল AB এর ওপর যে-কোনো বিন্দু। তবে, ত্রিভুজ ABP এর ক্ষেত্রফল শূন্য (কেন?) তাই,

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

এটি থেকে পাই $\quad \frac{1}{2}(y-3x) = 0$ বা $y = 3x$,

এটিই নির্ণেয় AB সরলরেখার সমীকরণ।

তাছাড়া, যেহেতু ত্রিভুজ ABD এর ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক, আমরা পাই

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3$$

এটি থেকে পাই, $\dfrac{-3k}{2} = \pm 3$, অর্থাৎ $k = \mp 2$

অনুশীলনী 4.3

1. নিম্নলিখিত প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো :

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (–2, –3), (3, 2), (–1, –8)

2. দেখাও যে,

A (a, $b + c$), B (b, $c + a$), C (c, $a + b$) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

3. যদি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক হয় তবে k এর মান নির্ণয় করো, যেখানে শীর্ষবিন্দুগুলো হল

(i) $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ (ii) $(-2, 0), (0, 4), (0, k)$

4. (i) নির্ণায়ক প্রয়োগে (1, 2) এবং (3, 6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ii) নির্ণায়ক প্রয়োগে (3, 1) এবং (9, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

5. যদি $(2, -6)$, $(5, 4)$ এবং $(k, 4)$ শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল 35 বর্গএকক হয়, তাহলে k এর মান হবে

(A) 12 (B) –2 (C) –12, –2 (D) 12, –2

4.5 মাইনর ও সহ-গুণনীয়ক (Minors and Cofactors)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা মাইনর (minors) এবং সহ-গুণনীয়ক (cofactors) প্রয়োগ করে নির্ণায়কের বিস্তৃতিকে সংক্ষিপ্ত আকারে লিখতে শিখব।

সংজ্ঞা 1 একটি নির্ণায়কের a_{ij} পদের মাইনর হল a_{ij} পদের সাথে যুক্ত i তম সারি এবং j তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত নির্ণায়ক। a_{ij} পদের মাইনরকে M_{ij} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মন্তব্য $n(n \geq 2)$ ক্রমের কোনো নির্ণায়কের একটি পদের মাইনর হল $n - 1$ ক্রমের একটি নির্ণায়ক।

উদাহরণ 19 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের পদ 6-এর মাইনরটি নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু 6 দ্বিতীয় সারি এবং তৃতীয় স্তম্ভে অবস্থিত, তাই এর মাইনর M_{23} কে লেখা হয়

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ (} \Delta \text{ থেকে } R_2 \text{ এবং } C_3 \text{ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত)।}$$

সংজ্ঞা 2 কোনো পদ a_{ij}, এর সহ-গুণনীয়ককে A_{ij} দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যা হল

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, যেখানে M_{ij} হল a_{ij} এর মাইনর।

উদাহরণ 20 নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ এর সকল পদসমূহের মাইনর এবং সহগুণনীয়কগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান a_{ij} পদের মাইনর হল M_{ij}

এখানে $a_{11} = 1$। তাই $M_{11} = a_{11}$ পদের মাইনর $= 3$

$M_{12} = a_{12}$ পদের মাইনর $= 4$

$M_{21} = a_{21}$ পদের মাইনর $= -2$

$M_{22} = a_{22}$ পদের মাইনর $= 1$

এখন, a_{ij} পদের সহগুণনীয়ক হল A_{ij}। তাই

$A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (-1)^2\ (3) = 3$

$A_{12} = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)^3\ (4) = -4$

$A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)^3\ (-2) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\ M_{22} = (-1)^4\ (1) = 1$

উদাহরণ 21 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{21} পদের মাইনর এবং সহগুননীয়ক নির্ণয় করো।

সমাধান মাইনর এবং সহ-গুণনীয়কের সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই

a_{11} পদের মাইনর $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$

a_{11} পদের সহগুণনীয়ক $= A_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}$

a_{21} পদের মাইনর $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}$

a_{21} পদের সহ-গুননীয়ক $= A_{21} = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)\ (a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{32}) = -\, a_{12}\, a_{33} + a_{13} a_{32}$

মন্তব্য *উদাহরণ 21-এ নির্ণায়ক Δ কে R_1 বরাবর বিস্তৃত করে, আমরা পাই*

$$\Delta = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13}$, যেখানে A_{ij} হল a_{ij} সহগুণনীয়ক।

$=$ R_1 সারির পদসমূহ এবং তাদের অনুরূপ সহ-গুণনীয়কগুলোর গুণফলের সমষ্টি।

অনুরূপে অপর পাঁচ প্রকারে যেমন R_2, R_3, C_1, C_2 এবং C_3 বরাবর বিস্তৃত করেও Δ গণনা করতে পারি।

অনুরূপে Δ = যে-কোনো সারির (বা স্তম্ভের) পদসমূহ এবং তাদের অনুরূপ সহ-গুণনীয়কগুলোর গুণফলের সমষ্টি।

দ্রষ্টব্য যদি একটি সারির (বা স্তম্ভের) পদসমূহকে অপর কোনো সারির (বা স্তম্ভের) সহ-গুণনীয়ক সমূহ দ্বারা গুণ করা হয়, তবে গুণফলগুলোর সমষ্টি শূন্য হবে। উদাহরণস্বরূপ,

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ (যেহেতু } R_1 \text{ এবং } R_2 \text{ অভিন্ন)}$$

অনুরূপে অন্যান্য সারিগুলো এবং স্তম্ভগুলোর জন্য আমরা চেষ্টা করতে পারি।

উদাহরণ 22 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের পদসমূহের মাইনর এবং সহ-গুণনীয়ক নির্ণয় করো এবং যাচাই করো যে $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0$

সমাধান আমরা পাই, $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20;\ A_{11} = (-1)^{1+1}(-20) = -20$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 - 4 = -46; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}(-46) = 46$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 0 = 30; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3}(30) = 30$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 25 = -4; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -14 - 5 = -19; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(-19) = -19$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}(13) = -13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 0 = -12; \qquad A_{31} = (-1)^{3+1}(-12) = -12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 30 = -22; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}(-22) = 22$$

এবং $$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 = 18; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3}(18) = 18$$

এখন, $a_{11} = 2, a_{12} = -3, a_{13} = 5;\ A_{31} = -12, A_{32} = 22, A_{33} = 18$

তাই, $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

$= 2(-12) + (-3)(22) + 5(18) = -24 - 66 + 90 = 0$

অনুশীলনী 4.4

নিম্নলিখিত নির্ণায়কগুলোর পদসমূহের মাইনর এবং সহ-গুণনীয়ক লেখো:

1. (i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. দ্বিতীয় সারির পদসমূহের সহ-গুণনীয়ক প্রয়োগে, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করো।

4. তৃতীয় স্তম্ভের পদসমূহের সহ-গুণনীয়ক প্রয়োগে, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করো।

5. যদি $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ এবং a_{ij} এর সহ-গুণনীয়ক A_{ij} হয়, তবে Δ এর মান হবে

(A) $a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$ (B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$

(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$ (D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

4.6 অ্যাডজয়েন্ট এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Adjoint and Inverse of a Matrix)

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে, আমরা বিপরীত ম্যাট্রিক্স অধ্যয়ন করেছি। এই অনুচ্ছেদে, আমরা বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্বের শর্ত নিয়ে আলোচনা করব।

A এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স, অর্থাৎ A^{-1} নির্ণয়ে প্রথমে অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বের করতে হবে।

4.6.1 *অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স (Adjoint of a matrix)*

সংজ্ঞা 3 একটি বর্গম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ এর অ্যাডজয়েন্টকে ম্যাট্রিক্স $[A_{ij}]_{n \times n}$ এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স রূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে a_{ij} এর সহগুণনীয়ক হল A_{ij}। A ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্টকে *adj* A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করো, $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

তবে, $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \text{ এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স } = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 23 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ এর জন্য *adj* A নির্ণয় করো।

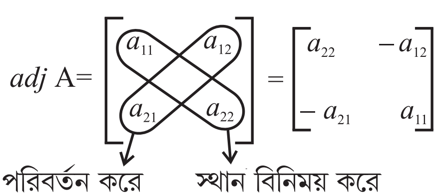
সমাধান আমরা পাই, $A_{11} = 4, A_{12} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 2$

অতএব, $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

মন্তব্য 2 ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স এর জন্য আমরা পাই

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

a_{11} এবং a_{22} এর স্থান বিনিময় এবং a_{12} এবং a_{21} এর চিহ্ন পরিবর্তিত করেও *adj* A পেতে পারি। অর্থাৎ



কোনোরকম প্রমাণ ছাড়াই আমরা নীচের উপপাদ্যটি বিবৃত করব।

উপপাদ্য 1 যদি n ক্রমের প্রদত্ত একটি বর্গম্যাট্রিক্স A হয়, তবে

$$A(adj\, A) = (adj\, A)\, A = |A|\, I,$$

যেখানে I হল n ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

যাচাইকরণ

মনে করো, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, তবে $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

যেহেতু একটি সারির (বা একটি স্তম্ভের) পদসমূহ এবং তার অনুরূপ সহগুণনীয়কগুলোর গুণফলের সমষ্টি |A| এর সমান এবং অন্যথায় শূন্য, আমরা পাই,

$$A\,(adj\, A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

অনুরূপে, আমরা দেখাতে পারি $(adj\, A)\, A = |A|\ I$

অতএব, $A\,(adj\, A) = (adj\, A)\, A = |A|\ I$

সংজ্ঞা 4 বর্গম্যাট্রিক্স A কে সিঙ্গুলার (singular) বলা হবে যদি $|A| = 0$।

উদাহরণস্বরূপ, ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ এর নির্ণায়ক হল শূন্য।

অতএব, A হল একটি সিঙ্গুলার (singular) ম্যাট্রিক্স।

সংজ্ঞা 5 বর্গম্যাট্রিক্স A কে একটি নন্-সিঙ্গুলার (non-singular) বলা হয় যদি $|A| \neq 0$

মনে করো, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, তবে $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$।

অতএব, A হল একটি নন্-সিঙ্গুলার (nonsingular) ম্যাট্রিক্স।

কোনোরকম প্রমাণ ছাড়াই আমরা নীচের উপপাদ্যটি বিবৃত করব।

উপপাদ্য 2 যদি A এবং B একই ক্রমের নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স হয়, তবে AB এবং BA একই ক্রমের নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স হবে।

উপপাদ্য 3 ম্যাট্রিক্সের গুণফলের নির্ণায়ক তাদের নিজ নিজ অনুরূপ নির্ণায়কের গুণফলের সমান হয়, অর্থাৎ, $|AB| = |A|\ |B|$, যেখানে A এবং B একই ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স।

মন্তব্য আমরা জানি যে, $(adj\ A)\ A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$

উভয়পক্ষের ম্যাট্রিক্সগুলোকে নির্ণায়কের আকারে লিখে, আমরা পাই

$$|(adj\ A)\ A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

অর্থাৎ, $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (কেন?)

অর্থাৎ, $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

অর্থাৎ, $$|(adj\ A)| = |A|^2$$

সাধারণভাবে, যদি A একটি n ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $|adj\ (A)| = |A|^{n-1}$।

উপপাদ্য 4 একটি বর্গম্যাট্রিক্স A বিপরীতকরণযোগ্য (invertiable) হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি A ম্যাট্রিক্সটি নন্-সিঙ্গুলার হয়।

প্রমাণ মনে করো, A একটি n ক্রমের বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স এবং I হল n ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স, তবে n ক্রমের একটি বর্গম্যাট্রিক্স B এর অস্তিত্ব থাকবে, যেখানে, $AB = BA = I$

এখন, $AB = I$, তাই $|AB| = |I|$ বা, $|A|\ |B| = 1$ (যেহেতু $|I|=1, |AB|=|A||B|$)

যা থেকে পাই $|A| \neq 0$। অতএব A হল নন্-সিঙ্গুলার।

বিপরীতক্রমে, মনে

করো A হল নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স। তবে, $|A| \neq 0$

এখন $$A\ (adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\ I$$ (উপপাদ্য 1)

বা, $$A\left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|} adj\ A\right) A = I$$

বা, $AB = BA = I$, যেখানে $B = \frac{1}{|A|} adj\, A$

এইভাবে, A হল বিপরীতকরণযোগ্য এবং $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\, A$

উদাহরণ 24 যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে যাচাই করো যে, $A\ adj\ A = |A|\ I$ । তাছাড়া A^{-1} নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই, $|A| = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 1 \neq 0$

এখন, $A_{11} = 7,\ A_{12} = -1, A_{13} = -1, A_{21} = -3, A_{22} = 1,$
$A_{23} = 0, A_{31} = -3, A_{32} = 0, A_{33} = 1$

সুতরাং, $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

এখন, $$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|.\ I$$

তাছাড়া, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 25 যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -4\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ হয়, তাহলে যাচাই করো যে, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$।

সমাধান আমরা পাই, $AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 5 & -14\end{bmatrix}$

যেহেতু, $|AB|=-11\neq 0$, $(AB)^{-1}$ এর অস্তিত্ব আছে এবং আমরা পাই

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}\,adj\,(AB)=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-14 & -5\\ -5 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}14 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

তাছাড়া, $|A|=-11\neq 0$ এবং $|B|=1\neq 0$ । সুতরাং, A^{-1} এবং B^{-1} উভয়েরই অস্তিত্ব আছে এবং এগুলো হল

$$A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

সুতরাং, $$B^{-1}A^{-1}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-14 & -5\\ -5 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}14 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

অতএব, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

উদাহরণ 26 দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স $A^2-4A+I=O$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যেখানে I হল 2×2 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স এবং O হল 2×2 ক্রমের শূন্য ম্যাট্রিক্স। তারপর এই সমীকরণ প্রয়োগে A^{-1} নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই, $A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}$

সুতরাং, $$A^2-4A+I=\begin{bmatrix}7 & 12\\ 4 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8 & 12\\ 4 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

এখন, $A^2-4A+I=O$

সুতরাং, $AA-4A=-I$

বা, $AA(A^{-1})-4AA^{-1}=-IA^{-1}$ (উভয়দিকে A^{-1} দ্বারা উত্তর গুণন (post multiplication) করে, কারণ $|A|\neq 0$)

বা, $A(AA^{-1})-4I=-A^{-1}$

বা, $AI-4I=-A^{-1}$

বা, $A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

অতএব, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

অনুশীলনী 4.5

অনুশীলনীর 1 এবং 2 এর প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের অ্যাডজয়েন্ট নির্ণয় করো।

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

অনুশীলনীর 3 এবং 4 -এ যাচাই করো, $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

অনুশীলনীর 5 থেকে 11 -এ প্রদত্ত প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স (যদি এর অস্তিত্ব থাকে) নির্ণয় করো।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. মনে করো, $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, যাচাই করো $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$।

13. যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, দেখাও যে, $A^2 - 5A + 7I = O$ । অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

14. ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ এর জন্য a ও b নির্ণয় করো, যেখানে $A^2 + aA + bI = O$।

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স এর জন্য দেখাও যে,

$A^3 - 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ । অত:পর A^{-1} নির্ণয় করো।

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ হলে যাচাই করো

$A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = O$ এবং অত:পর A^{-1} নির্ণয় করো।

17. মনে করো, A হল একটি 3×3 ক্রমের নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স। তবে $|adj\ A|$ এর মান হবে

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. যদি A একটি 2-ক্রম বিশিষ্ট বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $\det (A^{-1})$ এর মান হবে

(A) $\det (A)$ (B) $\dfrac{1}{\det (A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 নির্ণায়ক এবং ম্যাট্রিক্স এর প্রয়োগ (Applications of Determinants and Matrices)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা দুটি বা তিনটি চলরাশিযুক্ত রৈখিক সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে সমাধানের ক্ষেত্রে নির্ণায়ক এবং ম্যাট্রিক্সের প্রয়োগ আলোচনা করব এবং রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের ধারাবাহিকতা পরীক্ষা করব।

সংগত তন্ত্র (Consistent system) একটি সমীকরণ তন্ত্রকে সংগত বলা হবে যদি এর সমাধানের (এক বা একাধিক) অস্তিত্ব থাকে।

অসংগত তন্ত্র (Inconsistent system) একটি সমীকরণ তন্ত্রকে অসংগত বলা হবে যদি সমীকরণগুলোর কোনো সমাধানের অস্তিত্ব না থাকে।

> দ্রষ্টব্য এই অধ্যায়ে, আমরা শুধুমাত্র অনন্য সমাধানযুক্ত রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের ক্ষেত্রে নিজেদেরকে সীমাবদ্ধ রাখব।

4.7.1 ম্যাট্রিক্সের বিপরীত পদ্ধতির প্রয়োগে রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রের সমাধান (Solution of system of linear equations using inverse of a matrix)

চলো আমরা, রৈখিক সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে ম্যাট্রিক্স সমীকরণরূপে প্রকাশ করি এবং সহগ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত পদ্ধতি প্রয়োগে এদের সমাধান করব।

মনে করো, সমীকরণ তন্ত্রটি হল,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

মনে করো, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

তবে, সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে AX = B আকারে লেখা যায়, অর্থাৎ,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ক্ষেত্র I যদি A নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স হয়, তবে এর বিপরীতের অস্তিত্ব আছে। এখন

$$AX = B$$

বা, $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ (A^{-1} দ্বারা পূর্বগুণন করে)

বা, $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$ (সংযোগ ধর্ম অনুসারে)

বা, $IX = A^{-1}B$

বা, $X = A^{-1}B$

এই ম্যাট্রিক্স সমীকরণটি প্রদত্ত সমীকরণ তন্ত্রের জন্য একটিমাত্র সমাধান দেয় যেহেতু ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত অনন্য। সমীকরণ তন্ত্র সমাধানের এই পদ্ধতি ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি (Matrix Method) নামে পরিচিত।

ক্ষেত্র II যদি A সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স হয়, তবে $|A| = 0$ ।

এইক্ষেত্রে, আমরা $(adj\ A)\ B$ নির্ণয় করব।

যদি $(adj\ A)\ B \neq O$ (O হল শূন্য ম্যাট্রিক্স), তবে সমাধানের অস্তিত্ব থাকবে না এবং এই সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে অসংগত বলা হয়।

যদি $(adj\ A)\ B = O$, তবে তন্ত্রটি হয় সংগত অথবা অসংগত হতে পারে, যেহেতু তন্ত্রটির হয় অসংখ্য সমাধান আছে অথবা কোনো সমাধান নেই।

উদাহরণ 27 সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে সমাধান করো

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

সমাধান সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে AX = B আকারে লেখা যায়, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

এখন, $|A| = -11 \neq 0$, অতএব, A হল নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স এবং তাই এর একটি অনন্য সমাধান আছে।

লক্ষ করো, $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

অতএব, $x = 3, y = -1$

উদাহরণ 28 ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির প্রয়োগে নীচের সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে সমাধান করো:

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

সমাধান সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে $AX = B$ আকারে লেখা যায়, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

আমরা পাই যে,

$$|A| = 3(2-3) + 2(4+4) + 3(-6-4) = -17 \neq 0$$

অতএব, A হল নন্-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স এবং এর বিপরীত এর অস্তিত্ব আছে। এখন

$A_{11} = -1$, $A_{12} = -8$, $A_{13} = -10$

$A_{21} = -5$, $A_{22} = -6$, $A_{23} = 1$

$A_{31} = -1$, $A_{32} = 9$, $A_{33} = 7$

তাহলে, $$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

সুতরাং, $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ,
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

অতএব, $x = 1, y = 2$ এবং $z = 3$.

উদাহরণ 29 তিনটি সংখ্যার সমষ্টি হল 6 । যদি আমরা তৃতীয় সংখ্যাকে 3 দ্বারা গুণ করে দ্বিতীয় সংখ্যার সাথে যোগ করি তবে 11 পাই। প্রথম এবং তৃতীয় সংখ্যা যোগ করে আমরা দ্বিতীয় সংখ্যার দ্বিগুণ পাই। এটিকে বীজগাণিতিক রূপে উপস্থাপন করো এবং ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি প্রয়োগ করে সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান মনে করো, প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় সংখ্যাকে যথাক্রমে x, y এবং z দ্বারা সূচিত করা হল। তাহলে প্রদত্ত শর্তানুসারে আমরা পাই,

$$x + y + z = 6$$
$$y + 3z = 11$$
$$x + z = 2y \text{ বা } x - 2y + z = 0$$

এই তন্ত্রটিকে $A X = B$ আকারে লেখা যায়, যেখানে

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

এখানে $|A| = 1\,(1+6) - (0-3) + (0-1) = 9 \neq 0$ । এখন আমরা *adj* A নির্ণয় করব।

$$A_{11} = 1\,(1+6) = 7, \quad A_{12} = -(0-3) = 3, \quad A_{13} = -1$$
$$A_{21} = -(1+2) = -3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -(-2-1) = 3$$
$$A_{31} = (3-1) = 2, \quad A_{32} = -(3-0) = -3, \quad A_{33} = (1-0) = 1$$

অতএব,
$$adj\,A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

এভাবে,
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adj\,(A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

যেহেতু, $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

বা, $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+\ 0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

অতএব, $x = 1, y = 2, z = 3$

অনুশীলনী 4.6

নিম্নলিখিত 1 থেকে 6 নং প্রশ্নের সমীকরণ তন্ত্রগুলো সংগত(consistent) কিনা পরীক্ষা করো :

1. $x + 2y = 2$, $2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$, $x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$, $2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$, $2x + 3y + 2z = 2$, $ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$, $2y - z = -1$, $3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$, $2x + 3y + 5z = 2$, $5x - 2y + 6z = -1$

নিম্নলিখিত 7 থেকে 14 নং প্রশ্নে ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি প্রয়োগে রৈখিক সমীকরণ তন্ত্রগুলো সমাধান করো:

7. $5x + 2y = 4$, $7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$, $3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$, $3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$, $3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$, $x - 2y - z = \frac{3}{2}$, $3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$, $2x + y - 3z = 0$, $x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$, $x - 2y + z = -4$, $3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$, $3x + 4y - 5z = -5$, $2x - y + 3z = 12$

15. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^{-1} নির্ণয় করো। অত:পর A^{-1} প্রয়োগ করে নীচের সমীকরণ তন্ত্রের সমাধান করো।

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3$$

16. 4 কেজি পেঁয়াজ, 3 কেজি গম এবং 2 কেজি চালের মোট মূল্য 60 টাকা। 2 কেজি পেঁয়াজ, 4 কেজি গম এবং 6 কেজি চালের মোট মূল্য 90 টাকা। 6 কেজি পেঁয়াজ, 2 কেজি গম এবং 3 কেজি চালের মোট মূল্য 70 টাকা। ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে প্রত্যেক প্রকারের প্রতি কেজির মূল্য নির্ণয় করো।

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 30 যদি a, b, c ধনাত্মক এবং অসমান হয়, দেখাও যে, নির্ণায়ক

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ এর মান ঋণাত্মক হবে।

সমাধান প্রদত্ত নির্ণায়কে $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ প্রয়োগে, আমরা পাই

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ এবং $R_3 \to R_3 - R_1$ প্রয়োগ করে)

$= (a + b + c)\,[(c - b)\,(b - c) - (a - c)\,(a - b)]$ (C_1 বরাবর বিস্তৃত করে)

$= (a + b + c)(- a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$

$$= \frac{-1}{2}\,(a + b + c)\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{-1}{2}\,(a + b + c)\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

যা ঋণাত্মক (যেহেতু $a + b + c > 0$ এবং $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0$)

উদাহরণ 31 যদি $a, b, c,$ সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে

$$\begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$ এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত নির্ণায়কে $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{যেহেতু } 2b = a + c)$$

উদাহরণ 32 দেখাও যে,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

সমাধান নির্ণায়ক Δ-এ $R_1 \to xR_1$, $R_2 \to yR_2$, $R_3 \to zR_3$ প্রয়োগে এবং xyz, দ্বারা ভাগ করে, আমরা পাই

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2y & x^2z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2 এবং C_3 থেকে যথাক্রমে x, y, z উৎপাদক common নিয়ে আমরা পাই,

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_1$ প্রয়োগে, আমরা পাই

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2-z^2 \end{vmatrix}$$

C_2 এবং C_3 থেকে $(x+y+z)$ উৎপাদকটি common নিয়ে আমরা পাই।

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)$ প্রয়োগে, আমরা পাই

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y-z \end{vmatrix}$$

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y} C_1)$ এবং $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z} C_1\right)$ প্রয়োগে, আমরা পাই,

$$\Delta = (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

সবশেষে R_1 বরাবর বিস্তৃত করে, আমরা পাই

$$\Delta = (x+y+z)^2 (2yz) [(x+z)(x+y) - yz] = (x+y+z)^2 (2yz)(x^2+xy+xz)$$
$$= (x+y+z)^3 (2xyz)$$

উদাহরণ 33 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ গুণফলের সাহায্যে নীচের সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে সমাধান করো

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

সমাধান প্রদত্ত গুণফল থেকে পাই $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

অতএব, $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

এখন, প্রদত্ত সমীকরণসমূহের তন্ত্রকে ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

বা, $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

অতএব, $x = 0, y = 5$ এবং $z = 3$

উদাহরণ 34 প্রমাণ করো যে,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

সমাধান Δ তে $R_1 \to R_1 - x\, R_2$ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - x\,R_1$ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\Delta = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

অধ্যায় -4 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটি θ নিরপেক্ষ।

2. নির্ণায়কটি বিস্তৃত না করে, প্রমাণ করো যে, $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3. মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$

4. যদি a, b এবং c বাস্তব সংখ্যা এবং

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0 \text{ হয়,}$$

তবে দেখাও যে, হয় $a+b+c=0$ নতুবা, $a=b=c$

5. $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$, $a \neq 0$ সমীকরণটি সমাধান করো ।

6. প্রমাণ করো : $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7. যদি $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তবে $(AB)^{-1}$ নির্ণয় করো।

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ হলে যাচাই করো :

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

9. মান নির্ণয় করো: $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

10. মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$

11 থেকে 15 নং প্রশ্নে নির্ণায়কের ধর্ম প্রয়োগ করে প্রমাণ করো :

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta-\gamma)\ (\gamma-\alpha)\ (\alpha-\beta)\ (\alpha+\beta+\gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1+pxyz)\ (x-y)\ (y-z)\ (z-x)$, যেখানে p একটি স্কেলার।

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)\ (ab+bc+ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. নীচের সমীকরণ তন্ত্রটি সমাধান করো :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

17 থেকে 19 নং প্রশ্নে সঠিক উত্তর বাছাই করো :

17. যদি a, b, c, সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয় তবে নির্ণায়ক

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ এর মান হল

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. যদি x, y, z শূন্য ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স হল

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. মনে করো, $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, যেখানে $0 \le \theta \le 2\pi$. তবে

(A) $\text{Det}(A) = 0$ (B) $\text{Det}(A) \in (2, \infty)$

(C) $\text{Det}(A) \in (2, 4)$ (D) $\text{Det}(A) \in [2, 4]$

সারসংক্ষেপ

- ম্যাট্রিক্স $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ এর নির্ণায়ক হল $|a_{11}| = a_{11}$
- ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ এর নির্ণায়ক হল

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

- ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ এর নির্ণায়ক (R_1 বরাবর বিস্তৃত করে)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

যে-কোনো বর্গম্যাট্রিক্স A এর জন্য |A| নিম্নলিখিত ধর্মাবলি মেনে চলে।

- $|A'| = |A|$, যেখানে A' = A এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স।
- যদি আমরা যে-কোনো দুটি সারির (বা স্তম্ভের) স্থান বিনিময় করি, তবে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

- যদি যে-কোনো দুটি সারি বা যে-কোনো দুটি স্তম্ভ অভিন্ন অথবা সমানুপাতী হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।
- যদি কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা একটি স্তম্ভের প্রত্যেক উপাদানসমূহকে ধ্রুবক সংখ্যা k দ্বারা গুণ করা হয়, তবে নির্ণায়কটির মান মূল নির্ণায়কের মানের k গুণ হবে।
- একটি নির্ণায়ককে k দ্বারা গুণ করার অর্থ হল এটির কেবলমাত্র একটি সারির (বা একটি স্তম্ভের) উপাদানসমূহকে গুণ করা।
- যদি $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$, $\quad |k.A| = k^3 |A|$
- যদি কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা একটি স্তম্ভের উপাদানসমূহকে দুইটি বা তার অধিক পদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহলে প্রদত্ত নির্ণায়কটিকে দুইটি বা তার অধিক নির্ণায়কের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।
- যদি কোনো নির্ণায়কের যে-কোনো সারি বা স্তম্ভের প্রত্যেক উপাদানের সাথে অনুরূপ অপর কোনো সারি বা স্তম্ভের উপাদানকে সমগুণনীয়ক দ্বারা গুণ করে যোগ করা হয়, তবে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভূজের ক্ষেত্রফলকে লেখা হয়

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়কের পদের মাইনর হল i তম সারি এবং j তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত নির্ণায়ক এবং এটিকে M_{ij} দ্বারা সূচিত করা হয়।
- a_{ij} এর সহগুণনীয়ককে লেখা হয় $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- একটি ম্যাট্রিক্স এর নির্ণায়কের মান একটি সারি (বা একটি স্তম্ভ) এর প্রতিটি উপাদান এবং তাদের অনুরূপ সহগুণনীয়ক গুলোর গুণফলের সমষ্টি দ্বারা প্রাপ্ত হয়। উদাহরণস্বরূপ,

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

- যদি একটি সারির (বা স্তম্ভের) উপাদানসমূহকে অপর কোনো সারির (বা স্তম্ভের) সহগুণনীয়কসমূহ দ্বারা গুণ করা হয়, তবে গুণফলগুলোর সমষ্টি শূন্য হবে। উদাহরণস্বরূপ $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$
- যদি $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, তবে $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$, যেখানে A_{ij} হল a_{ij} এর সহগুণনীয়ক।

- $A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|\,I$, যেখানে A হল n ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স।
- একটি বর্গম্যাট্রিক্স A -কে সিঙ্গুলার বা নন্-সিঙ্গুলার বলা হবে যখন $|A| = 0$ বা $|A| \neq 0$।
- যদি $AB = BA = I$ হয়, যেখানে B একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স, তবে B কে A এর বিপরীত বলা হয়। তাছাড়া $A^{-1} = B$ বা $B^{-1} = A$ হবে এবং তাই $(A^{-1})^{-1} = A$।
- একটি বর্গম্যাট্রিক্স A এর বিপরীত থাকবে যদি এবং কেবলেমাত্র যদি A নন্-সিঙ্গুলার হয়।
- $A^{\ 1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$
- যদি $a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$
  $a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$
  $a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$,
  তবে এই সমীকরণগুলোকে $A\,X = B$, রূপে লেখা যায়, যেখানে

  $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- $AX = B$ সমীকরণের অনন্য সমাধানের জন্য $X = A^{-1}B$ হয়, যেখানে $|A| \neq 0$।
- একটি সমীকরণ তন্ত্র সংগত অথবা অসংগত হয় যদি এর সমাধানের অস্তিত্ব থাকে অথবা না থাকে।
- A বর্গ ম্যাট্রিক্সের ম্যাট্রিক্স সমীকরণ $AX = B$ এর

  (i) অনন্য সমাধান এর অস্তিত্ব থাকে, যদি $|A| \neq 0$ হয়।

  (ii) যদি $|A| = 0$ এবং $(adj\ A)\,B \neq 0$ হয়, তবে সমীকরণগুলোর কোনো সমাধানের অস্তিত্ব থাকে না।

  (iii) যদি $|A| = 0$ এবং $(adj\ A)\,B = 0$ হয়, তবে সমীকরণ তন্ত্রটি সংগত হতে পারে অথবা নাও হতে পারে।

ঐতিহাসিক প্রেক্ষাপট

গণনা বোর্ডে দণ্ড ব্যবহার করে কিছু রৈখিক সমীকরণের অজানা সহগগুলোকে উপস্থাপন করতে চীনা পদ্ধতিটি স্বাভাবিকভাবেই অপনয়নের সহজ নিয়ম আবিস্কারে সহায়তা করে। দণ্ডগুলোর সজ্জাক্রম নির্ণায়কের সংখ্যাগুলোর উপযুক্ত সজ্জার ন্যায়। নির্ণায়কের সরলীকরণের জন্য স্তম্ভ এবং সারিগুলোর বিয়োগের ধারণা চৈনিকরাই প্রথম বিকাশসাধন করেছিলেন *Mikami, China, pp* 30, 93.

সপ্তদশ শতাব্দীর জাপানী মহান গণিতজ্ঞ Seki Kowa, 1683 সালে তাঁর পুস্তিকা *'Kai Fukudai no Ho'* এ নির্ণায়ক এবং এর বিস্তৃতকরণের ধারণা দেখিয়ে ছিলেন। তবে তিনি এই কৌশলটি কেবলমাত্র দুটি রৈখিক সমীকরণ থেকে একটি রাশি অবলুপ্ত করতে ব্যবহার করেছিলেন, কিন্তু রৈখিক সহ-সমীকরণ সমাধানের ক্ষেত্রে সরাসরি ব্যবহার করেননি। T. Hayashi, "*The Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics*," in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde -ই প্রথম ব্যক্তি যিনি নির্ণায়ককে স্বতন্ত্র অপেক্ষক রূপে স্বীকৃতি দিয়েছিলেন। উনাকেই নির্ণায়কের নিয়মমাফিক প্রতিষ্ঠাতা বলা যেতে পারে। Laplace (1772) নির্ণায়ককে এর পূরক মাইনর এর আকারে বিস্তৃতকরণের সাধারণ পদ্ধতি প্রদান করেন। 1773 সালে Lagrange দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়কের ব্যবহার করেন এবং সমীকরণের সমাধান ব্যতীত পৃথক উদ্দেশ্যে তাদের প্রয়োগ করেছিলেন। 1801 সালে Gauss তাঁর সংখ্যা তত্ত্বে নির্ণায়ক ব্যবহার করেছিলেন।

Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) ছিলেন পরবর্তী মহান অবদানকারী যিনি m-স্তম্ভের এবং n-সারির দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফল সম্পর্কিত উপপাদ্য উল্লেখ করেছিলেন, যা $m = n$ বিশেষ ক্ষেত্রের জন্য উপপাদ্যটিকে প্রতিপাদন করে।

আবার একই দিনে, Cauchy (1812) একই বিষয়ের উপর আরেকটি উপস্থাপন করেছেন। তিনি 'নির্ণায়ক'-কে এর বর্তমান অর্থে ব্যবহার করেছিলেন। তিনি Binet এর চেয়ে গুণ সম্পর্কিত উপপাদ্যটিকে আরও সন্তোষজনক রূপে প্রমাণ করেছেন।

Carl Gustav Jacob Jacobi এই তত্ত্বটির মহানতম অবদানকারী ছিলেন। অত:পর নির্ণায়ক শব্দটি তার চূড়ান্ত স্বীকৃতি পেয়েছে।

অধ্যায় 5

সন্ততা এবং অন্তরকলনযোগ্যতা
(Continuity and Differentiability)

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 ভূমিকা

এই অধ্যায়টি মূলত একাদশ শ্রেণির অপেক্ষক সমূহের অন্তরকলনের একটি ধারাবাহিক অধ্যয়ন। আমরা নির্দিষ্ট কিছু অপেক্ষক যেমন- বহুপদী অপেক্ষক এবং ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক-এর অবকলন করা শিখেছি। এই অধ্যায়ে, আমরা কিছু গুরুত্বপূর্ণ ধারণা যেমন সন্ততা, অবকলনযোগ্যতা বা অন্তরকলনযোগ্যতা এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্ক নিয়ে পরিচিত হব। তাছাড়াও বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের অন্তরকলজ শিখব। উপরন্তু, আমরা নতুন ধরনের অপেক্ষক সম্বন্ধে পরিচিত হব, যাদের বলা হয় সূচকীয় এবং লগারিদমিক অপেক্ষক। এই অপেক্ষকগুলো অন্তরকলজের শক্তিশালী কৌশলগুলোকে পরিচালিত করে। আমরা অবকলন বিদ্যার মাধ্যমে কিছু জ্যামিতিক ধারণার সুস্পষ্ট শর্ত বর্ণনা করব। এই প্রক্রিয়ায়, আমরা উক্ত বিষয়ে কিছু মৌলিক উপপাদ্য শিখব।

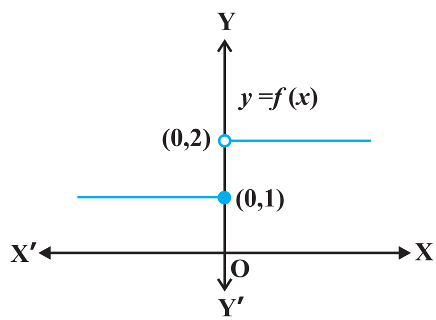
স্যার আইজ্যাক নিউটন
(1642-1727)

5.2 সন্ততা (Continuity)

এই অনুচ্ছেদে আমরা সন্ততার ধারণা পাওয়ার জন্য বিধিবহির্ভূত দুটি উদাহরণ দিয়ে শুরু করব। মনে করো অপেক্ষকটি

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ যদি } x \le 0 \\ 2, \text{ যদি } x > 0 \end{cases}$$

বাস্তব সংখ্যারেখার প্রতিটি বিন্দুতে এই অপেক্ষকটি অবশ্যই সংজ্ঞাত। চিত্র 5.1-এ অপেক্ষকটির লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে। এখন, যে-কোনো কেউ লেখচিত্রটি থেকে অনুমান করতে পারবে যে, $x = 0$ ব্যাতীত, X- অক্ষের কাছাকাছি বিন্দুগুলোতে অপেক্ষকের মান একে অপরের সমান হয়। 0 এর বাম দিকে এবং এর নিকটবর্তী বিন্দুগুলো অর্থাৎ, – 0.1, – 0.01, – 0.001-তে অপেক্ষকটির মান হবে 1, আবার 0 এর ডান দিকে এবং এর নিকটবর্তী বিন্দুগুলো অর্থাৎ 0.1, 0.01, 0.001-তে অপেক্ষকটির মান হবে 2।



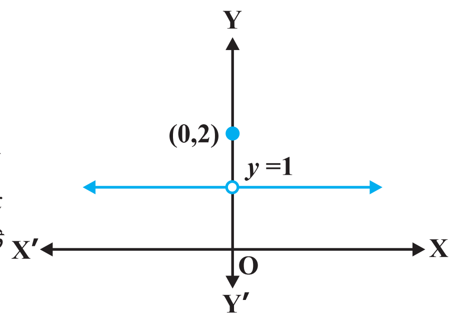
চিত্র 5.1

বাম এবং ডান পক্ষের সীমাগুলোর ধারণা ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি যে, 0 বিন্দুতে f -এর বাম এবং ডান পক্ষের সীমা হবে যথাক্রমে 1 এবং 2। বিশেষ ক্ষেত্রে, বাম এবং ডান পক্ষের সীমাগুলো সমাপতিত হয় না। আমরা আরও লক্ষ করি যে, $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান বাম পক্ষের সীমার সাথে সমাপতিত হয়। লক্ষ করো যখন আমরা এর লেখচিত্র আঁকার চেষ্টা করি, তখন আমরা একটানে আঁকতে পারি না অর্থাৎ কাগজের তল থেকে কলম না তুলে, আমরা উক্ত অপেক্ষকটির লেখচিত্র আঁকতে পারি না। প্রকৃতপক্ষে, আমাদের কলম তোলার প্রয়োজন হয় যখন আমরা বাম দিক থেকে 0 (শূন্য)-তে আসি। এটি $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষক সন্তত না হওয়ার একটি উদাহরণ।

এখন, নিম্নে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষকটি বিবেচনা করি

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ যদি } x \neq 0 \\ 2, \text{ যদি } x = 0 \end{cases}$$

এই অপেক্ষকটিও প্রতিটি বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত। $x = 0$ বিন্দুতে বাম পক্ষ এবং ডান পক্ষ উভয়েরই সীমা 1 এর সমান। কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান 2 এর সমান যা বাম পক্ষ এবং ডান পক্ষের সাধারণ সীমাস্থমানের সাথে সমাপতিত হয় না। আবার, আমরা লক্ষ করি যে কলম না তুলে অপেক্ষকটির লেখচিত্র আমরা অঙ্কন করতে পারি না। এটি $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত না হওয়ার অপর একটি উদাহরণ।



চিত্র 5.2

নি:সন্দেহে, আমরা বলতে পারি যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি অপেক্ষক সন্তত হবে যদি কাগজের তল থেকে কলম না তুলে উক্ত বিন্দুর *চারদিকে* অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারি।

গাণিতিকভাবে, এটিকে নিম্নলিখিত সহজ উপায়ে ব্যক্ত করা যায় :

সংজ্ঞা 1 ধরা যাক, f হল বাস্তব সংখ্যার উপসেটের উপর একটি বাস্তব অপেক্ষক এবং ধরি c হল f এর সংজ্ঞার অঞ্চলের একটি বিন্দু। তবে c বিন্দুতে f সন্তত হবে যদি

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ হয়।}$$

আরও বিশদভাবে বলা যায় যে, $x = c$ বিন্দুতে f কে সন্তত *(continuous)* বলা হবে, যদি বাম পক্ষের সীমা, ডান পক্ষের সীমা এবং $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকের মানের অস্তিত্ব থাকে এবং এরা পরস্পর সমান হয়। স্মরণ করো যে, যদি $x = c$ বিন্দুতে ডান পক্ষ এবং বাম পক্ষের সীমা সমাপতিত হয়, তবে আমরা বলতে পারি যে সাধারণ মানটি হল $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা। সুতরাং, আমরা সন্ততার সংজ্ঞাকে নিম্নরূপেও ব্যক্ত করতে পারি : *একটি অপেক্ষক $x = c$ বিন্দুতে সন্তত হবে যদি অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত হয় এবং $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান উক্ত বিন্দুতে এর সীমা সমান হয়। যদি $x = c$ বিন্দুতে f সন্তত না হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে আমরা f কে অসন্তত (discontinuous) বলব এবং c কে f এর অসন্তত বিন্দু বলা হবে।*

উদাহরণ 1 $x = 1$ বিন্দুতে f অপেক্ষকটি, $f(x) = 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, এর সন্ততা যাচাই করো।

সমাধান প্রথমে লক্ষ করো যে, প্রদত্ত $x = 1$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত এবং এর মান হল 5 । অতএব $x = 1$ বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা নির্ণয় করো। স্পষ্টতই

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+3) = 2(1)+3 = 5$$

অতএব,
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

সুতরাং, $x = 1$ বিন্দুতে f সন্তত।

উদাহরণ 2 $x = 0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকটি, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, সন্তত কিনা পরীক্ষা করো।

সমাধান প্রথমে লক্ষ করো যে, প্রদত্ত $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত এবং এর মান 0 অতএব $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকের সীমা নির্ণয় করো। স্পষ্টতই

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

অতএব,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত।

উদাহরণ 3 $x = 0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকটি, $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, এর সন্ততা আলোচনা করো।

সমাধান সংজ্ঞানুসারে

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যদি } x < 0 \\ x, & \text{যদি } x \ge 0 \end{cases}$$

স্পষ্টতই অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সংজ্ঞাত এবং $f(0) = 0$ । $x = 0$ বিন্দুতে f এর বাম পক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$$

একইরকমভাবে, $x = 0$ বিন্দুতে f এর ডানপক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

অতএব, $x = 0$ বিন্দুতে বাম পক্ষের সীমা, ডান পক্ষের সীমা এবং অপেক্ষকের মান সমাপতিত হয়। সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত।

উদাহরণ 4 দেখাও যে, $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষক f সন্তত নয়, যেখানে $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{যদি } x \ne 0 \\ 1, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$

সমাধান $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত এবং উক্ত বিন্দুতে এর মান 1 । যখন $x \neq 0$, তখন অপেক্ষকটি একটি বহুপদী অপেক্ষকরূপে সংজ্ঞায়িত। সুতরাং,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে f এর সীমা $f(0)$ এর সাথে সমাপতিত হয় না, সেহেতু উক্ত বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত নয়। এটি লক্ষ করা যায় যে $x = 0$ হল এই অপেক্ষকের একমাত্র অসন্তত বিন্দু।

উদাহরণ 5 যে বিন্দুগুলোতে ধ্রুবক অপেক্ষক $f(x) = k$ সন্তত হয়, তা পরীক্ষা করো।

সমাধান অপেক্ষকটি সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় সংজ্ঞাত এবং সংজ্ঞানুসারে, যে-কোনো বাস্তব সংখ্যায় এর মান k এর সমান। ধরা যাক, c হল যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা। অতএব

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$

যেহেতু যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা c এর জন্য $f(c) = k = \lim_{x \to c} f(x)$ হয়, অতএব প্রতিটি বাস্তব সংখ্যায় অপেক্ষক f সন্তত হবে।

উদাহরণ 6 প্রমাণ করো যে বাস্তব সংখ্যার উপর অভেদ অপেক্ষক, $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে এটি প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্য সন্তত হবে।

সমাধান স্পষ্টতই প্রতিটি বিন্দুতে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত এবং প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা c এর জন্য $f(c) = c$ হয়। তাছাড়া,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

সুতরাং, $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ এবং তাই, প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্য অপেক্ষকটি সন্তত।

একটি প্রদত্ত বিন্দুতে অপেক্ষকটির সন্ততা নির্ধারণ করার পর, এখন আমরা একটি অপেক্ষকের সন্ততার আলোচনায় এই সংজ্ঞাটির সহজাত সম্প্রসারণ (natural extension) করব।

সংজ্ঞা 2 একটি বাস্তব অপেক্ষক f -কে সন্তত বলা হবে যদি f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুতে এটি সন্তত হয়।

এই সংজ্ঞাটির কিছুটা সম্প্রসারণ প্রয়োজন। ধরা যায় f অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$ এর উপর সংজ্ঞাত, অতএব f সন্তত হতে হলে প্রান্তবিন্দু a এবং b সহযোগে $[a, b]$ এর প্রতিটি বিন্দুতে এটি সন্তত হওয়া প্রয়োজন। a বিন্দুতে f এর সন্ততা বলতে বোঝায়

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

এবং b বিন্দুতে f এর সন্ততা বলতে বোঝায়

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

লক্ষ করো যে $\lim_{x \to a^-} f(x)$ *এবং* $\lim_{x \to b^+} f(x)$ *এর কোনো অর্থ নেই। এই সংজ্ঞার ফলস্বরূপ, যদি* f *কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে সংজ্ঞাত হয়, তবে এটি উক্ত বিন্দুতে সন্তত হবে, অর্থাৎ যদি* f *এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র এক পদবিশিষ্ট হয় তবে* f *একটি সন্তত অপেক্ষক।*

উদাহরণ 7 $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষক, কি একটি সন্তত অপেক্ষক হবে?

সমাধান আমরা f কে পুনরায় নিম্নরূপে লিখতে পারি

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যদি } x < 0 \\ x, & \text{যদি } x \geq 0 \end{cases}$$

উদাহরণ 3 এর সাহায্যে, আমরা জানি যে $x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত।

ধরা যাক, একটি বাস্তব সংখ্যা c, এমন যে $c < 0$ তবে $f(c) = -c$ । অতএব,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c \qquad \text{(কেন?)}$$

যেহেতু $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, তাই সমস্ত ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যায় f সন্তত।

এখন, ধরা যাক একটি বাস্তব সংখ্যা c, এমন যে $c > 0$ তবে $f(c) = c$ । অতএব,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad \text{(কেন?)}$$

যেহেতু $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, তাই সমস্ত ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যায় f সন্তত। সুতরাং, সমস্ত বিন্দুতে f সন্তত।

উদাহরণ 8 একটি অপেক্ষক f, যা $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, এর সন্তততা আলোচনা করো।

সমাধান স্পষ্টতই f প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা c-এ সংজ্ঞাত এবং c বিন্দুতে এর মান $c^3 + c^2 - 1$ । আমরা আরও জানি যে

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

অতএব, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, সুতরাং প্রতিটি বাস্তব সংখ্যায় f সন্তত। এটি বোঝায় যে f একটি সন্তত অপেক্ষক।

উদাহরণ 9 একটি অপেক্ষক f, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, এর সন্তততা আলোচনা করো।

সমাধান যে কোনো একটি অ-শূন্য বাস্তব সংখ্যা, c কে স্থির রেখে, আমরা পাই

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

আবার, যেহেতু $c \neq 0$ এর জন্য, $f(c) = \frac{1}{c}$, তবে আমরা পাই $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ এবং তাই f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুতে f সন্তত। অতএব, f একটি সন্তত অপেক্ষক।

অসীম *(infinity)* সম্পর্কিত ধারণা ব্যাখ্যা করার জন্য আমরা এই সুযোগটি নিই। আমরা এটি $x = 0$ এর কাছাকাছি $f(x) = \frac{1}{x}$ অপেক্ষকের বিশ্লেষণের মাধ্যমে সম্পাদন করব। এই বিশ্লেষণটি সম্পাদন করতে আমরা অপেক্ষটির 0 এর কাছাকাছি কোনো বাস্তব সংখ্যায় মান নির্ণয়ে যথাযথ কৌশল অনুসরণ করি। মূলত: $x = 0$ বিন্দুতে f এর ডান পক্ষের সীমা নির্ণয় করার চেষ্টা করি। আমরা এটিকে নিম্নরূপে সারণিবদ্ধ করি (সারণি 5.1) ।

সারণি 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{-1}$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$	10^{-n}
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

আমরা লক্ষ করি যে x ক্রমশ ডান দিক থেকে 0 এর যত নিকটতর হয়, $f(x)$ এর মান তত দ্রুত বৃদ্ধি পায়। এটিকে অন্যভাবেও ব্যক্ত করা যায়: 0 -এর খুব নিকটবর্তী একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা নির্বাচনের মাধ্যমে $f(x)$ এর মান প্রদত্ত যে-কোনো সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর করা যায়। সাংকেতিকভাবে, আমরা লিখতে পারি

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(যা পড়তে হবে: *x-0* বিন্দুতে $f(x)$ এর ডান পক্ষের সীমা হল প্লাস ইন্‌ফিনিটি)। আমরা গুরুত্ব আরোপ করে বলতে পারি যে $+\infty$ একটি বাস্তব সংখ্যা নয়, সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে f এর ডান পক্ষের সীমা -এর অস্তিত্ব নেই (একটি বাস্তব সংখ্যার জন্য)।

অনুরূপভাবে, $x=0$ বিন্দুতে f এর বাম পক্ষের সীমা পেতে পারি। নীচের সারণিটি স্বয়ং অর্থবোধক।

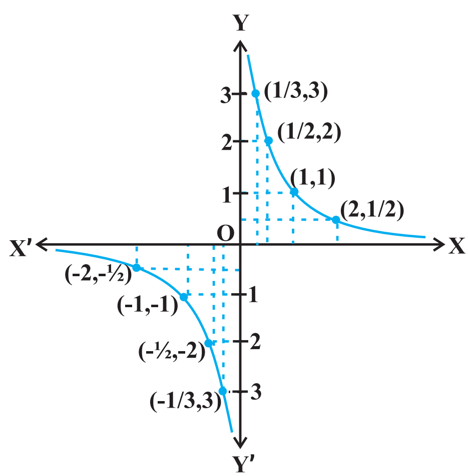
সারণি 5.2

x	-1	-0.3	-0.2	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-n}
$f(x)$	-1	$-3.333...$	-5	-10	-10^2	-10^3	-10^n

সারণি 5.2 থেকে, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, 0 এর খুব নিকটবর্তী একটি ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা নির্বাচনের মাধ্যমে $f(x)$ এর মান প্রদত্ত যে-কোনো সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। সাংকেতিকভাবে, আমরা লিখতে পারি

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

(যা পড়তে হবে : $x=0$ বিন্দুতে $f(x)$ এর বাম পক্ষের সীমা হল মাইনাস ইন্‌ফিনিটি। আবার, আমরা গুরুত্ব আরোপ করে বলতে পারি যে $-\infty$ একটি বাস্তব সংখ্যা নয়, সুতরাং $x=0$ বিন্দুতে f এর বাম পক্ষের সীমা-এর অস্তিত্ব নেই (একটি বাস্তব সংখ্যার জন্য)। চিত্র 5.3 -এ দেওয়া বিপরীত অপেক্ষকের লেখচিত্র হল উপরে উল্লেখিত ঘটনাগুলোর জ্যামিতিক উপস্থাপন।



চিত্র 5.3

উদাহরণ 10 একটি অপেক্ষক f এর সংজ্ঞা নীচে দেওয়া আছে :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ যদি } x \le 1 \\ x-2, \text{ যদি } x > 1 \end{cases}$$

এর সন্ততা আলোচনা করো।

সমাধান বাস্তব সংখ্যারেখার প্রতিটি বিন্দুতে f সংজ্ঞাত।

ক্ষেত্র 1 যদি $c < 1$, তবে $f(c) = c + 2$ । সুতরাং, $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}(x+2) = c+2$

এইভাবে, 1 অপেক্ষা ছোট সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় f সন্তত।

ক্ষেত্র 2 যদি $c > 1$, তবে $f(c) = c - 2$. তারপর,

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x-2) = c - 2 = f(c)$$

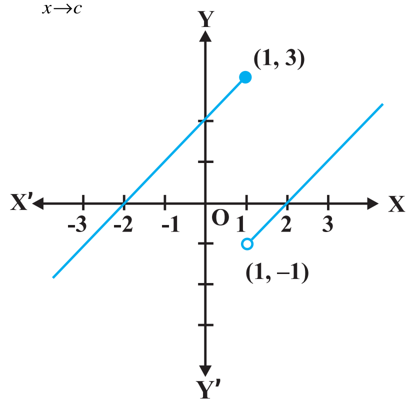
এইভাবে, $x > 1$ এর সমস্ত বিন্দুতে f সন্তত।

ক্ষেত্র 3 যদি $c = 1$, তবে $x = 1$ বিন্দুতে f এর বাম পক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 1+2 = 3$$

$x = 1$ বিন্দুতে f এর ডানপক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-2) = 1-2 = -1$$



চিত্র 5.4

যেহেতু $x = 1$ বিন্দুতে f এর বাম এবং ডান পক্ষের সীমাগুলি সমাপতিত হয় না, তাই $x = 1$ বিন্দুতে f সন্তত নয়। সুতরাং, $x = 1$ হল f এর একমাত্র অসন্তত বিন্দু। চিত্র 5.4 এ অপেক্ষকটির লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে।

উদাহরণ 11 একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ যদি } x < 1 \\ 0, \quad \text{ যদি } \quad x = 1 \\ x-2, \text{ যদি } x > 1 \end{cases}$$

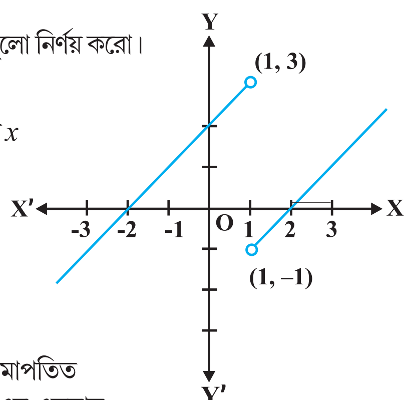
এর সমস্ত অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান পূর্বের উদাহরণ থেকে আমরা পাই যে f সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় $x \ne 1$ সন্তত হয়। $x = 1$ বিন্দুতে f এর বামপক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+2) = 1+2 = 3$$

$x = 1$ বিন্দুতে ডানপক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-2) = 1-2 = -1$$



চিত্র 5.5

যেহেতু $x = 1$ বিন্দুতে f এর বাম এবং ডান পক্ষের সীমাগুলো সমাপতিত হয় না, তাই $x = 1$ বিন্দুতে f সন্তত নয়। সুতরাং $x = 1$ হল f এর একমাত্র অসন্তত বিন্দু। চিত্র 5.5 -এ অপেক্ষকটির লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে।

উদাহরণ 12 একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

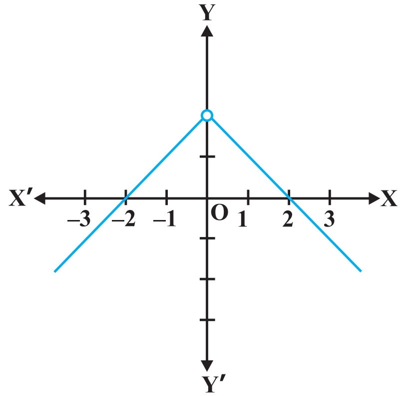
$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{যদি } x<0 \\ -x+2, & \text{যদি } x>0 \end{cases}$$ এর সন্ততা আলোচনা করো।

সমাধান লক্ষ করো যে 0 ব্যাতীত সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত। অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল

$D_1 \cup D_2$ যেখানে $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ এবং
$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

ক্ষেত্র 1 যদি $c \in D_1$, তবে $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (x + 2)$
$= c + 2 = f(c)$ এবং তাই D_1 -এ f সন্তত।

ক্ষেত্র 2 যদি $c \in D_2$, তবে $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} (-x + 2)$
$= -c + 2 = f(c)$ এবং তাই D_2 -এ f সন্তত। যেহেতু f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের সকল বিন্দুতে f সন্তত, তাই আমরা অনুমান করতে পারি যে f সন্তত। চিত্র 5.6 -এ অপেক্ষকটির লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে। লক্ষ করো যে অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কনে কাগজের তল থেকে আমাদের কলম তুলতে হয়। কিন্তু এরকম করার প্রয়োজন হয় কেবলমাত্র ঐ সমস্ত বিন্দুর ক্ষেত্রে যেখানে অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত নয়।



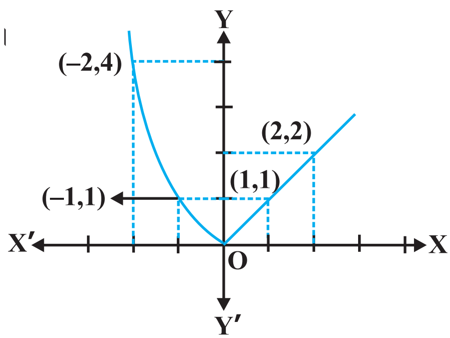
চিত্র 5.6

উদাহরণ 13 একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপ সংজ্ঞাত

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \geq 0 \\ x^2, & \text{যদি } x<0 \end{cases}$$ এর সন্ততা আলোচনা করো।

সমাধান স্পষ্টতই, সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত। চিত্র 5.7-এ অপেক্ষকটির লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে। পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে, f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে বাস্তব সংখ্যারেখার উপর তিনটি পৃথক উপসেটে বিভাজিত করা সমীচীন মনে হয়।

ধরা যাক, $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ এবং
$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$



চিত্র 5.7

ক্ষেত্র 1 D_1 এর যে কোনো বিন্দুতে, আমরা পাই $f(x) = x^2$ এবং সহজে দেখা যায় যে এখানে অপেক্ষক f সন্তত (উদাহরণ 2 দেখো)।

ক্ষেত্র 2 D_3 এর যে-কোনো বিন্দুতে, আমরা পাই $f(x) = x$ এবং সহজে দেখা যায় যে এখানে অপেক্ষক f সন্তত (উদাহরণ 6 দেখো) ।

ক্ষেত্র 3 এখন আমরা $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি বিশ্লেষণ করব। $x=0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান $f(0) = 0$ হয়। $x=0$ বিন্দুতে বাম পক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0$$

$x=0$ বিন্দুতে ডান পক্ষের সীমা হল

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

অতএব, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ এবং তাই $x=0$ বিন্দুতে f সন্তত। এটি বোঝায় যে f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুতে f সন্তত এবং তাই f একটি সন্তত অপেক্ষক।

উদাহরণ 14 দেখাও যে প্রতিটি বহুপদী অপেক্ষক সন্তত।

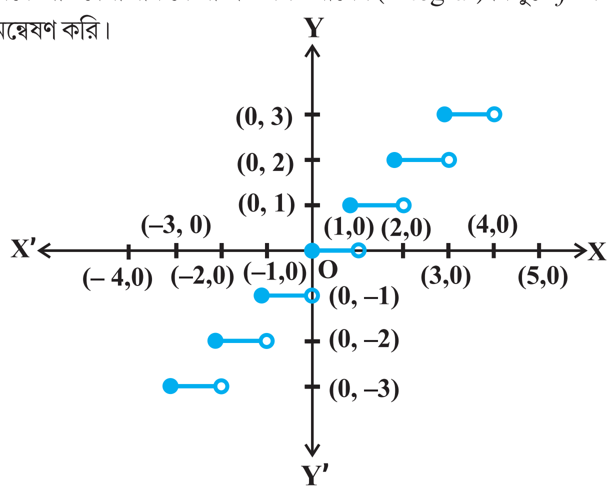
সমাধান স্মরণ করো যে একটি অপেক্ষক p, বহুপদী অপেক্ষক হবে যদি এটি কিছু স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়, যেখানে $a_n \neq 0$ এবং $a_i \in \mathbf{R}$ । স্পষ্টতই এই অপেক্ষকটি সমস্ত বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞাত। একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা c এর জন্য, আমরা পাই

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

সংজ্ঞানুসারে, c বিন্দুতে p সন্তত। যেহেতু c যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা, তাই p সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় সন্তত এবং তাই p একটি সন্তত অপেক্ষক।

উদাহরণ 15 একটি বৃহত্তম পূর্ণ সংখ্যা অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত : $f(x) = [x]$, যেখানে $[x]$ হল বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা x এর চেয়ে ছোটো অথবা x এর সমান; f এর সমস্ত অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

সমাধান প্রথমে পর্যবেক্ষণ করো যে সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় f সংজ্ঞাত। চিত্র 5.8 -এ অপেক্ষকের লেখচিত্র দেওয়া হয়েছে। লেখচিত্র থেকে এটি দেখা যায় যে প্রতিটি অখণ্ডমানের (integral) বিন্দুতে f অসন্তত। যদি এটি সত্য হয়, তবে নীচে আমরা অন্বেষণ করি।



চিত্র 5.8

ক্ষেত্র 1 ধরা যাক c হল একটি বাস্তব সংখ্যা যা কোনো পূর্ণসংখ্যার সমান নয়। লেখচিত্র থেকে এটি স্পষ্ট যে c এর কাছাকাছি সমস্ত বাস্তব সংখ্যার জন্য অপেক্ষকটির মান $[c]$ এর সমান হয়; অর্থাৎ, $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} [x] = [c]$।

আবার $f(c) = [c]$ এবং তাই অপেক্ষকটি পূর্ণসংখ্যা নয় এমন সমস্ত বাস্তব সংখ্যায় সন্তত।

ক্ষেত্র 2 ধরা যাক c হল একটি পূর্ণ সংখ্যা। অতএব আমরা এমন একটি পর্যাপ্ত ছোট বাস্তব সংখ্যা $r > 0$ পেতে পারি যেখানে $[c - r] = c - 1$, $[c + r] = c$ ।

এটি, সীমা রূপে বোঝায় যে

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = c - 1, \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = c$$

যেহেতু যে-কোনো c এর জন্য এই সীমাগুলো পরস্পর সমান হতে পারে না, তাই প্রতিটি অখণ্ড মানের বিন্দুতে অপেক্ষকটি অসন্তত।

5.2.1 সন্তত অপেক্ষকের বীজগণিত (Algebra of continuous functions)

পূর্ববর্তী শ্রেণীতে, সীমার ধারণা বোঝার পর, আমরা সীমার কিছু বীজগণিত অধ্যয়ন করেছি। অনুরূপভাবে, এখন আমরা কিছু সন্তত অপেক্ষকের বীজগণিত নিয়ে অধ্যয়ন করব, যেহেতু কোনো বিন্দুতে একটি অপেক্ষকের সন্ততা পুরোপুরিভাবে উক্ত বিন্দুতে ঐ অপেক্ষকের সীমা দ্বারা নির্ধারিত হয়, তাই সীমার ক্ষেত্রে সাদৃশ্যপূর্ণ ফলাফলগুলো আশা করা যুক্তিসঙ্গত।

উপপাদ্য 1 ধরা যাক f এবং g বাস্তব অপেক্ষক দুটি বাস্তব সংখ্যা c তে সন্তত, তবে

(1) $x = c$ -তে, $f + g$ সন্তত।

(2) $x = c$ -তে, $f - g$ সন্তত।

(3) $x = c$ -তে, $f \,.\, g$ সন্তত।

(4) $x = c$ -তে, $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ সন্তত (যখন $g(c) \neq 0$)।

প্রমাণ আমরা $x = c$ বিন্দুতে $(f + g)$ অপেক্ষকের সন্ততা অনুসন্ধান করছি। স্পষ্টতই $x = c$ বিন্দুতে এটি সংজ্ঞাত। আমরা জানি

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] && (f+g \text{ এর সংজ্ঞা হতে})\\
&= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) && (\text{সীমার উপপাদ্য হতে})\\
&= f(c) + g(c) && (\text{যেহেতু } f \text{ এবং } g \text{ সন্তত})\\
&= (f+g)(c) && (f+g \text{ এর সংজ্ঞা হতে})
\end{aligned}$$

অতএব, $x = c$ বিন্দুতে $f+g$ সন্তত।

অবশিষ্ট অংশের প্রমাণগুলো অনুরূপ এবং তা পাঠকের উদ্দেশ্যে অভ্যাসের জন্য ছাড়া হল।

মন্তব্য

(i) উপরিউক্ত (3) নং এর একটি বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক অর্থাৎ, $f(x) = \lambda$, যেখানে λ একটি বাস্তব সংখ্যা, তবে অপেক্ষক $(\lambda . g)$ কে $(\lambda . g)(x) = \lambda\, g(x)$ রূপে সংজ্ঞায়িত করা হয় এবং এটিও একটি সন্তত অপেক্ষক। বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি $\lambda = -1$ হয় তবে f এর সন্তত বোঝায় $-f$ এর সন্ততা।

(ii) উপরিউক্ত (4) নং এর একটি বিশেষ ক্ষেত্রে, যদি f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক $f(x) = \lambda$, হয়, তবে $\dfrac{\lambda}{g}$ অপেক্ষকটি $\dfrac{\lambda}{g}(x) = \dfrac{\lambda}{g(x)}$, যা একটি সন্তত অপেক্ষক রূপে সংজ্ঞায়িত হয়, যেখানে $g(x) \neq 0$ ।

বিশেষক্ষেত্রে, g অপেক্ষকের সন্ততা $\dfrac{1}{g}$ অপেক্ষকের সন্ততাকে বোঝায়।

উপরিউক্ত উপপাদ্যগুলো প্রয়োগ করে অনেক সন্তত অপেক্ষক তৈরি করতে পারি। কোনো অপেক্ষক সন্তত কি না তা নিশ্চিত করতেও এগুলো সহায়তা করে। নিম্নলিখিত উদাহরণে এই বিষয়টি স্পষ্ট করা হয়েছে:

উদাহরণ 16 প্রমাণ করো যে প্রতিটি মূলদ অপেক্ষক সন্তত।

সমাধান স্মরণ করো যে, প্রতিটি মূলদ অপেক্ষক f হল

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0$$

যেখানে p এবং q হল বহুপদী অপেক্ষক। f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল সকল বাস্তব সংখ্যা যেখানে q শূন্য নয়। যেহেতু বহুপদী অপেক্ষক সন্তত (উদাহরণ 14) তাই f, উপপাদ্য 1 এর (4) নং শর্ত অনুসারে সন্তত।

উদাহরণ 17 sine অপেক্ষকের সন্ততা আলোচনা করো।

সমাধান এটি আলোচনা করতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো ব্যবহার করতে পারি।

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

এটিকে আমরা প্রমাণ করিনি, কিন্তু প্রাথমিকভাবে $\sin x$ এর লেখচিত্র থেকে স্পষ্ট যে এটির মান শূন্য (0) এর কাছাকাছি।

এখন, লক্ষ করো যে $f(x) = \sin x$ সমস্ত বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত। ধরো c একটি বাস্তব সংখ্যা। $x = c + h$. বসাও। যদি $x \to c$ হয়, তবে আমরা পাই $h \to 0$ । সুতরাং,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} \sin x \\
&= \lim_{h \to 0} \sin(c + h) \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h] \\
&= \lim_{h \to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h \to 0} [\cos c \sin h] \\
&= \sin c + 0 = \sin c = f(c)
\end{aligned}$$

এইভাবে, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ এবং অত:পর f হল একটি সন্তত অপেক্ষক।

মন্তব্য Cosine অপেক্ষকের সন্ততার জন্য একটি অনুরূপ প্রমাণ করা যেতে পারে।

উদাহরণ 18 প্রমাণ করো যে, $f(x) = \tan x$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষক, একটি সন্তত অপেক্ষক।

সমাধান অপেক্ষক, $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, এটি $\cos x \neq 0$ এরূপ সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত, অর্থাৎ, $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ ।আমরা এই মাত্র প্রমাণ করেছি যে Sine এবং Cosine অপেক্ষক উভয়ই সন্তত। অর্থাৎ tanx দুটি সন্তত অপেক্ষকের ভাগফল হওয়ায় এটিও সন্তত যেখানে এটি সংজ্ঞাত। অপেক্ষকসমূহের সংযোজন সম্পর্কিত, সন্তত অপেক্ষকের আচরণ হল একটি মজাদার ঘটনা। স্মরণ করো যে, যদি f এবং g দুটি বাস্তব অপেক্ষক হয়, তবে

$$(f \circ g)\,(x) = f(g\,(x))$$

সংজ্ঞাত হয় যখন g এর প্রসার (range) হল f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি উপসেট। নীচের উপপাদ্যটি (প্রমাণ ব্যাতীত বিবৃত হল) সংযুক্ত অপেক্ষকের সন্ততা ব্যক্ত করে।

উপপাদ্য 2 ধরা যাক f এবং g দুটি বাস্তবমানযুক্ত অপেক্ষক এরূপ যে c -তে $(f \circ g)$ সংজ্ঞায়িত হয়। যদি c -তে g সন্তত হয় এবং $g\,(c)$ -তে f সন্তত হয়, তবে c -তে $(f \circ g)$ সন্তত হবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলো এই উপপাদ্যটিকে স্পষ্ট করে।

উদাহরণ 19 দেখাও যে $f(x) = \sin\,(x^2)$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষক, একটি সন্তত অপেক্ষ।

সমাধান লক্ষ করো যে, প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্য অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত। অপেক্ষক f -কে দুটি অপেক্ষক g এবং h এর সংযুক্ত অপেক্ষক $(g \circ h)$ রূপে ভাবা যায়, যেখানে $g\,(x) = \sin x$ এবং $h\,(x) = x^2$। যেহেতু g এবং h উভয়ই সন্তত অপেক্ষক, উপপাদ্য 2 হতে, এটি দেখানো যায় যে f একটি সন্তত অপেক্ষক।

উদাহরণ 20 দেখাও যে $f(x) = |1 - x + |x||$, অপেক্ষকটি একটি সন্তত অপেক্ষক, যেখানে x যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা।

সমাধান সমস্ত বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য g-কে $g\,(x) = 1 - x + |x|$ এবং h -কে $h\,(x) = |x|$ রূপে সংজ্ঞায়িত করি। তবে

$$\begin{aligned}(h \circ g)\,(x) &= h\,(g\,(x))\\ &= h\,(1 - x + |x|)\\ &= |1 - x + |x|| = f(x)\end{aligned}$$

উদাহরণ 7-এ, আমরা দেখেছি যে h একটি সন্তত অপেক্ষক। সুতরাং, g একটি বহুপদী অপেক্ষক ও পরম অপেক্ষক (modulus function) এর যোগফল হওয়ার কারণে এটি একটি সন্তত অপেক্ষক। অত:পর দুটি সন্তত অপেক্ষকের সংযুক্ত হওয়ার কারণে f ও একটি সন্তত অপেক্ষক।

অনুশীলনী 5.1

1. প্রমান করো যে $f(x) = 5x - 3$ অপেক্ষকটি $x = 0$, $x = -3$ এবং $x = 5$ বিন্দুতে সন্তত।

2. $x = 3$ বিন্দুতে $f(x) = 2x^2 - 1$ অপেক্ষকের সন্ততা পরীক্ষা করো।

3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর জন্য সন্ততা পরীক্ষা করো :

(a) $f(x) = x - 5$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$ (d) $f(x) = |x - 5|$

4. প্রমাণ করো যে $f(x) = x^n$ অপেক্ষকটি $x = n$ বিন্দুতে সন্তত, যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

5. একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \leq 1 \\ 5, & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$$

তবে $x = 0, x = 1, x = 2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি কি সন্তত?

অপেক্ষক f-এর সকল অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো, যেখানে f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

6. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{যদি } x \leq 2 \\ 2x-3, & \text{যদি } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x|+3, & \text{যদি } x \leq -3 \\ -2x, & \text{যদি } -3 < x < 3 \\ 6x+2, & \text{যদি } x \geq 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{যদি } x \neq 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & \text{যদি } x < 0 \\ -1, & \text{যদি } x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{যদি } x \geq 1 \\ x^2+1, & \text{যদি } x < 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3-3, & \text{যদি } x \leq 2 \\ x^2+1, & \text{যদি } x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, & \text{যদি } x \leq 1 \\ x^2, & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$

13. একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{যদি } x \leq 1 \\ x-5, & \text{যদি } x > 1 \end{cases}$$

তবে অপেক্ষকটি কি সন্তত?

অপেক্ষক f এর সন্ততা আলোচনা করো, যেখানে f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

14. $f(x)=\begin{cases}3, & \text{যদি } 0\le x\le 1\\ 4, & \text{যদি } 1<x<3\\ 5, & \text{যদি } 3\le x\le 10\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{যদি } x<0\\ 0, & \text{যদি } 0\le x\le 1\\ 4x, & \text{যদি } x>1\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{যদি } x\le -1\\ 2x, & \text{যদি } -1<x\le 1\\ 2, & \text{যদি } x>1\end{cases}$

17. একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত:

$$f(x)=\begin{cases}ax+1, & \text{যদি } x\le 3\\ bx+3, & \text{যদি } x>3\end{cases}$$

$x = 3$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত হলে a এবং b এরমধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো।

18. একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda(x^2-2x), & \text{যদি } x\le 0\\ 4x+1, & \text{যদি } x>0\end{cases}$$

λ এর কোন্ মানের জন্য অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত? $x = 1$ বিন্দুতে সন্ততা সম্বন্ধে কী বলা যায়?

19. দেখাও যে একটি অপেক্ষক $g(x) = x - [x]$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে এটি সকল অখন্ড (integral) মানের বিন্দুগুলোতে অসন্তত। যেখানে $[x]$ হল বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা যা x এর চেয়ে ছোটো অথবা x এর সমান।

20. $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ অপেক্ষকটি কি $x = \pi$ বিন্দুতে সন্তত?

21. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর সন্ততা আলোচনা করো :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x - \cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

22. কোসাইন, কো-সেক্যান্ট, সেক্যান্ট এবং কো-ট্যানজ্যান্ট অপেক্ষকগুলোর সন্ততা আলোচনা করো।

23. অপেক্ষক f এর সকল অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো, যেখানে

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{যদি } x<0\\ x+1, & \text{যদি } x\ge 0\end{cases}$$

24. যদি একটি অপেক্ষক নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয়:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{যদি } x\ne 0\\ 0, & \text{যদি } x=0\end{cases}$$

তবে অপেক্ষকটি সন্তত কিনা নির্ণয় করো।

25. একটি অপেক্ষক নিম্নরূপে সংজ্ঞাত:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & \text{যদি } x\neq 0\\ -1, & \text{যদি } x=0\end{cases}$$

এর সন্ততা পরীক্ষা করো।

26 থেকে 29 নং প্রশ্নে নির্দেশিত বিন্দুতে k এর কোন্ মানের জন্য অপেক্ষক f সন্তত হবে।

26. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{যদি } x\neq \dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{যদি } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $x=\dfrac{\pi}{2}$ বিন্দুতে

27. $f(x)=\begin{cases}kx^2, & \text{যদি } x\leq 2\\ 3, & \text{যদি } x>2\end{cases}$ $x=2$ বিন্দুতে

28. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{যদি } x\leq \pi\\ \cos x, & \text{যদি } x>\pi\end{cases}$ $x=\pi$ বিন্দুতে

29. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{যদি } x\leq 5\\ 3x-5, & \text{যদি } x>5\end{cases}$ $x=5$ বিন্দুতে

30. একটি অপেক্ষক নিম্নরূপে সংজ্ঞাত

$$f(x)=\begin{cases}5, & \text{যদি } x\leq 2\\ ax+b, & \text{যদি } 2<x<10\\ 21, & \text{যদি } x\geq 10\end{cases}$$

অপেক্ষকটি সন্তত হলে a ও b এর মান নির্ণয় করো।

31. দেখাও যে $f(x)=\cos(x^2)$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষক, একটি সন্তত অপেক্ষক।

32. দেখাও যে $f(x)=|\cos x|$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষক, একটি সন্তত অপেক্ষক।

33. পরীক্ষা করো যে $\sin|x|$ একটি সন্তত অপেক্ষক।

34. f অপেক্ষকটি, $f(x)=|x|-|x+1|$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে এর সমস্ত অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

5.3. অন্তরকলনযোগ্যতা (Differentiability)

পূর্ববর্তী শ্রেণির নিম্নলিখিত বিষয়গুলো স্মরণ করো। আমরা নিম্নলিখিত রূপে একটি বাস্তব অপেক্ষক এর অন্তরকলজ সংজ্ঞায়িত করেছি :

ধরা যাক f একটি বাস্তব অপেক্ষক এবং c হল f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি বিন্দু। c -এ f এর অন্তরকলজ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত।

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

যদি সীমাটির অস্তিত্ব থাকে। c বিন্দুতে f এর অন্তরকলজ $f'(c)$ বা $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ দ্বারা সূচিত হয়।

তাহলে $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত অপেক্ষকটি, যেখানে সীমার অস্তিত্ব f এর অন্তরকলজকে সংজ্ঞায়িত করে। f -এর অন্তরকলজ $f'(x)$ বা $\frac{d}{dx}(f(x))$ অথবা যদি $y = f(x)$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ বা y' দ্বারা এটি সূচিত হয়। একটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ (derivative) নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে অন্তরকলন (differentiation) বলা হয়। আমরা x এর সাপেক্ষে $f(x)$ এর অবকলন করা এই শব্দগুচ্ছ দ্বারা $f'(x)$ নির্ণয় করাকেই বুঝি।

নিম্নলিখিত নিয়মগুলো অন্তরকলজের বীজগণিত-এর অংশ হিসেবে প্রতিষ্ঠিত হয়েছে :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (লিব্‌নিজের নিয়ম বা গুণন নিয়ম)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, যেখানে $v \neq 0$ (ভাগফল নিয়ম)।

নিম্নলিখিত সারণিটিতে কয়েকটি নির্দিষ্ট আদর্শ অপেক্ষকের অন্তরকলজের একটি তালিকা দেওয়া হল:

সারণি 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	$\cos x$	$-\sin x$	$\sec^2 x$

যখনই আমরা অন্তরকলজকে সংজ্ঞায়িত করেছি, তখন একটি সতর্কতা অবলম্বন করেছিলাম *"যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে"*। এখন স্বাভাবিক প্রশ্ন হল, যদি এরকম না হয় তাহলে কি হবে? এই প্রশ্নটি একেবারে প্রাসঙ্গিক এবং তাই এর উত্তরও প্রাসঙ্গিক। যদি $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর অস্তিত্ব না থাকে, তবে আমরা বলতে পারি যে c বিন্দুতে f অন্তরকলনযোগ্য নয়। অন্য কথায়, আমরা বলতে পারি যে একটি অপেক্ষক f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি বিন্দু c-এ অন্তরকলনযোগ্য হবে যদি $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এবং $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ উভয়ই সসীম এবং সমান হয়। একটি অপেক্ষককে $[a, b]$ বিস্তারে অন্তরকলনযোগ্য বলা হবে যদি এটি $[a, b]$ বিস্তারে প্রতিটি বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়। সন্ততার ক্ষেত্রে, a এবং b প্রান্তবিন্দুতে আমরা বামপক্ষের সীমা এবং ডানপক্ষের সীমা নির্ণয় করি, যা অপেক্ষকের a এবং b বিন্দুতে যথাক্রমে বামপক্ষ এবং ডানপক্ষের অন্তরকলন ছাড়া আর কিছুই নয়। অনুরূপভাবে, একটি অপেক্ষক (a, b) বিস্তারে অন্তরকলনযোগ্য বলা হবে যদি এটি (a, b) বিস্তারে অন্তর্গত প্রতিটি বিন্দুতে অন্তরকলনযোগ্য হয়।

উপপাদ্য 3 যদি c বিন্দুতে একটি অপেক্ষক f অন্তরকলনযোগ্য হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত হবে।

প্রমাণ যেহেতু c বিন্দুতে f অন্তরকলনযোগ্য, তাহলে আমরা পাই

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

কিন্তু $x \neq c$, এর জন্য, আমরা পাই

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c)$$

সুতরাং, $$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} . (x - c) \right]$$

বা, $$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] . \lim_{x \to c} [(x - c)]$$

$$= f'(c) . 0 = 0$$

বা, $$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

সুতরাং, $x = c$ বিন্দুতে f সন্তত।

অনুসিদ্ধান্ত 1 প্রতিটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক সন্তত হয়।

আমরা মন্তব্য করব যে উপরের উক্তিটির বিপরীত সত্য নয়। প্রকৃতপক্ষে আমরা দেখি যে $f(x) = |x|$ দ্বারা সংজ্ঞাত অপেক্ষকটি হল একটি সন্তত অপেক্ষক। বামপক্ষের সীমা বিবেচনা করো,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ডানপক্ষের সীমা

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

যেহেতু 0 বিন্দুতে উপরের বাম এবং ডান পক্ষের সীমা সমান নয়, সুতরাং $\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$ এর অস্তিত্ব নেই এবং তাই 0 বিন্দুতে f অন্তরকলনযোগ্য নয়। অতএব, f একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক নয়।

5.3.1 *সংযুক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলজ (Derivatives of composite functions)*

সংযুক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলজ অধ্যয়নে, আমরা একটি স্পষ্ট উদাহরণের সাহায্যে শুরু করব। ধরা যাক, আমরা f এর অন্তরকলজ নির্ণয় করতে চাই, যেখানে

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

একটি পদ্ধতি হল দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগে $(2x + 1)^3$ কে বিস্তৃত করো এবং নিম্নরূপে বহুপদী অপেক্ষকটির অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(8x^3+12x^2+6x+1)$$

$$= 24x^2 + 24x + 6$$

$$= 6\,(2x + 1)^2$$

এখন, লক্ষ করো যে $\qquad f(x) = (h \circ g)\,(x)$

যেখানে $g(x) = 2x + 1$ এবং $h(x) = x^3$। $t = g(x) = 2x + 1$ বসাও। তবে $f(x) = h(t) = t^3$ এইভাবে

$$\frac{df}{dx} = 6\,(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

এই ধরনের পর্যবেক্ষণের সুবিধা হল যে ধরো, এটি $(2x + 1)^{100}$ এর অন্তরকলজ নির্ণয়ের গণনাকে সরলীকরণ করে । এই পর্যবেক্ষণটিকে আমরা নিম্নলিখিত উপপাদ্যে সাজাতে পারি, যাকে শৃঙ্খল নিয়ম (chain rule) বলা হয়।

উপপাদ্য 4 শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule) ধরা যাক f একটি বাস্তবমানযুক্ত অপেক্ষক যা u এবং v এই দুটির সংযুক্ত অপেক্ষক; অর্থাৎ, $f = v \circ u$. । ধরো $t = u(x)$ এবং $\frac{dt}{dx}$ ও $\frac{dv}{dt}$ উভয়েই যদি অস্তিত্ব থাকে, তবে আমরা পাই

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

আমরা এই উপপাদ্যের প্রমাণ এড়িয়ে যাব। শৃঙ্খল নিয়মকে নিম্নরূপেও বিস্তৃত করা যায়। ধরো f একটি বাস্তবমানযুক্ত অপেক্ষক যা u, v এবং w এই তিনটির সংযুক্ত অপেক্ষক; অর্থাৎ,

$f = (w \circ u) \circ v$. যদি $t = v(x)$ এবং $s = u(t)$, তবে

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(w\circ u)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

যদি উপরিউক্ত সকল অন্তরকলজগুলোর অস্তিত্ব থাকে। পাঠকদের আরও কিছু অপেক্ষকের সংযুক্তকরণের মাধ্যমে শৃঙ্খল নিয়মটি প্রণয়ন করতে বলা হয়েছে।

উদাহরণ 21 অপেক্ষক $f(x) = \sin(x^2)$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান লক্ষ করো যে, প্রদত্ত অপেক্ষকটি দুটি অপেক্ষকের সংযোজন। প্রকৃতপক্ষে, যদি $t = u(x) = x^2$ এবং $v(t) = \sin t$, তবে $f(x) = (v \circ u)\,(x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$

$t = u(x) = x^2$ বসাও। লক্ষ্য করো যে $\frac{dv}{dt} = \cos t$ এবং $\frac{dt}{dx} = 2x$ এর অস্তিত্ব আছে। সুতরাং, শৃঙ্খল /নিয়মের সাহায্যে

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x$$

সর্বশেষ ফলাফলকে শুধুমাত্র x এর মাধ্যমে প্রকাশ করা একটি স্বাভাবিক পদ্ধতি।

সুতরাং,
$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

বিকল্পরূপে, আমরা নিম্নলিখিতভাবে সরাসরি অগ্রসর হতে পারি:

$$y = \sin (x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin x^2)$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cos x^2$$

উদাহরণ 22 tan $(2x + 3)$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $f(x) = \tan (2x + 3)$, $u(x) = 2x + 3$ এবং $v(t) = \tan t$. তবে

$$(v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(2x + 3) = \tan (2x + 3) = f(x)$$

এইভাবে, f হল দুটি অপেক্ষকের সংযোজন। $t = u(x) = 2x + 3$. বসাও। তবে $\frac{dv}{dt} = \sec^2 t$ এবং $\frac{dt}{dx} = 2$ এর অস্তিত্ব আছে। সুতরাং শৃঙ্খল নিয়ম দ্বারা

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \sec^2 (2x + 3)$$

উদাহরণ 23 x এর সাপেক্ষে $\sin (\cos (x^2))$ এর অন্তরকল করো।

সমাধান $f(x) = \sin (\cos (x^2))$ অপেক্ষকটি u, v এবং w এই তিনটি অপেক্ষকের সংযোজন। অতএব, $f(x) = (w o v o u)(x)$, যেখানে $u(x) = x^2$, $v(t) = \cos t$ এবং $w(s) = \sin s$। $t = u(x) = x^2$ এবং $s = v(t) = \cos t$ বসিয়ে, লক্ষ্য করো যে $\frac{dw}{ds} = \cos s$, $\frac{ds}{dt} = -\sin t$ এবং $\frac{dt}{dx} = 2x$ যার সকল বাস্তব x এর জন্য অস্তিত্ব আছে। সুতরাং, শৃঙ্খল/ নিয়মের সাধারণীকরণের মাধ্যমে, আমরা পাই

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\cos s) \,.\, (-\sin t) \,.\, (2x) = -2x \sin x^2 \,.\, \cos (\cos x^2)$$

বিকল্পভাবে, আমরা নিম্নরূপে অগ্রসর হতে পারি:

$$y = \sin(\cos x^2)$$

সুতরাং
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\cos x^2) = \cos(\cos x^2)\frac{d}{dx}(\cos x^2)$$

$$= \cos(\cos x^2)(-\sin x^2)\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= -\sin x^2 \cos(\cos x^2)(2x)$$
$$= -2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

অনুশীলনী 5.2

অনুশীলনীটির 1 থেকে 8 নং প্রশ্নে x এর সাপেক্ষে অপেক্ষকের অন্তরকলন (Differentiate) করো :

1. $\sin(x^2+5)$ **2.** $\cos(\sin x)$ **3.** $\sin(ax+b)$

4. $\sec(\tan(\sqrt{x}))$ **5.** $\dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 . \sin^2(x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9. প্রমাণ করো যে একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত

$$f(x) = |x-1|, x \in \mathbf{R}$$

হলে $x = 1$ বিন্দুতে এটি অন্তরকলনযোগ্য নয়।

10. প্রমাণ করো যে বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক নিম্নরূপ সংজ্ঞাত :

$$f(x) = [x], 0 < x < 3$$

হলে $x = 1$ এবং $x = 2$ বিন্দুতে এটি অন্তরকরলনযোগ্য নয়।

5.3.2 *অপ্রত্যক্ষ (অব্যক্ত) অপেক্ষকের অন্তরকলজ (Derivatives of implicit functions)*

এখন পর্যন্ত আমরা $y = f(x)$ আকারের বিভিন্ন অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করেছি। কিন্তু এটি অনিবার্য নয় যে অপেক্ষকগুলো সর্বদা এই আকারে প্রকাশিত হবে। উদাহরণস্বরূপ, x এবং y এর মধ্যে নিম্নলিখিত যে-কোনো একটি সম্পর্ক বিচার করো :

$$x - y - \pi = 0$$
$$x + \sin xy - y = 0$$

প্রথম ক্ষেত্রে, আমরা y এর সমাধানের জন্য সম্পর্কটি $y = x - \pi$ রূপে পুনরায় লিখতে পারি। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, y এর সমাধানের কোনো সহজ পথ দেখা যায় না। তা সত্ত্বেও, যে- কোনো একটি ক্ষেত্রে x এর উপর y এর নির্ভরতা সম্পর্কে সন্দেহ নেই। যখন, x এবং y এর মধ্যে সম্পর্ক এমনভাবে প্রকাশ করা হয় যে y এর জন্য সমাধান করা সহজ হয়, যেখানে $y = f(x)$, তখন আমরা y কে x এর প্রত্যক্ষ (ব্যক্ত) অপেক্ষক (explicit functions) বলতে পারি।

পরবর্তী ক্ষেত্রে, এটি অপ্রত্যক্ষ যে y হল x এর একটি অপেক্ষক এবং উপরের দ্বিতীয় প্রকার সম্পর্কটির ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি যে y কে x এর অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। এই উপরিভাগে, আমরা অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ করা শিখব।

উদাহরণ 24 $x - y = \pi$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান y এর সমাধানের একটি দিক রয়েছে এবং উপরের শর্তটিকে পুনরায় লেখা যায়।

$$y = x - \pi$$

তারপর

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

বিকল্পভাবে, সম্পর্কটিকে x এর সাপেক্ষে সরাসরি অন্তরকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{d}{dx}(x - y) = \frac{d\pi}{dx}$$

স্মরণ করো যে, $\frac{d\pi}{dx}$ এর অর্থ হলো x এর সাপেক্ষে ধ্রুবক অপেক্ষক π এর অন্তরকলন। এই ভাবে,

$$\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) = 0$$

যা থেকে পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

উদাহরণ 25 যদি $y + \sin y = \cos x$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা প্রদত্ত সম্পর্কটিকে x এর সাপেক্ষে সরাসরি অন্তরকলন করে পাই,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

শৃঙ্খল নিয়ম প্রয়োগে পাই

$$\frac{dy}{dx} + \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

যা থেকে পাওয়া যায়,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1 + \cos y}$$

যেখানে

$$y \neq (2n + 1)\pi$$

5.3.3 *ত্রিকোনমিতিক বিপরীত অপেক্ষকের অন্তরকলজ (Derivatives of inverse trigonometric functions)*

আমরা মন্তব্য করতে পারি যে ত্রিকোনমিতিক বিপরীত অপেক্ষকগুলো হল সন্তত অপেক্ষক, কিন্তু এখন আমরা এটি প্রমাণ করব না। এখন আমরা শৃঙ্খল নিয়ম প্রয়োগে এরূপ অপেক্ষকগুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় করব।

উদাহরণ 26 একটি অপেক্ষক f যা $f(x) = \sin^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং ধরো এর অস্তিত্ব আছে, তাহলে এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $y = \sin^{-1} x$, তবে $x = \sin y$

x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষে অন্তরকলজ করে, আমরা পাই

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

যা থেকে পাই
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

লক্ষ করো যে, কেবলমাত্র, $\cos y \neq 0$, এর জন্য এটি সংজ্ঞাত অর্থাৎ, $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ অর্থাৎ, $x \neq -1, 1$, অর্থাৎ, $x \in (-1, 1)$।

এই ফলাফলটি আরও একটু উৎকর্ষ করার জন্য, আমরা নিম্নলিখিত কৌশল প্রয়োগ করব। স্মরণ করো যে $x \in (-1, 1)$ এর জন্য, $\sin(\sin^{-1} x) = x$ এবং তাই

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

তাছাড়া, যেহেতু $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ হল ধনাত্মক, সুতরাং $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

অতএব, $x \in (-1, 1)$ এর জন্য

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

উদাহরণ 27 একটি অপেক্ষক f যা $f(x) = \tan^{-1} x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং ধরো এর অস্তিত্ব আছে, তাহলে এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $y = \tan^{-1} x$, তবে $x = \tan y$

x এর সাপেক্ষে উভয় পক্ষে অন্তরকলজ করে, আমরা পাই

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

যা থেকে আমরা পাই
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

অন্যান্য ত্রিকোনমিতিক বিপরীত অপেক্ষকগুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় তোমাদের অনুশীলনের জন্য ছেড়ে দেওয়া হল। নীচের সারণিতে অবশিষ্ট ত্রিকোনমিতিক বিপরীত অপেক্ষকের অন্তরকলজ দেওয়া হল (সারণি 5.4):

সারণি 5.4

$f(x)$	$\cos^{-1}x$	$\cot^{-1}x$	$\sec^{-1}x$	$\operatorname{cosec}^{-1}x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
f' এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

অনুশীলনী 5.3

নিম্নলিখিতগুলোর $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো :

1. $2x + 3y = \sin x$ **2.** $2x + 3y = \sin y$ **3.** $ax + by^2 = \cos y$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$ **5.** $x^2 + xy + y^2 = 100$ **6.** $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$

7. $\sin^2 y + \cos xy = \kappa$ **8.** $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ **9.** $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$

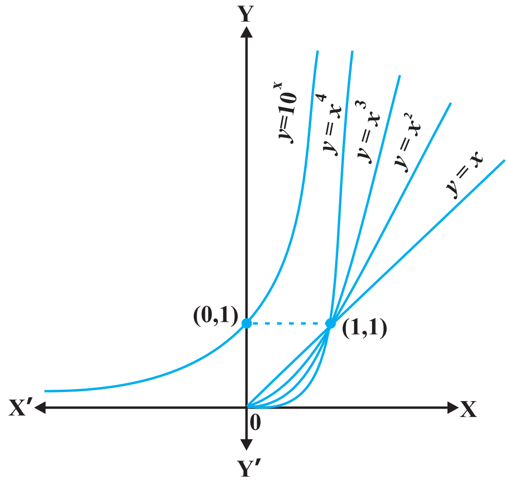
13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$

14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 সূচকীয় এবং লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক (Exponential and Logarithmic Functions)

এখন পর্যন্ত আমরা বহুপদী অপেক্ষক, মূলদ অপেক্ষক এবং ত্রিকোনমিতিক অপেক্ষক এর মত বিভিন্ন শ্রেণির অপেক্ষকগুলোর কিছু দিক সম্পর্কে জেনেছি। এই অনুচ্ছেদে, আমরা যাদের সূচকীয় অপেক্ষক ও লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক বলা হয় এমন অপেক্ষকসমূহের (সম্পর্কিত) একটি নতুন শ্রেণি সম্পর্কে জানবো। এখানে এই বিষয়ের উপরই অধিক গুরুত্ব দেওয়া প্রয়োজন যে এই অনুচ্ছেদে আলোচিত অনেক বিবৃতি হল প্রেরণামূলক (motivational) এবং এগুলোর সঠিক প্রমাণ পাঠ্যসূচির বহির্ভূত।



চিত্র 5.9

চিত্র 5.9 এ $y = f_1(x) = x$, $y = f_2(x) = x^2$, $y = f_3(x) = x^3$ এবং $y = f_4(x) = x^4$ - অপেক্ষকগুলোর রেখাচিত্র দেখানো হয়েছে। লক্ষ করো যে x -এর ঘাতের সূচক যত বৃদ্ধি পায় ততই বক্র রেখাগুলো খাড়া হয়। বক্ররেখা খাড়া হওয়ার অর্থ হল বৃদ্ধির হার দ্রুত হওয়া। এর অর্থ হল এই যে, $x\,(> 1)$ এর মানের একটি নির্দিষ্ট বৃদ্ধির জন্য, n-এর মানের ক্রম বৃদ্ধির ফলে $y = f_n(x)$ ক্রমবর্ধমান (increases) হওয়া, যেখানে $n = 1, 2, 3, 4$ । এটি অনুমেয় যে, n -এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য এ ধরনের বিবৃতি সত্য, যেখানে $f_n(x) = x^n$। মূলত, এর অর্থ এই যে x-এর মান যতই বৃদ্ধি পায় ততই $y = f_n(x)$ এর লেখচিত্র y-অক্ষের দিকে হেলে যায়। উদাহরণস্বরূপ, $f_{10}(x) = x^{10}$ এবং $f_{15}(x) = x^{15}$ বিবেচনা করো। যদি x -এর মান 1 থেকে 2 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়, তবে f_{10}, 1 থেকে 2^{10} পর্যন্ত বৃদ্ধি পাবে, যেখানে f_{15}, 1 থেকে 2^{15} পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। অতএব, x -এর একই বৃদ্ধির জন্য f_{10} -এর চেয়ে f_{15} দ্রুত বৃদ্ধি পায়।

উপরোক্ত আলোচনার পরিপ্রেক্ষিতে এটি বলা যায় যে, বহুপদী অপেক্ষকের ক্রমবৃদ্ধি এর ঘাতের উপর নির্ভর করে — ঘাত যত বেশি হবে, ক্রমবৃদ্ধি তত বেশি হয়। পরবর্তী স্বাভাবিক প্রশ্নটি হল ঃ এমন কোনো অপেক্ষক আছে কি যা বহুপদী অপেক্ষকের চেয়ে দ্রুত হারে বৃদ্ধি পায়? হ্যাঁ, এমন একটি অপেক্ষকের উদাহরণ হল

$$y = f(x) = 10^x$$

আমরা জোর দিয়ে বলতে পারি যে এই f অপেক্ষকটি, যে-কোনো ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা n -এর জন্য $f_n(x) = x^n$ -এর চেয়ে দ্রুত হারে বৃদ্ধি পায়। উদাহরণস্বরূপ, 10^x অপেক্ষকটি $f_{100}(x) = x^{100}$ এর চেয়ে দ্রুত হারে বৃদ্ধি পায়। x এর বৃহত্তম মানগুলো, যেমন, $x = 10^3$ -এর জন্য লক্ষ করো যে $f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ অপরপক্ষে $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$। স্পষ্টতই $f_{100}(x)$ এর চেয়ে $f(x)$ অনেক বড়ো। এটি প্রমাণ করা কষ্টসাধ্য নয় যে, সকল $x > 10^3$ -এর জন্য, $f(x) > f_{100}(x)$। কিন্তু এখানে আমরা এর প্রমাণ দেওয়ার চেষ্টা করব না। অনুরূপে, x এর অন্যান্য বৃহত্তম মানসমূহ পছন্দ করে, যে-কেউ যাচাই করতে পারে যে, যে-কোনো ধনাত্মক অখণ্ড মান n-এর জন্য $f(x)$ দ্রুত হারে বৃদ্ধি পায়।

সংজ্ঞা 3 ধনাত্মক নিধান (base) $b > 1$ যুক্ত সূচকীয় অপেক্ষকটি হল

$$y = f(x) = b^x$$

$y = 10^x$ এর লেখচিত্রটি চিত্র 5.9-তে দেখানো হয়েছে।

b-এর কিছু নির্দিষ্ট মান, যথা 2, 3 এবং 4 এর জন্য এই অপেক্ষকের লেখচিত্রটি অঙ্কন করতে পাঠকের উদ্দেশ্যে বলা হচ্ছে। সূচকীয় অপেক্ষকের কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট নিম্নে দেওয়া হল:

(1) সূচকীয় অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল হল সকল বাস্তব সংখ্যাসমূহের সেট **R** ।

(2) সূচকীয় অপেক্ষকের প্রসার হল সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাসমূহের সেট।

(3) (0, 1) বিন্দুটি সর্বদাই সূচকীয় অপেক্ষকের লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত (এটি হল যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা $b > 1$ এর জন্য $b^0 = 1$ ফলাফলটির পুন বিবৃতি)।

(4) সূচকীয় অপেক্ষক সর্বদাই বর্ধিষ্ণু (ক্রমবর্ধমান), অর্থাৎ আমরা যদি লেখচিত্রটির বামদিক থেকে ডানদিকে অগ্রসর হই, তবে লেখচিত্রটির উত্থান উপরের দিকে হয়।

(5) x-এর খুব বড়ো ঋণাত্মক মানগুলোর জন্য, সূচকীয় অপেক্ষকের মান 0 এর খুব কাছাকাছি হয়। অন্য কথায়, দ্বিতীয় পাদে অপেক্ষকটির লেখচিত্র x -অক্ষের দিকে অগ্রসর হয় (কিন্তু কখনো x -অক্ষের সাথে মিলিত হয় না)।

10 নিধান বিশিষ্ট সূচকীয় অপেক্ষককে *সাধারণ সূচকীয় অপেক্ষক* বলে। একাদশ শ্রেণির পরিশিষ্ট A.1.4তে লক্ষ করা গেছে যে

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...$$

শ্রেণির যোগফল 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী এবং ইহাকে e দিয়ে সূচিত করা হয়। এই e-কে নিধান হিসেবে ব্যবহার করে আমরা একটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ সূচকীয় অপেক্ষক $y = e^x$ পাই।

এটিকে ***স্বাভাবিক সূচকীয় অপেক্ষক*** বলা হয়।

এটি খুবই মজাদার হবে, যদি সূচকীয় অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব থাকে এবং এর সুন্দর ব্যাখ্যা জানা যায়। এই অনুসন্ধান নিম্নের সংজ্ঞাটি দিতে প্রেরণা যোগায়।

সংজ্ঞা 4 ধরা যাক $b > 1$ যে-কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা। তাহলে আমরা বলতে পারি b নিধান যুক্ত a -এর লগারিদ্‌ম হল x, যদি $b^x=a$ হয়।

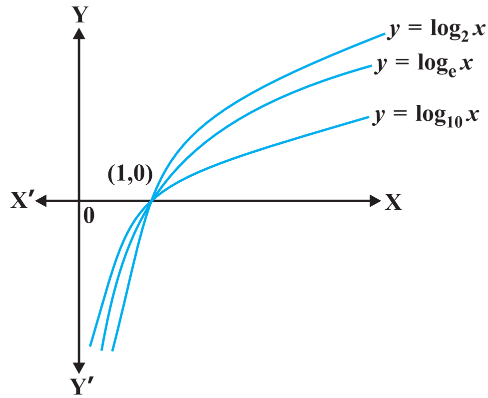
b নিধান যুক্ত a এর লগারিদ্‌মকে $\log_b a$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অতএব, $\log_b a=x$ যদি $b^x = a$ হয়। এটি ভালোভাবে অনুধাবন করার জন্য, চলো আমরা কিছু প্রত্যক্ষ (explicit) উদাহরণ নিয়ে কাজ করি। আমরা জানি $2^3 = 8$ । লগারিদমের আকারে, আমরা এটিকে $\log_2 8 = 3$ হিসেবে পুনরায় লিখতে পারি। অনুরূপে, $10^4 = 10000$ হল $\log_{10} 10000 = 4$ এর সমতুল্য। এছাড়া, $625 = 5^4 = 25^2$ এর সমতুল্য হল $\log_5 625 = 4$ অথবা $\log_{25} 625 = 2$।

আরও কিছুটা পরিণত দৃষ্টিভঙ্গির পরিপ্রেক্ষিতে, নিধান $b > 1$ কে স্থির রেখে, লগারিদ্‌মকে আমরা সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট থেকে সকল বাস্তব সংখ্যার সেটের ওপর এটি অপেক্ষক হিসেবে দেখতে পাই। এই অপেক্ষকটিকে *লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক* হলা হয় এবং এটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয়।

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

$$x \to \log_b x = y \text{ যদি } b^y = x \text{ হয়।}$$

পূর্বের মত যদি নিধান $b = 10$ হয়, তবে আমরা এটিকে *সাধারণ লগারিদম* এবং যদি $b = e$ হয়, তখন এটিকে *স্বাভাবিক লগারিদম* বলতে পারি। স্বাভাবিক লগারিদমকে প্রায়ই ln দিয়ে সূচিত করা হয়। *এই অধ্যায়ে, $log\, x$, e নিধানযুক্ত লগারিদম অপেক্ষককে সূচিত করে, অর্থাৎ $ln\, x$ কে* সহজভাবে $\log x$ হিসেবে লেখা হবে। 2, e এবং 10 নিধান যুক্ত লগারিদম্ অপেক্ষক সমূহের রেখাচিত্র চিত্র 5.10 -এ দেখানো হয়েছে।



চিত্র 5.10

যে-কোনো নিধান $b > 1$ -এর জন্য লগারিদম অপেক্ষকের কিছু গুরুত্বপূর্ণ পর্যবেক্ষণ নিম্নে তালিকাভুক্ত করা হল:

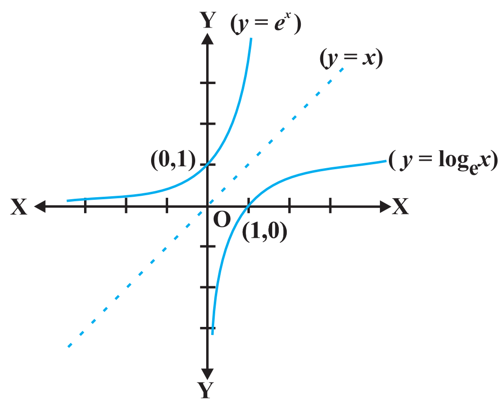
(1) আমরা অ-ধনাত্মক (non-positive) সংখ্যাসমূহের লগারিদমের অর্থপূর্ণ সংজ্ঞা দিতে পারি না। অতএব, লগ-অপেক্ষক (log function) -এর সংজ্ঞার অঞ্চল হল $\mathbf{R}^+$।

(2) লগ-অপেক্ষকের প্রসার হল সকল বাস্তব সংখ্যাসমূহের সেট।

(3) (1, 0) বিন্দুটি সর্বদাই লগ-অপেক্ষকের লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত।

(4) লগ-অপেক্ষক সর্বদাই বর্ধিষ্ণু, অর্থাৎ আমরা যদি লেখচিত্রটির বামদিক থেকে ডানদিকে অগ্রসর হই, তবে লেখচিত্রটির উত্থান উপরের দিকে হয়।

(5) x -এর শূন্যের খুব কাছাকাছি মানের জন্য, $\log x$ -এর মান যে-কোনো প্রদত্ত বাস্তব সংখ্যার চেয়ে ছোটো করা যায়। অন্যভাবে চতুর্থ পাদে, অপেক্ষকটির লেখচিত্র y - অক্ষের দিকে অগ্রসর হয় (কিন্তু এটি কখনো y -অক্ষের সাথে মিলিত হয় না)।



চিত্র 5.11

(6) চিত্র 5.11 এ- $y = e^x$ এবং $y = ln\, x$ এর লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। এটি দেখতে মজাদার যে দুটি বক্ররেখা $y = x$ সরলরেখার সাপেক্ষে একে অপরের প্রতিবিম্ব।

'লগ' অপেক্ষকের দুটি ধর্মের প্রমাণ নীচে দেওয়া হল:

(1) $\log_a p$ -কে $\log_b p$ আকারে প্রকাশ করার জন্য নিধানের পরিবর্তনের একটি আদর্শ নিয়ম আছে। ধরা যাক $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ এবং $\log_b a = \gamma$। এর অর্থ হল $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ এবং $b^\gamma = a$

তৃতীয় সমীকরণটিকে প্রথম সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

এটিকে দ্বিতীয় সমীকরণে ব্যবহার করে পাই,

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

অর্থাৎ $\beta = \alpha\gamma$ অথবা $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ । কিন্তু তখন

$$\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a} \text{ হয়।}$$

(2) লগ-অপেক্ষকের আরেকটি মজাদার ধর্ম হল গুণফলের উপর এর প্রভাব। ধরা যাক $\log_b pq = \alpha$ । তাহলে $b^\alpha = pq$ যদি $\log_b p = \beta$ এবং $\log_b q = \gamma$ হয়, তবে $b^\beta = p$ এবং $b^\gamma = q$ । কিন্তু তখন $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ ।

যা থেকে পাই $\alpha = \beta + \gamma$, অর্থাৎ, $\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$

এর একটি বিশেষ আকর্ষণীয় ও গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল হল যখন $p = q$ হয়। এক্ষেত্রে, উপরের সমীকরণকে নিম্নের আকারে পুনরায় লেখা যেতে পারে

$$\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log p$$

এটির একটি সহজ সাধারণীকরণ (অনুশীলন হিসেবে রাখা হল !) হল

যে-কোনো ধনাত্মক সংখ্যা n -এর জন্য, $\mathbf{\log_b p^n = n \log p}$

প্রকৃতপক্ষে এটি সকল বাস্তব সংখ্যা n এর জন্য সত্য, কিন্তু আমরা এটিকে প্রমাণ করার চেষ্টা করব না। একইভাবে পাঠককে নীচের সমীকরণটির সত্যতা প্রতিপাদন করার জন্য রেখে দেওয়া হল

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

উদাহরণ 28 সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য, $x = e^{\log x}$ কি সত্য হয়?

সমাধান প্রথমে, লক্ষ করো যে লগ- অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল হল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাসমূহের সেট। সুতরাং উপরের সমীকরণটি অ-ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাসমূহের জন্য সত্য নয়। এখন, ধরা যাক $y = e^{\log x}$ । যদি $y > 0$ হয়, তবে আমরা উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x$ । $\log e = \log x$ । অর্থাৎ $y = x$ । সুতরাং $x = e^{\log x}$ শুধুমাত্র x এর ধনাত্মক মানগুলোর জন্য সত্য।

অন্তরকলন বিদ্যায় স্বাভাবিক সূচকীয় অপেক্ষকের একটি অন্যতম আকর্ষণীয় ধর্ম হল অন্তরকলজ প্রক্রিয়ায় এর মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। এটি নিম্নলিখিত উপপাদ্যের আকারে দেখানো হয়েছে যার প্রমাণ আমরা বাদ দিয়ে গেছি।

উপপাদ্য 5*

(1) x এর সাপেক্ষে e^x এর অন্তরকলজ হল e^x; অর্থাৎ, $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ।

(2) x এর সাপেক্ষে $\log x$ এর অন্তরকলজ হল $\dfrac{1}{x}$; অর্থাৎ, $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$ ।

** অনুগ্রহ করে 286 পৃষ্ঠায় সংযোজিত বিষয়বস্তু দেখো।*

উদাহরণ 29 x -এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর অবকলন করো :

(i) e^{-x} (ii) $\sin(\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1}(e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

সমাধান

(i) ধরা যাক, $y = e^{-x}$ । শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে, আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) ধরা যাক, $y = \sin(\log x)$ । শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে, আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

(iii) ধরা যাক, $y = \cos^{-1}(e^x)$ । শৃঙ্খল নিয়ম ব্যবহার করে, আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

(iv) ধরা যাক, $y = e^{\cos x}$ । শৃঙ্খল নিয়ম ব্যবহার করে, আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

অনুশীলনী 5.4

x -এর সাপেক্ষে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর অবকলন করো :

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$ **2.** $e^{\sin^{-1} x}$ **3.** e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$ **5.** $\log(\cos e^x)$ **6.** $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$ **8.** $\log(\log x), x > 1$ **9.** $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$

10. $\cos(\log x + e^x), x > 0$

5.5. লগারিদমের সাহায্যে অবকলন (Logarithmic Differentiation)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা কিছু বিশেষ শ্রেণির অপেক্ষকের অবকলন করতে শিখবো যা নিম্নরূপে প্রদত্ত

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

উপরের সমীকরণের উভয় পক্ষে লগারিদম (নিধান e যুক্ত) নিয়ে আমরা নিম্নের আকারে পুনরায় লেখতে পারি

$$\log y = v(x) \log [u(x)]$$

শৃঙ্খল নিয়মের সাহায্যে আমরা অবকলন করে পাই

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x) + v'(x)\cdot\log\,[u(x)]$$

যা থেকে পাই

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{v(x)}{u(x)}\cdot u'(x) + v'(x)\cdot\log[u(x)]\right]$$

এই পদ্ধতিতে প্রধান লক্ষণীয় বিষয় হল $f(x)$ ও $u(x)$ অবশ্যই সর্বদা ধনাত্মক হবে অন্যথায় তাদের লগারিদম অসংজ্ঞাত হবে। অবকলনের এই *পদ্ধতি লগারিদমের সাহায্যে অবকলন* নামে পরিচিত এবং এটি নিম্নলিখিত উদাহরণগুলোর মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা হলো:

উদাহরণ 30 x -এর সাপেক্ষে $\sqrt{\frac{(x-3)\,(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ এর অবকলন করো।

সমাধান ধরা যাক $y = \sqrt{\frac{(x-3)\,(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে, আমরা পাই

$$\log y = \frac{1}{2}\,[\log\,(x-3) + \log\,(x^2+4) - \log\,(3x^2+4x+5)]$$

এখন, উভয়পক্ষে x -এর সাপেক্ষে অবকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

বা,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

উদাহরণ 31 x এর সাপেক্ষে a^x এর অবকলন করো, যেখানে a একটি ধনাত্মক ধ্রুবক রাশি।

সমাধান ধরা যাক $y = a^x$ । তাহলে

$$\log y = x \log a$$

উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে, আমরা পাই,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log a$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = y \log a$$

অতএব, $$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

বিকল্পভাবে $$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \log a}) = e^{x \log a} \frac{d}{dx}(x \log a)$$

$$= e^{x \log a} . \log a = a^x \log a.$$

উদাহরণ 32 x এর সাপেক্ষে $x^{\sin x}$ এর অবকলন করো যেখানে $x > 0$ ।

সমাধান ধরা যাক $y = x^{\sin x}$ উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই,

$$\log y = \sin x \log x$$

সুতরাং, $$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

বা $$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = (\sin x) \frac{1}{x} + \log x \cos x$$

বা $$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1} \cdot \sin x + x^{\sin x} \cdot \cos x \log x$$

উদাহরণ 33 $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো, যদি $y^x + x^y + x^x = a^b$ হয়।

সমাধান দেওয়া আছে যে, $y^x + x^y + x^x = a^b$ ।

$u = y^x$, $v = x^y$ এবং $w = x^x$ উপরোক্ত সমীকরণে বসিয়ে, আমরা পাই $u + v + w = a^b$

সুতরাং, $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad \text{... (1)}$$

এখন, $u = y^x$ এর উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই

$$\log u = x \log y$$

উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y)+\log y\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+\log y\cdot 1$$

তাই
$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right)= y^{x}\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right] \quad ... (2)$$

এছাড়া, $v = x^y$

উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই

$$\log v = y \log x$$

উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\frac{dy}{dx}$$

সুতরাং
$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^{y}\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right] \quad ... (3)$$

আবার, $w = x^x$

উভয়পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই,

$$\log w = x \log x.$$

উভয়পক্ষে x এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\cdot\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot 1$$

অর্থাৎ,
$$\frac{dw}{dx} = w\,(1+\log x)$$

$$= x^x\,(1+\log x) \quad ... (4)$$

(1), (2), (3), (4) থেকে, আমরা পাই

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right)+x^y\left(\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right)+x^x(1+\log x)=0$$

বা, $$(x\,.\,y^{x-1}+x^y\,.\,\log x)\frac{dy}{dx}=-x^x(1+\log x)-y\,.\,x^{y-1}-y^x\log y$$

সুতরাং, $$\frac{dy}{dx}=\frac{-[y^x\log y+y\,.\,x^{y-1}+x^x(1+\log x)]}{x\,.\,y^{x-1}+x^y\log x}$$

অনুশীলনী 5.5

অনুশীলনীতে দেওয়া 1 থেকে 11 নং প্রশ্নের প্রত্যেকটি অপেক্ষকের জন্য x এর সাপেক্ষে অবকলন করো।

1. $\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. $x^x-2^{\sin x}$

5. $(x+3)^2\,.\,(x+4)^3\,.\,(x+5)^4$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x+x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x+x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x+\sin^{-1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x}+(\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x\cos x)^x+(x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

অনুশীলনীতে প্রদত্ত 12 থেকে 15 নং প্রশ্নের প্রত্যেকটির জন্য $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

12. $x^y+y^x=1$

13. $y^x=x^y$

14. $(\cos x)^y=(\cos y)^x$

15. $xy=e^{(x-y)}$

16. প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ কে x এর সাপেক্ষে অবকলন করো এবং অতঃপর $f'(1)$ নির্ণয় করো।

17. নিম্নে উল্লেখিত তিনটি পদ্ধতিতে $(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)$ এর অবকলন নির্ণয় করো:

(i) গুণফলের নিয়মের সাহায্যে

(ii) গুণফলটিকে সম্প্রসারিত করে একটি মাত্র বহুপদ রাশিতে পরিণত করে।

(iii) লগারিদমের সাহায্যে অবকলন করে।

তিনটি পদ্ধতির মাধ্যমে কি একই উত্তর পাওয়া যায়?

18. u, v এবং w যদি x এর অপেক্ষক হয়, তবে দুটি পদ্ধতিতে— প্রথমত গুণফলের নিয়মের বারবার প্রয়োগে, দ্বিতীয়ত লগারিদ্মিক অবকলনের সাহায্যে, দেখাও যে

$$\frac{d}{dx}(u.\ v.\ w) = \frac{du}{dx}\ v.\ w + u\ .\ \frac{dv}{dx}\ .\ w + u\ .\ v\ \frac{dw}{dx}$$

5.6 প্রাচলিক আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলজ (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

কখনও কখনও দুটি চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক ব্যক্ত বা অব্যক্ত এদের কোনটিই নয়, কিন্তু তৃতীয় একটি চলরাশির সঙ্গো পৃথক পৃথক সম্পর্ক দ্বারা প্রথম দুটি চলরাশির সঙ্গো একটি সম্পর্ক স্থাপন করে। এরূপ একটি পরিস্থিতিতে আমরা বলতে পারি যে তাদের মধ্যে সম্পর্ক একটি তৃতীয় চলরাশি দিয়ে প্রকাশ করা হয়। এই তৃতীয় চলরাশিটিকে বলা হয় প্রাচল (parameter)। আরো যথাযথভাবে দুটি চলরাশি x এবং y এর মধ্যে সম্পর্ক $x = f(t), y = g(t)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যাকে বলা হয় প্রাচল t -এর প্রাচলিক আকার।

এই আকারের, অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করার জন্য, আমরা শৃঙ্খল নিয়ম প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

বা $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \left(\text{যেহেতু } \frac{dx}{dt} \neq 0\right)$$

এইভাবে $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \quad \left(\text{যেহেতু } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ এবং } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \text{ [এই শর্তে যে } f'(t) \neq 0]$$

উদাহরণ 34 যদি $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান দেওয়া আছে যে,

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

সুতরাং $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

অতএব, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

উদাহরণ 35 যদি $x = at^2$, $y = 2at$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান দেওয়া আছে যে, $x = at^2, y = 2at$

সুতরাং $$\frac{dx}{dt} = 2at \quad \text{এবং} \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

অএতব $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

উদাহরণ 36 যদি $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান আমরা পাই, $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\,(\sin\theta)$

সুতরাং $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a\,(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

> **দ্রষ্টব্য** এখানে এটি লক্ষ করা যায় যে, প্রধান চলরাশি যুগল x এবং y এর সঙ্গো সরাসরি সম্পর্ক ছাড়াও $\frac{dy}{dx}$ কে শুধুমাত্র প্রাচলের আকারে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 37 যদি $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$। তবে

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$
$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

সুতরাং, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ এর প্রাচলিক সমীকরণ হলো $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$

এখন $$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta \quad \text{এবং} \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

অতএব $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

অনুশীলনী 5.6

অনুশীলনীর 1 থেকে 10 নং পর্যন্ত সমীকরণগুলো যদি x এবং y দ্বারা প্রাচলিকভাবে যুক্ত হয়, তবে প্রাচলটি অপনয়ন না করে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

1. $x = 2at^2,\ y = at^4$

2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

4. $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right),\ y = a\sin t$

9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. যদি $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, তবে দেখাও যে $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

5.7 দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (Second Order Derivative)

ধরো $y = f(x)$ । তখন

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{... (1)}$$

যদি $f'(x)$ অবকলনযোগ্য হয়, আমরা (1) নং সমীকরণকে আবার x এর সাপেক্ষে অবকলন করতে পারি। তখন, বামপক্ষ হবে $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ যেখানে y কে x এর সাপেক্ষে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয় এবং এটিকে প্রকাশ করা হয় $\frac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা। $f(x)$ এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ $f''(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যদি $y = f(x)$ হয় তবে $f''(x)$ কে D^2y অথবা y'' অথবা y_2 দ্বারাও প্রকাশ করা হয়। আমরা বলতে পারি যে উচ্চতর ক্রমের অন্তরকলজগুলো অনুরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

উদাহরণ 38 যদি $y = x^3 + \tan x$ হয়, তবে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

সমাধান দেওয়া আছে যে $y = x^3 + \tan x$, তখন

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

সুতরাং,
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \sec^2 x\right)$$
$$= 6x + 2\sec x \,.\, \sec x \tan x = 6x + 2\sec^2 x \tan x$$

উদাহরণ 39 যদি $y = A \sin x + B \cos x$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

সমাধান আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x - B \sin x$$

এবং
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(A \cos x - B \sin x)$$
$$= -A \sin x - B \cos x = -y$$

অতএব
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

উদাহরণ 40 যদি $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$.

সমাধান দেওয়া আছে যে, $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$

তখন
$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

অতএব
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

সুতরাং
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$- 30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

উদাহরণ 41 যদি $y = \sin^{-1} x$ হয়, দেখাও যে, $(1 - x^2)\dfrac{d^2 y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} = 0$

সমাধান আমরা পাই $y = \sin^{-1}x$ । তখন

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

বা, $$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

সুতরাং, $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\,.\,\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

বা, $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

বা, $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

সুতরাং, $$(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

বিকল্পভাবে, দেওয়া আছে যে, $y = \sin^{-1} x$, আমরা পাই

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ অর্থাৎ, } (1-x^2)\,y_1^2 = 1$$

সুতরাং, $$(1-x^2)\,.\,2y_1 y_2 + y_1^2(0-2x) = 0$$

অতএব, $$(1 - x^2)\, y_2 - xy_1 = 0$$

অনুশীলনী 5.7

অনুশীলনীর 1 থেকে 10 নং পর্যন্ত প্রদত্ত অপেক্ষকগুলোর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

1. $x^2 + 3x + 2$ **2.** x^{20} **3.** $x\,.\cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3 \log x$ **6.** $e^x \sin 5x$

7. $e^{6x} \cos 3x$ **8.** $\tan^{-1} x$ **9.** $\log(\log x)$

10. $\sin(\log x)$

11. যদি $y = 5\cos x - 3\sin x$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

12. যদি $y = \cos^{-1} x$ হয়, তবে $\frac{d^2y}{dx^2}$ কে কেবলমাত্র y এর আকারে নির্ণয় করো।

13. যদি $y = 3 \cos (\log x) + 4 \sin (\log x)$ হয়, তাহলে দেখাও যে $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

14. যদি $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

15. যদি $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$

16. যদি $e^y (x + 1) = 1$ হয়, তাহলে দেখাও যে $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

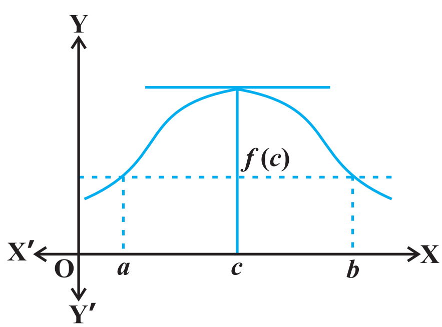
17. যদি $y = (\tan^{-1} x)^2$ হয়, তবে দেখাও যে $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x (x^2 + 1) y_1 = 2$

5.8 মধ্যম মান উপপাদ্য (Mean Value Theorem)

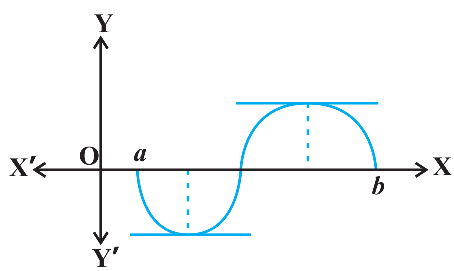
এই অনুচ্ছেদে, আমরা প্রমাণ ব্যাতীত কলনবিদ্যার দুটি মৌলিক ফলাফল উল্লেখ করব। আমরা আরও এই উপপাদ্যগুলোর জ্যামিতিক তাৎপর্য সম্পর্কে জানব।

উপপাদ্য 6 রোলের উপাপাদ্য (Rolle's Theorem) ধরো $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ হল $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত এবং (a, b) অন্তরালে অবকলনযোগ্য, যাতে $f(a) = f(b)$ হয়, যেখানে a ও b যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা। তবে (a, b) অন্তরালে অন্তত একটি c এর অস্তিত্ব আছে, যার জন্য $f'(c) = 0$ হয়।

রোলের উপপাদ্যের প্রকল্পকে সিদ্ধ করে এরূপ অবকলযোগ্য অপেক্ষকের কিছু লেখচিত্রের নমুনা 5.12 এবং 5.13 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 5.12



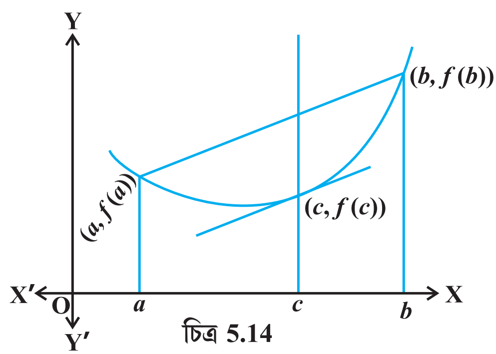
চিত্র 5.13

লক্ষ করো যে a ও b এর মধ্যে বিভিন্ন বিন্দুতে বক্রটির স্পর্শকের প্রবণতা কি হয়। প্রতিটি লেখচিত্রে কমপক্ষে একটি বিন্দুতে প্রবণতা শূন্য হয়। অর্থাৎ যথাযথভাবে রোলের উপপাদ্য দাবি করে যে $y = f(x)$ লেখচিত্রের ওপর যে-কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা ঐ বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজ ছাড়া আর অন্য কিছু নয়।

উপপাদ্য 7 (মধ্যম মান উপপাদ্য) ধরো $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ হল $[a, b]$ অন্তরালে একটি সন্তত অপেক্ষক এবং (a, b) অন্তরালে এটি অবকলনযোগ্য। তবে (a, b) অন্তরালে অন্তত একটি c -এর অস্তিত্ব আছে, যার জন্য

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

লক্ষ করো যে, মধ্যম মান উপপাদ্য (MVT) হল রোলের উপপাদ্যের একটি বর্ধিত রূপ। চলো আমরা এখন মধ্যম মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্যপূর্ণ বুঝে নিই। $y = f(x)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র চিত্র 5.14 -এ দেখানো হয়েছে। আমরা প্রথমেই ব্যাখ্যা করেছি যে, $y = f(x)$ বক্রের $(c, f(c))$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা হল $f'(c)$ । চিত্র 5.14 হতে এটি স্পষ্ট যে, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ হলো $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অঙ্কিত ছেদকের প্রবণতা। মধ্যম মান উপপাদ্য (MVT) বোঝায় যে (a, b) অন্তরালে c এরূপ একটি বিন্দু যাতে $(c, f(c))$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা, $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদকের প্রবণতার সমান হয়। অন্যরকমভাবে বলা যায়, (a, b) অন্তরালে c একটি বিন্দু যেখানে $(c, f(c))$ বিন্দুতে স্পর্শক $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অঙ্কিত ছেদকের সমান্তরাল।



চিত্র 5.14

উদাহরণ 42 $y = x^2 + 2$, অপেক্ষকের জন্য রোলের উপপাদ্য যাচাই করো, যখন $a = -2$ এবং $b = 2$।

সমাধান $y = x^2 + 2$ অপেক্ষকটি $[-2, 2]$ অন্তরালে সন্তত এবং $(-2, 2)$ অন্তরালে অবকলনযোগ্য। আবার $f(-2) = f(2) = 6$ এবং অতঃপর $f(x)$ এর মান -2 এবং 2-তে একই। রোলের উপপাদ্য বোঝায় যে একটি বিন্দু $c \in (-2, 2)$ আছে, যেখানে $f'(c) = 0$। যেহেতু $f'(x) = 2x$, আমরা পাই $c = 0$। এইভাবে $c = 0$-তে, আমরা পাই $f'(c) = 0$ এবং $c = 0 \in (-2, 2)$।

উদাহরণ 43 $f(x) = x^2$ অপেক্ষকের জন্য $[2, 4]$ অন্তরালে মধ্যম মান উপপাদ্য যাচাই করো।

সমাধান $f(x) = x^2$ অপেক্ষকটি $[2, 4]$ অন্তরালে সন্তত এবং $(2, 4)$ অন্তরালে অন্তরকলণযোগ্য যেহেতু এর অন্তরকলজ $f'(x) = 2x$, $(2, 4)$ অন্তরালে সংজ্ঞাত।

এখন, $f(2) = 4$ এবং $f(4) = 16$ । অতএব,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

মধ্যম মান উপপাদ্য বোঝায় যে, একটি বিন্দু $c \in (2, 4)$ আছে যেখানে $f'(c) = 6$ । কিন্তু $f'(x) = 2x$ বোঝায় $c = 3$ । এভাবে $c = 3 \in (2, 4)$ হতে, আমরা পাই $f'(c) = 6$ ।

অনুশীলনী 5.8

1. $f(x) = x^2 + 2x - 8, x \in [-4, 2]$ অপেক্ষকের জন্য রোলের উপপাদ্যটি যাচাই করো।
2. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর যে-কোনোটিতে রোলের উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা, পরীক্ষা করো। তুমি কি এই উদাহরণগুলো থেকে রোলের বিপরীত উপপাদ্য সম্পর্কে কিছু বলতে পার?

   (i) $f(x) = [x], x \in [5, 9]$ এর জন্য। (ii) $f(x) = [x], x \in [-2, 2]$ এর জন্য।

   (iii) $f(x) = x^2 - 1, x \in [1, 2]$ এর জন্য।
3. যদি $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $f'(x)$ কোথাও শূন্য না হয়, তবে প্রমাণ করো যে $f(-5) \neq f(5)$ ।
4. $[a, b]$ অন্তরালে $f(x) = x^2 - 4x - 3$ অপেক্ষক এর জন্য মধ্যম মান উপপাদ্য যাচাই করো, যেখানে $a = 1$ এবং $b = 4$ ।
5. $[a, b]$ অন্তরালে $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ অপেক্ষক এর জন্য মধ্যম মান উপপাদ্য যাচাই করো, যেখানে $a = 1$ এবং $b = 3$ । সকল $c \in (1, 3)$ নির্ণয় করো, যার জন্য $f'(c) = 0$।
6. অনুশীলনীর 2 নং প্রশ্নে প্রদত্ত তিনটি অপেক্ষকের জন্য মধ্যম মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা পরীক্ষা করো।

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 44 নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করো :

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

সমাধান

(i) ধরো, $y = \sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$

লক্ষ করো যে এই অপেক্ষকটি সকল বাস্তব সংখ্যা $x > -\dfrac{2}{3}$ -এ সংজ্ঞাত। সুতরাং,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

এটি সকল বাস্তব সংখ্যা, $x > -\frac{2}{3}$ এর জন্য সংজ্ঞাত।

(ii) ধরো, $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$

এটি $[-1, 1]$ অন্তরালে সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞাত। সুতরাং,

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{\sec^2 x} \cdot 2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\sec x\,(\sec x \tan x)\, e^{\sec^2 x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x} + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

লক্ষ করো যে, যেহেতু কেবলমাত্র $(-1, 1)$ অন্তরালে $\cos^{-1} x$ এর অস্তিত্ব আছে তাই প্রদত্ত অপেক্ষকটির অন্তরকলজ কেবলমাত্র $(-1, 1)$ অন্তরালে বৈধ হয়।

(iii) ধরো, $y = \log_7 (\log x) = \frac{\log(\log x)}{\log 7}$ (নিধান পরিবর্তন সূত্র দ্বারা)।

অপেক্ষকটি সকল বাস্তব সংখ্যা, $x > 1$ এর জন্য সংজ্ঞাত। সুতরাং,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log(\log x))$$

$$= \frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

উদাহরণ 45 নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করো।

(i) $\cos^{-1}(\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

সমাধান

(i) ধরো, $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$ । লক্ষ করো যে এই অপেক্ষকটি সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত। আমরা এই অপেক্ষকটি পুনরায় এইভাবে লিখতে পারি,

$$f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$$

$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - x$$

অতএব $$f'(x) = -1$$

(ii) ধরো, $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$। লক্ষ করো যে এই অপেক্ষকটি সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত, যেখানে $\cos x \neq -1$ অর্থাৎ, π এর সকল অযুগ্ম গুণিতকের জন্য। এই অপেক্ষকটি আমরা পুনরায় এইভাবে লিখতে পারি,

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

লক্ষ করো যে, আমরা লব এবং হরে $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ বাতিল করতে পেরেছি যেহেতু এটির মান শূন্য নয়।

অতএব $f'(x) = \frac{1}{2}$ ।

(iii) ধরো $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$। এই অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র নির্ণয় করার জন্য আমাদের x এর

সকল মান নির্ণয় করা প্রয়োজন যখন $-1 \le \frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ । যেহেতু মধ্যবর্তী রাশিমালাটি সর্বদাই ঋণাত্মক, সেহেতু আমাদের x এর সকল মান নির্ণয় করা প্রয়োজন যেখানে $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ অর্থাৎ, সকল x এর জন্য যেখানে $2^{x+1} \le 1 + 4^x$ ।এটিকে আমরা পুনরায় লিখতে পারি যে $2 \le \frac{1}{2^x} + 2^x$ যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। অত:পর এই অপেক্ষকটি সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত। $2^x = \tan\theta$ বসিয়ে, এই অপেক্ষকটিকে পুনরায় লিখতে পারি যে

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta]$$

$$= 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

অতএব
$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x} \cdot (2^x)\log 2 \quad = \quad \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

উদাহরণ 46 যদি $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ হয় তবে $f'(x)$ নির্ণয় করো, সকল $0 < x < \pi$ এর জন্য।

সমাধান $y = (sinx)^{sinx}$ অপেক্ষকটি সকল ধণাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞাত। উভয় পক্ষে লগারিদম নিয়ে আমরা পাই

$$\log y = \log(\sin x)^{\sin x} = \sin x \log(\sin x)$$

তবে
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log(\sin x))$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \sin x \, . \, \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log(\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log(\sin x)) \cos x$$

সুতরাং, $\frac{dy}{dx} = y((1 + \log(\sin x))\cos x) = (1 + \log(\sin x))(\sin x)^{\sin x}\cos x$

উদাহরণ 47 ধনাত্মক ধ্রুবক a এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো, যেখানে

$$y = a^{t+\frac{1}{t}} \text{ এবং } x = \left(t + \frac{1}{t}\right)^a$$

সমাধান লক্ষ করো যে y এবং x সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞাত যখন $t \neq 0$ । স্পষ্টতই

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

অনুরূপে $$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\frac{dx}{dt} \neq 0$ শুধুমাত্র যদি $t \neq \pm 1$ হয়। অতএব, $t \neq \pm 1$ এর জন্য,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

উদাহরণ 48 $\sin^2 x$ -কে $e^{\cos x}$ এর সাপেক্ষে অবকলন করো।

সমাধান ধরো $u(x) = \sin^2 x$ এবং $v(x) = e^{\cos x}$ আমরা নির্ণয় করতে চাই যে $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$

স্পষ্টতই $\frac{du}{dx} = 2\sin x\cos x$ এবং $\frac{dv}{dx} = e^{\cos x}(-\sin x) = -(\sin x)e^{\cos x}$

অতএব, $$\frac{du}{dv} = \frac{2\sin x\cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

অধ্যায় 5 এর বিবিধ অনুশীলনী

অনুশীলনীর 1 থেকে 11 নং পর্যন্ত অপেক্ষকগুলোকে x এর সাপেক্ষে অবকলন করো।

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

3. $(5x)^{3\cos 2x}$

4. $\sin^{-1}(x\sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1$

5. $\dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}},\ -2 < x < 2$

6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7. $(\log x)^{\log x},\ x > 1$

8. $\cos(a\cos x + b\sin x)$, যে-কোনো ধ্রুবক a ও b এর জন্য।

9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)},\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x^x + x^a + a^x + a^a,\ a > 0$ এবং $x > 0$ যে-কোনো স্থির মানের জন্য।

11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2},\ x > 3$ এর জন্য।

12. যদি $y = 12(1-\cos t),\ x = 10(t - \sin t)$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো, যখন $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$।

13. যদি $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1}\sqrt{1-x^2},\ 0 < x < 1$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

14. যদি $-1 < x < 1$ এর জন্য $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হয়, প্রমাণ করো যে, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$

15. যে-কোনো $c > 0$ এর জন্য যদি $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

হল a এবং b নিরপেক্ষ একটি ধ্রুবক।

16. যদি $\cos y = x \cos (a + y)$ হয়, যখন $\cos a \neq \pm 1$ প্রমাণ করো যে $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ ।

17. যদি $x = a(\cos t + t \sin t)$ এবং $y = a(\sin t - t \cos t)$ হয়, তবে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

18. যদি $f(x) = |x|^3$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f''(x)$ এর অস্তিত্ব আছে এবং এটি নির্ণয় করো।

19. গাণিতিক আরোহণ নীতি ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে $\dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ সকল ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা n এর জন্য।

20. $\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sin \mathrm{A} \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{A} \sin \mathrm{B}$ এই সূত্রটি এবং অবকলন ব্যবহার করে, cosines এর যোগের সূত্রটি নির্ণয় করো।

21. এরূপ একটি অপেক্ষকের অস্তিত্ব আছে কি, যা সর্বত্র সন্তত কিন্তু ঠিক দুটি বিন্দুতে অবকলনযোগ্য নয়? তোমার উত্তরের যথার্থতা যাচাই করো।

22. যদি $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

23. যদি $y = e^{a \cos^{-1} x}, -1 \leq x \leq 1$, হয়, তবে দেখাও যে $\left(1-x^2\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - a^2 y = 0$

সারসংক্ষেপ

- একটি বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক, তার সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি বিন্দুতে **সন্তত** হবে যদি ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির সীমা, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির মানের সমান হয়। একটি অপেক্ষক সন্তত হয় যদি এটি তার সম্পূর্ণ সংজ্ঞার ক্ষেত্রের মধ্যে সন্তত হয়।
- সন্তত অপেক্ষকের সমষ্টি, অন্তর, গুণফল এবং ভাগফল সন্তত হবে, অর্থাৎ যদি, f এবং g সন্তত অপেক্ষক হয়, তখন

  $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ হল সন্তত।

  $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$ হল সন্তত।

  $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ হল সন্তত (যখন $g(x) \neq 0$)

- সকল অবকলনযোগ্য অপেক্ষক সন্তত হয় কিন্তু এর বিপরীতটি সত্য নয়।
- শৃঙ্খল নিয়ম হল সংযুক্ত অপেক্ষকের অবকলনের সূত্র। যদি $f = v \circ u,\ t = u(x)$ এবং $\frac{dt}{dx}$ ও $\frac{dv}{dt}$ উভয়ের অস্তিত্ব থাকে, তবে $\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$
- নিম্নলিখিতগুলো হল কিছু আদর্শ অন্তরকলজ (এদের উপযুক্ত সংজ্ঞার ক্ষেত্রের জন্য) :

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

- লগারিদ্‌মিক অবকলন, $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ আকারের অপেক্ষকের অবকলন নির্ণয়ের একটি শক্তিশালী কৌশল। এই কৌশলটি অর্থবহ হওয়ার জন্য, এখানে $f(x)$ এবং $u(x)$ উভয়ই ধনাত্মক অপেক্ষক হওয়া প্রয়োজন।
- ***রোলের উপপাদ্য (Rolle's Theorem)***:

  যদি $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত এবং (a, b) অন্তরালে অবকলন যোগ্য হয়, যেখানে $f(a) = f(b)$ তবে (a, b) অন্তরালে অন্তত একটি c এর অস্তিত্ব থাকে, যার জন্য $f'(c) = 0$ হয়।
- ***মধ্যম মান উপপাদ্য (Mean Value Theorem)***: যদি $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত এবং (a, b) অন্তরালে অবকলনযোগ্য হয়, তবে (a, b) অন্তরালে অন্তত একটি c এর অস্তিত্ব থাকে যার জন্য $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ হয়।

অধ্যায় 6

অন্তরকলজের প্রয়োগ
Application of Derivatives

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature." — WHITEHEAD* ❖

6.1 ভূমিকা

অধ্যায় 5 এ, আমরা শিখেছি কীভাবে সংযুক্ত অপেক্ষক (composite function), বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (inverse trigonometric function), অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক(implicit function), সূচকীয় অপেক্ষক (exponential function) ও লগারিদমিক অপেক্ষক (logarithmic function) সমূহের অন্তরকলজ নির্ণয় করা যায়। এই অধ্যায়ে, আমরা বিভিন্ন শাখায় যেমন প্রকৌশল বিদ্যায় (engineering), বিজ্ঞানে (science), সমাজবিজ্ঞানে (social science) ও অন্য অনেক ক্ষেত্রে অন্তরকলজের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করব। উদাহরণস্বরূপ, এখানে আমরা শিখব কীভাবে অন্তরকলজ ব্যবহৃত হয় (i) রাশিসমূহের পরিবর্তনের হার নির্ণয়ে (ii) একটি বিন্দুতে কোনো বক্রের স্পর্শক (tangent) ও অভিলম্বের (normal) সমীকরণ নির্ণয়ে (iii) একটি অপেক্ষকের লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত সন্ধি বিন্দুসমূহ (turning points) নির্ণয়ে, যা আমাদেরকে ওইসব বিন্দুসমূহের অবস্থান নির্ণয়ে সাহায্য করবে, যেখানে অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (স্থানীয়ভাবে) পাওয়া যায়। আমরা এছাড়াও অন্তরকলজের ব্যবহারে অন্তরালসমূহ নির্ণয় করব যেখানে অপেক্ষকটি, বর্ধিষ্ণু (increasing) অথবা ক্ষয়িষ্ণু (decreasing) হবে। সবশেষে, আমরা অন্তরকলজের প্রয়োগে কিছু নির্দিষ্ট রাশিসমূহের আসন্নমান নির্ণয় করব।

6.2 রাশিসমূহের পরিবর্তনের হার (Rate of Change of Quantities)

পুনরায় মনে করে দেখো যে, অন্তরকলজ $\frac{ds}{dt}$ দ্বারা আমরা বুঝি, সময় t এর সাপেক্ষে দূরত্ব s এর পরিবর্তনের হার। অনুরূপভাবে, যখন একটি রাশি y, কিছু নিয়ম $y = f(x)$ মেনে, অন্য একটি রাশি x এর সাথে পরিবর্তিত হয়, তখন $\frac{dy}{dx}$ (অথবা $f'(x)$), x-এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হারকে প্রকাশ করে এবং $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (অথবা $f'(x_0)$) বলতে বোঝায় $x = x_0$ বিন্দুতে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার।

অধিকন্তু, যদি দুটি চলরাশি x ও y উভয়ই অন্য আরেকটি চলরাশি t-এর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ যদি $x = f(t)$ এবং $y = g(t)$ হয়, তবে শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule) অনুযায়ী

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ যদি } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ হয় ।}$$

অতএব, t এর সাপেক্ষে x ও y উভয়ের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করে আমরা x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার গণনা করতে পারি।

চলো আমরা নিম্নে কিছু উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

উদাহরণ 1 কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সাপেক্ষে তার ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার প্রতি সেকেন্ডে নির্ণয় করো যখন $r = 5$ সেমি।

সমাধান r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের ক্ষেত্রফল A হলে আমরা লিখতে পারি $A = \pi r^2$ । সুতরাং, ব্যাসার্ধ r এর সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল A এর পরিবর্তনের হারকে লেখা যায় $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ । যখন $r = 5$ সেমি, তখন $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ । অতএব, বৃত্তের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার হল 10π সেমি^{2}/ সেকেন্ড।

উদাহরণ 2 একটি ঘনকের আয়তন প্রতি সেকেন্ডে 9 ঘন সেমি হারে ক্রমবর্ধিত হচ্ছে। কত দ্রুত এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ক্রমবর্ধিত হবে যখন প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেন্টিমিটার?

সমাধান ধরা যাক, ঘনকের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য x, আয়তন V এবং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল হল S । তাহলে, $V = x^3$ এবং $S = 6x^2$, যেখানে x হল সময় t এর একটি অপেক্ষক।

এখন,
$$\frac{dV}{dt} = 9\text{সেমি}^3\text{/সেকেন্ড (প্রদত্ত)}$$

সুতরাং,
$$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{(শৃঙ্খল নিয়ম দ্বারা)}$$
$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

বা,
$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \dots (1)$$

আবার,
$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2)\cdot\frac{dx}{dt} \quad \text{(শৃঙ্খল নিয়ম দ্বারা)}$$
$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) এর সাহায্যে)}$$

সুতরাং, যখন $x = 10$ সেমি, তখন $\frac{dS}{dt} = 3.6$ সেমি^{2}/সেকেন্ড

উদাহরণ 3 একটি পাথরখণ্ড একটি হ্রদের স্থির জলে ফেলে দেওয়ায় তরঙ্গগুলো বৃত্তাকারে 4 সেমি/সেকেন্ড হারে দূরে সরে যাচ্ছে। কোনো এক সময়ে, যখন বৃত্তাকার তরঙ্গের ব্যাসার্ধ 10 সেমি, তখন কত দ্রুত হারে বদ্ধ বৃত্তাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল ক্রমবর্ধমান হবে?

সমাধান r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল A হলে আমরা লেখতে পারি $A = \pi r^2$। সুতরাং, সময় t এর সাপেক্ষে ক্ষেত্রফল A এর পরিবর্তনের হার হল

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(শৃঙ্খল নিয়ম দ্বারা)}$$

এটি দেওয়া আছে যে $\frac{dr}{dt} = 4$ সেমি/সেকেন্ড

সুতরাং, যখন $r = 10$ সেমি, $\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$

সুতরাং, 80π সেমি^{2}/ সেকেন্ড হারে বদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল ক্রমবর্ধমান, যখন $r = 10$ সেমি।

> **দ্রষ্টব্য** $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক হবে যদি x বৃদ্ধি পাওয়ার সাথে সাথে y বৃদ্ধি পায় এবং ঋণাত্মক হবে যদি x বৃদ্ধি পাওয়ার সাথে সাথে y হ্রাস পায়।

উদাহরণ 4 একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x, 3 সেমি/মিনিট হারে হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রস্থ y, 2সেমি/মিনিট হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। যখন $x = 10$ সেমি এবং $y = 6$ সেমি, তখন আয়তক্ষেত্রের (a) পরিসীমা ও (b) ক্ষেত্রফল-এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করো।

সমাধান যেহেতু সময়ের সাপেক্ষে দৈর্ঘ্য x হ্রাস পাচ্ছে এবং প্রস্থ y বৃদ্ধি পাচ্ছে, অতএব

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ সেমি/মিনিট এবং } \frac{dy}{dt} = 2\text{সেমি/মিনিট}$$

(a) আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা P কে নিম্নের আকারে লেখা যায়,

$$P = 2(x + y)$$

সুতরাং $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3 + 2) = -2$ সেমি/মিনিট

(b) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A কে নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$A = x \, . \, y$$

সুতরাং $\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dt}$

$= -3(6) + 10(2)$ (যেহেতু $x = 10$ সেমি এবং $y = 6$ সেমি)

$= 2$ সেমি^{2}/মিনিট

উদাহরণ 5 কোনো দ্রব্যের মোট ব্যয় C(x) (টাকায়), এটির x একক উৎপাদনের সাথে নিম্নরূপে সম্পর্কিত

$$C(x) = 0.005\,x^3 - 0.02\,x^2 + 30x + 5000$$

3 একক উৎপাদিত দ্রব্যের প্রান্তিক ব্যয় (marginal cost) নির্ণয় করো, যেখানে প্রান্তিক ব্যয় বলতে যে-কোনো পরিমাণ উৎপাদিত দ্রব্যের মোট খরচের তাৎক্ষণিক পরিবর্তনের হারকে বোঝায়।

সমাধান যেহেতু প্রান্তিক ব্যয় হল মোট উৎপাদিত দ্রব্যের সাপেক্ষে মোট খরচের পরিবর্তনের হার, অতএব

প্রান্তিক ব্যয় (MC) $= \dfrac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$

যখন $x = 3$, তখন MC $= 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$

$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$

সুতরাং, নির্ণেয় প্রান্তিক ব্যয় হল 30.02 টাকা (প্রায়)।

উদাহরণ 6 কোনো একটি দ্রব্যের x একক পরিমাণ বিক্রি থেকে আদায়কৃত মোট রাজস্বের পরিমাণ (টাকায়) দেওয়া হল $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ রূপে। যখন $x = 5$, তখন প্রান্তিক রাজস্ব (marginal revenue) নির্ণয় করো, যেখানে প্রান্তিক রাজস্ব বলতে বোঝায় কোনো এক সময়ে বিক্রিত দ্রব্যের সংখ্যার সাপেক্ষে মোট রাজস্বের পরিবর্তনের হার।

সমাধান যেহেতু প্রান্তিক রাজস্ব হল বিক্রিত দ্রব্যের সংখ্যার সাপেক্ষে মোট রাজস্বের পরিবর্তনের হার, অতএব

প্রান্তিক রাজস্ব (MR) $= \dfrac{dR}{dx} = 6x + 36$

যখন $x = 5$, তখন MR $= 6(5) + 36 = 66$

সুতরাং, নির্ণেয় প্রান্তিক রাজস্ব হল 66 টাকা।

অনুশীলনী 6.1

1. কোনো একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সাপেক্ষে এর ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করো যখন
   (a) $r = 3$ সেমি (b) $r = 4$ সেমি
2. একটি ঘনকের আয়তন 8 সেমি^{3}/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। যখন ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি। তখন এটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কত দ্রুত হারে বৃদ্ধি পাবে?
3. কোনো একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সেমি/সেকেন্ড সমহারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। যখন বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 10 সেমি, তখন বৃত্তটির ক্ষেত্রফল যে হারে বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় করো।
4. কোনো একটি পরিবর্তনশীল ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। যখন ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি, তখন এটির আয়তন কত দ্রুত হারে বৃদ্ধি পাবে?

5. একটি পাথরখণ্ড একটি হ্রদের স্থির জলে ফেলে দেওয়ায় তরঙ্গগুলো বৃত্তাকারে 5 সেমি/সেকেন্ড হারে দূরে সরে যাচ্ছে। কোনো এক সময়ে, যখন বৃত্তাকার তরঙ্গের ব্যাসার্ধ 8 সেমি, তখন কত দ্রুত হারে বদ্ধ বৃত্তাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল ক্রমবর্ধমান হবে?

6. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 0.7 সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। এটির পরিধির বৃদ্ধির হার কত হবে?

7. কোনো একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x, 5 সেমি/মিনিট হারে হ্রাস পাচ্ছে এবং এটির প্রস্থ y , 4 সেমি/মিনিট হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। যখন $x = 8$ সেমি এবং $y = 6$ সেমি, তখন আয়তক্ষেত্রের (a) পরিসীমা ও (b) ক্ষেত্রফল -এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করো।

8. স্ফীত অবস্থায় সর্বদাই গোলাকার থাকে এরূপ একটি বেলুনকে 900 ঘনসেমি/সেকেন্ড হারে পাম্প দিয়ে গ্যাস ঢুকিয়ে স্ফীত করা হচ্ছে। যখন বেলুনটির ব্যাসার্ধ 15 সেমি, তখন এর ব্যাসার্ধ যে হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে তা নির্ণয় করো।

9. পরিবর্তনশীল ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বেলুন সর্বদাই গোলাকার অবস্থায় থাকে। যখন বেলুনটির ব্যাসার্ধ 10 সেমি, তখন এটির আয়তন যে হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে তা নির্ণয় করো।

10. 5 মিটার দীর্ঘ একটি মইকে একটি দেওয়ালে ঠেস দেওয়া হল। মইটির নিম্নভাগটিকে ভূমি বরাবর 2 সেমি/সেকেন্ড হারে দেওয়াল থেকে দূরে সরানো হচ্ছে। কত দ্রুত হারে দেওয়াল বরাবর মইটির উচ্চতা হ্রাস পাচ্ছে, যখন দেওয়াল থেকে এটির পাদদেশের দূরত্ব 4 মিটার?

11. একটি কণা $6y = x^3 + 2$ বক্ররেখা বরাবর গতিশীল। বক্ররেখাটির ওপর এমন বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যাদের y-স্থানাঙ্ক, x-স্থানাঙ্কের পরিবর্তনের 8 গুণ হিসেবে পরিবর্তিত হচ্ছে।

12. একটি বায়ুর বুদ্‌বুদ্ (air bubble)-এর ব্যাসার্ধ $\frac{1}{2}$ সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পাচ্ছে। কি হারে বুদবুদটির আয়তন বৃদ্ধি পাবে, যখন এটির ব্যাসার্ধ 1 সেমি?

13. পরিবর্তনশীল ব্যাস $\frac{3}{2}(2x+1)$ বিশিষ্ট একটি বেলুন সর্বদাই গোলাকার অবস্থায় থাকে। x-এর সাপেক্ষে এটির আয়তনের পরিবর্তনের হার নির্ণয় করো।

14. একটি নল (pipe) দিয়ে 12 সেমি^{3}/সেকেন্ড হারে বালি ভূমিতে ঢালা হচ্ছে। এই বালি দিয়ে একটি শঙ্কু এরূপে তৈরি করা হয়েছে যাতে শঙ্কুটির উচ্চতা সর্বদাই এটির ভূমির ব্যাসার্ধের এক-ষষ্ঠাংশ (one-sixth) -এর সমান হয়। বালি দিয়ে তৈরি শঙ্কুটির উচ্চতা কত দ্রুত হারে বৃদ্ধি পাবে, যখন এর উচ্চতা 4 সেমি হয়?

15. কোনো একটি দ্রব্যের x একক পরিমাণ উৎপাদনের সাথে সম্পর্কিত দ্রব্যটির মোট খরচ $C(x)$ (টাকায়) নিম্নরূপে দেওয়া হল

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

প্রান্তিক ব্যয় নির্ণয় করো, যখন দ্রব্যটির 17 একক পরিমাণ উৎপাদিত হয়।

16. কোনো একটি দ্রব্যের x একক পরিমাণ বিক্রি থেকে প্রাপ্ত মোট রাজস্ব (টাকায়) নিম্নরূপে দেওয়া হল

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

প্রান্তিক রাজস্ব নির্ণয় করো যখন $x = 7$।

17 এবং 18 নং প্রশ্নের জন্য সঠিক উত্তর বাছাই করো।

17. কোনো একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সাপেক্ষে এর ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের হার, $r = 6$ সেমি-এ হবে

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. কোনো একটি দ্রব্যের x একক পরিমাণ বিক্রি থেকে প্রাপ্ত মোট রাজস্ব (টাকায়) নিম্নরূপে দেওয়া হল

$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ যখন $x = 15$, তখন প্রান্তিক রাজস্ব হবে

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 বর্ধিষ্ণু ও ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক (Increasing and Decreasing Functions)

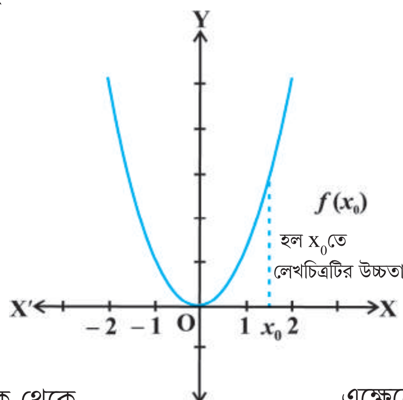
এই অনুচ্ছেদে, আমরা একটি অপেক্ষক বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু অথবা এদের মধ্যে কোনোটিই নয়-এগুলো যাচাই এর জন্য অবকলন (differentiation)-এর ব্যবহার করব।

একটি অপেক্ষক f যেখানে, $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ বিবেচনা করি। এই অপেক্ষকটির লেখচিত্র হল একটি অধিবৃত্ত যা চিত্র 6.1-তে দেখানো হয়েছে।

মূলবিন্দুর বাম দিকের মানসমূহ

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

এক্ষেত্রে আমরা যখন বাম দিক থেকে ডান দিকে অগ্রসর হই, তখন লেখটির উচ্চতা হ্রাস পাচ্ছে।



মূলবিন্দুর ডান দিকের মানসমূহ

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

এক্ষেত্রে আমরা যখন বাম দিক থেকে ডান দিকে অগ্রসর হই, তখন লেখটির উচ্চতা বৃদ্ধি পাচ্ছে।

চিত্র 6.1

প্রথমে আমরা মূলবিন্দুর ডান পাশে অবস্থিত লেখচিত্রটি (চিত্র 6.1) বিবেচনা করি। লক্ষ করো যে, যতই আমরা লেখচিত্র বরাবর বাম দিক থেকে ডান দিকে অগ্রসর হই, ততই লেখচিত্রটির উচ্চতা ক্রমশ বৃদ্ধি পাচ্ছে। এই কারণে, সকল বাস্তব সংখ্যা $x > 0$ এর জন্য অপেক্ষকটিকে বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক বলা হয়।

এখন আমরা মূলবিন্দুর বাম পাশে অবস্থিত লেখচিত্রটি বিবেচেনা করি। এক্ষেত্রে লক্ষ করো যে, যতই আমরা লেখচিত্র বরাবর বাম দিক থেকে ডান দিকে অগ্রসর হই, ততই লেখচিত্রের উচ্চতা ক্রমশ হ্রাস পাচ্ছে। ফলস্বরূপ, বাস্তব সংখ্যা $x < 0$ এর জন্য অপেক্ষকটিকে ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক বলা হয়।

এখন আমরা কোনো একটি অন্তরালে কোনো একটি অপেক্ষকের বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু সম্পর্কিত বিশ্লেষণাত্মক সংজ্ঞাগুলো নিম্নে আলোচনা করব।

সংজ্ঞা 1 ধরা যাক, I হল একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক f এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভূক্ত একটি অন্তরাল। তাহলে f কে বলা হবে

(i) I- অন্তরালে যথার্থ বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক, যদি I অন্তরালে $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য।

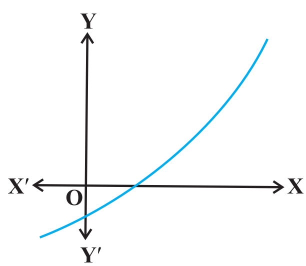
(ii) I- অন্তরালে যথার্থ ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক, যদি I অন্তরালে $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য।

(iii) I-অন্তরালে ধ্রবক অপেক্ষক, যদি সকল $x \in$ I এর জন্য $f(x) = c$ হয়, যেখানে c হল একটি ধ্রুবক রাশি।

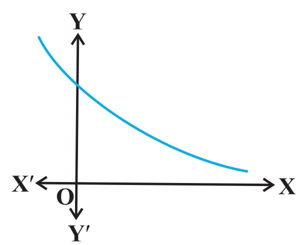
(iv) I-অন্তরালে বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক, যদি I-অন্তরালে $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য।

(v) I-অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক, যদি I-অন্তরালে $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য।

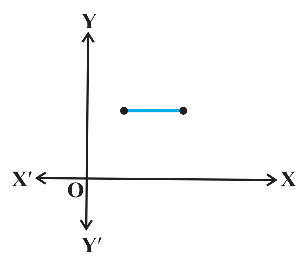
এধরনের অপেক্ষকগুলোর লৈখিক (graphical) উপস্থাপনার জন্য চিত্র 6.2 দেখো।



যথার্থ বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক
(i)



যথার্থ ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক
(ii)



ধ্রুবক অপেক্ষক
(iii)

চিত্র 6.2

এখন আমরা একটি অপেক্ষকের সংজ্ঞা দেব যেখানে অপেক্ষকটি কোনো একটি বিন্দুতে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু।

সংজ্ঞা 2 ধরা যাক, x_0 হল একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক f এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভূক্ত একটি বিন্দু। তাহলে x_0 বিন্দুতে f কে বর্ধিষ্ণু, ক্ষয়িষ্ণু বলা হবে যদি x_0 কে ধারণকারী এমন একটি মুক্ত অন্তরাল I এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে f অপেক্ষকটি I- অন্তরালে যথাক্রমে বর্ধিষ্ণু, ক্ষয়িষ্ণু হয়।

বর্ধিষ্ণু অপেক্ষকের ক্ষেত্রে চলো আমরা এই সংজ্ঞাটির স্পষ্টতা বিচার করি।

উদাহরণ 7 দেখাও যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = 7x - 3$, $\mathbf{R}$ -এ বর্ধিষ্ণু।

সমাধান ধরি, যে-কোনো দুটি সংখ্যা x_1 এবং x_2, $\mathbf{R}$ -এ আছে। তাহলে,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

সুতরাং, সংজ্ঞা 1 অনুযায়ী বলা যায় যে f অপেক্ষকটি $\mathbf{R}$ -এ যথার্থ বর্ধিষ্ণু।

আমরা এখন বর্ধিষ্ণু এবং ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক সমূহের জন্য প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ পরীক্ষা আলোচনা করব।

এই পরীক্ষাটি প্রমাণ করার জন্য মধ্যম মান উপপাদ্য (mean value theorem) এর প্রয়োজন, যা আমরা অধ্যায় 5-এ অধ্যয়ন করেছি।

উপপাদ্য 1 মনে করি বন্ধ অন্তরাল $[a, b]$ এবং মুক্ত অন্তরাল (a,b) -তে f যথাক্রমে সন্তত ও অবকলনযোগ্য ।তাহলে

(a) $[a,b]$ -তে f বর্ধিষ্ণু হবে, যদি $f'(x) > 0$ হয়, যেখানে প্রতিটি $x \in (a, b)$

(b) $[a,b]$ -তে f ক্ষয়িষ্ণু হবে, যদি $f'(x) < 0$ হয়, যেখানে প্রতিটি $x \in (a, b)$

(c) $[a,b]$-তে f হল একটি ধ্রুবক অপেক্ষক যদি $f'(x) = 0$ হয়, যেখানে প্রতিটি $x \in (a, b)$

প্রমাণ (a) ধরা যাক $x_1, x_2 \in [a, b]$ এমন হতে হবে যে $x_1 < x_2$ ।

তাহলে, মধ্যম মান উপপাদ্য অনুযায়ী (অধ্যায় 5-এ উপপাদ্য 8), x_1 ও x_2 এর মধ্যবর্তী একটি বিন্দু c এর অস্তিত্ব আছে যেখানে

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

অর্থাৎ, $f(x_2) - f(x_1) > 0$ (যেহেতু $f'(c) > 0$ (প্রদত্ত))

অর্থাৎ, $f(x_2) > f(x_1)$

সুতরাং, আমরা পাই

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \quad \text{সকল } x_1, x_2 \in [a,b] \text{ এর জন্য}$$

সুতরাং, $[a,b]$-তে f হল একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক।

(b) ও (c)অংশের প্রমাণ অনুরূপে করা যায়। এটি পাঠকের অনুশীলন হিসেবে ছেড়ে দেওয়া হয়েছে।

মন্তব্য

আরও সাধারণীকরণের জন্য উপপাদ্য রয়েছে, যা বলেছে যে, প্রান্ত বিন্দুগুলো বর্জিত কোনো অন্তরালে আছে এমন x এর জন্য যদি $f'(x) > 0$ হয় এবং f ওই অন্তরালে সন্তত হয়, তবে f বর্ধিষ্ণু হবে। অনুরূপভাবে, প্রান্ত বিন্দুগুলো বর্জিত কোনো অন্তরালে আছে এমন x এর জন্য যদি $f'(x) < 0$ হয় এবং f ওই অন্তরালে সন্তত হয়, তবে f ক্ষয়িষ্ণু হবে।

উদাহরণ 8 দেখাও যে অপেক্ষক f যা $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $x \in \mathbf{R}$ দ্বারা প্রদত্ত, $\mathbf{R}$ -এ বর্ধিষ্ণু।

সমাধান লক্ষ করো যে

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$
$$= 3(x^2 - 2x + 1) + 1$$
$$= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \text{ } \mathbf{R} \text{ এর প্রতিটি অন্তরালে।}$$

সুতরাং, $\mathbf{R}$-এ অপেক্ষক f বর্ধিষ্ণু।

উদাহরণ 9 প্রমাণ করো যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু

(b) $(\pi, 2\pi)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু এবং

(c) $(0, 2\pi)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণুর কোনটিই নয়।

সমাধান লক্ষ করো যে $f'(x) = -\sin x$

(a) যেহেতু প্রত্যেক $x \in (0, \pi)$ এর জন্য, $\sin x > 0$, তাহলে $f'(x) < 0$ এবং তাই $(0, \pi)$ -তে f ক্ষয়িষ্ণু।

(b) যেহেতু প্রত্যেক $x \in (\pi, 2\pi)$ এর জন্য, $\sin x < 0$, তাহলে $f'(x) > 0$ এবং তাই $(\pi, 2\pi)$ -তে f বর্ধিষ্ণু।

(c) স্পষ্টতই উপরের (a) ও (b) হতে, বলা যায় যে $(0, 2\pi)$ -তে f বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু নয়।

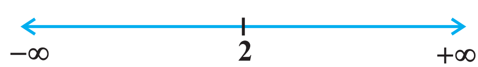
উদাহরণ 10 অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক f, যা $f(x) = x^2 - 4x + 6$ দ্বারা প্রদত্ত,

(a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু হবে।

সমাধান আমরা জানি,

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

বা, $$f'(x) = 2x - 4$$



চিত্র 6.3

সুতরাং, $f'(x) = 0$ থেকে পাই $x = 2$ । $x = 2$ বিন্দুটি সংখ্যা রেখাকে দুটি বিচ্ছিন্ন অন্তরাল যথা, $(-\infty, 2)$ এবং $(2, \infty)$-তে বিভক্ত করেছে (চিত্র 6.3 দেখো) । $(-\infty, 2)$ অন্তরালে, $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ।

সুতরাং, $(-\infty, 2)$ অন্তরালে f ক্ষয়িষ্ণু। এছাড়া, $(2,\infty)$ অন্তরালে $f'(x) > 0$ এবং তাই এই অন্তরালে অপেক্ষক f বর্ধিষ্ণু।

উদাহরণ 11 অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক f, যা $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ দ্বারা প্রদত্ত (a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু হবে।

সমাধান আমরা জানি

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

বা
$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$
$$= 12(x^2 - x - 6)$$
$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

চিত্র 6.4

সুতরাং, $f'(x) = 0$ হতে পাই $x = -2, 3$ । $x = -2$ এবং $x = 3$ বিন্দুগুলো সংখ্যা রেখাকে তিনটি বিচ্ছিন্ন অন্তরাল, যথা, $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ এবং $(3, \infty)$-তে বিভক্ত করেছে।

$(-\infty, -2)$ এবং $(3, \infty)$,অন্তরালে $f'(x)$ ধনাত্মক আবার $(-2, 3)$,অন্তরালে $f'(x)$ ঋণাত্মক। অতএব, f অপেক্ষকটি $(-\infty, -2)$ এবং $(3, \infty)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু আবার $(-2, 3)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু। অর্থাৎ **R** -এ f বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু এদের কোনোটিই নয়।

অন্তরাল	$f'(x)$ এর চিহ্ন	অপেক্ষক f এর প্রকৃতি
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f বর্ধিষ্ণু
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ক্ষয়িষ্ণু
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f বর্ধিষ্ণু

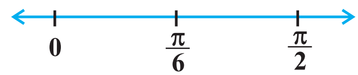
উদাহরণ 12 অন্তরালগুলো নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক f, যা $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ দ্বারা প্রদত্ত (a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু হবে।

সমাধান দেওয়া আছে

$$f(x) = \sin 3x$$

বা
$$f'(x) = 3\cos 3x$$

সুতরাং, $f'(x) = 0$ থেকে পাই $\cos 3x = 0$ যা সমাধান করে পাওয়া যায় $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (যেহেতু $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$)। অতএব $x = \frac{\pi}{6}$ এবং $\frac{\pi}{2}$ । $x = \frac{\pi}{6}$ বিন্দুটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরালকে দুটি বিচ্ছিন্ন অন্তরাল যথা $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ এবং $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$-তে বিভক্ত করেছে।



চিত্র 6.5

আবার, $f'(x) > 0$, সকল $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ এর জন্য (যেহেতু $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$) এবং $f'(x) < 0$, সকল $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ এর জন্য (যেহেতু $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$) ।

সুতরাং, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ও $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ অন্তরালে f যথাক্রমে বর্ধিষ্ণু ও ক্ষয়িষ্ণু।

এছাড়াও, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{6}$ বিন্দুতে সন্তত। উপপাদ্য 1 এর সাহায্যে, আমরা বলতে পারি যে, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ এবং $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরালে f যথাক্রমে বর্ধিষ্ণু ও ক্ষয়িষ্ণু।

উদাহরণ 13 অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক f, যা

$$f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$$

দ্বারা প্রদত্ত, বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু হবে।

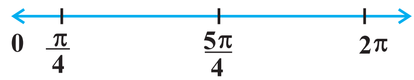
সমাধান দেওয়া আছে,

$$f(x) = \sin x + \cos x,$$

বা
$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

এখন, $f'(x) = 0$ থেকে পাওয়া যায় $\sin x = \cos x$ যা সমাধান করে পাই $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ (যেহেতু $0 \le x \le 2\pi$)।

$x = \dfrac{\pi}{4}$ ও $x = \dfrac{5\pi}{4}$ বিন্দুগুলো $[0, 2\pi]$ অন্তরালকে তিনটি বিচ্ছিন্ন অন্তরাল, যথা $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ এবং $\left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ তে বিভক্ত করেছে।



চিত্র 6.6

লক্ষ্য করো যে, $f'(x) > 0$ যদি $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

বা $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ ও $\left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ অন্তরালে f বর্ধিষ্ণু

এছাড়া, $f'(x) < 0$ যদি $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ হয়

বা $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$ অন্তরালে f ক্ষয়িষ্ণু

অন্তরাল	$f'(x)$ এর চিহ্ন	অপেক্ষকের প্রকৃতি
$\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$	> 0	f বর্ধিষ্ণু
$\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ক্ষয়িষ্ণু
$\left(\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f বর্ধিষ্ণু

অনুশীলনী 6.2

1. দেখাও যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = 3x + 17$, **R**-এ বর্ধিষ্ণু।
2. দেখাও যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = e^{2x}$, **R**-এ বর্ধিষ্ণু।
3. দেখাও যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = \sin x$

   (a) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$-তে বর্ধিষ্ণু (b) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$-তে ক্ষয়িষ্ণু

(c) $(0, \pi)$-তে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু কোনোটিই নয়।

4. অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো, যেখানে অপেক্ষক f যা $f(x) = 2x^2 - 3x$ দ্বারা প্রদত্ত

(a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু হয়।

5. অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো, যেখানে অপেক্ষক f যা $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ দ্বারা প্রদত্ত

(a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু হয়।

6. অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো, যেখানে নিম্নের অপেক্ষকগুলো বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু :

(a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. দেখাও যে $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}$, $x > -1$, x এর সংজ্ঞার অঞ্চলের সর্বত্র একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক।

8. x এর ওই মানগুলো নির্ণয় করো যার জন্য $y = [x(x-2)]^2$ একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক।

9. প্রমাণ করো যে, $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ এর একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক, যেখানে $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$।

10. প্রমাণ করো যে, $(0, \infty)$ -তে লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক বর্ধিষ্ণু।

11. প্রমাণ করো যে অপেক্ষক f যা $f(x) = x^2 - x + 1$ দ্বারা প্রদত্ত, সেটি $(-1, 1)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু কোনোটিই নয়।

12. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর মধ্যে কোন্‌টি $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. নিম্নলিখিত অন্তরালগুলোর মধ্যে কোন্‌টিতে অপেক্ষক f, যা $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ দ্বারা প্রদত্ত, ক্ষয়িষ্ণু ?

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) এদের কোনোটিই নয়।

14. a এর কোন্ মানগুলোর জন্য অপেক্ষক f, যা $f(x) = x^2 + ax + 1$ দ্বারা প্রদত্ত, $[1, 2]$-তে বর্ধিষ্ণু?

15. ধরো I যে-কোনো একটি অন্তরাল যা $[-1, 1]$ থেকে বিচ্ছিন্ন। প্রমাণ করো যে অপেক্ষক f, যা $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ দ্বারা প্রদত্ত, I-তে বর্ধিষ্ণু।

16. প্রমাণ করো যে অপেক্ষক f, যা $f(x) = \log \sin x$ দ্বারা প্রদত্ত, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$-তে বর্ধিষ্ণু এবং $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$-তে ক্ষয়িষ্ণু।

17. প্রমাণ করো যে অপেক্ষক f-যা $f(x) = \log |\cos x|$ দ্বারা প্রদত্ত, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ -তে ক্ষয়িষ্ণু এবং $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$-তে বর্ধিষ্ণু।

18. প্রমাণ করো যে প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$, **R**-এ বর্ধিষ্ণু।

19. যে অন্তরালে $y = x^2 e^{-x}$ বর্ধিষ্ণু সেটি হল

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

6.4 স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangents and Normals)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা কোনো একটি বক্রের একটি প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শক রেখা ও অভিলম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয়ে অবকলনের ব্যবহার করব।

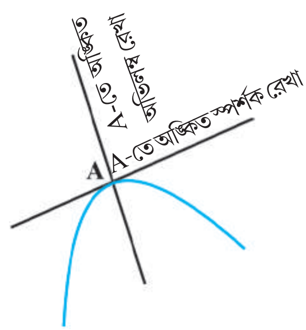
পুনরায় মনে করে দেখো যে, একটি প্রদত্ত বিন্দু (x_0, y_0) গামী এবং সসীম নতি m যুক্ত কোনো সরল -রেখার সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

লক্ষ করো যে, $y = f(x)$ বক্রের (x_0, y_0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতিকে $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}$ $(= f'(x_0))$ দিয়ে লেখা হয়। তাই $y = f(x)$ বক্রের ওপর অবস্থিত (x_0, y_0) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

এছাড়া, যেহেতু অভিলম্ব, স্পর্শকের উপর লম্ব, তাই $y = f(x)$ বক্রের (x_0, y_0) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের নতি হবে $\frac{-1}{f'(x_0)}$, যদি $f'(x_0) \neq 0$ হয়। সুতরাং, $y = f(x)$ বক্রের ওপর অবস্থিত (x_0, y_0) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বের সমীকরণকে নিম্নের আকারে লেখা যায়



চিত্র 6.7

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

অর্থাৎ, $(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

> **দ্রষ্টব্য** যদি $y = f(x)$ বক্রের একটি স্পর্শক রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে, তবে $\frac{dy}{dx}$ = স্পর্শকের নতি = $\tan\theta$।

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ

(i) যদি স্পর্শক রেখার নতি শূন্য (zero) হয়, তবে $\tan\theta = 0$ এবং তাই $\theta = 0$, যার অর্থ হল স্পর্শক রেখা x- অক্ষের সমান্তরাল। এই ক্ষেত্রে, (x_0, y_0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $y = y_0$।

(ii) যদি $\theta \to \frac{\pi}{2}$, তবে $\tan\theta \to \infty$, যার অর্থ হল স্পর্শক রেখা x-অক্ষের উপর লম্বভাবে অবস্থিত, অর্থাৎ y-অক্ষের সমান্তরাল। এই ক্ষেত্রে (x_0, y_0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হবে $x = x_0$ (কেন?)।

উদাহরণ 14 $y = x^3 - x$ বক্ররেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো।

সমাধান $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতিকে নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = \left.3x^2 - 1\right]_{x=2} = 11$$

উদাহরণ 15 বিন্দুটি নির্ণয় করো যেটিতে $y = \sqrt{4x-3} - 1$ বক্ররেখার নতি $\frac{2}{3}$ হয়।

সমাধান প্রদত্ত বক্ররেখার (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}}4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$$

এখানে নতি দেওয়া আছে $\frac{2}{3}$ ।

সুতরাং, $$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

বা $$4x - 3 = 9$$

বা $$x = 3$$

আবার $y = \sqrt{4x-3} - 1$। তাই, যখন $x = 3$, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$।
সুতরাং, নির্ণেয় বিন্দুটি হল (3, 2)।

উদাহরণ 16 নতি 2 বিশিষ্ট এমন সকল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যারা $y+\frac{2}{x-3}=0$ বক্ররেখার স্পর্শক।

সমাধান প্রদত্ত বক্ররেখার যে-কোনো একটি বিন্দু (x,y)-তে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি হল

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(x-3)^2}$$

কিন্তু নতি দেওয়া আছে 2 ।

$$\frac{2}{(x-3)^2}=2$$

বা, $$(x-3)^2=1$$

বা, $$x-3=\pm 1$$

বা, $$x=2, 4$$

এখন, $x=2$ হলে, $y=2$ এবং $x=4$ হলে $y=-2$ হবে। সুতরাং নতি 2 বিশিষ্ট প্রদত্ত বক্ররেখার দুটি স্পর্শক আছে এবং এই স্পর্শকগুলো $(2, 2)$ ও $(4, -2)$ বিন্দুগামী।

$(2, 2)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$y-2=2(x-2)$$

বা $$y-2x+2=0$$

এবং $(4, -2)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$y-(-2)=2(x-4)$$

বা $$y-2x+10=0$$

উদাহরণ 17 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ বক্ররেখার ওপর অবস্থিত ওই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে স্পর্শক-সমূহ (i) x-অক্ষের সাথে সমান্তরাল (ii) y- অক্ষের সাথে সমান্তরাল।

সমাধান x এর সাপেক্ষে $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ -কে অবকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{25}\frac{dy}{dx}=0$$

বা, $$\frac{dy}{dx}=\frac{-25}{4}\frac{x}{y}$$

(i) এখন, স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হবে যদি স্পর্শকের নতি শূন্য হয়, যা থেকে আমরা পাই

$\frac{-25}{4}\frac{x}{y}=0$। এটি সম্ভব হবে যদি $x = 0$ হয়। $x = 0$ এর জন্য $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$কে লেখা যায় $y^2 = 25$ অর্থাৎ, $y = \pm 5$।

সুতরাং, যে বিন্দুগুলোতে স্পর্শকসমূহ x- অক্ষের সমান্তরাল সেগুলো হল (0, 5) এবং (0, – 5) ।

(ii) স্পর্শক রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হবে যদি অভিলম্বের নতি শূন্য (0) হয়, যা থেকে আমরা পাই $\frac{4y}{25x}=0$, অর্থাৎ $y = 0$ সুতরাং। $y = 0$ এর জন্য $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ থেকে পাওয়া যায় $x = \pm 2$।

যে বিন্দুগুলোতে স্পর্শকগুলো y-অক্ষের সমান্তরাল সেগুলো হল (2, 0) এবং (–2, 0) ।

উদাহরণ 18 যে বিন্দুতে $y=\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ বক্ররেখাটি x- অক্ষকে ছেদ করেছে ওই বিন্দুতে এর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

সমাধান লক্ষ করো যে x-অক্ষের ওপর $y = 0$ । সুতরাং বক্রের সমীকরণ, যখন $y = 0$, হল $x = 7$। অতএব, বক্রটি x-অক্ষকে (7, 0) বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন x এর সাপেক্ষে বক্রের সমীকরণটিকে অবকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \qquad \text{(কেন?)}$$

বা,
$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)}=\frac{1-0}{(5)(4)}=\frac{1}{20}$$

সুতরাং, (7, 0) -তে স্পর্শকের নতি হল $\frac{1}{20}$। অতএব, (7, 0) -তে স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$y-0=\frac{1}{20}(x-7) \quad \text{বা} \quad 20y-x+7=0$$

উদাহরণ 19 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ বক্ররেখার (1, 1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণসমূহ নির্ণয় করো।

সমাধান x এর সাপেক্ষে $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$-কে অবকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

সুতরাং, (1, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$ ।

অতএব, (1, 1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$y - 1 = -1\ (x - 1) \quad \text{বা} \quad y + x - 2 = 0$$

এছাড়া, (1, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের নতিকে নিম্নরূপে লেখা যায়

$$\frac{-1}{(1,1)\ \text{বিন্দুতে স্পর্শকের নতি}} = 1$$

সুতরাং, (1, 1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$y - 1 = 1\ (x - 1) \quad \text{বা} \quad y - x = 0$$

উদাহরণ 20 প্রদত্ত বক্ররেখা যথা,

$x = a\sin^3 t$, $y = b\cos^3 t$ এর $t = \frac{\pi}{2}$-তে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো। ... (1)

সমাধান (1)-কে t এর সাপেক্ষে অবকলন করে, আমরা পাই

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \quad \text{এবং} \quad \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

বা, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}$$

সুতরাং, $t = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

এছাড়া, যখন $t = \frac{\pi}{2}$ তখন $x = a$ এবং $y = 0$ । সুতরাং, প্রদত্ত বক্ররেখার $t = \frac{\pi}{2}$ - তে, অর্থাৎ $(a, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকেরণ সমীকরণ হল

$$y - 0 = 0\,(x - a) \text{ অর্থাৎ, } y = 0 \text{ ।}$$

অনুশীলনী 6.3

1. $y = 3x^4 - 4x$ বক্ররেখার $x = 4$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো।

2. $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ বক্ররেখার $x = 10$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো।

3. $y = x^3 - x + 1$ বক্ররেখার, এমন একটি বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো যার x-স্থানাঙ্ক হল 2 ।

4. $y = x^3 - 3x + 2$ বক্ররেখার, এমন একটি বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো যার x-স্থানাঙ্ক হল 3 ।

5. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্রের $\theta = \frac{\pi}{4}$ -তে যার অভিলম্বের নতি নির্ণয় করো।

6. $x = 1 - a\sin\theta$, $y = b\cos^2\theta$ বক্রের $\theta = \frac{\pi}{2}$ -তে যার অভিলম্বের নতি নির্ণয় করো।

7. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ বক্ররেখার যে বিন্দুগুলোতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল সেই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

8. $y = (x - 2)^2$ বক্ররেখার ওপর অবস্থিত এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করো, যেটিতে স্পর্শক, (2, 0) ও (4, 4) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী জ্যা-এর সমান্তরাল।

9. $y = x^3 - 11x + 5$ বক্ররেখার কোনো বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y = x - 11$ হলে বিন্দুটি নির্ণয় করো।

10. নতি – 1 বিশিষ্ট সব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে রেখাগুলো $y = \frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ বক্ররেখার স্পর্শক।

11. নতি 2 বিশিষ্ট এমন সব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে রেখাগুলো $y=\frac{1}{x-3}, x\neq 3$ বক্ররেখার স্পর্শক।

12. নতি 0 বিশিষ্ট এমন সব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে রেখাগুলো $y=\frac{1}{x^2-2x+3}$. বক্ররেখার স্পর্শক।

13. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ বক্ররেখার ওপর অবস্থিত ওই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে স্পর্শকসমূহ

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল (ii) y-অক্ষের সমান্তরাল।

14. নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি বক্ররেখার নির্দেশিত বিন্দুতে, স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণগুলো নির্ণয় করো :

(i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (0, 5) বিন্দুতে

(ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, (1, 3) বিন্দুতে

(iii) $y = x^3$, (1, 1) বিন্দুতে

(iv) $y = x^2$, (0, 0) বিন্দুতে

(v) $x = \cos t, y = \sin t, t=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে

15. $y = x^2 - 2x + 7$ বক্রের স্পর্শক রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে স্পর্শকটি

(a) $2x - y + 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

(b) $5y - 15x = 13$ রেখার ওপর লম্ব।

16. দেখাও যে $y = 7x^3 + 11$ বক্ররেখার $x = 2$ ও $x = -2$ বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় সমান্তরাল।

17. $y = x^3$ বক্ররেখার ওপর অবস্থিত এমন বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে স্পর্শকের নতি ওই বিন্দুগুলোর y-স্থানাঙ্কের সমান।

18. $y = 4x^3 - 2x^5$ বক্ররেখার জন্য, ওই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে স্পর্শক মূলবিন্দুগামী।

19. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্রের ওপর অবস্থিত ওই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে স্পর্শকসমূহ x- অক্ষের সমান্তরাল।

20. $ay^2 = x^3$ বক্রের (am^2, am^3) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

21. $y = x^3 + 2x + 6$ বক্ররেখার অভিলম্বগুলোর সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে অভিলম্বগুলো $x + 14y + 4 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

22. অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ এর $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

23. প্রমাণ করো যে, $x = y^2$ এবং $xy = k$ বক্র দুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে * যদি $8k^2 = 1$।

24. পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর (x_0, y_0) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণগুলো নির্ণয় করো।

25. $y = \sqrt{3x-2}$ বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো যেখানে স্পর্শকটি 4x-2y+5=0 রেখার সমান্তরাল।

26 ও 27 নং প্রশ্নের ক্ষেত্রে সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

26. $y = 2x^2 + 3 \sin x$ বক্রের $x = 0$ বিন্দুতে অভিলম্বের নতি হল

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) –3 (D) $-\frac{1}{3}$

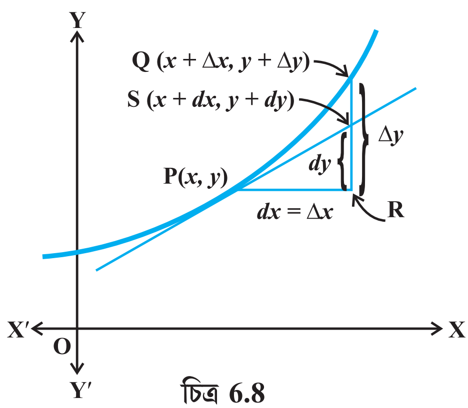
27. যে বিন্দুতে $y = x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4x$ বক্রের একটি স্পর্শক সেটি হল

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, – 2) (D) (– 1, 2)

6.5 আসন্ন মান (Approximations)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা কিছু নির্দিষ্ট রাশির আনুমানিক মান নির্ণয়ে অবকল (differential) ব্যবহার করব।

ধরা যাক, $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, হল একটি প্রদত্ত অপেক্ষক এবং ধরো $y = f(x)$ । ধরো Δx , x এর একটি ক্ষুদ্র বৃদ্ধি বোঝায়।পুনরায় মনে করে দেখো যে x এর বৃদ্ধির অনুরূপ y এর বৃদ্ধিকে Δy দিয়ে বোঝানো হয় এবং $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$। এখন আমরা নিম্নলিখিত পদগুলো ব্যাখ্যা করব।



চিত্র 6.8

(i) x এর অবকলকে dx দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে $dx = \Delta x$ দিয়ে সংজ্ঞায়িত করাহয়।

(ii) y এর অবকলকে dy দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে $dy = f'(x)\, dx$ বা $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$. দিয়ে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

---

* দুটি বক্র পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করবে যদি তাদের ছেদবিন্দুতে বক্র দুটির উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়।

x এর সঙ্গে তুলনায় $dx = \Delta x$ অপেক্ষাকৃতভাবে ক্ষুদ্র, Δy হল dy এর একটি যথার্থ আসন্ন মান এবং আমরা এটিকে $dy \approx \Delta y$. দিয়ে প্রকাশ করি।

$\Delta x, \Delta y$, dx এবং dy এর জ্যামিতিক তাৎপর্য বোঝার জন্য চিত্র 6.8 দেখো।

দ্রষ্টব্য উপরিউক্ত আলোচনা ও চিত্র 6.8 এর পরিপ্রেক্ষিতে, আমরা লক্ষ করি যে অধীন চলের অবকল এটির ক্ষুদ্র বৃদ্ধির সমান হয় না পক্ষান্তরে স্বাধীন চলের অবকল এটির ক্ষুদ্র বৃদ্ধির সমান হয়।

উদাহরণ 21 অবকলের সাহায্যে $\sqrt{36.6}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, $y = \sqrt{x}$, $x = 36$ এবং $\Delta x = 0.6$। তাহলে,

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{36.6} - \sqrt{36} = \sqrt{36.6} - 6$$

বা, $\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$

আবার, dy প্রায় Δy এর সমান এবং এটিকে নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) = \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6) = 0.05 \qquad (\text{যেহেতু } y = \sqrt{x})$$

সুতরাং, $\sqrt{36.6}$ এর আসন্ন মান হল $6 + 0.05 = 6.05$.

উদাহরণ 22 অবকলের সাহায্যে $(25)^{\frac{1}{3}}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, $y = x^{\frac{1}{3}}$ $x = 27$ এবং $\Delta x = -2$ তাহলে,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

বা $(25)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$

আবার, dy প্রায় Δy এর সমান এবং এটিকে নিম্নের আকারে লেখা হয়

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad (\text{যেহেতু } y = x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2) = \frac{-2}{27} = -0.074$$

সুতরাং, $(25)^{\frac{1}{3}}$ এর আসন্ন মান হল

$$3 + (-0.074) = 2.926$$

উদাহরণ 23 $f(3.02)$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$।

সমাধান ধরা যাক $x = 3$ এবং $\Delta x = 0.02$ তাহলে

$$f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

লক্ষ করো যে $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ সুতরাং,

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$$\approx f(x) + f'(x)\,\Delta x \qquad (\text{ যেহেতু } dx = \Delta x)$$

বা $$f(3.02) \approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\,\Delta x$$

$$= (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)\,(0.02) \quad (\text{ যেহেতু } x = 3, \Delta x = 0.02)$$

$$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\,(0.02)$$

$$= 45 + 0.46 = 45.46$$

সুতরাং, $f(3.02)$ এর আসন্ন মান হল 45.46 ।

উদাহরণ 24 x মিটার বাহু বিশিষ্ট একটি ঘনকের আয়তনের আনুমানিক পরিবর্তন নির্ণয় করো যখন এর বাহু 2% বৃদ্ধি পেয়েছে।

সমাধান লক্ষ করো যে

$$V = x^3$$

বা $$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\,\Delta x$$

$$= (3x^2)\,(0.02x) = 0.06x^3 \text{ মিটার}^3 \,(\text{ যেহেতু } x \text{ এর } 2\% \text{ হল } 0.02x)$$

সুতরাং, আয়তনের আনুমানিক পরিবর্তন হল $0.06\,x^3$ মিটার^3 ।

উদাহরণ 25 যদি 0.03 সেমি ত্রুটিযুক্ত একটি গোলকের ব্যাসার্ধের পরিমাপ 9 সেমি হয়, তবে তার আয়তন গণনায় আনুমানিক ত্রুটি নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক, গোলকের ব্যাসার্ধ r এবং উহার ব্যাসার্ধ পরিমাপে ত্রুটি হল Δr । তাহলে $r = 9$ সেমি এবং $\Delta r = 0.03$সেমি আবার গোলকের আয়তন V কে লেখা হয়

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

বা $$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

সুতরাং, $$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$$= 4\pi(9)^2\ (0.03) = 9.72\pi \text{ সেমি}^3$$

সুতরাং, গোলকের আয়তন গণনায় আনুমানিক ত্রুটি হল 9.72π সেমি^{3} ।

অনুশীলনী 6.4

1. অবকলের সাহায্যে, নিম্নলিখিত প্রতিটির, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত, আসন্ন মান নির্ণয় করো।

(i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

(iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

(vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

(x) $(401)^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

(xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. $f(2.01)$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ ।

3. $f(5.001)$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$ ।

4. x মিটার বাহু বিশিষ্ট একটি ঘনকের আয়তন V এর আনুমানিক পরিবর্তন নির্ণয় করো, যখন তার বাহুর বৃদ্ধি 1% ।

5. x মিটার বাহু বিশিষ্ট একটি ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের আনুমানিক পরিবর্তন নির্ণয় করো, যখন তার বাহু 1% হ্রাস পায়।

6. যদি 0.02 মিটার ত্রুটিযুক্ত একটি গোলকের ব্যাসার্ধের পরিমাপ 7 মিটার হয়, তবে তার আয়তনের আসন্ন ত্রুটি নির্ণয় করো।

7. যদি 0.03 মিটার ত্রুটিযুক্ত একটি গোলকের ব্যাসার্ধের পরিমাপ 9 মিটার হয়, তবে তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল গণনায় আসন্ন ত্রুটি নির্ণয় করো।

8. যদি $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$, তবে $f(3.02)$ এর আসন্ন মান হল

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9. x মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি ঘনকের বাহুর বৃদ্ধি 3% হলে আয়তনের আনুমানিক পরিবর্তন

(A) $0.06\ x^3$ মিটার^3 (B) $0.6\ x^3$ মিটার^3 (C)$0.09\ x^3$ মিটার^3 (D) $0.9\ x^3$ মিটার^3

6.6 চরম ও অবম মান (Maxima and Minima)

এই অনুচ্ছেদে, আমরা বিভিন্ন অপেক্ষকের চরম ও অবম মান নির্ণয়ে অন্তরকলজের ধারণার প্রয়োগ করব। আসলে, আমরা একটি অপেক্ষকের লেখচিত্রের 'সন্ধি বিন্দুগুলো' ('turning points') নির্ণয় করব এবং এছাড়া এই বিন্দুগুলো খুঁজে বের করবো যেগুলোতে লেখচিত্র স্থানীয়ভাবে *(locally)* তার সর্বোচ্চ (অথবা সর্বনিম্নে) পৌঁছেছে।

কোনো প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্রের নকশা আঁকায় এধরনের বিন্দুগুলোর জ্ঞান থাকা খুবই উপযোগী। অধিকন্তু, আমরা কোনো অপেক্ষকের পরম সর্বোচ্চ ও পরম সর্বনিম্ন মান ও নির্ণয় করব যেগুলো অনেক ব্যবহারিক সমস্যার সমাধানের জন্য প্রয়োজনীয়।

চলো, আমরা দৈনন্দিন জীবনের নিম্নলিখিত সমস্যাগুলো বিবেচনা করি।

(i) কমলা গাছের উদ্যান (grove) থেকে প্রাপ্ত লাভকে $P(x) = ax + bx^2$ যেখানে a,b ধ্রুবক এবং প্রতি একর জমিতে (1 একর = 4840 বর্গগজ) কমলা গাছের সংখ্যা হল x । তাহলে, প্রতি একর জমিতে কয়টি গাছ লাগালে লাভ সর্বোচ্চ হবে?

(ii) একটি বল, 60 মিটার উঁচু একটি অট্টালিকা থেকে বাতাসে ছুঁড়ে ফেলা হলে, এটি $h(x) = 60 + x - \dfrac{x^2}{60}$ পথ বরাবর গমন করে, যেখানে x হল অট্টালিকা থেকে অনুভূমিক দূরত্ব এবং $h(x)$ হল বলের উচ্চতা। বলটি সর্বোচ্চ কত উচ্চতায় পৌঁছবে?

(iii) শত্রুপক্ষের একটি অ্যাপাচি হেলিকপ্টার যে পথ বরাবর উড়ছে তাকে $f(x) = x^2 + 7$ বক্ররেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একজন সৈনিক, যিনি (1, 2) বিন্দুতে অবস্থিত, তিনি হেলিকপ্টারটিকে গুলি করতে চায়, যখন হেলিকপ্টারটি তাঁর থেকে নিকটতম দূরত্বে অবস্থিত হয়। নিকটতম দূরত্ব কত?

উপরিউক্ত প্রতিটি সমস্যায়, সাধারণ কিছু আছে, অর্থাৎ, আমরা প্রদত্ত প্রতিটি অপেক্ষকের চরম অথবা অবম মানগুলো নির্ণয় করতে চাই। এধরনের সমস্যাগুলো মোকাবেলা করার জন্য, প্রচলিতভাবে আমরা প্রথমে কোনো অপেক্ষকের চরম অথবা অবম মানগুলো, স্থানীয় চরম ও অবম বিন্দুগুলো এবং এধরনের বিন্দুগুলো নির্ধারণের জন্য পরীক্ষা বিবৃত করব।

সংজ্ঞা 3 ধরা যাক কোনো অপেক্ষক f একটি অন্তরাল I-তে সংজ্ঞাত। তাহলে

(a) I-তে f এর *চরম মান* আছে বলা হবে, যদি এমন একটি বিন্দু $c \in I$ এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c) > f(x)$ হয়, সকল $x \in I$ এর জন্য।

তাহলে, $f(c)$ সংখ্যাটিকে I-তে f এর চরম মান বলা হয় এবং c বিন্দুকে বলা হয় I -তে f এর *চরম মানের বিন্দু*।

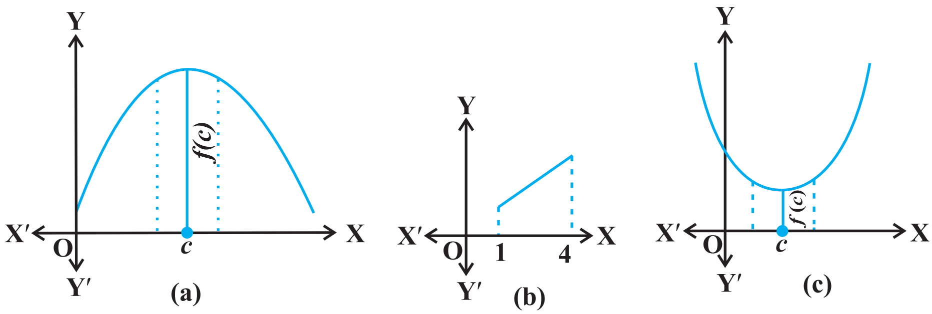
(b) I-তে f এর অবম মান আছে বলা হবে, যদি এমন একটি বিন্দু $c \in$ I এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c) < f(x)$ হয়, সকল $x \in$ I এর জন্য।

এক্ষেত্রে, $f(c)$ সংখ্যাটিকে I-তে f এর অবম মান বলা হয় এবং c বিন্দুকে বলা হয় I-তে f এর *অবম মানের বিন্দু।*

(c) I-তে f এর প্রান্তিক মান (extreme value) আছে বলা হবে, যদি I-তে এমন একটি বিন্দু c এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c)$ হল I -তে f এর হয় চরম মান অথবা অবম মান।

এক্ষেত্রে, $f(c)$ সংখ্যাটিকে I-তে f এর প্রান্তিক মান বলা হয় এবং c বিন্দুকে বলা হয় *প্রান্তিক বিন্দু* (extreme point)।

মন্তব্য চিত্র 6.9 এর (a), (b) ও (c) তে, আমরা কিছু বিশেষ প্রকারের অপেক্ষকসমূহের লেখচিত্রগুলো প্রদর্শন করেছি যা আমাদের ওই অপেক্ষকগুলোর কোনো বিন্দুতে চরম ও অবম মান নির্ণয়ে সাহায্য করবে। প্রকৃতপক্ষে, লেখচিত্রের মাধ্যমে, আমরা এমন কি যে বিন্দুতে কোনো একটি অপেক্ষক অবকলনযোগ্য নয় সেই বিন্দুতেও ওই অপেক্ষকের চরম/অবম মান নির্ণয় করতে পারি।(উদাহরণ 27)।



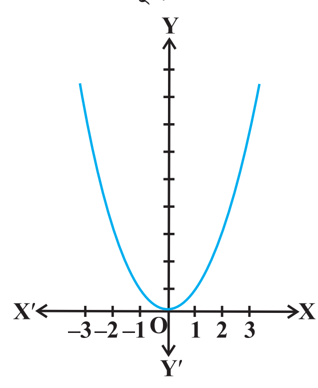
চিত্র 6.9

উদাহরণ 26 $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ দ্বারা প্রদত্ত f অপেক্ষকটির চরম ও অবম মানসমূহ, যদি থাকে তবে নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্র (চিত্র 6.10) থেকে, আমরা পাই $f(x) = 0$ যদি $x = 0$ হয়।

এছাড়া, $f(x) \geq 0$ সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য।

সুতরাং, f এর অবম মান হল 0 এবং f এর অবম মানের বিন্দু হল $x = 0$ । অধিকন্তু, লেখচিত্র থেকে এটি লক্ষ করা যাচ্ছে যে অপেক্ষক f এর কোনো চরম মান নেই এবং অত:পর $\mathbf{R}$ - এ, f এর কোনো চরম মানের বিন্দু নেই।



চিত্র 6.10

> **দ্রষ্টব্য** যদি আমরা f এর সংজ্ঞার অঞ্চলকে শুধুমাত্র $[-2, 1]$-তে সীমাবদ্ধ রাখি তবে $x = -2$ বিন্দুতে f এর চরম মান $(-2)^2 = 4$ হবে।

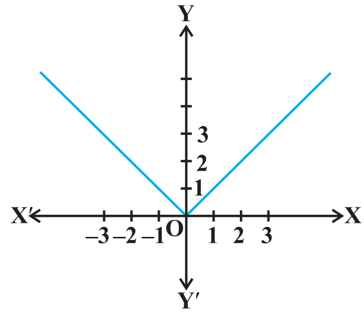
উদাহরণ 27 f অপেক্ষকের জন্য যা দেওয়া আছে $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$, যদি এর চরম ও অবম মান থাকে, তবে তা নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্র (চিত্র 6.11) থেকে, এটি লক্ষ করা যায় যে

$f(x) \geq 0$, সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য এবং $f(x) = 0$ হবে

যদি $x = 0$ হয়।

সুতরাং, অপেক্ষক f এর অবম মান হল 0 এবং f এর অবম মানের বিন্দু হল $x = 0$ । এছাড়া, লেখচিত্রটি স্পষ্টভাবে সূচিত করছে যে, $\mathbf{R}$ -এ, f এর কোনো চরম মান নেই এবং অত:পর কোনো চরম মানের বিন্দু নেই।

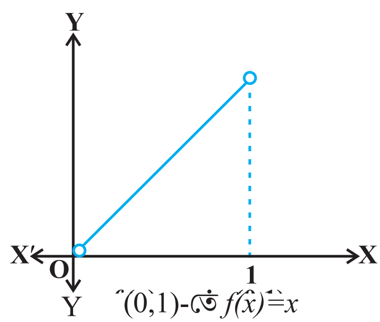


চিত্র 6.11

> **দ্রষ্টব্য**
>
> (i) যদি আমরা f এর ক্ষেত্র বা সংজ্ঞার অঞ্চলকে শুধুমাত্র $[-2, 1]$-তে সীমাবদ্ধ রাখি, তবে f এর চরম মান $|-2| = 2$ হবে।
>
> (ii) তোমারা লক্ষ করো যে উদাহরণ 27-তে অপেক্ষক f, $x = 0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য নয়।

উদাহরণ 28 প্রদত্ত অপেক্ষক $f(x) = x, x \in (0, 1)$ এর চরম ও অবম মানগুলো, যদি থাকে, নির্ণয় করো।

সমাধান প্রদত্ত অপেক্ষকটি $(0, 1)$ অন্তরালে একটি বর্ধিষ্ণু (যথার্থ) অপেক্ষক। আবার অপেক্ষক f এর লেখচিত্র (চিত্র 6.12) থেকে, এটি লক্ষ করা যাচ্ছে যে, ডান দিক থেকে 0 এর কাছাকাছি বিন্দুর জন্য এটির অবম মান এবং বাম দিক থেকে 1 এর কাছাকাছি বিন্দুর জন্য এটির চরম মান থাকবে। এধরনের বিন্দুগুলো কি বাস্তবে পাওয়া যায়? অবশ্যই না। এধরনের বিন্দুগুলো সনাক্ত করা সম্ভবপর নয়। প্রকৃতপক্ষে, যদি 0 এর কাছাকাছি একটি বিন্দু x_0 হয়, তবে আমরা খুঁজে পাই $\frac{x_0}{2} < x_0$, সকল $x_0 \in (0,1)$ এর জন্য। এছাড়া যদি 1 এর কাছাকাছি একটি বিন্দু x_1 হয়, তবে $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$, সকল $x_1 \in (0,1)$ এর জন্য।



চিত্র 6.12

সুতরাং, (0,1) অন্তরালে প্রদত্ত অপেক্ষকের চরম মান বা অবম মান এদের কোনোটাই নেই।

মন্তব্য পাঠকরা উদাহরণ 28-এ পর্যবেক্ষণ করতে পারেন যে, যদি আমরা f এর সংজ্ঞার অঞ্চলে 0 ও 1 বিন্দু দুটি অন্তর্ভুক্ত করি, অর্থাৎ যদি আমরা f এর সংজ্ঞার অঞ্চলকে [0,1]-তে বর্ধিত করি, তবে অপেক্ষক f এর $x = 0$ বিন্দুতে অবম মান এবং $x = 1$ বিন্দুতে চরম মান থাকবে। প্রকৃতপক্ষে, আমরা নিম্নলিখিত ফলাফলগুলো পাই (বর্তমান পাঠ্যে এই ফলাফলগুলো প্রমাণের কোনো সুযোগ নেই)।

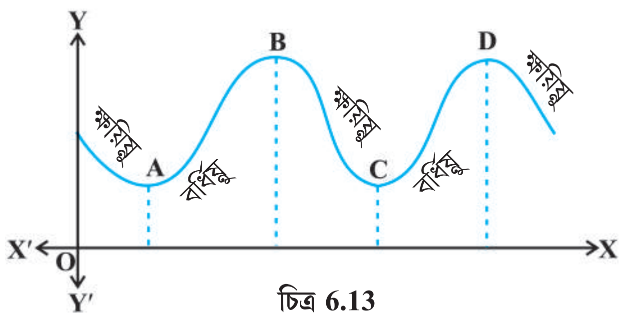
প্রতিটি একদিষ্ট *(monotonic)* অপেক্ষকের চরম/অবম মান তার সংজ্ঞার অঞ্চলের প্রান্তিক বিন্দুসমূহে অর্জন করবে।

আরও সাধারণ ফলাফল হল

কোনো বদ্ধ অন্তরালে প্রত্যেক সন্তত অপেক্ষকের একটি চরম ও একটি অবম মান আছে।

দ্রষ্টব্য কোনো একটি I-তে অন্তরাল একদিষ্ট অপেক্ষক f বলতে আমরা বুঝব যে I-তে অপেক্ষক f হয় বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু হবে।

একটি বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষকের চরম ও অবম মান সমূহ এই অনুচ্ছেদের পরবর্তীতে আলোচনা করা হবে।



চিত্র 6.13

চলো এখন আমরা একটি অপেক্ষকের লেখচিত্র, যা চিত্র 6.13-তে দেখানো হয়েছে, নিয়ে পরীক্ষা করি। লক্ষ্য করো যে লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত A, B, C ও D বিন্দুগুলোতে, অপেক্ষকের প্রকৃতি ক্ষয়িষ্ণু থেকে বর্ধিষ্ণু অথবা বিপরীতক্রমে পরিবর্তিত হচ্ছে। এই বিন্দুগুলোকে প্রদত্ত অপেক্ষকের সন্ধি বিন্দুসমূহ বলা হয়। অধিকন্তু, লক্ষ করো যে সন্ধি বিন্দুগুলোতে, লেখচিত্রে কিছু ছোটো পাহাড় অথবা কিছু ছোটো উপত্যকা রয়েছে। মোটামুটিভাবে বলতে গেলে A ও C বিন্দুর প্রতিটি, যেগুলো তাদের নিজ নিজ উপত্যকার নিম্নাংশে অবস্থিত, এর কিছু সামীপ্যে (অন্তরালে) অপেক্ষকটির অবম মান আছে। অনুরূপভাবে, B ও D বিন্দুর প্রতিটি যেগুলো তাদের নিজ নিজ পাহাড়ের শীর্ষে অবস্থিত, এর কিছু সামীপ্যে অপেক্ষকটির চরম মান আছে। এই কারণে অপেক্ষকের জন্য A ও C বিন্দুগুলোকে **স্থানীয় অবম মানের** (অথবা **আপেক্ষিক অবম মানের**) বিন্দু হিসেবে গণ্য করা হয় এবং অপরপক্ষে B ও D বিন্দুগুলোকে স্থানীয়

চরম মানের (অথবা আপেক্ষিক চরম মানের) বিন্দু হিসেবে গণ্য করা হয়। এজন্য, অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান ও স্থানীয় অবম মানকে যথাক্রমে অপেক্ষকের স্থানীয় চরম ও স্থানীয় অবম হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

আমরা এখন বিধিমত নিম্নলিখিত সংজ্ঞাগুলো আলোচনা করব।

সংজ্ঞা 4 ধরা যাক f হল একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং c হল f এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভূক্ত একটি বিন্দু। তাহলে

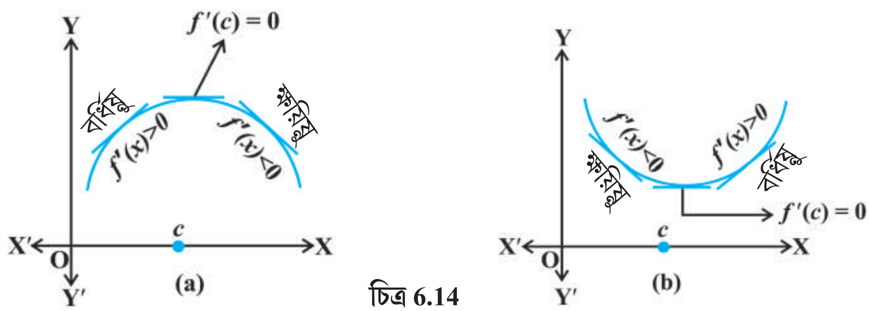
(a) c -কে বলা হবে একটি স্থানীয় চরম *(local maxima)* বিন্দু যদি এমন একটি $h > 0$ এর অস্তিত্ব থাকে যাতে সকল $x \in (c - h, c + h)$-এর জন্য $(x \neq c)$ $f(c) \geq f(x)$ হয়।

$f(c)$-কে f এর স্থানীয় চরম মান *(local maximum value)* বলা হয়।

(b) c -কে বলা হবে একটি স্থানীয় অবম *(local minima)* বিন্দু যদি এমন একটি $h > 0$ এর অস্তিত্ব থাকে যাতে সকল $x \in (c - h, c + h)$-এর জন্য $(x \neq c)$ $f(c) \leq f(x)$ হয়।

$f(c)$ -কে f এর স্থানীয় অবম মান *(local minimum value)* বলা হয়।

জ্যামিতিকভাবে, উপরোক্ত সংজ্ঞা থেকে বলা যায় যে, $x = c$, f -এর একটি স্থানীয় চরম বিন্দু হয় তবে c- এর সামীপ্যে f- এর লেখচিত্র চিত্র 6.14(a)-এর মত দেখাবে। লক্ষ করো যে f হল $(c - h, c)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু (অর্থাৎ $f'(x) > 0$) অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু (অর্থাৎ $f'(x) < 0$) এবং $(c, c + h)$ অপেক্ষক। এটি ইঙ্গিত দেয় যে $f'(c)$ অবশ্যই শূন্য হবে।



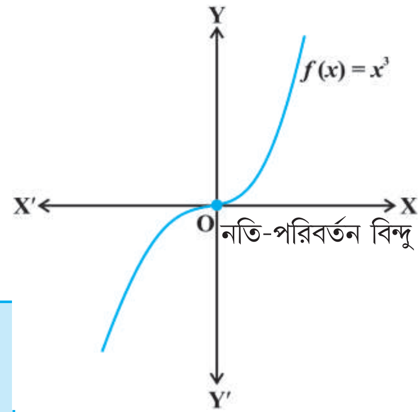
চিত্র 6.14

অনুরূপে, যদি $x = c$, f -এর একটি স্থানীয় অবম বিন্দু হয় তবে, c -এর সামীপ্যে f -এর লেখচিত্র দেখতে চিত্র 6.14(b) -এর মত হবে। এখানে, f হল $(c - h, c)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু (অর্থাৎ $f'(x) < 0$) এবং $(c, c + h)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু (অর্থাৎ $f'(x) > 0$) অপেক্ষক। এটি পুনরায় ইঙ্গিত দেয় যে $f'(c)$ অবশ্যই শূন্য হবে।

উপরোক্ত আলোচনা আমাদেরকে নিম্নলিখিত উপপাদ্যে (প্রমাণ ব্যতীত) পৌঁছাতে সাহায্য করে।

উপপাদ্য 2 ধরা যাক f হল মুক্ত অন্তরাল I-তে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক। মনে করো, c হল I-এর অন্তর্ভূক্ত যে-কোনো একটি বিন্দু। যদি $x = c$ -তে f এর একটি স্থানীয় চরম অথবা একটি স্থানীয় অবম মান থাকে তবে, হয় $f'(c) = 0$ অথবা c -তে f অবকলনযোগ্য নয়।

মন্তব্য উপরোক্ত উপপাদ্যটির বিপরীত উপপাদ্য সর্বদা সত্য নাও হতে পারে, অর্থাৎ, একটি বিন্দু যেখানে অপেক্ষকটির অন্তরকলজ শূন্য, সেই বিন্দুটি স্থানীয় চরম বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম বিন্দু নাও হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, যদি $f(x) = x^3$ হয়, তবে $f'(x) = 3x^2$ এবং তাই $f'(0) = 0$ । কিন্তু $x = 0$ বিন্দুটি স্থানীয় চরম বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম বিন্দুর কোনোটিই নয় (চিত্র 6.15)।



চিত্র 6.15

দ্রষ্টব্য f এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভূক্ত একটি বিন্দু c -কে f এর সংকট বিন্দু *(critical point)* বলা হবে যদি ওই বিন্দুতে, হয় $f'(c) = 0$ অথবা f অবকলনযোগ্য না হয়। লক্ষ করো যে যদি c -তে f সন্তত এবং $f'(c) = 0$ হয়, তবে এমন একটি $h > 0$ এর অস্তিত্ব আছে যেখানে $(c - h, c + h)$ অন্তরালে f অবকলনযোগ্য হবে।

আমরা এখন শুধুমাত্র প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ ব্যবহার করে, স্থানীয় চরম অথবা স্থানীয় অবম বিন্দুসমূহ নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত কার্যকরী নিয়ম আলোচনা করব।

উপপাদ্য 3 (প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা) *(First derivativy test)* ধরা যাক f হল মুক্ত অন্তরাল I-তে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক। মনে করো I-এর অর্ন্তভুক্ত একটি সংকট বিন্দু c-তে f সন্তত। তাহলে,

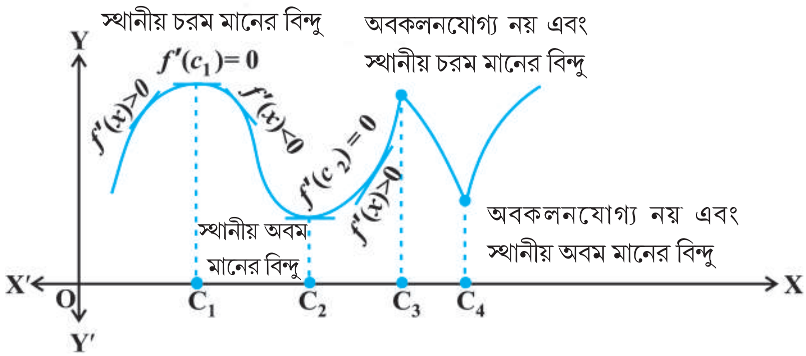
(i) যখন x এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক-এ পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ বাম দিক থেকে c-এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) > 0$ হয়, এবং ডানদিক থেকে c-এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) < 0$ হয়, তবে c-কে বলা হবে একটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু।

(ii) যখন x এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c-কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মক-এ পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ বামদিক থেকে c-এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) < 0$ হয়, এবং ডানদিক থেকে c-এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) > 0$ হয়, তবে c-কে বলা হবে একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু।

(iii) যখন x এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c-কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্নের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে c-বিন্দু স্থানীয় চরম মানের বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দুর কোনটাই হবে না। প্রকৃতপক্ষে, এরকম বিন্দুকে নতি-পরিবর্তন বিন্দু *(point of infletion)* বলে (চিত্র 6.15)।

> **দ্রষ্টব্য** যদি c , f -এর একটি স্থানীয় চরম বিন্দু হয়, তবে $f(c)$-কে f -এর একটি স্থানীয় চরম মান বলে। অনুরূপে, c যদি f -এর একটি স্থানীয় অবম বিন্দু হয়, তবে $f(c)$-কে f -এর একটি স্থানীয় অবম মান বলে।

চিত্র 6.15 এবং 6.16, জ্যামিতিকভাবে উপপাদ্য 3-কে ব্যাখ্যা করে।



চিত্র 6.16

উদাহরণ 29 অপেক্ষক f এর সকল স্থানীয় চরম মান ও স্থানীয় অবম মানের বিন্দুগুলো নির্ণয় করো, যেখানে f নিম্নরূপে প্রদত্ত

$$f(x) = x^3 - 3x + 3.$$

সমাধান আমরা জানি,

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

বা $$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

অর্থাৎ, $x = 1$ এবং $x = -1$ বিন্দুতে $f'(x) = 0$

সুতরাং, $x = \pm 1$-ই হল কেবলমাত্র সংকট বিন্দুসমূহ যেগুলো সম্ভবত f -এর স্থানীয় চরম অথবা স্থানীয় অবম বিন্দু হতে পারে। চলো আমরা প্রথমে $x = 1$ বিন্দুটি পরীক্ষা করে দেখি।

লক্ষ করো যে 1 এর ডানদিক থেকে এবং 1 এর কাছাকাছি মানসমূহের জন্য $f'(x) > 0$ এবং 1 এর বামদিক থেকে এবং 1এর কাছাকাছি মানসমূহের জন্য $f'(x) < 0$ । সুতরাং, প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে আমরা বলতে পারি, $x = 1$ হল একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু এবং স্থানীয় অবম মানটি হল $f(1) = 1$ । আবার, $x = -1$ এর ক্ষেত্রে, -1 এর বামদিক থেকে এবং -1 এর নিকট থেকে নিকটতর মান সমূহের জন্য $f'(x) > 0$ এবং -1 এর ডানদিক থেকে এবং -1 এর নিকট থেকে নিকটতর মান সমূহের জন্য $f'(x) < 0$ হবে। সুতরাং, প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে, আমরা বলতে পারি, $x = -1$ হল একটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু এবং স্থানীয় চরম মান হল $f(-1) = 5$ ।

x -এর মান		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ এর চিহ্ন
1 এর কাছাকাছি	ডান দিক থেকে ধরো 1.1 ইত্যাদি	>0
	বাম দিক থেকে ধরো 0.9 ইত্যাদি	<0
–1 এর কাছাকাছি	ডান দিক থেকে ধরো –0.9 ইত্যাদি	<0
	বাম দিক থেকে ধরো 1.1 ইত্যাদি	>0

উদাহরণ 30 f -এর স্থানীয় চরম মান এবং স্থানীয় অবম মানের বিন্দুসমূহ নির্ণয় করো, যেখানে

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

সমাধান দেওয়া আছে,

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

বা $$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2$$

বা $$x = 1 \text{ বিন্দুতে } f'(x) = 0$$

সুতরাং $x = 1$ হল f-এর কেবলমাত্র সংকটবিন্দু। আমরা এখন এই বিন্দুটিকে f-এর স্থানীয় চরম মান অথবা স্থানীয় অবম মান নির্ণয়ের জন্য পরীক্ষা করব। লক্ষ করো যে, সকল $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য $f'(x) \geq 0$, এবং বিশেষ করে বাম দিক ও ডানদিক উভয় থেকে 1 এর কাছাকাছি মানসমূহের জন্য $f'(x) > 0$ । অতএব, প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে আমরা বলতে পারি, $x = 1$ বিন্দুটি স্থানীয় চরম মানের অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দুর কোনোটিই নয়। সুতরাং $x = 1$ হল একটি নতি-পরিবর্তন বিন্দু।

মন্তব্য উদাহরণ 30 -এ এটি লক্ষ করা যায় যে, যেহেতু **R** -এ $f'(x)$ এর চিহ্নের কোনো পরিবর্তন হয় না, তাই f-এর কোনো সন্ধিবিন্দু নেই এবং তাই এর স্থানীয় চরম মানের অথবা স্থানীয় অবম মানের কোনো বিন্দু নেই।

আমরা এখন কোনো একটি প্রদত্ত অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান এবং স্থানীয় অবম মান যাচাই করার জন্য অপর একটি পরীক্ষা নিম্নে আলোচনা করব।

উপপাদ্য 4 দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা *(Second derivative test)* ধরা যাক, f -হল কোনো একটি অন্তরাল I-তে সংজ্ঞাত একটি অপেক্ষক এবং $c \in$ I । আরও ধরাযাক, f হল c-তে দুইবার অবকলনযোগ্য *(twice differentiable)*। তাহলে,

(i) $x = c$ হবে একটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) < 0$ হয়।

$f(c)$ হল f-এর স্থানীয় চরম মান।

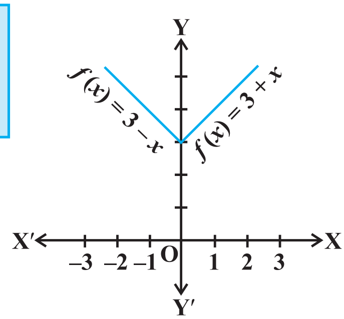
(ii) $x = c$ হবে একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) > 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, $f(c)$ হল f-এর স্থানীয় অবম মান।

(iii) পরীক্ষাটি ব্যর্থ বলে বিবেচিত হবে যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, আমরা প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাতে ফিরে যাব এবং পরীক্ষা করে দেখব c-বিন্দুটি স্থানীয় চরম মানের অথবা স্থানীয় অবম মানের অথবা নতি-পরিবর্তনের বিন্দু কিনা।

> **দ্রষ্টব্য** যেহেতু c -তে f দুইবার অবকলনযোগ্য, তাই এটির দ্বারা আমরা বুঝি c -তে f -এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব আছে।



চিত্র 6.17

উদাহরণ 31 f অপেক্ষকের স্থানীয় অবমমান নির্ণয় করো, যেখানে $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$।

সমাধান লক্ষ করো যে, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $x = 0$ তে অবকলনযোগ্য নয়। অতএব, এখানে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাটি ব্যর্থ বলে বিবেচিত হবে। চলো আমরা প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাটি নিয়ে চেষ্টা করি। লক্ষ করো 0 হল f এর একটি সংকট বিন্দু। এখন 0 এর বামদিকে, $f(x) = 3 - x$ এবং তাই $f'(x) = -1 < 0$ । এছাড়া, 0 এর ডানদিকে, $f(x) = 3 + x$ এবং তাই $f'(x) = 1 > 0$। সুতরাং, প্রথম ক্রমের পরীক্ষার সাহায্যে, $x = 0$ হল f -এর একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু এবং $f(0)=3$ হল f -এর স্থানীয় অবম মান।

উদাহরণ 32 f অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান ও স্থানীয় অবম মানগুলো নির্ণয় করো যেখানে

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

সমাধান আমরা জানি

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

বা,
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x-1)(x+2)$$

বা,
$$x = 0, x = 1 \text{ এবং } x = -2\text{-তে } f'(x) = 0$$

এখন,
$$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 2)$$

বা,
$$\begin{cases} f''(0) = -24 < 0 \\ f''(1) = 36 > 0 \\ f''(-2) = 72 > 0 \end{cases}$$

সুতরাং, দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে $x = 0$ হল f এর একটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু এবং $x = 0$ -তে f -এর স্থানীয় চরম মান হল $f(0) = 12$ । আবার $x = 1$ ও $x = -2$ হল f এর স্থানীয় অবম মানের বিন্দুসমূহ এবং $x = -1$ ও -2 বিন্দুসমূহে f -এর স্থানীয় অবম মানগুলো হল যথাক্রমে $f(1) = 7$ এবং $f(-2) = -20$ ।

উদাহরণ 33 f-অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান ও স্থানীয় অবম মানের সমস্ত বিন্দুসমূহ নির্ণয় করো যেখানে

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5.$$

সমাধান আমরা জানি

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

বা $$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

এখন $f'(x) = 0$ থেকে আমরা পাই $x = 1$ । এছাড়া $f''(1) = 0$ । সুতরাং, এইক্ষেত্রে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাটি ব্যর্থ বলে বিবেচিত হবে। অতএব, আমাদের প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষায় ফিরে যেতে হবে।

আমরা ইতোমধ্যে (উদাহরণ 30-এ) দেখেছি যে, প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা ব্যবহার করে, $x = 1$ বিন্দুটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দুর কোনোটিই নয় এবং তাই এটি একটি নতি-পরিবর্তন বিন্দু।

উদাহরণ 34 দুটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করো যাদের যোগফল 15 এবং বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম।

সমাধান ধরা যাক যে-কোনো একটি সংখ্যা হল x । তাহলে অপর সংখ্যাটি হবে $(15 - x)$ । আবার, মনে করো $S(x)$, এই সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টিকে প্রকাশ করে। তাহলে,

$$S(x) = x^2 + (15 - x)^2 = 2x^2 - 30x + 225$$

বা $$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

এখন $S'(x) = 0$ থেকে আমরা পাই $x = \dfrac{15}{2}$ । এছাড়া $S''\left(\dfrac{15}{2}\right) = 4 > 0$ । সুতরাং, দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে, $x = \dfrac{15}{2}$ হল S এর একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু। সুতরাং, সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হবে যখন সংখ্যাগুলো $\dfrac{15}{2}$ এবং $15 - \dfrac{15}{2} = \dfrac{15}{2}$ হয়।

মন্তব্য উদাহরণ 34-এর অনুরূপে অগ্রসর হয়ে আমরা এটি প্রমাণ করতে পারি যে, দুটি ধনাত্মক সংখ্যা, যাদের যোগফল k এবং যাদের বর্গের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম, হল $\dfrac{k}{2}$ এবং $\dfrac{k}{2}$ ।

উদাহরণ 35 অধিবৃত্ত $y = x^2$ থেকে $(0, c)$ বিন্দুটির নিকটতম *(shortest)* দূরত্ব নির্ণয় করো, যেখানে $\frac{1}{2} \le c \le 5$.

সমাধান ধরা যাক অধিবৃত্ত $y = x^2$ এর ওপর অবস্থিত যে-কোনো একটি বিন্দু হল (h, k) । আবার মনে করি, (h, k) ও $(0, c)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে নির্ণেয় দূরত্ব D। তাহলে,

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \quad \text{... (1)}$$

যেহেতু (h, k) বিন্দুটি অধিবৃত্ত $y = x^2$ এর ওপর অবস্থিত, তাই আমরা পাই $k = h^2$

সুতরাং (1) থেকে পাই

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

বা
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{2\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

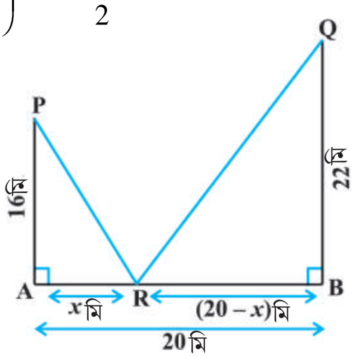
এখন
$$D'(k) = 0 \text{ থেকে পাই } k = \frac{2c-1}{2}$$

লক্ষ করো যে, যখন $k < \frac{2c-1}{2}$, তখন $2(k-c)+1 < 0$, অর্থাৎ $D'(k) < 0$। আবার যখন $k > \frac{2c-1}{2}$, তখন $D'(k) > 0$। সুতরাং, প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে $k = \frac{2c-1}{2}$ বিন্দুতে D ক্ষুদ্রতম। সুতরাং, নির্ণেয় নিকটতম দূরত্ব নিম্নে দেওয়া হল

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$$

> **দ্রষ্টব্য** উদাহরণ 35 - এ পাঠকরা লক্ষ করো যে, আমরা দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার পরিবর্তে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাটি ব্যবহার করেছি কেননা এক্ষেত্রে প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ পরীক্ষাটি সহজ এবং সংক্ষিপ্ত।

উদাহরণ 36 ধরা যাক AP ও BQ হল যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে লম্বভাবে অবস্থিত দুটি খুঁটি। যদি AP = 16 মিটার, BQ = 22 মিটার এবং AB = 20 মিটার হয়, তবে A বিন্দু থেকে AB এর ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু R এর দূরত্ব এমনভাবে নির্ণয় করো যাতে $RP^2 + RQ^2$ সর্বনিম্ন হয়।



চিত্র 6.18

সমাধান ধরা যাক AB এর ওপর একটি বিন্দু R এমনভাবে অবস্থিত যেখানে AR = x মিটার। তাহলে RB = $(20 - x)$ মিটার (যেহেতু AB = 20 মিটার) । চিত্র 6.18 থেকে, আমরা পাই।

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

এবং
$$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

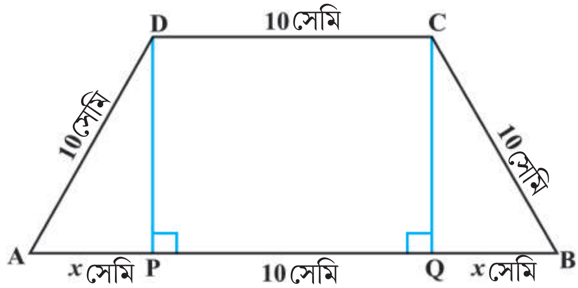
সুতরাং,
$$RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

মনে করি
$$S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140.$$

সুতরাং,
$$S'(x) = 4x - 40.$$

এখন, $S'(x) = 0$ থেকে পাই $x = 10$ । আবার $S''(x) = 4 > 0$, সকল x এর জন্য এবং তাই $S''(10) > 0$। সুতরাং, দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষার সাহায্যে, $x = 10$ হল S এর একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু। অতএব AB এর ওপর অবস্থিত A থেকে R এর দূরত্ব হল AR = x =10 মিটার।

উদাহরণ 37 যদি একটি ট্রাপিজিয়ামের ভূমি ছাড়া, অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সেমি হয়, তবে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যখন এটি বৃহত্তম।



চিত্র 6.19

সমাধান নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম যা চিত্র 6.19 এ প্রদত্ত। AB এর উপর DP ও CQ লম্বদ্বয় অঙ্কন করো। ধরা যাক AP = x সেমি। লক্ষ করো যে $\Delta APD \sim \Delta BQC$ । সুতরাং, QB = x সেমি। আবার পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে DP = QC = $\sqrt{100 - x^2}$ । A-কে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল হিসেবে ধরা যাক। তাহলে

$$A \equiv A(x) = \frac{1}{2}\,(\text{সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি})\ (\text{উচ্চতা})$$

$$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$= (x + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

বা
$$A'(x) = (x + 10)\frac{(-2x)}{2\sqrt{100 - x^2}} + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

এখন $A'(x) = 0$ থেকে পাই $2x^2 + 10x - 100 = 0$, অর্থাৎ $x = 5$ এবং $x = -10$ ।

যেহেতু x দিয়ে দূরত্ব বোঝানো হয়েছে, সুতরাং এটি ঋণাত্মক হতে পারে না!

তাই, $x = 5$ । এখন

$$A''(x) = \frac{\sqrt{100-x^2}(-4x-10) - (-2x^2-10x+100)\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 300x - 1000}{(100-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(সরলীকরণ করে)}$$

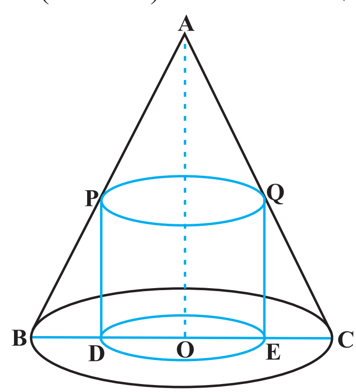
বা $$A''(5) = \frac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100-(5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

অতএব, $x = 5$-তে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে এবং এই বৃহত্তম ক্ষেত্রফল নিম্নে দেওয়া হল

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3} \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 38 প্রমাণ করো যে একটি প্রদত্ত শঙ্কুর অন্তর্লিখিত সর্বাধিক পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের ব্যাসার্ধ ওই প্রদত্ত শঙ্কুর ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

সমাধান ধরা যাক, $OC = r$ হল শঙ্কুর ব্যাসার্ধ এবং $OA = h$ হল তার উচ্চতা। আবার, ধরা যাক $OE = x$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ একটি প্রদত্ত শঙ্কুতে (চিত্র 6.20) অন্তর্লিখিত আছে। চোঙের উচ্চতা QE নিম্নে দেওয়া হল।



চিত্র 6.20

$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{যেহেতু } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

বা $$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

বা $$QE = \frac{h(r-x)}{r}$$

প্রদত্ত চোঙের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলকে S হিসেবে ধরা যাক।

তাহলে,

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

বা
$$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

এখন $S'(x)=0$ থেকে পাই $x=\dfrac{r}{2}$। যেহেতু $S''(x)<0$, সকল x এর জন্য, তবে $S''\left(\dfrac{r}{2}\right)<0$।

তাই, $x=\dfrac{r}{2}$ হল S এর একটি চরম মানের বিন্দু। সুতরাং, সর্বাধিক পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ যা একটি প্রদত্ত শঙ্কুতে অন্তর্লিখিত আছে, তার ব্যাসার্ধ ওই প্রদত্ত শঙ্কুর ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

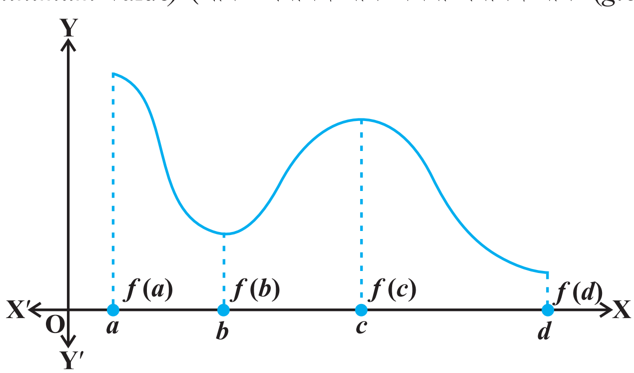
6.6.1 কোনো একটি বদ্ধ অন্তরালে কোনো একটি অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)

চলো আমরা একটি অপেক্ষক f যা নিম্নে প্রদত্ত বিবেচনা করি

$$f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$$

লক্ষ করো যে $(0, 1)$ অন্তরালে অপেক্ষকটি সন্তত এবং ওই অন্তরালে তার চরম অথবা অবম মানের কোনোটিই নেই। অধিকন্তু, আমরা এটা খেয়াল করতে পারি যে, অপেক্ষকটির এমনকি স্থানীয় চরম মান অথবা স্থানীয় অবম মানের কোনোটিই নেই।

যাইহোক, যদি আমরা f এর সংজ্ঞার অঞ্চলকে বদ্ধ অন্তরাল $[0, 1]$ -তে বর্ধিত করি, তবুও f এর কোনো স্থানীয় চরম (অবম) মানসমূহ থাকতে পারে না কিন্তু অবশ্যই এর চরম মান $3 = f(1)$ এবং অবম মান $2 = f(0)$ আছে। $x = 1$ বিন্দুতে f এর চরম মান 3-কে বলা হয় $[0, 1]$ অন্তরালে f এর পরম সর্বোচ্চ মান *(absolute maximum* value) (গরিষ্ঠ সর্বোচ্চ অথবা সর্বাধিক মান (*global maximum* or *greatest value*))। অনুরূপভাবে $x = 0$-তে f এর অবম মান 2 কে বলা হয় $[0, 1]$ অন্তরালে f এর পরম সর্বনিম্নমান *(absolute minimum* value*)* (গরিষ্ঠ সর্বনিম্ন মান অথবা সর্বনিম্ন মান (*global minimum* or *least value*))।



চিত্র 6.21

একটি সন্তত অপেক্ষক, যা একটি বদ্ধ অন্তরাল $[a, d]$ তে সংজ্ঞাত, তার লেখচিত্র, যা চিত্র 6.21-এ দেওয়া আছে, বিবেচনা করি। লক্ষ্য করো যে $x = b$ বিন্দুতে f এর স্থানীয় অবম মান আছে এবং স্থানীয় অবম মানটি হল $f(b)$ । আবার, $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির স্থানীয় চরম মানও আছে এবং স্থানীয় চরম মানটি হল $f(c)$ ।

এছাড়া, লেখচিত্র থেকে, এটা স্পষ্ট যে, f এর পরম সর্বোচ্চ মান $f(a)$ এবং পরম সর্বনিম্ন মান $f(d)$ আছে। অধিকন্তু, লক্ষ করো যে f এর পরম সর্বোচ্চ (সর্বনিম্ন) মান f এর স্থানীয় চরম (অবম) মান থেকে আলাদা।

আমরা এখন কোনো একটি বদ্ধ অন্তরাল I-তে, কোনো একটি অপেক্ষকের পরম সর্বোচ্চ ও পরম সর্বনিম্ন মানসমূহ সম্পর্কিত দুটি ফলাফল (প্রমাণ ছাড়া) বিবৃত করব।

উপপাদ্য 5 ধরা যাক কোনো কেটি অন্তরাল $I = [a, b]$-তে f একটি সন্তত অপেক্ষক। তাহলে f এর পরম সর্বোচ্চ মান থাকবে এবং f এই মানটি I-অন্তরালে কমপক্ষে একবার *(once)* অর্জন করবে। এছাড়া, f এর পরম সর্বনিম্ন মান থাকবে এবং f এই মানটি I-তে কমপক্ষে একবার অর্জন করবে।

উপপাদ্য 6 ধরা যাক কোনো একটি বদ্ধ অন্তরাল I-তে f একটি অবকলণযোগ্য অপেক্ষক এবং I-এর অভ্যন্তরে যে-কোনো একটি বিন্দু হল c তাহলে,

(i) $f'(c) = 0$ হয়, যদি f, c -তে এটির পরম সর্বোচ্চ মান অর্জন করে।

(ii) $f'(c) = 0$ হয়, যদি f, c -তে এটির পরম সর্বনিম্ন মান অর্জন করে।

উপরোক্ত ফলাফল অনুসারে, একটি প্রদত্ত বদ্ধ অন্তরাল $[a, b]$-তে কোনো একটি অপেক্ষকের পরম সর্বোচ্চ মান এবং /অথবা পরম সর্বনিম্ন মান বের করার জন্য আমরা নিম্নলিখিত কার্যকরী নিয়ম অবলম্বন করব।

কার্যকরী নিয়ম (Working Rule)

ধাপ 1: অন্তরালটিতে f -এর সকল সংকট বিন্দুসমূহ বের করো, অর্থাৎ এমন বিন্দুসমূহ x নির্ণয় করো যেখানে, হয় $f'(x) = 0$ অথবা f অবকলনযোগ্য নয়।

ধাপ 2: অন্তরালটির প্রান্তবিন্দুসমূহ নাও।

ধাপ 3: সকল বিন্দুসমূহ (যা ধাপ 1 এবং 2-তে উল্লেখিত) f -এর মান নির্ণয় করো।

ধাপ 4: ধাপ 3-তে f -এর নির্ণিত মানসমূহের মধ্যে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানগুলোকে চিহ্নিত করো। এই সর্বোচ্চ মানটি হবে f এর সর্বোচ্চ (বৃহত্তম) মান এবং সর্বনিম্ন মানটি হবে f -এর পরম সর্বনিম্ন (ক্ষুদ্রতম) মান।

উদাহরণ 39 [1, 5] অন্তরালে $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ দ্বারা প্রদত্ত f অপেক্ষকের পরম সর্বোচ্চ মান এবং পরম সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো।

সমাধান দেওয়া আছে

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

বা,
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-3)(x-2)$$

লক্ষ করো যে $f'(x) = 0$ থেকে পাওয়া যায় $x = 2$ এবং $x = 3$ ।

আমরা এখন এই বিন্দুগুলোতে এবং [1, 5] অন্তরালের প্রান্তবিন্দুগুলোতে, অর্থাৎ $x = 1, x = 2, x = 3$ এবং $x = 5$ -তে f এর মান নির্ণয় করব। সুতরাং

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

অতএব, আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি যে [1, 5] অন্তরালে f -এর পরম সর্বোচ্চ মান হল 56, যা $x = 5$-তে f এর মান এবং পরম সর্বনিম্ন মান হল 24 , যা $x = 1$-তে f এর মান।

উদাহরণ 40 একটি অপেক্ষক f এর পরম বৃহত্তম এবং পরম ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো, যেখানে

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}},\ x \in [-1, 1]$$

সমাধান দেওয়া আছে,

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

বা,
$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

অতএব, $f'(x) = 0$ থেকে পাওয়া যায়, $x = \frac{1}{8}$ ।আরও লক্ষনীয় যে $x = 0$ -তে $f'(x)$ সংজ্ঞায়িত নয়। সুতরাং সংকট বিন্দুগুলো হল $x = 0$ এবং $x = \frac{1}{8}$ । এখন সংকট বিন্দুসমূহ $x = 0, \frac{1}{8}$ এবং অন্তরালটির প্রান্ত বিন্দুসমূহ $x = -1$ ও $x = 1$-তে f এর মান নির্ণয় করে আমরা পাই,

$$f(-1) = 12(-1)^{\frac{4}{3}} - 6(-1)^{\frac{1}{3}} = 18$$
$$f(0) = 12(0) - 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1)^{\frac{4}{3}} - 6(1)^{\frac{1}{3}} = 6$$

অতএব, আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে f এর পরম বৃহত্তম মান হল 18 যা $x = -1$ বিন্দুতে f এর মান এবং পরম ক্ষুদ্রতম মান হল $\frac{-9}{4}$ যা $x = \frac{1}{8}$ বিন্দুতে f এর মান।

উদাহরণ 41 শত্রুপক্ষের একটি অ্যাপাচে হেলিকপ্টার (Apache helicopter) $y = x^2 + 7$ বক্ররেখা বরাবর উড়ছে। (3, 7) বিন্দুতে অবস্থানরত একজন সৈনিক হেলিকপ্টারটিকে তখনই গুলি করে নামাতে চায় যখন হেলিকপ্টারটি তার সবচেয়ে নিকটে আসে। নিকটতম দূরত্বটি নির্ণয় করো।

সমাধান x এর প্রতিটি মানের জন্য, হেলিকপ্টারটির অবস্থান $(x, x^2 + 7)$ বিন্দুতে হয়। সুতরাং, হেলিকপ্টার এবং (3,7) বিন্দুতে অবস্থানরত সৈনিকের মধ্যে দূরত্ব হল

$$\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}\text{, অর্থাৎ } \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$$

ধরা যাক $\quad f(x) = (x-3)^2 + x^4$

বা $\quad f'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 2(x-1)(2x^2+2x+3)$

অতএব, $f'(x) = 0$ থেকে পাওয়া যায়, $x = 1$ অথবা $2x^2 + 2x + 3 = 0$, যার কোনো বাস্তব বীজ নেই। আরও দেখা যাচ্ছে, অন্তরালের আর এমন কোনো প্রান্ত বিন্দু নেই যেখানে f' শূন্য হয়, অর্থাৎ কেবলমাত্র একটি বিন্দু $x = 1$-ই আছে যেখানে f' শূন্য হয়। এই বিন্দুটিতে f -এর মান হল $f(1) = (1-3)^2 + (1)^4 = 5$। সুতরাং, সৈনিক এবং হেলিকপ্টারটির মধ্যে দূরত্ব হল $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$।

লক্ষনীয় যে, $\sqrt{5}$ হয় একটি বৃহত্তম মান অথবা একটি ক্ষুদ্রতম মান। যেহেতু

$$\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5},$$

তা থেকে বলা যায় $\sqrt{5}$ হল $\sqrt{f(x)}$ এর ক্ষুদ্রতম মান। অতএব, সৈনিক এবং হেলিকপ্টারের মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হল $\sqrt{5}$।

অনুশীলনী 6.5

1. নিম্নে প্রদত্ত অপেক্ষকগুলোর যদি চরম মান এবং অবম মান থাকে, তবে তা নির্ণয় করো :

(i) $f(x) = (2x-1)^2 + 3$ $\quad$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) = -(x-1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. নিম্নে প্রদত্ত অপেক্ষকগুলোর যদি চরম মান এবং অবম মান থাকে, তবে তা নির্ণয় করো :

(i) $f(x) = |x+2| - 1$ (ii) $g(x) = -|x+1| + 3$

(iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$

(v) $h(x) = x + 1, x \in (-1, 1)$

3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর স্থানীয় চরম এবং স্থানীয় অবম মানের বিন্দুসমূহ, যদি থাকে, নির্ণয় করো। ক্ষেত্রটি যাই হোক না কেন, স্থানীয় চরম মান এবং স্থানীয় অবম মানগুলোও নির্ণয় করো।

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3 - 3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(iv) $f(x) = \sin x - \cos x,\ 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x},\quad x > 0$

(vii) $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x},\ 0 < x < 1$

4. প্রমাণ করো যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর কোনো চরম বা অবম মান নেই :

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. প্রদত্ত অন্তরালে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর পরম বৃহত্তম মান এবং পরম ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো:

(i) $f(x) = x^3, x \in [-2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \frac{1}{2}x^2,\ x \in \left[-2, \frac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3,\ x \in [-3, 1]$

6. একটি কোম্পানীর সর্বোচ্চ লভ্যাংশ-এর পরিমাণ নির্ণয় করো, যখন লভ্যাংশ অপেক্ষক নিম্নরূপে প্রদত্ত

$$p(x) = 41 - 72x - 18x^2$$

7. $[0, 3]$ অন্তরালে $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$ এর চরম মান এবং অবম মান নির্ণয় করো।

8. $[0, 2\pi]$ অন্তরালের কোন বিন্দুগুলোতে $\sin 2x$ অপেক্ষকটি তার সর্বোচ্চ মান অর্জন করে?

9. $\sin x + \cos x$ অপেক্ষকটির বৃহত্তম মান নির্ণয় করো।

10. [1, 3] অন্তরালে $2x^3 - 24x + 107$ এর চরম মান নির্ণয় করো। [–3, –1] অন্তরালে একই অপেক্ষকের চরম মান নির্ণয় করো।

11. দেওয়া আছে যে, [0, 2] অন্তরালের $x = 1$ -তে $x^4 - 62x^2 + ax + 9$ অপেক্ষকটি তার চরম মান অর্জন করে। a এর মান নির্ণয় করো।

12. $[0, 2\pi]$ অন্তরালে $x + \sin 2x$ এর বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো।

13. এমন দুটি সংখ্যা নির্ণয় করো যাদের সমষ্টি 24 এবং যাদের গুণফল যথাসম্ভব বৃহত্তম হয়।

14. এমন দুটি ধনাত্মক সংখ্যা x এবং y নির্ণয় করো যাতে $x + y = 60$ এবং xy^3 এর মান বৃহত্তম হয়।

15. এমন দুটি ধনাত্মক সংখ্যা x এবং y নির্ণয় করো যাতে তাদের যোগফল 35 এবং $x^2 y^5$ এর মান বৃহত্তম হয়।

16. এমন দুটি ধনাত্মক সংখ্যা নির্ণয় করো যাদের যোগফল 16 এবং যাদের ঘনের যোগফলের মান ক্ষুদ্রতম হয়।

17. 18 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গাকার টিনের টুকরোর প্রতিটি কোণা থেকে সমমাপের বর্গাকার অংশ কেটে নেওয়া হল এবং তারপর অবশিষ্ট অংশগুলোকে উপর দিকে ভাঁজ করে উপর মুখ খোলা একটি বাক্সে পরিণত করা হল। বাক্সটির আয়তন যথাসম্ভব বৃহত্তম হতে হলে কাটা বর্গাকার অংশগুলোর বাহুর দৈর্ঘ্য কত হতে হবে?

18. 45 সেমি × 24 সেমি মাপের একটি আয়তাকার টিনের পাতের প্রতিটি কোণা থেকে সমমাপের বর্গাকার অংশ কেটে নেওয়া হল এবং তারপর অবশিষ্ট অংশগুলোকে উপর দিকে ভাঁজ করে উপর মুখ খোলা একটি বাক্সে পরিণত করা হল। বাক্সটির আয়তন বৃহত্তম হতে হলে কাটা বর্গাকার অংশগুলোর বাহুর দৈর্ঘ্য কত হতে হবে?

19. দেখাও যে, কোনো প্রদত্ত বৃত্তের অর্ন্তলিখিত আয়তক্ষেত্রগুলোর মধ্যে বর্গক্ষেত্রটিই সর্বাপেক্ষা বৃহত্তম ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট।

20. দেখাও যে, প্রদত্ত ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোনো লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন সর্ববৃহৎ হয়, যখন তার উচ্চতা ভূমির ব্যাসের সমান হয়।

21. 100 ঘনসেমি আয়তনবিশিষ্ট সকল বদ্ধ চোঙাকৃতি পাত্রগুলোর (লম্ব-বৃত্তাকার) মধ্যে এমন পাত্রটির মাত্রাসমূহ নির্ণয় করো যার ক্ষেত্রফলের মান সর্বনিম্ন হয়।

22. 28 মিটার দীর্ঘ একটি তারকে দুটিখণ্ডে কাটা হল। একটি খণ্ডকে বর্গক্ষেত্রে এবং অপরটিকে বৃত্তে পরিণত করা হল। বর্গক্ষেত্র এবং বৃত্তের সম্মিলিত ক্ষেত্রফল অবম হতে হলে খণ্ডদুটির দৈর্ঘ্য কত হতে হবে?

23. প্রমাণ করো যে, R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকে অন্তর্লিখিত বৃহত্তম শঙ্কুটির আয়তন গোলকের আয়তনের $\frac{8}{27}$ অংশ হয়।

24. দেখাও যে, প্রদত্ত আয়তনবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল তখনই সর্বাপেক্ষা কম হয় যখন শঙ্কুটির উচ্চতা তার ভূমির ব্যাসার্ধের $\sqrt{2}$ গুণ হয়।

25. দেখাও যে, প্রদত্ত তির্যক উচ্চতাবিশিষ্ট সর্ববৃহৎ আয়তনের শঙ্কুটির অর্ধশীর্ষ কোণ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ হয়।

26. দেখাও যে, প্রদত্ত ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সর্ববৃহৎ আয়তনের লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কুটির অর্ধশীর্ষ কোণ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ হয়।

27 থেকে 29 নং পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর ক্ষেত্রে সঠিক উত্তর বাছাই করো :

27. $x^2 = 2y$ বক্রস্থিত যে বিন্দুটি (0, 5) বিন্দুর সবচেয়ে নিকটে তার স্থানাঙ্ক হয়

(A) $(2\sqrt{2},4)$ (B) $(2\sqrt{2},0)$ (C) (0, 0) (D) (2, 2)

28. x এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ এর অবম মান হল

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ এর চরম মান হল

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

বিবিধ উদাহরণমালা

উদাহরণ 42 একটি গাড়ী একটি বিন্দু P থেকে $t = 0$ সেকেন্ড সময়ে যাত্রা শুরু করে এবং Q বিন্দুতে এসে থামে। গাড়ীটির দ্বারা t সেকেন্ড সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব x (মিটারে) নিম্নরূপে প্রদত্ত

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

গাড়িটির Q বিন্দুতে পৌঁছানোর সময় এবং P ও Q এর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

সমাধান ধরা যাক t সেকেন্ডে গাড়িটির গতি v ।

এখন $$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

সুতরাং $$v = \frac{dx}{dt} = 4t - t^2 = t(4-t)$$

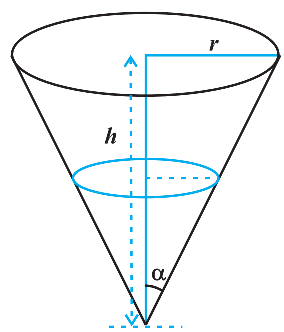
অতএব $v = 0$ থেকে পাওয়া যায়, $t = 0$ অথবা $t = 4$ ।

এখন P ও Q উভয় বিন্দুতে $v = 0$ এবং P বিন্দুতে $t = 0$ । সুতরাং, Q বিন্দুতে $t = 4$ । অতএব, গাড়িটি 4 সেকেন্ড পরে Q বিন্দুতে পৌঁছবে। আবার, 4 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ মি।}$$

উদাহরণ 43 একটি জলাধারের আকৃতি উল্টানো লম্ব-বৃত্তাকার শঙ্কু-এর মতো যার অক্ষ উল্লম্ব রেখা বরাবর এবং শীর্ষ নিম্নদেশে। এটির অর্ধশীর্ষ কোণ $\tan^{-1}(0.5)$ । এতে প্রতি ঘন্টায় 5 ঘনমিটার সমহারে জল ঢালা হচ্ছে। যখন জলাধারে জলের গভীরতা 4 মিটার হয়, তখন যে হারে জলতলের উচ্চতা বৃদ্ধি পাচ্ছে তা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, r, h এবং α চিত্র 6.22 -এ দেখানো হয়েছে। তাহলে $\tan\alpha = \frac{r}{h}$.



চিত্র 6.22

সুতরাং, $$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right).$$

কিন্তু $$\alpha = \tan^{-1}(0.5) \quad \text{(প্রদত্ত)}$$

বা $$\frac{r}{h} = 0.5$$

বা $$r = \frac{h}{2}$$

মনে করো, শঙ্কুর আয়তন V , তাহলে

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

সুতরাং, $$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt} \quad \text{(শৃঙ্খল নিয়মানুসারে)}$$

$$= \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

এখন আয়তনের পরিবর্তনের হার, অর্থাৎ $\frac{dV}{dt} = 5$ ঘনমিটার/ঘন্টা এবং $h = 4$ মিটার।

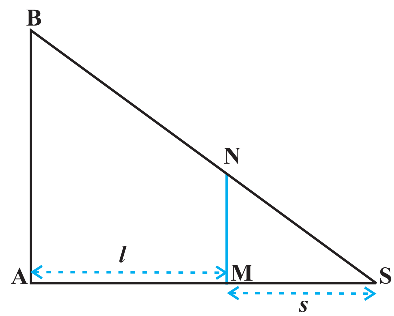
সুতরাং, $$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

বা, $$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88} \text{ মিটার/ঘন্টা } \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

অতএব, জলতলের পরিবর্তনের হার হল $\frac{35}{88}$ মিটার/ঘন্টা।

উদাহরণ 44 2 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একজন লোক 6 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট ল্যাম্প পোষ্ট থেকে 5 কিমি/ঘন্টা সমবেগে হেঁটে দূরে যাচ্ছেন। যে হারে তার ছায়ার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাচ্ছে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান চিত্র 6.23 মনে করো AB হল ল্যাম্প পোষ্ট, যার B অবস্থানে ল্যাম্পটি আছে এবং একটি নির্দিষ্ট সময় t-এ MN হল লোকটির অবস্থান। আরও মনে করো, AM = l মিটার। তাহলে MS হল লোকটির ছায়ার দৈর্ঘ্য এবং MS = s মিটার।



চিত্র 6.23

লক্ষ করো যে, $$\Delta MSN \sim \Delta ASB$$

বা $$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$$

বা $AS = 3s$ (যেহেতু $MN = 2$ এবং $AB = 6$ (প্রদত্ত))

এইরূপে $AM = 3s - s = 2s$ কিন্তু $AM = l$

সুতরাং $l = 2s$

অতএব, $$\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$$

যেহেতু $\frac{dl}{dt} = 5$ কিমি/ঘণ্টা। অতপর, ছায়ার দৈর্ঘ্যের বৃদ্ধির হার $\frac{5}{2}$ কিমি/ঘন্টা।

উদাহরণ 45 $x^2 = 4y$ বক্রের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো, যা $(1, 2)$ বিন্দুগামী।

সমাধান $x^2 = 4y$ কে, x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

ধরো, $x^2 = 4y$ বক্র এবং তার অভিলম্বের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (h, k) । এখন (h, k) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা হল

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(h,\, k)} = \frac{h}{2}$$

অতএব, (h, k) বিন্দুতে অভিলম্বটির নতি $= \dfrac{-2}{h}$

সুতরাং, (h, k) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$y - k = \frac{-2}{h}(x - h) \qquad \ldots (1)$$

যেহেতু, অভিলম্বটি (1, 2) বিন্দুগামী, আমরা পাই

$$2 - k = \frac{-2}{h}(1 - h) \quad \text{or} \quad k = 2 + \frac{2}{h}(1 - h) \qquad \ldots (2)$$

যেহেতু (h, k) বিন্দুটি $x^2 = 4y$ বক্রের ওপর অবস্থিত, আমরা পাই

$$h^2 = 4k \qquad \ldots (3)$$

(2) এবং (3) নং হতে, আমরা পাই $h = 2$ এবং $k = 1$ । (1) নং সমীকরণে h এবং k এর মানগুলো বসিয়ে আমরা নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ পাই, যা নিম্নে প্রদত্ত

$$y - 1 = \frac{-2}{2}(x - 2) \text{ বা } x + y = 3$$

উদাহরণ 46 $y = \cos(x + y), -2\pi \le x \le 2\pi$

বক্রের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো যা $x + 2y = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল ।

সমাধান $y = \cos(x + y)$ কে, x এর সাপেক্ষে অবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$$

অর্থাৎ (x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা $= \dfrac{-\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$

যেহেতু, প্রদত্ত বক্রের স্পর্শকটি $x + 2y = 0$ সরল রেখার সমান্তরাল, যার প্রবণতা হল $\frac{-1}{2}$

আমরা পাই,

$$\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

বা $$\sin(x+y) = 1$$

বা $$x + y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z}$$

তখন $$y = \cos(x+y) = \cos\left(n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}\right),\ n \in \mathbf{Z}$$

$= 0$, সকল $n \in \mathbf{Z}$ এর জন্য।

আবার, যেহেতু $-2\pi \le x \le 2\pi$, আমরা পাই $x = \frac{-3\pi}{2}$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ । এইভাবে প্রদত্ত বক্রের ওপর কেবলমাত্র $\left(\frac{-3\pi}{2}, 0\right)$ এবং $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকগুলোই হল $x + 2y = 0$ সরল রেখার সমান্তরাল।

অতএব, নির্ণেয় স্পর্শকগুলোর সমীকরণ হল

$$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{বা} \quad 2x + 4y + 3\pi = 0$$

এবং $$y - 0 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{বা} \quad 2x + 4y - \pi = 0$$

উদাহরণ 47 অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক,

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(a) বর্ধিষ্ণু (b) ক্ষয়িষ্ণু।

সমাধান দেওয়া আছে,

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

সুতরাং, $$f'(x) = \frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$

$$= \frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3) \qquad \text{(সরল করে)}$$

এখন $f'(x) = 0$ হলে $x = 1, x = -2$ অথবা $x = 3$ ।

চিত্র 6.24

$x = 1, -2$ এবং 3- এই বিন্দুগুলো একটি বাস্তব সংখ্যা রেখাকে চারটি বিচ্ছিন্ন অন্তরাল যেমন, $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ এবং $(3, \infty)$ এ বিভক্ত করে (চিত্র 6.24 দেখো) ।

$(-\infty, -2)$ অন্তরালটি বিবেচনা করো, অর্থাৎ যখন $-\infty < x < -2$ ।

এই ক্ষেত্রে, আমরা পাই $x - 1 < 0, x + 2 < 0$ এবং $x - 3 < 0$ ।

(বিশেষ করে, লক্ষ করো যে, $x = -3$ এর জন্য $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
$= (-4)(-1)(-6) < 0$)

সুতরাং, $f'(x) < 0$ যখন $-\infty < x < -2$.

অতএব, $(-\infty, -2)$ অন্তরালে অপেক্ষক f ক্ষয়িষ্ণু।

$(-2, 1)$ অন্তরালটি বিবেচনা করো, অর্থাৎ, যখন $-2 < x < 1$।

এইক্ষেত্রে, আমরা পাই, $x - 1 < 0, x + 2 > 0$ এবং $x - 3 < 0$

(বিশেষ করে, লক্ষ করো যে, $x = 0$ এর জন্য, $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$
$= (-1)(2)(-3) = 6 > 0$)

সুতরাং, $f'(x) > 0$ যখন $-2 < x < 1$.

অতএব, $(-2, 1)$ অন্তরালে f হল বর্ধিষ্ণু।

.এখন $(1, 3)$ অন্তরালটি বিবেচনা করো, অর্থাৎ, যখন $1 < x < 3$ । এই ক্ষেত্রে আমরা পাই $x - 1 > 0, x + 2 > 0$ এবং $x - 3 < 0$.

সুতরাং, $f'(x) < 0$ যখন $1 < x < 3$

অতএব, $(1, 3)$ অন্তরালে f ক্ষয়িষ্ণু ।

অতএব, $(3, \infty)$ অন্তরালটি বিবেচনা করো, অর্থাৎ, যখন $x > 3$ । এইক্ষেত্রে, আমরা পাই,

$x - 1 > 0, x + 2 > 0$ এবং $x - 3 > 0$ সুতরাং $f'(x) > 0$ যখন $x > 3$ ।

অতএব, $(3, \infty)$ অন্তরালে f বর্ধিষ্ণু ।

উদাহরণ 48 দেখাও যে,

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

অপেক্ষকটি $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ অন্তরালে সর্বদা বর্ধিষ্ণু।

সমাধান দেওয়া আছে,

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x), x > 0$$

সুতরাং,
$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x+\cos x)^2}(\cos x-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x-\sin x}{2+\sin 2x} \qquad \text{(সরল করে)}$$

লক্ষ করো যে, $2 + \sin 2x > 0$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ অন্তরালে x এর সকল মানের জন্য।

সুতরাং, $f'(x) > 0$ যদি $\cos x - \sin x > 0$ হয়

বা $f'(x) > 0$ যদি $\cos x > \sin x$ অথবা $\cot x > 1$

এখন $\cot x > 1$ যদি $\tan x < 1$, অর্থাৎ যদি $0 < x < \frac{\pi}{4}$

অর্থাৎ $f'(x) > 0$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ অন্তরালে।

অতএব, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ অন্তরালে f অপেক্ষকটি বর্ধিষ্ণু।

উদাহরণ 49 3 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার চাকতি (disc) -কে উত্তপ্ত করা হয়েছে। প্রসারণ ধর্মের জন্য এটির ব্যাসার্ধ 0.05 সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পায়। যখন চাকতিটির ব্যাসার্ধ 3.2 সেমি হয় তখন তার ক্ষেত্রফল কি হারে বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, প্রদত্ত চাকতিটির ব্যাসার্ধ r এবং ক্ষেত্রফল A । তখন

$$A = \pi r^2$$

বা
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(শৃঙ্খল নিয়ম প্রয়োগ করে)}$$

এখন ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির আনুমানিক হার $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05$ সেমি/সেকেন্ড।

অতএব, ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির আনুমানিক হার হল

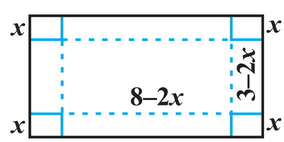
$$dA = \frac{dA}{dt}(\Delta t) = 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right)$$

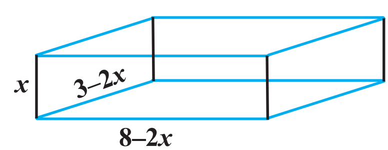
$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) = 0.320\pi \text{ বর্গসেমি/সেকেন্ড}$$

($r = 3.2$ সেমি)

উদাহরণ 50 3 মিটার × 8 মিটার একটি আয়তাকার অ্যালুমিনিয়াম পাতের চার কোণা থেকে চারটি সমান মাপের বর্গাকার অংশ কেটে অবশিষ্ট অংশ ভাঁজ করে উপর মুখ খোলা একটি বাক্স তৈরি করা হল। এরকম সর্ববৃহৎ বাক্সের আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, কেটে নেওয়া প্রতিটি বর্গাকার অংশের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার। তাহলে বাক্সটির উচ্চতা হল x, দৈর্ঘ্য হল $(8 - 2x)$ এবং প্রস্থ হল $(3 - 2x)$ (চিত্র 6.25 দেখো)। যদি বাক্সটির আয়তন $V(x)$ হয়, তাহলে





চিত্র 6.25

$$V(x) = x(3 - 2x)(8 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

সুতরাং,
$$\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

এখন $V'(x) = 0$ হলে $x = 3, \frac{2}{3}$ । কিন্তু $x \neq 3$ (কেন?)

অতএব, আমরা পাই, $x = \frac{2}{3}$, এখন $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$.

সুতরাং, $x = \frac{2}{3}$ হল চরম মানের বিন্দু। অর্থাৎ, যদি আমরা পাতটির প্রতিটি কোণা হতে $\frac{2}{3}$ মিটার

বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার অংশ কাটার পর অবশিষ্ট পাত দিয়ে বাক্স তৈরি করি, তাহলে এরকম সর্ববৃহৎ বাক্সের আয়তন হয়

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{200}{27} \text{ ঘনমিটার}$$

উদাহরণ 51 প্রতিটি $\left(5 - \frac{x}{100}\right)$ টাকা মূল্যে একজন উৎপাদক x সংখ্যক সামগ্রী বিক্রয় করতে পারে। x সংখ্যক সামগ্রীর উৎপাদন ব্যয় $\left(\frac{x}{5} + 500\right)$ টাকা। উৎপাদক তার মুনাফা সর্বাধিক করতে চাইলে তাকে কতগুলো সামগ্রী বিক্রয় করতে হবে তা নির্ণয় করো।

সমাধান ধরো, x সংখ্যক সামগ্রীর বিক্রয় মূল্য $S(x)$ এবং উৎপাদন মূল্য $C(x)$। তাহলে আমরা পাই

$$S(x) = \left(5 - \frac{x}{100}\right)x = 5x - \frac{x^2}{100}$$

এবং

$$C(x) = \frac{x}{5} + 500$$

তাহলে, মুনাফা অপেক্ষক, $P(x)$ হল

$$P(x) = S(x) - C(x) = 5x - \frac{x^2}{100} - \frac{x}{5} - 500$$

অর্থাৎ

$$P(x) = \frac{24}{5}x - \frac{x^2}{100} - 500$$

বা

$$P'(x) = \frac{24}{5} - \frac{x}{50}$$

এখন $P'(x) = 0$ হলে $x = 240$ । আবার, $P''(x) = \frac{-1}{50}$ । সুতরাং, $P''(240) = \frac{-1}{50} < 0$

অতএব, $x = 240$ হল চরম মানের একটি বিন্দু। সুতরাং, উৎপাদক সর্বাধিক মুনাফা লাভ করতে পারবে, যদি সে 240 সংখ্যক সামগ্রী বিক্রি করে।

অধ্যায় 6 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. অবকল প্রয়োগ করে নীচের প্রত্যেকটির আসন্ন মান নির্ণয় করো :

(a) $\left(\dfrac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{-\frac{1}{5}}$

2. দেখাও যে $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ অপেক্ষকের $x = e$ -এ চরম মান আছে।

3. স্থির ভূমি দৈর্ঘ্য b বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের সমান দুটিবাহু 3 সেমি প্রতি সেকেন্ড হারে হ্রাস পায়। এটির ক্ষেত্রফল কী হারে হ্রাস পাবে, যখন সমান দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির দৈর্ঘ্যের সমান হয় ?

4. $x^2 = 4y$ বক্রের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো, যা (1, 2) বিন্দুগামী।

5. দেখাও যে, মূলবিন্দু থেকে $x = a\cos\theta + a\,\theta\sin\theta,\ y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$ বক্রের যে কোনো বিন্দু θ-তে অঙ্কিত অভিলম্বের দূরত্ব ধ্রুবক।

6. অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক,

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

(i) বর্ধিষ্ণু (ii) ক্ষয়িষ্ণু ।

7. অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো যেখানে অপেক্ষক $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^3},\ x \neq 0$

(i) বর্ধিষ্ণু (ii) ক্ষয়িষ্ণু ।

8. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের বৃহত্তম ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যার একটি শীর্ষবিন্দু পরাক্ষের এক প্রান্তে অবস্থিত।

9. উপর দিক খোলা একটি জলাধারের ভূমি ও পার্শ্বতলগুলো আয়তাকার। এটি এমনভাবে তৈরি করা হয় যাতে জলাধারের গভীরতা 2 মিটার এবং আয়তন 8 ঘনমিটার হয়। যদি ভূমি তৈরি করতে প্রতি বর্গমিটার 70 টাকা এবং পার্শ্বতলগুলো তৈরি করতে প্রতি বর্গমিটার 45 টাকা খরচ হয়, তবে জলাধারটি তৈরি করতে সর্বাপেক্ষা কম কত খরচ হবে?

10. একটি বৃত্ত এবং একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার সমষ্টি হলো k, যেখানে k একটি ধ্রুবক। প্রমাণ করো যে, এদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হবে যখন বর্গক্ষেত্রের বাহু, বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণহয়।

11. আয়তাকার একটি জানালার উপর দিকে অর্ধ বৃত্তাকার খোলা অংশ আছে। জানালাটির মোট পরিসীমা হল 10 মিটার। জানালার আয়তাকার অংশের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করো যাতে সমগ্র খোলা অংশের মধ্য দিয়ে সর্বাধিক আলো প্রবেশ করতে পারে।

12. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপরিস্থ একটি বিন্দু থেকে ত্রিভুজটির অপর দুটি বাহুর দূরত্ব হল a এবং b ।

দেখাও যে , অতিভুজের ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্য হল $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

13. $f(x) = (x - 2)^4 (x + 1)^3$ অপেক্ষকের ওপর বিন্দুসমূহ নির্ণয় করো যখন f এর

(i) স্থানীয় চরম মান (ii) স্থানীয় অবম মান

(iii) নতি-পরিবর্তন বিন্দু আছে।

14. $f(x) = \cos^2 x + \sin x, x \in [0, \pi]$ অপেক্ষকের পরম বৃহত্তম মান এবং পরম ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করো।

15. দেখাও যে, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকে অন্তর্লিখিত সর্ববৃহৎ আয়তনের লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর উচ্চতা হল $\frac{4r}{3}$ ।

16. ধরো, $[a, b]$ অন্তরালে f অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত এমন যে $f'(x) > 0$, সকল $x \in (a, b)$ এর জন্য। তবে প্রমাণ করো (a, b) অন্তরালে f অপেক্ষকটি বর্ধিষ্ণু।

17. দেখাও যে, R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকে অন্তর্লিখিত সর্ববৃহৎ আয়তন বিশিষ্ট চোঙের উচ্চতা $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ এবং এটির সর্ববৃহৎ আয়তন নির্ণয় করো।

18. দেখাও যে, উচ্চতা h এবং α অর্ধশীর্ষকোণ বিশিষ্ট একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুতে অন্তর্লিখিত চোঙের আয়তন সর্ববৃহৎ হবে যদি চোঙের উচ্চতা শঙ্কুর উচ্চতার এক তৃতীয়াংশ হয় এবং চোঙের বৃহত্তম আয়তন হল $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ ।

19 হতে 24 নং পর্যন্ত প্রশ্নের প্রতিটির সঠিক উত্তরটি বাছাই করো।

19. 10 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি পাত্র 314 ঘনমিটার প্রতি ঘন্টা হারে গম দিয়ে ভর্তি করা হচ্ছে। পাত্রে গমের উচ্চতা বৃদ্ধির হার হল

(A) 1 মিটার/ঘণ্টা (B) 0.1 মিটার/ঘণ্টা

(C) 1.1 মিটার/ঘণ্টা (D) 0.5 মিটার/ঘণ্টা

20. $x = t^2 + 3t - 8,\ y = 2t^2 - 2t - 5$ বক্রের (2,– 1) বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা হল

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21. $y = mx + 1$ সরলরেখাটি $y^2 = 4x$ বক্রের স্পর্শক হবে, যদি m এর মান হয়

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22. $2y + x^2 = 3$ বক্রের (1,1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$

(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

23. (1,2) বিন্দুগামী $x^2 = 4y$ বক্রের অভিলম্বের সমীকরণ হল

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24. $9y^2 = x^3$ বক্রের ওপর যে বিন্দুগুলোতে বক্রের অভিলম্ব অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান ছেদিতাংশ উৎপন্ন করে সেগুলো হল

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

(C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

সারসংক্ষেপ

- যদি একটি রাশি y, অন্য একটি রাশি x এর সাথে কিছু নিয়ম $y = f(x)$ কে সিদ্ধ করে পরিবর্তিত হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ (অথবা $f'(x)$), x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হারকে প্রকাশ করে এবং $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (অথবা $f'(x_0)$), $x = x_0$ বিন্দুতে x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হারকে প্রকাশ করে।
- যদি দুটি চলরাশি x এবং y অপর একটি চলরাশি t- এর সাপেক্ষে পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ, যদি $x = f(t)$ এবং $y = g(t)$ হয়, তবে শৃঙ্খল নিয়মানুসারে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}, \text{ যদি } \frac{dx}{dt}\neq 0 \text{ হয়।}$$

- একটি অপেক্ষক f -কে বলা হবে

  (a) (a, b) অন্তরালে যথার্থ বর্ধিষ্ণু, যদি (a, b) অন্তরালে

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in (a, b)$ এর জন্য।

  বিকল্পরূপে, যদি প্রতিটি $x \in (a, b)$ এর জন্য $f'(x) > 0$ হয়।

  (b) (a,b) অন্তরালে যথার্থ ক্ষয়িষ্ণু, যদি (a, b) অন্তরালে

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ সকল $x_1, x_2 \in (a, b)$ এর জন্য।

  বিকল্পরূপে, যদি প্রতিটি $x \in (a, b)$ এর জন্য $f'(x) < 0$ হয়।

  (c) (a, b) অন্তরালে ধ্রুবক অপেক্ষক, যদি সকল $x \in (a, b)$ এর জন্য $f(x) = c$, যেখানে c একটি ধ্রুবক রাশি।

  (d) (a, b) অন্তরালে বর্ধিষ্ণু, যদি (a, b) অন্তরালে $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x) \leq f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in (a, b)$ এর জন্য।

  বিকল্পরূপে, যদি প্রতিটি $x \in (a, b)$ এর জন্য $f'(x) \geq 0$ হয়।

  (e) (a, b) অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু, যদি (a, b) অন্তরালে $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, সকল $x_1, x_2 \in (a, b)$ এর জন্য।

  বিকল্পরূপে, যদি প্রতিটি $x \in (a, b)$ এর জন্য $f'(x) \leq 0$ হয়।

- $y = f(x)$ বক্রের (x_0, y_0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হল

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

- যদি (x_0, y_0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর অস্তিত্ব না থাকে, তবে এই বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং তার সমীকরণ হল $x = x_0$।

- যদি $y = f(x)$ বক্রের $x = x_0$ বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সমান্তরাল হয়, তবে $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = 0$।

- $y = f(x)$ বক্রের (x_0, y_0) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}}(x - x_0)$$

- যদি (x_0, y_0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ -এর মান শূন্য হয়, তবে অভিলম্বের সমীকরণ হবে $x = x_0$।

- (x_0, y_0) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ -এর অস্তিত্ব না থাকে, তবে অভিলম্বটি x-অক্ষের সমান্তরাল হয় এবং তার সমীকরণ হবে $y = y_0$।

- ধরা যাক $y = f(x)$ এ x এর ক্ষুদ্র বৃদ্ধি Δx এবং x এর এই বৃদ্ধির জন্য y এর অনুরূপ বৃদ্ধি Δy হয়, অর্থাৎ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ তাহলে,

$$dy = f'(x)dx \text{ তাহলে } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x \text{ ।}$$

  এখানে dy হল Δy এর একটি যথার্থ আসন্ন মান, যখন dx= x অপেক্ষাকৃতভাবে ক্ষুদ্র হয় এবং আমরা তাকে $dy \approx \Delta y$ দিয়ে সূচিত করি।

- একটি অপেক্ষক f -এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভূক্ত একটি বিন্দু c যেখানে হয় $f'(c) = 0$ অথবা f অবকলনযোগ্য নয়, সেই বিন্দুটিকে বলা হয় f -এর সংকট বিন্দু।

- **প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা** ধরা যাক, f হল একটি মুক্ত অন্তরাল I-তে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক। মনে করো, I-এর অন্তর্ভূক্ত একটি সংকট বিন্দু c-তে f সন্তত । তাহলে,

  (i) যখন x -এর মান c -এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c -কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্ন ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক-এ পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ বামদিক থেকে c এর দিকে যথেষ্ট ভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) > 0$ হয় এবং ডানদিক থেকে c এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) < 0$ হয়, তবে c-কে বলা হবে একটি *স্থানীয় চরম মানের বিন্দু*।

  (ii) যখন x এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c-কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্ন ঋণাত্মক থেকে ধনাত্মকে পরিবর্তিত হয়, অর্থাৎ বামদিক থেকে c -এর দিকে যথেষ্ট ভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) < 0$ হয় এবং ডানদিক থেকে c- এর দিকে যথেষ্টভাবে নিকট থেকে নিকটতর বিন্দুসমূহের প্রতিটিতে $f'(x) > 0$ হয়, তবে c কে বলা হবে একটি *স্থানীয় অবম মানের বিন্দু*।

(iii) যখন x-এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c-কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ এর চিহ্নের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে c বিন্দু স্থানীয় চরম মানের বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দুর কোনটাই হবে না। প্রকৃতপক্ষে, এরকম বিন্দুকে *নতি-পরিবর্তন বিন্দু* বলে।

◆ **দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা** ধরা যাক f হল I -অন্তরালে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক এবং $c \in \text{I}$ । আরও ধরা যাক f হল c -তে দুইবার অবকলনযোগ্য তাহলে,

(i) $x = c$ হবে একটি স্থানীয় চরম মানের বিন্দু, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) < 0$ হয়।

$f(c)$ এর মান হল f এর স্থানীয় চরম মান।

(ii) $x = c$ হবে একটি স্থানীয় অবম মানের বিন্দু, যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) > 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, $f(c)$ এর মান হল f এর স্থানীয় অবম মান।

(iii) পরীক্ষাটি ব্যর্থ বলে বিবেচিত হবে যদি $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, আমরা প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষাতে ফিরে যাব এবং পরীক্ষা করে দেখব c বিন্দুটি স্থানীয় চরম মানের অথবা স্থানীয় অবম মানের অথবা নতি-পরিবর্তনের বিন্দু কিনা।

◆ পরম সর্বোচ্চ মান অথবা পরম সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করার জন্য কার্যকরী নিয়ম

ধাপ 1: অন্তরালটিতে f -এর সকল সংকট বিন্দুসমূহ বের করো, অর্থাৎ এমন বিন্দুসমূহ x নির্ণয় করো যেখানে, হয় $f'(x) = 0$ অথবা f অবকলনযোগ্য নয়।

ধাপ 2: অন্তরালটির প্রান্ত বিন্দুসমূহ নাও।

ধাপ 3: সকল বিন্দুসমূহে (যা ধাপ 1 ধাপ 2 -তে উল্লেখিত) f -এর মান নির্ণয় করো।

ধাপ 4: ধাপ 3 -তে f -এর নির্ণীত মানসমূহের মধ্যে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানগুলোকে চিহ্নিত করো। এই সর্বোচ্চ মানটি হবে f -এর পরম সর্বোচ্চ (বৃহত্তম) মান এবং পরম সর্বনিম্ন মানটি হবে f -এর পরম সর্বনিম্ন (ক্ষুদ্রতম) মান।

পরিশিষ্ট **1**

গণিতে প্রমাণ
(Proofs in Mathematics)

❖ *Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry.*
Mathematical works do consist of proofs just as
poems do consist of characters.
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 ভূমিকা

নবম, দশম এবং একাদশ শ্রেণিতে আমরা উক্তি, যৌগিক উক্তি, না-ক্রিয়া, উক্তির বিপরীত এবং বিরুদ্ধ ধনাত্মক, স্বত:সিদ্ধ, অনুমান, উপপাদ্য এবং অবরোহী যুক্তির ধারণা সম্বন্ধে শিখেছি।

এখানে, আমরা গাণিতিক প্রতিজ্ঞা প্রমাণের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করব।

A.1.2 প্রমাণ কী ?

গাণিতিক উক্তির প্রমাণ গঠিত হয় কতগুলো উক্তির ক্রমের দ্বারা, প্রতিটি উক্তি সমর্থনযোগ্য হয় সংজ্ঞার দ্বারা অথবা একটি স্বত:সিদ্ধ বা একটি প্রতিজ্ঞা যা পূর্বে প্রতিষ্ঠিত অবরোহী পদ্ধতির দ্বারা কেবলমাত্র যুক্তিসম্মত নিয়মে প্রয়োগ হয়।

এইভাবে, প্রতিটি প্রমাণ অবরোহী যুক্তির একটি শৃঙ্খল যাদের প্রতিটির একটি পূর্বানুমান এবং সিদ্ধান্ত রয়েছে। অনেক সময়, আমরা একটি প্রতিজ্ঞায় যা দেওয়া আছে তা থেকে প্রতিজ্ঞাটি সরাসরিভাবে প্রমাণ করি। কিন্তু অনেক সময়, প্রতিজ্ঞাটিকে প্রমাণ করার থেকে তার সমতুল্য প্রতিজ্ঞাকে প্রমাণ করা সহজ হয়। এটি প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষ দুই ধরনের প্রতিজ্ঞা প্রমাণকে চালনা করে এবং প্রাপ্ত প্রমাণগুলোকে প্রত্যক্ষ প্রমাণ এবং পরোক্ষ প্রমাণ বলে এবং তাছাড়া প্রতিটির প্রমাণের তিনটি ভিন্ন পদ্ধতি আছে যা নিচে আলোচনা করা হল।

প্রত্যক্ষ প্রমাণ এটি হল প্রতিজ্ঞার একটি প্রমাণ যাতে আমরা প্রতিজ্ঞায় যা দেওয়া আছে তা থেকে প্রত্যক্ষভাবে প্রমাণ শুরু করি।

(i) সরাসরি অভিগমন (Straight forward approach) এটি একটি যুক্তির শৃঙ্খল যেটি প্রত্যক্ষ ভাবে চালিত হয় যা প্রদত্ত বা কল্পিত, স্বত:সিদ্ধের সাহায্যে, সংজ্ঞা বা পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্য, যা যুক্তির নিয়মের মাধ্যমে প্রমাণ করতে হবে। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলো বিবেচনা করো :

উদাহরণ 1 দেখাও যে যদি $x^2 - 5x + 6 = 0$, হয়, তখন $x = 3$ বা $x = 2$.

সমাধান $x^2 - 5x + 6 = 0$ (প্রদত্ত)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (এই রাশিমালাকে এর সমান/সমতুল্য রাশিমালা দিয়ে প্রতিস্থাপন করে)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ বা $x - 2 = 0$ (পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্য থেকে $ab = 0 \Rightarrow$ হয় $a = 0$ অথবা $b = 0$, $\mathbf{R}$ -এ a, b মানের জন্য)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ অথবা $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (সমীকরণের উভয় দিকে সমান সংখ্যা যোগ করলে, সমীকরণের প্রকৃতি পরিবর্তিত হয় না)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ বা $x + 0 = 2$ (যোগের সাপেক্ষে অখণ্ড সংখ্যার অভেদ ধর্ম ব্যবহার করে)

$\Rightarrow$ $x = 3$ বা $x = 2$ (যোগের সাপেক্ষে অখণ্ড সংখ্যার অভেদ ধর্ম ব্যবহার করে)

সুতরাং, $x^2 - 5x + 6 = 0$ হতে পাই $x = 3$ বা $x = 2$ ।

ব্যাখ্যা (Explanation) মনে করো p হল প্রদত্ত উক্তি "$x^2 - 5x + 6 = 0$" এবং

q হল উক্তির সিদ্ধান্ত

"$x = 3$ বা $x = 2$".

উক্তি p হতে, আমরা উক্তি

r : "$(x - 3)(x - 2) = 0$" কে পাই, এভাবে যে p উক্তির $x^2 - 5x + 6$ রাশিমালার পরিবর্তে অপর একটি রাশিমালা $(x - 3)$ $(x - 2)$ এর মাধ্যমে যা হল $x^2 - 5x + 6$ এর সমান।

এখানে দুটি প্রশ্ন উথাপিত হয়।

(i) রাশিমালা $(x - 3)(x - 2)$ কীভাবে রাশিমালা $x^2 - 5x + 6$ এর সমান হয়?

(ii) আমরা কীভাবে একটি রাশিমালাকে তার সমান অন্য একটি রাশিমালা দ্বারা প্রতিস্থাপিত করতে পারি?

প্রথমটি পূর্বের শ্রেণিগুলোতে উৎপাদকের বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রমাণ করা হয়েছে, অর্থাৎ

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) -2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$ ।

দ্বিতীয়টি যুক্তির বৈধ রূপ (যুক্তির নিয়ম) দ্বারা সম্ভব হয়।

তারপর r পূর্বানুমান (premises) বা প্রদত্ত উক্তি হয়ে যায় এবং উক্তি s "$x - 3 = 0$ বা $x - 2 = 0$" প্রাপ্ত হয় এবং কারণগুলো বন্ধনীর মধ্যে দেওয়া হয়।

এই প্রক্রিয়া ততক্ষণ চলতে থাকবে যতক্ষণ পর্যন্ত না আমরা সিদ্ধান্তে উপনীহত হই। যুক্তির প্রতীকি সমতুল্যতা অবরোহনের মাধ্যমে প্রমাণ করা যায় যে $p \Rightarrow q$ সত্য হয়।

p থেকে শুরু করে, আমরা উপনীত হই $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ এটি বোঝায় যে "$p \Rightarrow q$" সত্য হয়।

উদাহরণ 2 প্রমাণ করো যে $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

অপেক্ষকটি $f(x) = 2x + 5$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে এটি এক-এক হয়।

সমাধান লক্ষ করো যে একটি অপেক্ষক f এক-এক হবে যদি

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (এক-এক অপেক্ষকের সংজ্ঞা থেকে)

এখন, দেওয়া আছে যে $f(x_1) = f(x_2)$, অর্থাৎ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (উভয় দিকে একই সংখ্যা যোগ করে)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (বাস্তব সংখ্যার যৌগিক অভেদ ব্যবহার করে)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2} x_1 = \frac{2}{2} x_2$ (একই অশূন্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

সুতরাং, প্রদত্ত অপেক্ষক এক-এক হয়।

(ii) গাণিতিক আরোহন (Mathematical Induction)

গাণিতিক আরোহন হল, প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করার একটি কৌশল যার প্রকৃতি অবরোহী। এই পদ্ধতিতে প্রমাণের পুরো ভিত্তি নিম্নলিখিত স্বত:সিদ্ধের উপর নির্ভর করে:

N এর প্রদত্ত উপসেট্ S এর জন্য, যদি

(i) স্বাভাবিক সংখ্যা $1 \in S$ এবং

(ii) স্বাভাবিক সংখ্যা $k + 1 \in S$ যখন $k \in S$ হয়, তখন $S = \mathbf{N}$ ।

গাণিতিক আরোহনের নীতি অনুসারে, যদি একটি উক্তি “S(n), $n = 1$এর জন্য সত্য হয়” (বা কোনো প্রারম্ভিক বিন্দু j এর জন্য), এবং যদি “S(n), $n = k$ এর জন্য সত্য হয়” বোঝায় যে “S(n), $n = k + 1$ এর জন্য সত্য ” (যে-কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $k \geq j$), তাহলে যে-কোনো অখণ্ড সংখ্যা n, $n \geq j$ এর সকল মানের জন্য উক্তিটি সত্য হয়।

আমরা এখন কয়েকটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 3 দেখাও যে যদি

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ তখন } A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

সমাধান আমরা পাই

$$P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\,\theta & \sin n\,\theta \\ -\sin\, n\,\theta & \cos n\,\theta \end{bmatrix}$$

আমরা লক্ষ করি যে $\qquad P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

সুতরাং, P(1) সত্য হয়।

ধরা যাক যে $P(k)$ সত্য হয়, অর্থাৎ

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix}$$

$P(k)$ সত্য হলে আমরা প্রমাণ করতে চাই যে $P(k+1)$ সত্য হয়, অর্থাৎ,

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix}$$

এখন $\qquad A^{k+1} = A^k . A$

যেহেতু $P(k)$ সত্য হয়, আমরা পাই

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta\cos\theta - \sin k\,\theta\sin\theta & \cos k\,\theta\sin\theta + \sin k\,\theta\cos\theta \\ -\sin k\,\theta\cos\theta - \cos k\,\theta\sin\theta & -\sin k\,\theta\sin\theta + \cos k\,\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(ম্যাট্রিক্সের গুণন দ্বারা)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\,\theta & \sin(k+1)\,\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\,\theta \end{bmatrix}$$

অতএব, $P(k+1)$ সত্য হয় যখন $P(k)$ সত্য হয়।

সুতরাং, $P(n)$ সত্য হয় $n \geq 1$ এর সকল মানে (গাণিতিক আরোহনের নীতি দ্বারা)।

(iii) ক্ষেত্র বা নি:শেষণের মাধ্যমে প্রমাণ (Proof by cases or by exhaustion)

এই পদ্ধতিতে $p \Rightarrow q$ উক্তির প্রমাণ তখনই সম্ভব হয় যখন p কে কতগুলো ক্ষেত্রে ভাগ করা যায়, r, s, t (ধরাযাক) যাতে $p = r \vee s \vee t$ (যেখানে "$\vee$" হল "OR" এর জন্য প্রতীক)।

শর্ত সাপেক্ষে যদি $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

এবং $t \Rightarrow q$

প্রমাণিত হয়, তখন $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, প্রমাণিত হয় এবং অনুরূপভাবে $p \Rightarrow q$ প্রমাণিত হয়।

এই পদ্ধতিতে প্রকল্পের প্রতিটি সম্ভাব্য ক্ষেত্রকে যাচাই করা হয়। এটি কার্যত: উপযুক্ত হয়, শুধুমাত্র যখন সম্ভাব্য ক্ষেত্রের সংখ্যা কম হয়।

উদাহরণ 4 যে-কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে দেখাও যে

$$a = b \cos C + c \cos B$$

সমাধান ধরা যাক উক্তি p হল “ABC হল যে-কোনো ত্রিভুজ” এবং উক্তি q হল

$$\text{“}a = b \cos C + c \cos B\text{”}$$

ধরা যাক ABC একটি ত্রিভুজ। A হতে BC এর উপর AD লম্ব টানা হল (প্রয়োজনে BC বর্ধিত করা হবে)।

আমরা জানি যে-কোনো ত্রিভুজ হয় সূক্ষ্মকোণী বা স্থূলকোণী অথবা সমকোণী হয়, আমরা p কে r, s এবং t তিনটি উক্তিতে বিভক্ত করতে পারি, যেখানে

r : ABC একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle$ C সূক্ষ্মকোণ হয়।

s : ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle$ C স্থূলকোণ হয়।

t : ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle$ C সমকোণ হয়।

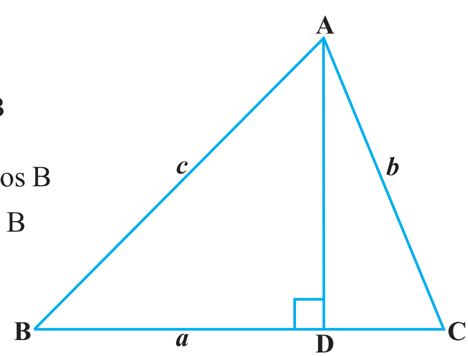
সুতরাং, আমরা তিনটি ক্ষেত্রের দ্বারা উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারি।

ক্ষেত্র (i) যখন $\angle$ C সূক্ষ্মকোণ হয় (চিত্র A1.1)।

সমকোণী ত্রিভুজ ADB থেকে,

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

অর্থাৎ
$$BD = AB \cos B$$
$$= c \cos B$$



চিত্র **A1.1**

সমকোণী ত্রিভুজ ADC থেকে,

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

অর্থাৎ $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$

এখন $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$ ... (1)

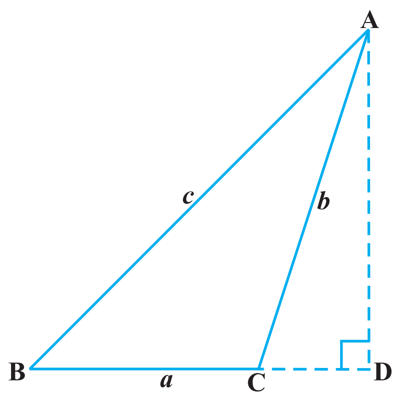
ক্ষেত্র (ii) যখন $\angle C$ স্থূলকোণী হয় (চিত্র A1.2) ।

সমকোণী ত্রিভুজ ADB থেকে।

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

অর্থাৎ $BD = AB \cos B$

$= c \cos B$



চিত্র A1.2

সমকোণী ত্রিভুজ ADC থেকে

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180° - C)$

$= -\cos C$

অর্থাৎ $CD = -AC \cos C$

$= -b \cos C$

এখন $a = BC = BD - CD$

অর্থাৎ $a = c \cos B - (-b \cos C)$

$a = c \cos B + b \cos C$ ... (2)

ক্ষেত্র (iii) যখন $\angle C$ সমকোণী হয় (চিত্র A1.3) ।

সমকোণী ত্রিভুজ ACB থেকে

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

অর্থাৎ $BC = AB \cos B$

$a = c \cos B,$

এবং $b \cos C = b \cos 90^0 = 0.$

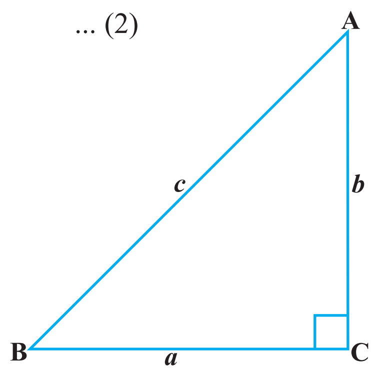


Fig A1.3

সুতরাং, আমরা লিখতে পারি $a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B$ ... (3)

(1), (2) এবং (3) থেকে আমরা সোজাসুজি বলতে পারি যে, কোনো ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রে,

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ক্ষেত্র (i) এর সাহায্যে, $r \Rightarrow q$ প্রমাণিত।

ক্ষেত্র (ii) এর সাহায্যে, $s \Rightarrow q$ প্রমাণিত।

ক্ষেত্র (iii) এর সাহায্যে, $t \Rightarrow q$ প্রমাণিত।

সুতরাং, ক্ষেত্রগুলোর সাহায্যে প্রমাণ থেকে, $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ প্রমাণিত হয়, অর্থাৎ, $p \Rightarrow q$ প্রমাণিত।

পরোক্ষ প্রমাণ (Indirect Proof) প্রদত্ত প্রতিজ্ঞাকে সরাসরি প্রমাণ করার পরিবর্তে, আমরা প্রতিজ্ঞাটিকে অপর একটি প্রতিজ্ঞা যা প্রদত্ত প্রতিজ্ঞার সমতুল্য প্রতিজ্ঞা প্রমাণের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারি।

(i) বিরোধ উক্তির সাহায্যে প্রমাণ [Proof by contradiction (*Reductio Ad Absurdum*)] : এখানে, আমরা প্রদত্ত উক্তিটি মিথ্যা অনুমান করে শুরু করব। যুক্তি শাস্ত্রের নিয়ম অনুযায়ী অনুমানটির বিরুদ্ধাচরণ করে আমরা এমন একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হই, যা বোঝায় যে অনুমানটি ভুল। অতএব প্রদত্ত উক্তিটি সত্য হয়।

চলো একটি উদাহরণের সাহায্যে এই পদ্ধতিটি আলোচনা করি।

উদাহরণ 5 দেখাও যে সমস্ত মৌলিক সংখ্যার সেট অসীম হয়।

সমাধান ধরি P হল সমস্ত মৌলিক সংখ্যার সেট। "সমস্ত মৌলিক সংখ্যার সেট অসীম হয়" এই উক্তিটির না-ক্রিয়া অর্থাৎ সমস্ত মৌলিক সংখ্যার সেট সসীম, এটিকে আমরা ধরে নিই। সুতরাং আমরা সমস্ত মৌলিক সংখ্যাকে $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ (ধরে) তালিকাবদ্ধ করতে পারি। লক্ষ করো যে, আমরা ধরে নিয়েছিলাম $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ ছাড়া আর কোনো মৌলিক সংখ্যা নেই।

এখন ধরি $N = (P_1 \, P_2 \, P_3 \ldots P_k) + 1 \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$

তালিকায় N নেই কারণ তালিকাভুক্ত যে-কোনো সংখ্যা থেকে N বড়ো।

N হয় মৌলিক অথবা যৌগিক হবে।

যদি N মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে (1) এর সাহায্যে এমন একটি মৌলিক সংখ্যা পাওয়া যাবে যা তালিকাভুক্ত নয়।

অপরদিকে, যদি N যৌগিক সংখ্যা হয় তবে এর একটি মৌলিক ভাজক থাকবে। কিন্তু তালিকাভুক্ত কোন সংখ্যা N কে ভাগ করতে পারবে না, কারণ তাদের প্রত্যেকের 1 ভাগশেষ থাকে। সুতরাং মৌলিক ভাজকটি তালিকাভুক্ত নয় এমন কোনো সংখ্যা।

অতএব N মৌলিক বা যৌগিক উভয় ক্ষেত্রে, আমরা এ সিদ্ধান্তে আসতে পারি, সকল মৌলিক সংখ্যাগুলো তালিকাভুক্ত হয়েছে - এটিকে বিরোধিতা করে।

সুতরাং, আমাদের পূর্বানুমান যে সকল মৌলিক সংখ্যার সেট সসীম হয় তা মিথ্যা। সুতরাং, সকল মৌলিক সংখ্যার সেট অসীম।

> দ্রষ্টব্য লক্ষ করো যে উপরিউক্ত প্রমাণে বিভিন্ন ক্ষেত্র খণ্ডনের দ্বারা প্রমাণের পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়েছে।

(ii) প্রদত্ত উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তির মাধ্যমে প্রমাণ (Proof by using contrapositive statement of the given statement)

শর্তযুক্ত $p \Rightarrow q$ প্রমাণের পরিবর্তে, আমরা এর সমতুল্যকে প্রমাণ করব, অর্থাৎ $\sim q \Rightarrow \sim p$ (শিক্ষার্থীরা যাচাই করে দেখতে পার)।

সিদ্ধান্ত এবং প্রকল্পের স্থান পরিবর্তন এবং উভয়ের না-ক্রিয়ার দ্বারা একটি শর্ত যুক্ত এর বিরুদ্ধ ধনাত্মক গঠন করা যেতে পারে।

উদাহরণ 6 প্রমাণ করো যে $f(x) = 2x + 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে অপেক্ষক $\boldsymbol{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}}$ এক-এক হবে।

সমাধান একটি অপেক্ষক এক-এক হয় যদি $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$।

এটি ব্যবহার করে আমরা দেখাতে পারি যে "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$"। এটি $p \Rightarrow q$ আকারের মত, যেখানে, p হল $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ এবং $q : x_1 = x_2$। আমরা এটি উদাহরণ 2-এ প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করেছি।

উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক ব্যবহারের দ্বারাও আমরা অনুরূপ প্রমাণ করতে পারি। এখন এই উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক হল $\sim q \Rightarrow \sim p$, অর্থাৎ, "যদি $f(x_1) = f(x_2)$, তখন $x_1 = x_2$" এর বিরুদ্ধ ধনাত্মক হল "যদি $x_1 \neq x_2$, হয়, তবে $f(x_1) \neq f(x_2)$" হয়।

এখন $\quad x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow \quad 2x_1 \neq 2x_2$

$\Rightarrow \quad 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$

যেহেতু "$\sim q \Rightarrow \sim p$", "$p \Rightarrow q$" এর সমতুল্য, অতএব প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

উদাহরণ 7 দেখাও যে "যদি A বিপরীতকরণ যোগ্য ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A নন-সিঙ্গুলার হবে"।

সমাধান উপরের উক্তিকে সাংকেতিকরূপে লিখে, আমরা পাই

$p \Rightarrow q$, যেখানে p হল "ম্যাট্রিক্স A বিপরীতকরণ যোগ্য হয়" এবং q হল "A নন-সিঙ্গুলার হয়"

প্রদত্ত উক্তিকে প্রমাণের পরিবর্তে, আমরা এর বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তিকে প্রমাণ করব অর্থাৎ যদি A নন-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স না হয়, তবে ম্যাট্রিক্স A বিপরীতকরণ যোগ্য হবে না।

যদি A নন-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স না হয়, তবে এটি বোঝায় যে A হল সিঙ্গুলার, অর্থাৎ,

$$|A| = 0$$

তখন $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$ এর অস্তিত্ব নেই কারণ $|A| = 0$

সুতরাং, A বিপরীতকরণ যোগ্য নহে।

অতএব, আমরা প্রমাণ করেছি যে যদি A নন সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স না হয়, তবে A বিপরীতকরণযোগ্য নহে।

অর্থাৎ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ।

সুতরাং, যদি একটি ম্যাট্রিক্স A বিপরীতকরণযোগ্য হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সটি নন-সিঙ্গুলার হবে।

(iii) বিপরীত উদাহরণের সাহায্যে প্রমাণ (Proof by a counter example)

গণিতের ইতিহাসে, এমন কিছু উপলক্ষ রয়েছে যখন কোনো উক্তির বৈধ প্রমাণ সন্ধানের সমস্ত প্রচেষ্টা ব্যর্থ হয় এবং বিবৃতিটির সত্যতা মানের অনিশ্চয়তা অমীমাংসিত থেকে যায়।

এই পরিস্থিতিতে, এটি উপকারী, যদি আমরা উক্তিটি মিথ্যা বলার উদাহরণ খুঁজে পাই। কোনো উক্তিকে অমান্য করার উদাহরণকে *বিপরীত উদাহরণ* বলা হয়। যেহেতু $p \Rightarrow q$ প্রতিজ্ঞাকে খণ্ডন করা হল কেবল $\sim (p \Rightarrow q)$ উক্তির প্রমাণ। সুতরাং, এটিও একটি প্রমাণের পদ্ধতি।

উদাহরণ 8 n এর প্রতিটি মানের জন্য, $2^{2^n} + 1$ একটি মৌলিক সংখ্যা ($n \in \mathbf{N}$) ।

এটি একভাবে সত্য বলে মনে করা হয় এই ভিত্তিতে যে,

$$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \text{ একটি মৌলিক সংখ্যা।}$$

$$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \text{ একটি মৌলিক সংখ্যা।}$$

$$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \text{ একটি মৌলিক সংখ্যা ।}$$

যাইহোক, প্রাথমিক দৃষ্টিতে সাধারণীকরণটি সঠিক বলে মনে হচ্ছে। কিন্তু, অবশেষে এটি দেখা যায় যে $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$

যা মৌলিক নয় যেহেতু $4294967297 = 641 \times 6700417$ (দুটি সংখ্যার গুণফল) ।

সুতরাং “প্রতিটি n, এর জন্য, $2^{2^n} + 1$ হল একটি মৌলিক সংখ্যা ($n \in \mathbf{N}$)” এই সমীকরণটি মিথ্যা হয়।

$2^{2^5} + 1$ এই একটিমাত্র উদাহরণই যথেষ্ট। এটি হল বিপরীত উদাহরণ।

এইভাবে, আমরা প্রমাণ করতে পারি যে “ n এর প্রতিটির মানের জন্য, $2^{2^n} + 1$ হল একটি মৌলিক সংখ্যা ($n \in \mathbf{N}$)” এই সাধারণীকরণটি, সাধারণত সত্য নয়।

উদাহরণ 9 প্রতিটি সন্তত অপেক্ষক অন্তরকলনযোগ্য হয়।

প্রমাণ আমরা প্রদত্ত কিছু অপেক্ষক বিবেচনা করি

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

x এর সমস্ত মানের জন্য এই অপেক্ষকগুলো সন্তত। যদি আমরা এদের অন্তরকলনযোগ্যতা যাচাই করি, তবে আমরা পাই যে x এর সমস্ত মানের জন্য তারা প্রত্যেকেই অন্তরকলনযোগ্য। এটি আমাদের বিশ্বাস করতে বাধ্য করে যে "প্রতিটি সন্তত অপেক্ষক অন্তরকলনযোগ্য হয়" এই সাধারণীকরণটি সত্য হতে পারে। আমরা যদি প্রদত্ত সন্তত অপেক্ষক "$\phi(x) = |x|$" এর অন্তরকলনযোগ্যতা যাচাই করি তবে আমরা পাই যে $x = 0$ বিন্দুতে এটি অন্তরকলন যোগ্য নয়। এটি বোঝায় যে "প্রতিটি সন্তত অপেক্ষক অন্তরকলন যোগ্য হয়" এই উক্তিটি সাধারণরূপে মিথ্যা হয়। মাত্র এই একটি অপেক্ষক "$\phi(x) = |x|$" উক্তিটি অমান্য করার জন্য যথেষ্ট। সুতরাং, "প্রতিটি সন্তত অপেক্ষক অন্তরকলন যোগ্য হয়" এটিকে অমান্য করার জন্য "$\phi(x) = |x|$" কে বিপরীত উদাহরণ বলা হয়।

পরিশিষ্ট **2**

গাণিতিক মডেলিং
(Mathematical Modelling)

A.2.1 ভূমিকা

একাদশ শ্রেণিতে আমরা কয়েকটি বাস্তব জীবন ঘটিত সমস্যার কিছু অংশ (বা রূপ) এর গাণিতিক পরিভাষায় অধ্যয়নের প্রয়োগ হিসেবে গাণিতিক মডেলিং সম্পর্কে শিখেছি, অর্থাৎ, কয়েকটি উপযুক্ত শর্ত প্রয়োগে বাহ্যিক পরিস্থিতির গণিতে রূপান্তরকরণ। মোটামুটিভাবে বলতে গেলে গাণিতিক মডেল হল এমন একটি কার্যকলাপ যেখানে বিভিন্ন শব্দ ব্যবহার করে, অংকন বা স্কেচ, কম্পিউটার প্রোগ্রাম, গাণিতিক সূত্র ইত্যাদি প্রয়োগে আমাদের বিভিন্ন অভূতপূর্ণ কার্যকলাপের আচরণ বর্ণনা করার জন্য মডেল তৈরি করি।

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে আমরা লক্ষ করেছি যে বিভিন্ন গাণিতিক ধারনার প্রয়োগের সাথে সম্পর্কিত সমস্যার সমাধানগুলোর জন্য এক বা ভিন্ন রকম গাণিতিক মডেলিং আবশ্যক। সুতরাং, পৃথক বিষয় হিসাবে গাণিতিক মডেলিং অধ্যয়ন করা গুরুত্বপূর্ণ।

এই অধ্যায়ে আমরা ম্যাট্রিক্স, কলণবিদ্যা এবং রৈখিক প্রোগ্রাম বিধির কৌশল/ফলাফলগুলো ব্যবহার করে বাস্তব জীবনের কিছু সমস্যা সম্পর্কিত গাণিতিক মডেলিং নিয়ে অধ্যয়ন করবো।

A.2.2 গাণিতিক মডেলিং কেন? (Why Mathematical Modelling?)

পাটিগণিত, বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি এবং রৈখিক প্রোগ্রামবিধি ইত্যাদির বিবরণমূলক সমস্যা সমাধানে শিক্ষার্থীরা যথেস্ট সচেতন। কখনো কখনো আমরা পরিস্থিতি ভিত্তিক সমস্যার বাহ্যিকরূপে ভিতরে না গিয়ে সমাধান করে থাকি। কিন্তু কিছু পরিস্থিতি ভিত্তিক সমস্যার ক্ষেত্রে বাহ্যিক রূপের ভিতরে যাওয়াও প্রয়োজন হয়, যা ব্যবহারিক মূল্যগুলোর সাথে প্রাপ্ত গাণিতিক ফলাফলগুলোর তুলনা করতে পরিস্থিতি ভিত্তিক নিয়ম এবং কিছু প্রতীকের অবতারণার দরকার হয়। বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে আমরা যখন সম্মুখীন হই তখন আমাদের একটি কৌশলের প্রয়োজন হয় এবং এটিই গাণিতিক মডেলিং নামে পরিচিত। চলো আমরা নিম্নলিখিত সমস্যাগুলো বিবেচনা করি :

(i) কোনো নদীর প্রস্থ নির্ণয় করতে (বিশেষ করে, যখন নদী পার হওয়া কঠিন)।

(ii) শটপুটের ক্ষেত্রে সর্বোত্তম কোণের মান বের করতে (চলরাশিগুলোর বিবেচনা করা, যেমন নিক্ষেপকারীর উচ্চতা, মাধ্যমের প্রতিরোধ ক্ষমতা, মাধ্যাকর্ষণজনিত কারণে ত্বরণ ইত্যাদি)।

(iii) একটি টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় করতে (বিশেষত যখন টাওয়ারের শীর্ষে পৌঁছানো সম্ভব নয়)।

(iv) সূর্য পৃষ্ঠের তাপমাত্রা নির্ণয় করতে।

(v) কেন হৃদরোগীদের লিফট ব্যবহারের অনুমতি নেই? (মানুষের শরীরবিজ্ঞান না জেনে)

(vi) পৃথিবীর ভর নির্ণয় করতে।

(vii) ভারতের শস্যক্ষেত্রগুলোতে বিদ্যমান ডাল জাতীয় শস্যের ফলন অনুমান করতে (এক্ষেত্রে কোনো ব্যক্তির ফসল কাটার অনুমতি নেই)।

(viii) কোনো ব্যক্তির দেহের অভ্যন্তরে রক্তের পরিমাণ বের করতে (রক্তপাতের অনুমতি কোনো ব্যক্তির নেই)।

(ix) 2020 সালে ভারতের জনসংখ্যার অনুমান করো (কোনো ব্যক্তিকে ততক্ষণ পর্যন্ত অপেক্ষা করার সম্মতি নেই)।

গাণিতিক মডেলিং ব্যবহার করে গণিতের সাহায্যে এই সকল সমস্যার সমাধান করা যেতে পারে এবং বাস্তবে তা সমাধান করা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে, তোমরা বর্তমান পাঠ্যপুস্তকে সেগুলোর কয়েকটি সমাধান করার পদ্ধতি অধ্যয়ন করতে পারবে। যদি সম্ভব হয় তোমরা নিজেরাই গণিতের সাহায্য ছাড়া প্রথমে এগুলো সমাধান করার চেষ্টা করো তবে তা শিক্ষণীয় হবে, তখন তোমরা গণিতের শক্তির মর্ম উপলব্ধি করবে এবং গাণিতিক মডেলিং এর প্রয়োজনীয়তার উপলব্ধি করবে।

A.2.3 গাণিতিক মডেলিং এর নীতি (Principles of Mathematical Modelling)

গাণিতিক মডেলিং হল একটি নীতিমূলক কার্যকলাপ এবং তাই এর পিছনে কিছু নীতি রয়েছে। এই নীতিগুলো হল অনেকটাই দর্শন সম্মত। গাণিতিক মডেলিং এর কিছু মৌলিক নীতির নির্দেশাবলী নিচে তালিকাবদ্ধ করা হয়েছে।

(i) মডেলের প্রয়োজনীয়তাগুলো চিহ্নিত করো (আমরা যা অনুসন্ধান করছি)।

(ii) মডেলটির জন্য প্রয়োজনীয় প্রাচলসমূহ/চলরাশিগুলো তালিকাবদ্ধ করো।

(iii) প্রাপ্ত প্রাসঙ্গিক তথ্য সনাক্ত করো। (কি দেওয়া আছে?)

(iv) এমন পরিস্থিতিগুলো চিহ্নিত করো যা প্রয়োগ করা যেতে পারে (অনুমান)।

(v) পরিচালিত বাহ্যিক নীতিগুলো চিহ্নিত করো।

(vi) চিহ্নিত করো

(a) যে সমীকরণগুলো প্রয়োগ করা হবে।

(b) যে গণনাসমূহ সম্পন্ন করা হবে।

(c) যে সমাধানটি অনুসরণ করা হবে।

(vii) পরীক্ষাগুলো চিহ্নিত করো যা সনাক্ত করবে

(a) মডেলটির ধারাবাহিকতার।

(b) মডেলটির উপযোগিতার।

(viii) মডেলটির উন্নতি করতে পারে এমন প্রাচলগুলো (Parameters) সনাক্ত করো।

উপরোক্ত গাণিতিক মডেলিং এর নীতিগুলো নিম্নলিখিত গাণিতিক মডেলিং এর ধাপসমূহকে পরিচালিত করে :

ধাপ 1: বাহ্যিক পরিস্থিতি চিহ্নিত করো।

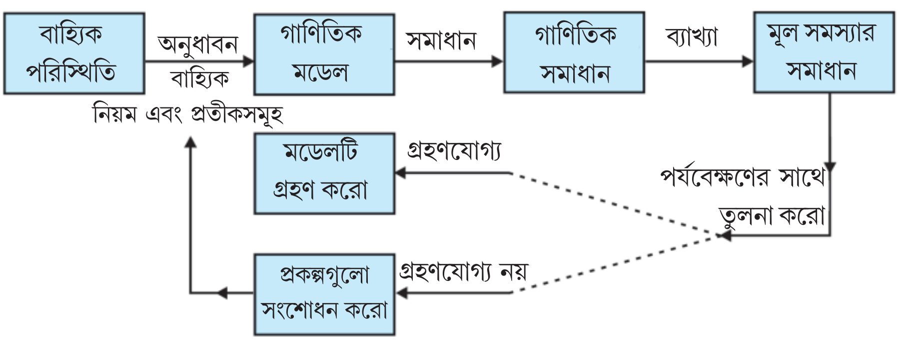
ধাপ 2: প্রাচল বা চলরাশিগুলো অবতারণা করে এবং বিভিন্ন জ্ঞাত বাহ্যিক নিয়ম ও চিহ্নগুলোর প্রয়োগের মাধ্যমে বাহ্যিক পরিস্থিতিটিকে গাণিতিক মডেলে রূপান্তর করো।

ধাপ 3: গাণিতিক সমস্যার সমাধান নির্ণয় করো।

ধাপ 4: মূল সমস্যার সাপেক্ষে প্রাপ্ত ফলাফল ব্যাখ্যা করো এবং ফলাফলটি পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষা সমূহের সাথে তুলনা করো।

ধাপ 5: যদি ফলাফলটি গ্রহণের উপযোগী হয় তবে মডেলটি গ্রহণ করো। অন্যথায় বাহ্যিক পরিস্থিতির ভিত্তিতে প্রকল্প/অনুমান সমূহকে সংশোধন করো এবং ধাপ 2-এ যাও।

উপরের ধাপগুলো নিম্নলিখিত চিত্রের মাধ্যমেও দেখানো যেতে পারে :



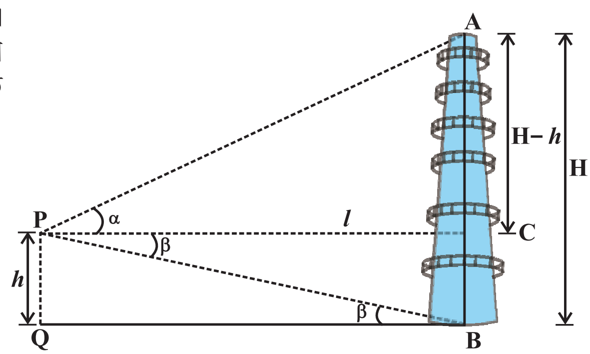
চিত্র A.2.1

উদাহরণ 1 গাণিতিক মডেলিং প্রয়োগ করে প্রদত্ত টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধান : ধাপ 1 প্রদত্ত বাহ্যিক পরিস্থিতিটি হল "একটি টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে"।

ধাপ 2 ধরো AB হল প্রদত্ত টাওয়ার (চিত্র A.2.2 দেখো) । ধরো টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয়কারী পর্যবেক্ষক হলো PQ যার চোখের অবস্থান P বিন্দুতে। ধরো PQ = h এবং টাওয়ারের উচ্চতা H। ধরো α হল পর্যবেক্ষকের চোখ হতে টাওয়ারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ।

ধরো l = PC = QB



চিত্র A.2.2

এখন $$\tan\alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

অথবা $$H = h + l\tan\alpha \qquad \ldots (1)$$

ধাপ 3 : লক্ষ করো প্রাচল h, l এবং α (সেক্সট্যান্ট ব্যবহার করে) এর মানগুলো পর্যবেক্ষকের কাছে জানা এবং তাই সমীকরণ (1) হল প্রদত্ত সমস্যার সমাধান।

ধাপ 4 : যদি টাওয়ারের পাদদেশ উপলব্ধি না যায় অর্থাৎ যখন l পর্যবেক্ষকের নিকট অজ্ঞাত থাকে, তখন P বিন্দু হতে টাওয়ারের পাদবিন্দু B এর অবনতি কোণ β ধরো। অতএব ΔPQB হতে আমরা পাই—

$$\tan\beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ বা } l = h\cot\beta$$

এই পরিস্থিতিতে ধাপ 5 এর প্রয়োজন নেই, যেহেতু প্রাচল h, l, α এবং β এর সঠিক মানগুলো জ্ঞাত।

উদাহরণ 2 ধরো একটি ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠান P_1, P_2 এবং P_3 এই তিন প্রকার পণ্য তৈরিতে R_1, R_2 এবং R_3 এই তিন প্রকার কাঁচামাল ব্যবহার করে। ধরো প্রতিষ্ঠানটিতে দুইজন খরিদ্দারের F_1 এবং F_2 এর ক্রয়ের ফরমাশ দেওয়া আছে। প্রতিষ্ঠানটিতে R_1, R_2 এবং R_3 যথাক্রমে সীমিত পরিমাণে রয়েছে এমন পরিস্থিতিটি বিবেচনা করে ক্রয়ের ফরমাশ পূরণের জন্য প্রয়োজনীয় কাঁচামাল R_1, R_2 এবং R_3 এর পরিমাণ নির্ধারনের জন্য একটি মডেল প্রস্তুত করো।

সমাধান ধাপ 1 সমস্যাটিতে বাহ্যিক পরিস্থিতিটি ভালো ভাবে চিহ্নিত করা হয়েছে।

ধাপ 2 ধরো A ম্যাট্রিক্সটি F_1 এবং F_2 খরিদ্দারদ্বয়ের ক্রয়ের ফরমাশ উপস্থাপন করে। তাহলে A এর রূপটি হলো

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} " & " & " \\ " & " & " \end{bmatrix} \end{array}$$

ধরো B ম্যাট্রিক্সটি P_1, P_2 এবং P_3, পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় কাঁচামাল R_1, R_2 এবং R_3 এর পরিমাণ উপস্থাপন করে। তাহলে B এর রূপটি হল

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} " & " & " \\ " & " & " \\ " & " & " \end{bmatrix} \end{array}$$

ধাপ 3 লক্ষ করো A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির গুণফল (যা এইক্ষেত্রে ভালভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে) নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্স দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

$$AB = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} " & " & " \\ " & " & " \end{bmatrix} \end{matrix}$$

যা প্রকৃতপক্ষে F_1 ও F_2 খরিদ্দারদ্বয়ের ক্রয় ফরমাশগুলো পূরণ করতে R_1, R_2 এবং R_3 কাঁচামালগুলোর কাঙ্ক্ষিত পরিমাণ বুঝায়।

উদাহরণ 3 যদি

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

তবে উদাহরণ 2 এর মডেলটি ব্যাখ্যা করো। যেখানে পর্যাপ্ত কাঁচামাল R_1, R_2 এবং R_3 এর পরিমাণ যথাক্রমে 330 একক, 455 একক এবং 140 একক ।

সমাধান : লক্ষ করো

$$AB = A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

.এটি স্পষ্টতই দেখায় যে F_1 এবং F_2 এর ক্রয়ের ফরমাশ পূরণের জন্য প্রয়োজনীয় কাঁচামাল R_1, R_2 এবং R_3 এর পরিমাণ হল যথাক্রমে 335 একক, 467 একক এবং147 একক যা পর্যাপ্ত কাঁচামালের চেয়ে অনেক বেশি। যেহেতু পণ্য তিনটির প্রতি একক উৎপাদন করতে প্রয়োজনীয় কাঁচামালের পরিমাণ স্থির তাই আমরা, হয় পর্যাপ্ত কাঁচামালের পরিমাণ বাড়ানোর কথা বলতে পারি অথবা খরিদ্দারদ্বয়কে আমরা তাদের ফরমাশ কমানোর কথা বলতে পারি।

মন্তব্য যদি আমরা উদাহরণ 3 এর A কে A_1 দ্বারা প্রতিস্থাপন করি, তাহলে

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ যদি খরিদ্দারদ্বয় তাদের ক্রয়ের ফরমাশ কমাতে সম্মত হয়, তবে

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

এর জন্য R_1, R_2 এবং R_3 কাঁচামালের যথাক্রমে 311 একক, 436 একক এবং 138 একক প্রয়োজন হয় যা পর্যাপ্ত কাঁচামাল R_1 এর 330 একক, R_2 এর 455 এবং R_3 এর 140 একক চেয়ে যথেষ্ট কম। এইভাবে যদি খরিদ্দারদ্বয়ের সংশোধিত ক্রয়ের ফরমাশ A_1 দ্বারা দেওয়া হয়, তবে প্রতিষ্ঠানটি সহজেই খরিদ্দারদ্বয়ের ক্রয়ের ফরমাশ সরবরাহ করতে পারবে।

দ্রষ্টব্য কেউ চেষ্টা করে, A এর আরও সংশোধন করতে পারে যাতে পর্যাপ্ত কাঁচামালের পুরোপুরি ব্যবহার হয়।

অনুসন্ধান আমরা কি প্রদত্ত একটি B এবং নির্দিষ্ট পরিমাণ পর্যাপ্ত কাঁচামাল দিয়ে এমন একটি গাণিতিক মডেল তৈরি করতে পারি যা প্রতিষ্ঠানের মালিকের প্রয়োজনে খরিদ্দারের ফরমাশ সংশোধনের জন্য আলোচনা করেন যাতে প্রতিষ্ঠানটির পর্যাপ্ত কাঁচামাল পুরোপুরি ব্যবহার করা যেতে পারে?

এই অনুসন্ধানের উত্তর নীচের উদাহরণে দেওয়া হল।

উদাহরণ 4 ধরো P_1, P_2, P_3 এবং R_1, R_2, R_3 হল উদাহরণ 2 এর মতো। মনে করো প্রতিষ্ঠানটির কাছে R_1 এর 330 একক, R_2 এর 455 একক এবং R_3 এর 140 একক পর্যাপ্ত পরিমাণে আছে এবং এই তিনটি পণ্যের প্রতি একক উৎপাদনের জন্য প্রয়োজনীয় কাঁচামাল R_1, R_2 এবং R_3 এর পরিমাণ নীচে দেওয়া হল

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} R_1 & R_2 & R_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

পুরোপুরি পর্যাপ্ত কাঁচামালগুলো ব্যবহার করে প্রতিটি পণ্যের কত একক তৈরি করা যায়?

সমাধান ধাপ 1 পরিস্থিতিটি সহজেই সনাক্তকরণযোগ্য।

ধাপ 2 ধরো প্রতিষ্ঠানটি P_1 এর x একক, P_2 এর y একক এবং P_3 এর z একক উৎপাদন করে। যেহেতু, P_1 পণ্যের R_1 এর 3 একক, P_2 পণ্যের R_1 এর 7 একক ও P_3 পণ্যের R_1 এর 5 একক প্রয়োজন (ম্যাট্রিক্স B পর্যবেক্ষণ করো) এবং R_1 এর পর্যাপ্ত মোট এককের সংখ্যা 330 হলে, আমরা পাই

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ } (R_1 \text{ কাঁচামালের জন্য})$$

অনুরূপভাবে, আমরা পাই

$$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (}R_2\text{ কাঁচামালের জন্য)}$$

এবং

$$3y + 7z = 140 \text{ (}R_3\text{ কাঁচামালের জন্য)}$$

এই সমীকরণতন্ত্রসমূহকে নিম্নলিখিতভাবে ম্যাট্রিক্সের আকারে প্রকাশ করা যেতে পারে

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

ধাপ 3 প্রাথমিক সারির প্রক্রিয়াসমূহ প্রয়োগ করে, আমরা পাই

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ $x = 20$, $y = 35$ এবং $z = 5$ । অতএব, প্রতিষ্ঠানটি তার পর্যাপ্ত কাঁচামালগুলো পুরোপুরি ব্যবহার করে P_1 এর 20 একক, P_2 এর 35 একক এবং P_3 এর 5 একক উৎপাদন করতে পারে।

মন্তব্য লক্ষ করা যায় যে যদি প্রস্তুতকারক F_1 ও F_2 খরিদ্দারদ্বয়ের ক্রয় ফরমাশগুলোর কথা চিন্তা না করে (উদাহরণ 3 এর মতো), কেবল পর্যাপ্ত কাঁচামালের সাপেক্ষে উৎপাদনের সিদ্ধান্ত নেন, তবে তিনি এই ক্রয় ফরমাশগুলো পূরণ করতে অক্ষম হবেন কারণ F_1, P_3 এর 6 একক দাবি করেছিল যেখানে প্রস্তুতকারক কেবল P_3 এর 5 একক উৎপাদন করতে পারবেন।

উদাহরণ 5 একজন ঔষধ প্রস্তুতকারক M_1 এবং M_2 ঔষধের জন্য একটি উৎপাদন পরিকল্পনা প্রস্তুত করেছেন। এখানে 20000 টি M_1 বোতল এবং 40000 টি M_2 বোতল তৈরি করার জন্য পর্যাপ্ত কাঁচামাল রয়েছে কিন্তু কেবলমাত্র 45000 টি বোতল রয়েছে যাতে ঔষধের যে-কোনো একটি রাখা যেতে পারে। আবার 1000 টি M_1 বোতল ভর্তি করতে পর্যাপ্ত উপকরণ তৈরি করতে 3 ঘন্টা ও 1000 টি M_2 বোতল ভর্তি করতে পর্যাপ্ত উপকরণ তৈরি করতে 1 ঘন্টা সময় লাগে এবং এই প্রক্রিয়াটির জন্য পর্যাপ্ত সময় 66 ঘন্টা আছে। প্রতিটি M_1 বোতলের জন্য 8 টাকা এবং M_2 বোতলের জন্য 7 টাকা লাভ হয়। ঔষধ প্রস্তুতকারকের সর্বাধিক লাভ অর্জনের জন্য কীভাবে উৎপাদন পরিকল্পনা তৈরি করবেন?

সমাধান ধাপ 1 প্রদত্ত প্রকল্পের অন্তর্গত সর্বাধিক লাভ করার জন্য M_1 এবং M_2 বোতলের সংখ্যা নির্ণয় করো।

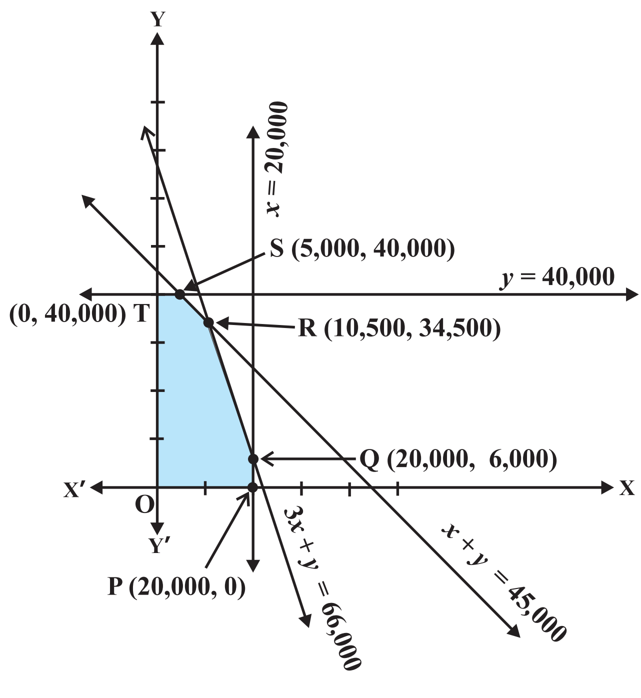
ধাপ 2 মনে করো M_1 ঔযুধের বোতলের সংখ্যা হল x এবং M_2 ঔযুধের বোতলের সংখ্যা হল y ।যেহেতু প্রতিটি M_1 বোতলে 8 টাকা এবং M_2 বোতলে 7 টাকা লাভ হয় অতএব বিষয়াত্মক অপেক্ষকটি (যাকে চরম করতে হবে) তা হল

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

বিষয়াত্মক অপেক্ষকটিকে বাধা গোষ্ঠির সাপেক্ষে চরম করতে হবে। (অধ্যায় 12 এর রৈখিক প্রোগ্রাম বিধি দেখো)।

$$\left.\begin{array}{l} x \leq 20000 \\ y \leq 40000 \\ x + y \leq 45000 \\ 3x + y \leq 66000 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots (1)$$

ধাপ 3 ছায়াবৃত অঞ্চল OPQRST হল বাধাগোষ্ঠি সমূহ (1) এর কার্যকর অঞ্চল (চিত্র A.2.3 দেখো) । কৌণিক বিন্দু O, P, Q, R, S এবং T এর স্থানাঙ্কগুলো হল যথাক্রমে (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) এবং (0, 40000)।



চিত্র A.2.3

লক্ষ করো

O (0, 0) তে Z = 0

P (20000, 0) তে Z = 8 × 20000 = 160000

Q (20000, 6000) তে Z = 8 × 20000 + 7 × 6000 = 202000

R (10500, 34500) তে Z = 8 × 10500 + 7 × 34500 = 325500

S (5000, 40000) তে Z = 8 × 5000 + 7 × 40000 = 320000

T (0, 40000) তে Z = 7 × 40000 = 280000

লক্ষ করো যে, সর্বাধিক লাভ হয় যখন $x = 10500$ এবং $y = 34500$ তখন সর্বাধিক লাভ হল 325500 টাকা। অতএব, ঔষুধ প্রস্তুতকারক সর্বাধিক 325500 টাকা লাভ পাওয়ার জন্য M_1 ঔষুধের 10500টি বোতল ও M_2 ঔষুধের 34500 টি বোতল উৎপাদন করবেন।

উদাহরণ 6 মনে করো, একটি সংস্থা কিছু পরিমাণ ব্যয় (স্থির ও পরিবর্তনশীল) করে একটি নতুন পণ্য উৎপাদন করার পরিকল্পনা করেছে এবং সংস্থাটি একটি স্থির মূল্যে পণ্যটি বিক্রি করার পরিকল্পনা করে। লাভজনকতা (Profitability) পরীক্ষা করার জন্য একটি গাণিতিক মডেল প্রস্তুত করো।

সমাধান ধাপ 1 পরিস্থিতিটি স্পষ্টভাবে সনাক্তকরণযোগ্য।

ধাপ 2 সূত্রবদ্ধকরণ: আমাদের দুই ধরনের ব্যয় দেওয়া আছে : স্থির এবং পরিবর্তনশীল। স্থির ব্যয় উৎপাদিত পণ্যের এককগুলোর সংখ্যার (যেমন ভাড়া এবং হার) উপর নির্ভরশীল নয়, যেখানে পরিবর্তনশীল ব্যয় উৎপাদিত পণ্যের এককের সংখ্যার (যেমন উপকরণ) সহিত বৃদ্ধি পায়। প্রাথমিকভাবে আমরা ধরে নেবো যে পরিবর্তনশীল ব্যয়, উৎপাদিত পণ্যের এককগুলোর সংখ্যার সাথে সরাসরি সমানুপাতিক এটি আমাদের মডেলকে সহজতর করবে। সংস্থাটি তার পণ্যগুলো বিক্রি করে একটি নির্দিষ্ট পরিমান অর্থ উপার্জন করে এবং এটি সর্বাধিক কিনা তা নিশ্চিত করতে চায়। সুবিধার জন্য আমরা ধরে নিই যে সমস্ত উৎপাদিত পণ্যের এককগুলো অবিলম্বে বিক্রি করতে হবে।

গাণিতিক মডেলটি হল

ধরো x = উৎপাদিত এবং বিক্রিত পণ্যের এককগুলোর সংখ্যা।

C = পণ্য উৎপাদনের মোট খরচ (টাকায়)

I = পণ্য বিক্রিয় থেকে অর্জিত আয় (টাকায়)

P = লাভ (টাকায়)

আমাদের উপরের অনুমানগুলো অনুসারে C দুটি অংশ নিয়ে গঠিত :

(i) স্থির ব্যয় = a (টাকায়),

(ii) পরিবর্তনশীল ব্যয় = b (টাকা/একক পণ্য উৎপাদন).

তাহলে $$C = a + bx \quad \text{... (1)}$$

আরও আয় I বিক্রয়মূল্য s (টাকা/একক) এর উপর নির্ভরশীল

অতএব $$I = sx \quad \text{... (2)}$$

তখন লাভ P, আয় এবং ব্যয় এর বিয়োগফলের সমান হয়। সুতরাং,

$$\begin{aligned} P &= I - C \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\,x - a \quad \text{... (3)} \end{aligned}$$

এখন আমাদের কাছে (1) থেকে (3) এ প্রদত্ত x, C, I, P, a, b, s চলরাশিগুলোর মধ্যে সম্পর্কের একটি গাণিতিক মডেল রয়েছে। এই চলরাশিগুলো নিম্নলিখিতভাবে শ্রেণিবদ্ধ করা যায়

স্বাধীন	x
নির্ভরশীল	C, I, P
প্রাচল	a, b, s

পণ্য উৎপাদককারী x, a, b, s এর মান জেনে P নির্ধারণ করতে পারবেন।

ধাপ 3 : (3) থেকে, আমরা লক্ষ করি যে সম বিচ্ছেদন বিন্দু (break even point) এর জন্য (অর্থাৎ যেখানে লাভ ও ক্ষতি কোনোটিই হয় না) আমরা অবশ্যই পাই P = 0, অর্থাৎ $x = \dfrac{a}{s-b}$ একক

ধাপ 4 এবং 5 : সম বিচ্ছেদন বিন্দুর দৃষ্টিকোণ থেকে এই সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যায় যে, যদি সংস্থাটি কিছু পরিমাণ পণ্য যা $x = \dfrac{a}{s-b}$ একক অপেক্ষা কম উৎপাদন করে তবে, ওই সংস্থাটি ক্ষতির সম্মুখীন হবে এবং যদি সংস্থাটি অধিক সংখ্যক পণ্য উৎপাদন করে, অর্থাৎ $\dfrac{a}{s-b}$, একক অপেক্ষা বেশি, তবে এটি অধিক লাভ অর্জন করবে। তথাপি, যদি সম বিচ্ছেদন বিন্দুটি অবাস্তব প্রমাণিত হয়, তবে অন্য একটি মডেল প্রয়োগ করা যেতে পারে অথবা নগদ ধারা (cash flow) সম্পর্কিত অনুমানগুলো সংশোধন করা যেতে পারে।

মন্তব্য (3) থেকে, আমরা পাই

$$\frac{dP}{dx} = s - b$$

এর অর্থ হল x এর সাপেক্ষে P এর পরিবর্তনের হার $s - b$ রাশির পরিমাণের উপর নির্ভর করে, যা প্রতিটি পণ্যের বিক্রয়মূল্য এবং পরিবর্তনশীল ব্যয়ের অন্তরফলের সমান। অতএব এইভাবে লাভ

অর্জনের জন্য আমাদের ইতিবাচক হওয়া উচিত এবং অধিক পরিমাণে লাভের জন্য আমাদের প্রচুর পরিমাণে পণ্য উৎপাদন করতে হবে এবং একই সময়ে পরিবর্তনশীল ব্যয় হ্রাস করার চেষ্টা করতে হবে।

উদাহরণ 7 ধরো একটি ট্যাঙ্কে 1000 লিটার লবণ জল আছে, যার প্রতি লিটারে 250 গ্রাম লবন থাকে। প্রতি লিটারে 200 গ্রাম লবন যুক্ত এই জল একটি ট্যাঙ্কে মিনিটে 25 লিটার হারে প্রবাহিত হয় এবং মিশ্রণটি একই হারে ট্যাঙ্ক থেকে বের হয়। মনে করো মিশ্রণটিকে সব সময় নাড়িয়ে সম ঘনত্বে রাখা হয়। যে-কোনো সময় t তে ট্যাঙ্কে লবনের পরিমাণ কত হবে ?

সমাধান ধাপ 1 পরিস্থিতিটি সহজেই সনাক্তকরনযোগ্য।

ধাপ 2 ধরো $y = y\ (t)$ ট্যাঙ্কে লবনজলের অন্তর্মুখী ও বহির্মুখী প্রবাহ শুরু হওয়ার পর t সময়ে (মিনিটে), ট্যাঙ্কে থাকা লবনের পরিমান (কেজিতে) সূচিত করে। আরও মনে করো যে y হল একটি অন্তরকলজ অপেক্ষক।

যখন $t = 0$, অর্থাৎ লবন জলের অন্তর্মুখী ও বর্হিমূখী প্রবাহ শুরু হওয়ার পূর্বে

$$y = 250 \text{ গ্রাম} \times 1000 = 250 \text{ কেজি}$$

লক্ষ করো y এর পরিবর্তন মিশ্রণটির অন্তর্মুখী ও বহির্মুখী প্রবাহের কারণে ঘটে।

এখন লবন জলের অন্তর্মুখী প্রবাহ প্রতি মিনিটে 5 কেজি (যেহেতু 25×200 গ্রাম $= 5$ কেজি) লবন ট্যাঙ্কে বহন করে আনে এবং লবন জলের বহির্মুখী প্রবাহ প্রতিমিনিটে $25\left(\dfrac{y}{1000}\right) = \dfrac{y}{40}$ কেজি লবন

(যেহেতু t, সময়ে ট্যাঙ্কে থাকা লবনের পরিমাণ $\dfrac{y}{1000}$ কেজি) ট্যাঙ্ক থেকে বের করে দেয়।

তাহলে, t এর সাপেক্ষে লবন জলে লবণের পরিবর্তনের হার হবে

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(কেন?)}$$

বা

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \text{... (1)}$$

এটি প্রদত্ত সমস্যার একটি গাণিতিক মডেল দেয়।

ধাপ 3 সমীকরণ (1) হল একটি রৈখিক সমীকরণ এবং এটি সহজেই সমাধান করা যেতে পারে। সমীকরণ (1) এর সমাধান নীচে দেওয়া হল

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \text{ বা } y\ (t) = 200 + C\ e^{-\frac{t}{40}} \qquad \text{... (2)}$$

যেখানে C হল সমাকলণ ধ্রুবক।

লক্ষ করো যখন $t = 0$, তখন $y = 250$ হয়। সুতরাং, $250 = 200 + C$

বা $C = 50$

তাহলে সমীকরণ (2) থেকে পাওয়া যায়

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \quad \dots (3)$$

বা $$\frac{y-200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

বা $$e^{-\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

সুতরাং $$t = 40\log_e\left(\frac{50}{y-200}\right) \quad \dots (4)$$

এখানে, সমীকরণ (4) থেকে পাওয়া যায় t সময়ে ট্যাঙ্কে লবণের পরিমান হলো y কেজি।

ধাপ 4 যেহেতু $e^{-\frac{t}{40}}$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক, সমীকরণ (3), থেকে আমরা সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি যে সকল সময়েই $y > 200$ হবে। অতএব, ট্যাঙ্কে থাকা লবণের ন্যূনতম পরিমাণ হলো 200 কেজি।

এছাড়াও, সমীকরণ (4) থেকে আমরা সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারি যে $t > 0$ হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $0 < y - 200 < 50$ হয় অর্থাৎ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $200 < y < 250$ হয়, অর্থাৎ ট্যাঙ্কে লবন জলের অন্তর্মুখী এবং বহির্মুখী প্রবাহ শুরু হওয়ার পর লবণের পরিমাণ 200 কেজি ও 250 কেজির মধ্যে হবে।

গাণিতিক মডেলিং এর সীমাবদ্ধতা
(Limitations of Mathematical Modelling)

আজ পর্যন্ত অনেক গাণিতিক মডেলের বিকাশসাধন হয়েছে এবং হাজারো পরিস্থিতির অন্তর্নিহিত বিষয় জানতে এবং বুঝতে এর সফল প্রয়োগ করা হয়েছে। কিছু বিষয় যেমন গাণিতিক পদার্থ বিজ্ঞান, গাণিতিক অর্থনীতি, অপারেশন রিসার্চ, জৈব গণিত ইত্যাদির অনেকাংশই হল গাণিতিক মডেলিং এর সমার্থক। কিন্তু এখনও আরও বৃহৎ সংখ্যক পরিস্থিতি রয়েছে যাদের মডেল তৈরি করতে হবে। এর পেছনের কারণ হল হয় পরিস্থিতিটি খুবই জটিল অথবা গঠনকৃত গাণিতিক মডেলগুলো গাণিতিকিভাবে গ্রহণযোগ্য নয়।

শক্তিশালী কম্পিউটার এবং সুপার কম্পিউটারগুলোর বিকাশ আমাদের অনেক পরিস্থিতির (এমনকি জটিল পরিস্থিতির) গাণিতিকভাবে মডেল তৈরি করতে সক্ষম করেছে। এই দ্রুত এবং উন্নত

কম্পিউটারগুলোর কারণে, আরও বাস্তবসম্মত মডেল প্রস্তুত করা সম্ভব হয়েছে যা পর্যবেক্ষণের সাপেক্ষে অধিকতর যুক্তিসঙ্গত হয়।

যাহোক, আমাদের কাছে বিভিন্ন প্রাচল বা চল রাশিগুলো বাছাই করার জন্য এবং কোন গাণিতিক মডেলে ব্যবহৃত এসব প্রাচল বা চল রাশিগুলোর মান নির্ধারনের জন্য উত্তম রূপরেখা নেই। তথাপি, আমরা পাঁচ বা ছয়টি প্রাচল বা চলরাশি বাছাই করে যে-কোনো তথ্যে বসিয়ে যুক্তিসঙ্গতভাবে সঠিক মডেল প্রস্তুত করতে পারি। তাদের সঠিকভাবে অনুমান করার জন্য আমাদের ন্যূনতম সংখ্যক প্রাচল বা চলরাশির প্রয়োজন। বৃহৎ বা জটিল পরিস্থিতিতে গাণিতিক মডেলিংয়ের নিজস্ব বিশেষ সমস্যা রয়েছে। এই জাতীয় পরিস্থিতিগুলো সাধারণত পরিবেশ, সমুদ্র বিজ্ঞান, দূষণ নিয়ন্ত্রণ ইত্যাদির বিশ্ব মডেল অধ্যয়নে ঘটে। গাণিতিক মডেলারগণ সকল শাখা— গণিত, কম্পিউটার বিজ্ঞান, পদার্থবিদ্যা, কারিগরী বিদ্যা, সমাজ বিজ্ঞান ইত্যাদির সাথে যুক্ত সকল বিষয়গুলো সাহসের সহিত মোকাবিলা করেন।

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1.1

1. (i) স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।
   (ii) স্বসম বা প্রতিসম নয় কিন্তু সংক্রমণ।
   (iii) স্বসম এবং সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়।
   (iv) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ ।
   (v) (a) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ।
   (b) স্বসম, প্রতিসম এবং সংক্রমণ।
   (c) স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।
   (d) স্বসম বা প্রতিসম নয় কিন্তু সংক্রমণ।
   (e) স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।

3. স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।

5. স্বসম বা প্রতিসম বা সংক্রমণ কোনোটিই নয়।

9. (i) $\{1, 5, 9\}$, (ii) $\{1\}$

12. T_1, T_3 এর সহিত সম্বন্ধযুক্ত

13. সকল ত্রিভুজের সেট

14. সকল সরলরেখার সেট $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$

15. B

16. C

অনুশীলনী 1.2

1. না

2. (i) ইনজেকটিভ কিন্তু সারজেকটিভ নয়।   (ii) ইনজেকটিভ বা সারজেকটিভ কোনোটিই নয়।
   (iii) ইনজেকটিভ বা সারজেকটিভ কোনোটিই নয়।(iv) ইনজেকটিভ কিন্তু সারজেকটিভ নয়।
   (v) ইনজেকটিভ কিন্তু সারজেকটিভ নয়।

7. (i) এক-এক এবং উপরিচিত্রণ।   (ii) এক-এক বা উপরিচিত্রণ কোনোটিই নয়।

9. না

10. হ্যাঁ

11. D

12. A

অনুশীলনী 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3,1), (4,3)\}$

3. (i) $(gof)(x) = |5|x| - 2|$, $(fog)(x) = |5x - 2|$

(ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

4. f এর বিপরীত অপেক্ষক f নিজেই হয়।

5. (i) না, যেহেতু f হল বহু-এক (ii) না, যেহেতু g হল বহু-এক

(iii) হ্যাঁ, যেহেতু h হল এক-এক এবং উপরিচিত্রন

6. f^{-1} হল, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ **7.** f^{-1} হল, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$

11. f^{-1} হল, $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$ এবং $f^{-1}(c) = 3$.

13. (C) **14.** (B)

অনুশীলনী 1.4

1. (i) না (ii) হ্যাঁ (iii) হ্যাঁ (iv) হ্যাঁ (v) হ্যাঁ

2. (i) * হল দ্বিপদ, কিন্তু বিনিময়যোগ্য বা সংযোজ্য কোনোটিই নয়।

(ii) * হল দ্বিপদ, বিনিময়যোগ্য কিন্তু সংযোজ্য নয়।

(iii) * হল দ্বিপদ, বিনিময়যোগ্য এবং সংযোজ্য উভয়ই।

(iv) * হল দ্বিপদ, বিনিময়যোগ্য কিন্তু সংযোজ্য নয়।

(v) * হল দ্বিপদ কিন্তু বিনিময়যোগ্য বা সংযোজ্য কোনোটিই নয়।

(vi) * দ্বিপদ নয়।

3.

$\wedge$	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ এবং $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) হ্যাঁ (iii) 1

5. হ্যাঁ

6. (i) $5 * 7 = 35$, $20 * 16 = 80$ (ii) হ্যাঁ (iii) হ্যাঁ (iv) 1 (v) 1

7. না **8.** * হল বিনিময়যোগ্য এবং সংযোজ্য উভয়ই; **N** সেটে * এর কোনো একসম উপাদান নেই।

9. (ii) , (iv), (v) হল বিনিময়যোগ্য; (v) হল সংযোজ্য **10.** (v)

11. একসম উপাদানের অস্তিত্ব নেই

12. (i) মিথ্যা (ii) সত্য **13.** B

অধ্যায় 1 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $g(y)=\frac{y-7}{10}$ **2.** f এর বিপরীত অপেক্ষক f নিজেই

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** না **10.** $n!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$, (ii) F^{-1} এর অস্তিত্ব নেই। **12.** না

15. হ্যাঁ **16.** A **17.** B **18.** না

19. B

অনুশীলনী 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ **10.** $-\frac{\pi}{4}$ **11.** $\frac{3\pi}{4}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

অনুশীলনী 2.2

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ **6.** $\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$ **7.** $\frac{x}{2}$ **8.** $\frac{\pi}{4}-x$

9. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ **10.** $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** 0

13. $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\frac{\pi}{3}$

17. $\frac{-\pi}{4}$ **18.** $\frac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

21. B

অধ্যায় 2 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **13.** $x = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$ **14.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. D **16.** C **17.** C

অনুশীলনী 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ অথবা $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

অনুশীলনী 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B-C=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x=3, y=3$ **10.** $x=3, y=6, z=9, t=6$

11. $x=3, y=-4$ **12.** $x=2, y=4, w=3, z=1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k=1$

19. (a) 15000 টাকা, 15000 টাকা (b) 5000 টাকা, 25000 টাকা

20. 20160 টাকা **21.** A **22.** B

অনুশীলনী 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

অনুশীলনী 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব নেই

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** বিপরীত অপেক্ষকের অস্তিত্ব নেই

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

অধ্যায় 3 এর বিবিধ অনুশীলনী

6. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $x = -1$ **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) বাজার - I এর মোট রাজস্ব = 46000 টাকা

বাজার - II এর মোট রাজস্ব = 53000 টাকা

(b) 15000 টাকা, 17000 টাকা

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

অনুশীলনী 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x=\pm\sqrt{3}$, (ii) $x=2$ **8.** (B)

অনুশীলনী 4.2

15. C **16.** C

অনুশীলনী 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y=2x$, (ii) $x-3y=0$ **5.** (D)

অনুশীলনী 4.4

1. (i) $M_{11}=3, M_{12}=0, M_{21}=-4, M_{22}=2, A_{11}=3, A_{12}=0, A_{21}=4, A_{22}=2$

(ii) $M_{11}=d, M_{12}=b, M_{21}=c, M_{22}=a$

$A_{11}=d, A_{12}=-b, A_{21}=-c, A_{22}=a$

2. (i) $M_{11}=1, M_{12}=0, M_{13}=0, M_{21}=0, M_{22}=1, M_{23}=0, M_{31}=0, M_{32}=0,$ $M_{33}=1,$

$A_{11}=1, A_{12}=0, A_{13}=0, A_{21}=0, A_{22}=1, A_{23}=0, A_{31}=0, A_{32}=0, A_{33}=1$

(ii) $M_{11}=11, M_{12}=6, M_{13}=3, M_{21}=-4, M_{22}=2, M_{23}=1, M_{31}=-20, M_{32}=-13,$ $M_{33}=5$

$A_{11}=11, A_{12}=-6, A_{13}=3, A_{21}=4, A_{22}=2, A_{23}=-1, A_{31}=-20, A_{32}=13, A_{33}=5$

3. 7 **4.** $(x-y)(y-z)(z-x)$ **5.** (D)

অনুশীলনী 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $-\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

অনুশীলনী 4.6

1. সংগত **2.** সংগত **3.** অসংগত

4. সংগত **5.** অসংগত **6.** সংগত

7. $x = 2, y = -3$ **8.** $x = \dfrac{-5}{11}, \; y = \dfrac{12}{11}$ **9.** $x = \dfrac{-6}{11}, y = \dfrac{-19}{11}$

10. $x = -1, y = 4$ **11.** $x = 1, \; y = \dfrac{1}{2}, \; z = \dfrac{-3}{2}$

12. $x = 2, y = -1, z = 1$ **13.** $x = 1, y = 2, z = -1$

14. $x = 2, y = 1, z = 3$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$

16. প্রতি কেজি পেঁয়াজের মূল্য = 5 টাকা

প্রতি কেজি গমের মূল্য = 8 টাকা

প্রতি কেজি চাউলের মূল্য = 8 টাকা

অধ্যায় 4 এর বিবিধ অনুশীলনী

3. 1 **5.** $x = \frac{-a}{3}$ **7.** $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $-2(x^3 + y^3)$ **10.** xy **16.** $x = 2, y = 3, z = 5$

17. A **18.** A **19.** D

অনুশীলনী 5.1

2. $x = 3$ বিন্দুতে f সন্তত হয়;

3. (a), (b), (c) এবং (d) সকলেই সন্তত অপেক্ষক

5. $x = 0$ এবং $x = 2$ বিন্দুগুলোতে f সন্তত হয়, কিন্তু $x = 1$ বিন্দুতে সন্তত নয়।

6. $x = 2$ বিন্দুতে অসন্তত **7.** $x = 3$ বিন্দুতে অসন্তত

8. $x = 0$ বিন্দুতে অসন্তত **9.** কোন বিন্দুতে অসন্তত নয়

10. কোন বিন্দুতে অসন্তত নয় **11.** কোন বিন্দুতে অসন্তত নয়

12. $x = 1$ বিন্দুতে f অসন্তত। **13.** $x = 1$ বিন্দুতে f সন্তত নয়

14. $x = 1$ এবং $x = 3$ বিন্দুগুলোতে f সন্তত নয়

15. $x = 1$ হল অসন্ততার একমাত্র বিন্দু।

16. সন্তত

17. $a = b + \frac{2}{3}$

18. λ এর কোনো মান নেই যাতে $x = 0$ বিন্দুতে f সন্তত হয় কিন্তু λ এর যে-কোনো মানের জন্য $x = 1$ বিন্দুতে f সন্তত হয়।

20. $x = \pi$ বিন্দুতে f সন্তত হয়। **21.** (a), (b) এবং (c) সকলেই সন্তত

22. সব $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য কোসাইন (cosine) অপেক্ষক সন্তত হয়, $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ মানগুলো ছাড়া অপর সব বাস্তব মানের জন্য কোস্যাকেন্ট (cosecant) অপেক্ষক সন্তত হয়, $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ মানগুলো ছাড়া অপর সব বাস্তব মানের জন্য স্যাকেন্ট (secant) অপেক্ষক সন্তত হয় এবং $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ মানগুলো ছাড়া অপর সব বাস্তব মানের জন্য কোটেনজেন্ট (cotangent) অপেক্ষক সন্তত হয়।

23. অসন্ততার কোনো বিন্দু নেই

24. হ্যাঁ, সব $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য f সন্তত হয়।

25. সব $x \in \mathbf{R}$ এর জন্য f সন্তত হয়।

26. $k = 6$

27. $k = \frac{3}{4}$

28. $k = \frac{-2}{\pi}$

29. $k = \frac{9}{5}$

30. $a = 2, b = 1$

34. অসন্ততার কোনো বিন্দু নেই।

অনুশীলনী 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$

2. $-\cos x \sin(\sin x)$

3. $a \cos(ax + b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a \cos(ax + b) \sec(cx + d) + c \sin(ax + b) \tan(cx + d) \sec(cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3 - 3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\, x}{\sin x^2 \sqrt{\sin 2x^2}}$

8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

অনুশীলনী 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$

2. $\dfrac{2}{\cos y - 3}$

3. $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$

5. $-\dfrac{(2x + y)}{(x + 2y)}$

6. $-\dfrac{(3x^2 + 2xy + y^2)}{(x^2 + 2xy + 3y^2)}$

7. $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$

8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$

9. $\dfrac{2}{1 + x^2}$

10. $\dfrac{3}{1 + x^2}$

11. $\dfrac{2}{1 + x^2}$

12. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$

13. $\dfrac{-2}{1 + x^2}$

14. $\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

অনুশীলনী 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$
2. $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$
3. $3x^2 e^{x^3}$
4. $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1} e^{x})}{1+e^{-2x}}$
5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$
6. $e^x + 2xe^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$
7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x > 0$
8. $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$
9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x(\log x)^2}, x > 0$
10. $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right)\sin(\log x + e^x), x > 0$

অনুশীলনী 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\,[\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$
2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{1}{x-5}\right]$
3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$
4. $x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x}\cos x \log 2$
5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2 + 70x + 133)$
6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right] + x^{1+\frac{1}{x}}\left(\dfrac{x+1-\log x}{x^2}\right)$
7. $(\log x)^{x-1}\,[1 + \log x \,.\, \log(\log x)] + 2x^{\log x - 1} \,.\, \log x$
8. $(\sin x)^x(x \cot x + \log \sin x) + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x - x^2}}$
9. $x^{\sin x}\left[\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right] + (\sin x)^{\cos x}\,[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$

10. $x^{x\cos x}[\cos x \,.\, (1+\log x) - x\sin x\log x] - \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x[1 - x\tan x + \log(x\cos x)] + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\dfrac{yx^{y-1} + y^x\log y}{x^y\log x + xy^{x-1}}$

13. $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y - x\log y}{x - y\log x}\right)$

14. $\dfrac{y\tan x + \log\cos y}{x\tan y + \log\cos x}$

15. $\dfrac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2x}{1+x^2} + \dfrac{4x^3}{1+x^4} + \dfrac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$

অনুশীলনী 5.6

1. t^2

2. $\dfrac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\dfrac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$

6. $-\cot\dfrac{\theta}{2}$

7. $-\cot 3t$

8. $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$

10. $\tan\theta$

অনুশীলনী 5.7

1. 2

2. $380\,x^{18}$

3. $-x\cos x - 2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$

5. $x(5 + 6\log x)$

6. $2e^x(5\cos 5x - 12\sin 5x)$

7. $9\,e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$

8. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$

10. $-\dfrac{\sin(\log x) + \cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\operatorname{cosec}^2 y$

অধ্যায় 5 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. $27(3x^2-9x+5)^8(2x-3)$ **2.** $3\sin x\cos x(\sin x-2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\frac{3\cos 2x}{x}-6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2x+7}}+\frac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\frac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\frac{1}{x}+\frac{\log(\log x)}{x}\right], x>1$

8. $(a\sin x-b\cos x)\sin(a\cos x+b\sin x)$

9. $(\sin x-\cos x)^{\sin x-\cos x}(\cos x+\sin x)(1+\log(\sin x-\cos x)), \sin x>\cos x$

10. $x^x(1+\log x)+ax^{a-1}+a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\frac{x^2-3}{x}+2x\log x\right]+(x-3)^{x^2}\left[\frac{x^2}{x-3}+2x\log(x-3)\right]$

12. $\frac{6}{5}\cot\frac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\frac{\sec^3 t}{at}, 0<t<\frac{\pi}{2}$

অনুশীলনী 6.1

1. (a) 6π সেমি^{2}/সেকেন্ড (b) 8π সেমি^{2}/সেকেন্ড

2. $\frac{8}{3}$ সেমি^{2}/সেকেন্ড **3.** 60π সেমি^{2}/সেকেন্ড **4.** 900 সেমি^{3}/সেকেন্ড

5. 80π সেমি^{2}/সেকেন্ড **6.** 1.4π সেমি/সেকেন্ড

7. (a) -2 সেমি/মিনিট (b) 2 সেমি^{2}/মিনিট

8. $\frac{1}{\pi}$ সেমি/সেকেন্ড **9.** 400π সেমি^{3}/সেকেন্ড **10.** $\frac{8}{3}$ সেমি/ সেকেন্ড

11. (4, 11) এবং $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π সেমি^{3}/সেকেন্ড

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ সেমি/সেকেন্ড **15.** 20.967 টাকা

16. 208 টাকা **17.** B **18.** D

অনুশীলনী 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4},\infty\right)$ (b) $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ এবং $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ এর জন্য ক্ষয়িষ্ণু এবং $x > -1$ এর জন্য বর্ধিষ্ণু

(b) $x > -\frac{3}{2}$ এর জন্য ক্ষয়িষ্ণু এবং $x < -\frac{3}{2}$ এর জন্য বর্ধিষ্ণু

(c) $-2 < x < -1$ এর জন্য বর্ধিষ্ণু এবং $x < -2$ ও $x > -1$ এর জন্য ক্ষয়িষ্ণু

(d) $x < -\frac{9}{2}$ এর জন্য বর্ধিষ্ণু এবং $x > -\frac{9}{2}$ এর জন্য ক্ষয়িষ্ণু

(e) $(1, 3)$ এবং $(3, \infty)$ বিন্দুগুলোতে বর্ধিষ্ণু, $(-\infty, -1)$ এবং $(-1, 1)$ বিন্দুগুলোতে ক্ষয়িষ্ণু।

8. $0 < x < 1$ এবং $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a > -2$ **19.** D

অনুশীলনী 6.3

1. 764 **2.** $\frac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

5. 1 **6.** $\frac{-a}{2b}$ **7.** $(3, -20)$ এবং $(-1, 12)$

8. $(3, 1)$ **9.** $(2, -9)$

10. (i) $y + x + 1 = 0$ এবং $y + x - 3 = 0$

11. বক্ররেখাটির উপর এমন কোনো স্পর্শক নেই যার প্রবণতা 2 ।

12. $y = \frac{1}{2}$ **13.** (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$

14. (i) স্পর্শক : $10x + y = 5$; অভিলম্ব: $x - 10y + 50 = 0$

(ii) স্পর্শক : $y = 2x + 1$; অভিলম্ব: $x + 2y - 7 = 0$

(iii) স্পর্শক : $y = 3x - 2$; অভিলম্ব: $x + 3y - 4 = 0$

(iv) স্পর্শক : $y = 0$; অভিলম্ব: $x = 0$

(v) স্পর্শক : $x + y - \sqrt{2} = 0$; অভিলম্ব $x = y$

15. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$

17. (0, 0), (3, 27) **18.** (0, 0), (1, 2), (–1, –2)

19. $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my - am^2(2 + 3m^2) = 0$

21. $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

22. $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$

24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

25. $48x - 24y = 23$ **26.** D **27.** A

অনুশীলনী 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.775

(iv) 0.208 (v) 0.999 (vi) 1.968

(vii) 2.962 (viii) 3.996 (ix) 3.009

(x) 20.025 (xi) 0.060 (xii) 2.948

(xiii) 3.004 (xiv) 7.904 (xv) 2.001

2. 28.21 **3.** –34.995 **4.** $0.03\, x^3$ m^3

5. $-0.12\, x^2$ m^2 **6.** $3.92\, \pi$ m^3 **7.** $2.16\, \pi$ m^3

8. D **9.** C

অনুশীলনী 6.5

1. (i) অবম মান = 3 (ii) অবম মান = – 2

(iii) চরম মান = 10 (iv) অবম মান বা চরম মান কোনোটিই নয়

2. (i) অবম মান $= -1$; চরম মান নেই

(ii) চরম মান $= 3$; অবম মান নেই

(iii) অবম মান $= 4$; চরম মান $= 6$

(iv) অবম মান $= 2$; চরম মান $= 4$

(v) অবম মান বা চরম মান কোনোটিই নয়।

3. (i) $x = 0$ তে স্থানীয় অবম মান আছে, স্থানীয় অবম মান $= 0$

(ii) $x = 1$ এ স্থানীয় অবম মান আছে,স্থানীয় অবম মান $= -2$

$x = -1$ এ স্থানীয় চরম মান আছে, স্থানীয় চরম মান $= 2$

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ এ স্থানীয় চরম মান আছে,স্থানীয় চরম মান $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ এ স্থানীয় চরম মান আছে, স্থানীয় চরম মান $= \sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ এ স্থানীয় অবম মান আছে, স্থানীয় অবম মান $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$এ স্থানীয় চরম মান আছে, স্থানীয় চরম মান $= 19$

$x = 3$ এ স্থানীয় অবম মান আছে, স্থানীয় অবম মান $= 15$

(vi) $x = 2$ তে স্থানীয় অবম মান আছে, স্থানীয় অবম মান $= 2$

(vii) $x = 0$ তে স্থানীয় চরম মান আছে, স্থানীয় চরম মান $= \frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ তে স্থানীয় চরম মান আছে, স্থানীয় চরম মান $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) পরম ক্ষুদ্রতম মান $= -8$, পরম বৃহত্তম মান $= 8$

(ii) পরম ক্ষুদ্রতম মান $= -1$, পরম বৃহত্তম মান $= \sqrt{2}$

(iii) পরম ক্ষুদ্রতম মান $= -10$, পরম বৃহত্তম মান $= 8$

(iv) পরম ক্ষুদ্রতম মান = 19, পরম বৃহত্তম মান = 3

6. সর্বাধিক লাভ = 113 একক

7. $x = 2$ তে অবম মান আছে, অবম মান = – 39, $x = 0$ তে চরম মান আছে, চরম মান = 25.

8. $x = \frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{5\pi}{4}$ বিন্দুতে

9. চরম মান = $\sqrt{2}$

10. $x = 3$ তে চরম মান আছে, চরম মান 89; $x = -2$ তে চরম মান আছে, চরম মান = 139

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ তে চরম মান আছে, চরম মান = 2π; $x = 0$ তে অবম মান আছে, অবম মান = 0

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 সেমি **18.** $x = 5$ সেমি

21. ব্যাসার্ধ = $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ সেমি এবং উচ্চতা = $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ সেমি

22. $\frac{112}{\pi+4}$ সেমি, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ সেমি **27.** A **28.** D **29.** C

অধ্যায় 6 এর বিবিধ অনুশীলনী

1. (a) 0.677 (b) 0.497

3. $b\sqrt{3}$ সেমি²/সেকেণ্ড **4.** $x + y - 3 = 0$

6. (i) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x < -1$ এবং $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **9.** 1000 টাকা

11. দৈর্ঘ্য = $\frac{20}{\pi+4}$ মিটার, প্রস্থ = $\frac{10}{\pi+4}$ মিটার

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ তে স্থানীয় চরম মান আছে (ii) $x = 2$ তে স্থানীয় অবম মান আছে

(iii) $x = -1$তে নতি পরিবর্তন বিন্দুটি আছে।

14. পরম বৃহত্তম মান = $\frac{5}{4}$, চরম ক্ষুদ্রতম মান = 1

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **19.** A **20.** B **21.** A

22. B **23.** A **24.** A

সংযোজিত বিষয়বস্তু
(Supplementary Material)

অধ্যায় 5

উপপাদ্য 5 (উপপাদ্য 5 এর শিরোনামের অধীনে 173 পৃষ্ঠায় থাকতে হবে)

(i) সূচকীয় অপেক্ষক $f(x) = e^x$ এর অন্তরকলজ

যদি $f(x) = e^x$, তাহলে

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 \text{ [যেহেতু } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$$

অতএব, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

(ii) লগারিদমিক অপেক্ষক $f(x) = \log_e x$ এর অন্তরকলজ

যদি $f(x) = \log_e x$, তাহলে

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \text{ [যেহেতু } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e(1+h)}{h} = 1]$$

অতএব, $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$.

NOTES