দ্বাদশ শ্রেণী

গণিত ওয়ার্কবুক

আজাদি কা অমৃত মহোৎসব

এক ত্রিপুরা, শ্রেষ্ঠ ত্রিপুরা

প্রস্তুতকরণ

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা সরকার।

দ্বাদশ শ্রেণির গণিত ওয়ার্কবুক

প্রথম প্রকাশ- সেপ্টেম্বর, ২০২১

প্রচ্ছদ : অশোক দেব, শিক্ষক

অক্ষর বিন্যাস : এস সি ই আর টি, ত্রিপুরা
সহযোগিতায় জেলা শিক্ষা আধিকারীকের কার্যালয়,
পশ্চিম ত্রিপুরা।

মুদ্রক : সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ
ইন্ডাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড
১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২।

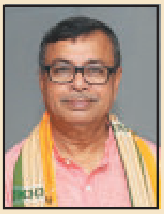
প্রকাশক

অধিকর্তা

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা।

রতন লাল নাথ
মন্ত্রী
শিক্ষা দপ্তর
ত্রিপুরা সরকার

বার্তা



শিক্ষার প্রকৃত বিকাশের জন্য, শিক্ষাকে যুগোপযোগী করে তোলার জন্য প্রয়োজন শিক্ষাসংক্রান্ত নিরন্তর গবেষণা। প্রয়োজন শিক্ষা সংশ্লিষ্ট সকলকে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রশিক্ষিত করা এবং প্রয়োজনীয় শিখন সামগ্রী, পাঠ্যক্রম ও পাঠ্যপুস্তকের বিকাশ সাধন করা। এস সি ই আর টি ত্রিপুরা রাজ্যের শিক্ষার বিকাশে এসব কাজ সুনামের সঙ্গে করে আসছে। শিক্ষার্থীর মানসিক, বৌদ্ধিক ও সামাজিক বিকাশের জন্য এস সি ই আর টি পাঠ্যক্রমকে আরো বিজ্ঞানসম্মত, নান্দনিক এবং কার্যকর করবার কাজ করে চলেছে। করা হচ্ছে সুনির্দিষ্ট পরিকল্পনার অধীনে।

এই পরিকল্পনার আওতায় পাঠ্যক্রম ও পাঠ্যপুস্তকের পাশাপাশি শিশুদের শিখন সক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য তৈরি করা হয়েছে ওয়ার্ক বুক বা অনুশীলন পুস্তক। প্রসঙ্গত উল্লেখ্য, ছাত্র-ছাত্রীদের সমস্যার সমাধানকে সহজতর করার লক্ষ্যে এবং তাদের শিখনকে আরো সহজ ও সাবলীল করার জন্য রাজ্য সরকার একটি উদ্যোগ গ্রহণ করেছে, যার নাম 'প্রয়াস'। এই প্রকল্পের অধীনে এস সি ই আর টি এবং জেলা শিক্ষা আধিকারিকরা বিশিষ্ট শিক্ষকদের সহায়তা গ্রহণের মাধ্যমে প্রথম থেকে দ্বাদশ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য ওয়ার্ক বুকগুলো সুচারুভাবে তৈরি করেছেন। ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত বিজ্ঞান, গণিত, ইংরেজি, বাংলা ও সমাজবিদ্যার ওয়ার্ক বুক তৈরি হয়েছে। নবম দশম শ্রেণির জন্য হয়েছে গণিত, বিজ্ঞান, সমাজবিদ্যা, ইংরেজি ও বাংলা। একাদশ দ্বাদশ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য ইংরেজি, বাংলা, হিসাবশাস্ত্র, পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, অর্থনীতি এবং গণিত ইত্যাদি বিষয়ের জন্য তৈরি হয়েছে ওয়ার্ক বুক। এইসব ওয়ার্ক বুকের সাহায্যে ছাত্র-ছাত্রীরা জ্ঞানমূলক বিভিন্ন কার্য সম্পাদন করতে পারবে এবং তাদের চিন্তা প্রক্রিয়ার যে স্বাভাবিক ছন্দ রয়েছে, তাকে ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে। বাংলা ও ইংরেজি উভয় ভাষায় লিখিত এইসব অনুশীলন পুস্তক ছাত্র-ছাত্রীদের মধ্যে বিনামূল্যে বিতরণ করা হবে।

এই উদ্যোগে সকল শিক্ষার্থী অতিশয় উপকৃত হবে। আমার বিশ্বাস, আমাদের সকলের সক্রিয় এবং নিরলস অংশগ্রহণের মাধ্যমে ত্রিপুরার শিক্ষাজগতে একটি নতুন দিগন্তের উন্মেষ ঘটবে। ব্যক্তিগত ভাবে আমি চাই যথাযথ জ্ঞানের সঙ্গে সঙ্গে শিক্ষার্থীর সামগ্রিক বিকাশ ঘটুক এবং তার আলো রাজ্যের প্রতিটি কোণে ছড়িয়ে পড়ুক।

রতন লাল নাথ

(রতন লাল নাথ)

উপদেষ্টা :

শ্রী রূপন রায়
(ভারপ্রাপ্ত জেলা শিক্ষা আধিকারিক, পশ্চিম ত্রিপুরা)

শ্রী কাজল কুমার ভৌমিক
(দায়িত্বপ্রাপ্ত আধিকারিক, পশ্চিম ত্রিপুরা জেলা শিক্ষা আধিকারিকের কার্য্যালয়)

শ্রী উত্তম কুমার দেবনাথ
(দায়িত্বপ্রাপ্ত আধিকারিক, পশ্চিম ত্রিপুরা জেলা শিক্ষা আধিকারিকের কার্য্যালয়)

শ্রী দেবব্রত সরকার
(পেডাগোজি কো-অর্ডিনেটর, পশ্চিম ত্রিপুরা জেলা শিক্ষা আধিকারিকের কার্য্যালয়)

লেখক :

শ্রী সুমন দাস, *পিজিটি* (গণিত)
প্রশান্ত সরকার, *পিজিটি* (গণিত)
সৌমেন দেবনাথ, *পিজিটি* (গণিত)
মধুমিতা চৌধুরী, *পিজিটি* (গণিত)

পরিমার্জনায় :

শ্রী মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক।
শ্রী জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক।
শ্রী অমিতাভ মজুমদার, শিক্ষক।

সূচী

অধ্যায়- 1

সম্বন্ধ ও অপেক্ষক
(Relations and Functions)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

সম্বন্ধ :

- A সেট থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ হল $A\times B$ সেটের যে-কোনো উপসেট।
- p সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি সেট থেকে q সংখ্যক পদবিশিষ্ট আরেকটি সেটে মোট সম্বন্ধের সংখ্যা হল 2^{pq}।
- কোনো সেট A তে সম্বন্ধ হল $A\times A$ এর যে-কোনো উপসেট।
- কোনো সেট A-তে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ R কে
  - i) স্বসম সম্বন্ধ বলা হবে যদি সব $a\in A$-এর জন্য $(a,a)\in R$ হয়।
  - ii) প্রতিসম সম্বন্ধ বলা হবে যদি সব $a,b\in A$ এর জন্য $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$ হয়।
  - iii) সংক্রমণ সম্বন্ধ বলা হবে যদি সব $a,b,c\in R$ এর জন্য $(a,b)\in R$ এবং $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$ হয়।
  - iv) বিপ্রতিসম সম্বন্ধ বলা হবে যদি সব $a,b\in A$ এর জন্য $(a,b)\in R$ এবং $(b,a)\in R \Rightarrow a=b$ হয়।
  - v) সমতুল্য সম্বন্ধ হবে যদি এটি একই সঙ্গে স্বসম, প্রতিসম ও সংক্রমণ সম্বন্ধ হয়।
- **কিছু ফলাফল :**
  - i) কোনো সেট A-তে সংজ্ঞায়িত দুটি সমতুল্য সেটের ছেদ সেট A-তে সমতুল্য।
  - ii) কোনো সেট A-তে সংজ্ঞায়িত দুটি সমতুল্য সেটের যোগ সেট A-তে সমতুল্য নাও হতে পারে।
  - iii) কোনো সমতুল্য সম্বন্ধের বিপরীত সম্বন্ধ একটি সমতুল্য সম্বন্ধ।
  - iv) কোনো অ-শূন্য সেট-এ সংজ্ঞায়িত অভেদ সম্বন্ধটি সর্বদা সমতুল্য সম্বন্ধ।
  - v) কোনো অ-শূন্য সেট-এ সংজ্ঞায়িত অভেদ সম্বন্ধটি সর্বদা বিপ্রতিসম সম্বন্ধ।
  - vi) কোনো অ-শূন্য সেট-এ সংজ্ঞায়িত সার্বিক সম্বন্ধটি সর্বদা সমতুল্য সম্বন্ধ।
  - vii) যদি X, Y, Z তিনটি অ-শূন্য সেট এবং $R\subseteq X\times Y$, $S\subseteq Y\times Z$ হয়, তবে R ও S সম্বন্ধের সংযোজনকে $SoR\subseteq X\times Z$ দ্বারা সূচিত করা হয়।
  - viii) যদি সেট X থেকে সেট Y-তে সম্বন্ধ R এবং সেট Y থেকে সেট Z-তে সম্বন্ধ S হয়, তবে $(RoS)^{-1}=S^{-1}oR^{-1}$।
  - ix) n সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোনো সেট A থেকে সেট A-তে মোট সম্বন্ধের সংখ্যা হল $2^{nxn}=2^{n^2}$ ।
  - x) ধরা যাক দুটি অ-শূন্য সেট A ও B-তে n সংখ্যক সাধারণ পদ আছে। তবে $A\times B$ এবং $B\times A$ সেটে সাধারণ পদের সংখ্যা $n\times n=n^2$ হবে।

অপেক্ষক :

- ধরা যাক, A ও B হল দুটি অশূণ্য সেট। তাহলে $A\times B$ সেটের একটি উপসেট f কে সেট A থেকে সেট B-তে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক বলা হবে যদি —
  - i) প্রতিটি $a\in A$ এর জন্য এমন একটি $b\in B$-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $(a,b)\in f$
  - ii) $(a,b)\in f$ এবং $(a,c)\in f \Rightarrow b=c$
- যদি f, A থেকে B সেটে একটি চিত্রণ বা অপেক্ষক হয় তবে আমরা লিখি, $f: A\rightarrow B$।

A সেটকে বলা হয় f অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল এবং B সেটকে বলা হয় f অপেক্ষকের উপ অঞ্চল। A সেটের উপাদানগুলোর প্রতিবিম্বের সেটকে f-এর প্রসার বলা হয়।

- যদি $f: A \rightarrow B$ একটি অপেক্ষক হয়, তবে $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$, সব $x, y \in A$ এর জন্য।

- **মন্তব্য :**

  i) আমরা কোনো অপেক্ষককে $f, g, h, \phi, \psi, \zeta$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করতে পারি।

  ii) একটি অপেক্ষককে চিত্রণ হিসাবেও নামকরণ করা হয়।

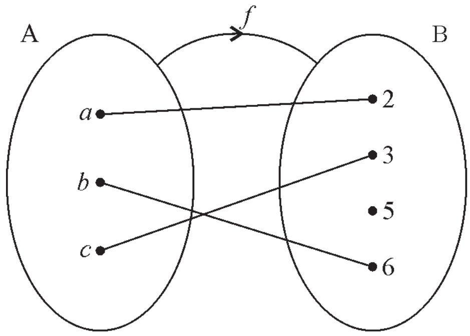
  iii) অপেক্ষক হল একটি বিশেষ প্রকারের সম্বন্ধ।

- **কিছু বিশেষ প্রকরের অপেক্ষক :**

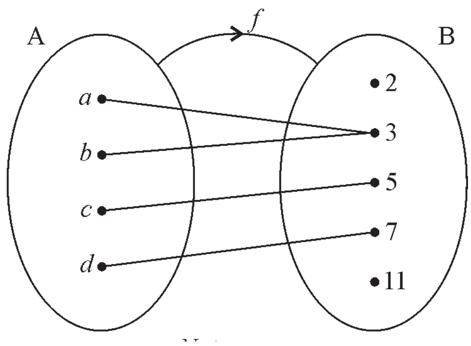
i) এক-এক অথবা ইনজেকটিভ অপেক্ষক :

একটি অপেক্ষক f কে A থেকে B সেটে এক-এক চিত্রণ বলা হবে যদি A সেটের প্রতিটি পদের জন্য B সেটে একটি অনন্য (একটি এবং কেবলমাত্র একটি) পদ থাকে।

অপরপক্ষে, B এর কোনো উপাদান নেই যেটি A এর একাধিক পদের প্রতিবিম্ব অর্থাৎ A সেটের বিভিন্ন পদের জন্য B সেটে বিভিন্ন প্রতিবিম্ব থাকে।



এক-এক চিত্রণ



এক-এক চিত্রণ নয়

গাণিতিকভাবে, একটি চিত্রণ $f: A \rightarrow B$ -কে এক-এক অথবা ইনজেকটিভ বলা হয় যদি, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, সব $x, y \in A$ এর জন্য

<u>অথবা</u>

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, সব $x, y \in A$ এর জন্য

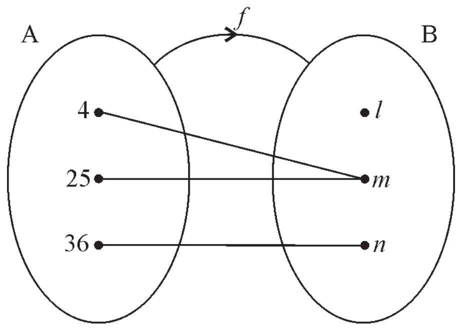
দ্রষ্টব্য : একটি অপেক্ষক যথার্থ আরোহী বা যথার্থ অবরোহী হলে এটি ঐকৈক বা এক এক হয়।

ii) বহু-একচিত্রণ বা অপেক্ষক :

একটি চিত্রণ $f: A \rightarrow B$ কে বহু-একচিত্রণ বলা হয় যদি A সেটের দুই বা ততোধিক পদের জন্য B সেটে একই প্রতিবিম্ব থাকে।

অর্থাৎ, $f: A \rightarrow B$ কে বহু-একচিত্রণ বলা হবে যদি এরূপ $x, y \in A$ এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $x \neq y$ কিন্তু $f(x) = f(y)$।

অপরপক্ষে, $f: A \to B$ -কে বহু-এক চিত্রণ বলা হবে যদি এটি এক-এক চিত্রণ না হয়।

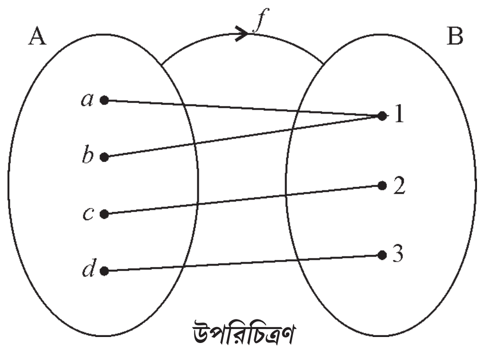


বহু-এক চিত্রণ

iii) উপরিচিত্রণ অথবা সারজেকটিভ :

একটি অপেক্ষক $f: A \to B$ -কে উপরিচিত্রণ বা সারজেকটিভ বলা হবে যদি প্রতিটি $b \in B$ এর জন্য $a \in A$ এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(a)=b$।

অপরপক্ষে, একটি অপেক্ষক $f: A \to B$ -কে সারজেকটিভ বলা হবে যদি f -চিত্রণের প্রসার ও উপঅঞ্চল সমান হয়।

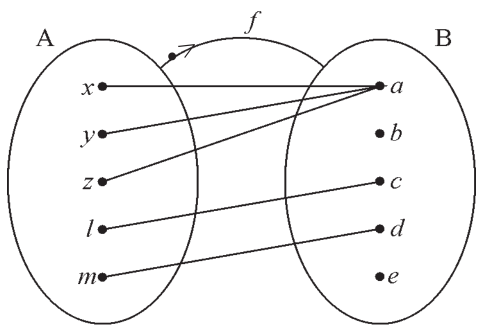


উপরিচিত্রণ

iv) অন্তঃ চিত্রণ :

একটি অপেক্ষক $f: A \to B$ -কে অন্তঃচিত্রণ বলা হবে যদি B সেটে অন্তত একটি পদের অস্তিত্ব থাকে যার A সেটে কোনো প্রাগ্‌বিম্ব নেই অর্থাৎ f -এর প্রসার $\subset f$ -এর উপঅঞ্চল।

অপরপক্ষে, $f: A \to B$ -কে অন্তঃচিত্রণ বলা হবে যদি এটি উপরিচিত্রণ না হয়।



অন্তঃচিত্রণ

v) বাইজেকটিভ (এক-এক এবং উপরিচিত্রণ)

একটি অপেক্ষক $f: A\rightarrow B$ -কে বাইজেকটিভ বলা হবে যদি অপেক্ষকটি একইসঙ্গে এক-এক এবং উপরিচিত্রণ হয়।

অপরপক্ষে, একটি অপেক্ষক $f: A\rightarrow B$ -কে বাইজেকটিভ বলা হবে, যদি

a) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,\ \forall x, y\in A$

b) সব $y\in B$ এর জন্য, এমন একটি $x\in A$ এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(x)=y$ হয়।

দ্রষ্টব্য : যদি $f: A\rightarrow A$ একটি এক-এক চিত্রণ হয় তবে এটি অবশ্যই উপরিচিত্রণ হবে।

- যদি একটি অপেক্ষক $f: A\rightarrow B$ উপরিচিত্রণ না হয়, তবে $f: A\rightarrow f(A)$ সর্বদা উপরিচিত্রণ হবে।

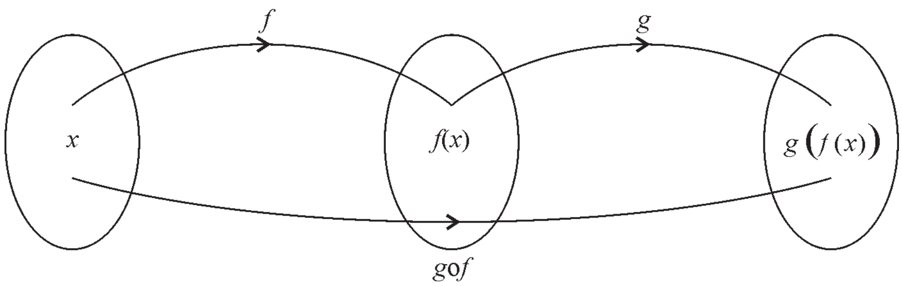
- ধরা যাক, A ও B হল দুটি সসীম সেট এবং $f: A\rightarrow B$ হল একটি অপেক্ষক।
  i) যদি f চিত্রণটি ইনজেকটিভ হয়, তবে $n(A)\leq n(B)$
  ii) যদি f চিত্রণটি সারজেকটিভ হয়, তবে $n(A)\geq n(B)$
  iii) যদি f চিত্রণটি বাইজেকটিভ হয়, তবে $n(A)=n(B)$

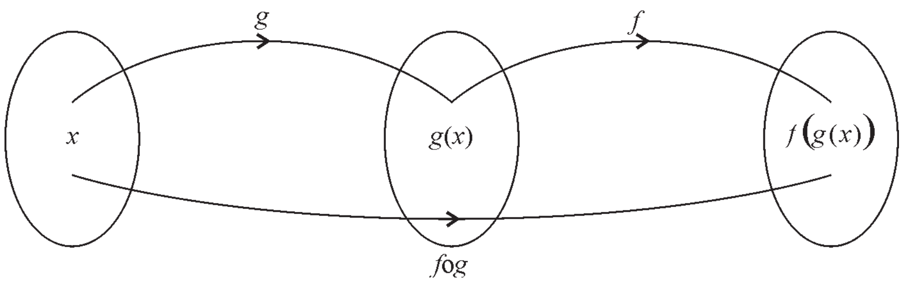
- যদি A ও B দুটি অ-শূন্য সসীম সেট এরূপ যে $n(A)=m$ এবং $n(B)=n$ হয়, তবে
  i) A থেকে B সেটে চিত্রণের সংখ্যা $= n^m$
  ii) A থেকে B সেটে এক এক চিত্রণের সংখ্যা $= \begin{cases} {}^nc_m \times m!, & \text{অর্থাৎ } {}^nP_m \text{ যদি } n\geq m \text{ হয়} \\ 0, & \text{যদি } n<m \text{ হয়} \end{cases}$
  iii) A থেকে B সেটে উপরিচিত্রণের সংখ্যা $= \begin{cases} \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r}\ {}^nc_r\, r^m, & \text{যদি } m\geq n \text{ হয়} \\ 0, & \text{যদি } m<n \text{ হয়} \end{cases}$
  iv) A থেকে B সেটে এক-এক এবং উপরিচিত্রণের সংখ্যা $= \begin{cases} n!, & \text{যদি } m=n \text{ হয়} \\ 0, & \text{যদি } m\neq n \text{ হয়} \end{cases}$

- **সংযুক্ত অপেক্ষক অথবা অপেক্ষকের অপেক্ষক :**

ধরা যাক $f: A\rightarrow B$ এবং $g: B\rightarrow C$ হল দুটি অপেক্ষক। তাহলে, সব $x\in A$ এর জন্য $gof: A\rightarrow C$ -কে $(gof)(x) = g(f(x))$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, যাকে f ও g এর সংযোজন বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : f ও g এর সংযোজন অর্থাৎ gof এর অস্তিত্ব থাকবে যদি f এর প্রসার অবশ্যই g এর সংজ্ঞার অঞ্চলের উপসেট হয়। অনুরূপে, fog-এর অস্তিত্ব থাকবে যদি g এর প্রসার অবশ্যই f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের উপসেট হয়।





কিছু ফলাফল :

i) $fog \neq gof$

ii) $(fog)oh = fo(goh)$

iii) দুটি বাইজেকটিভ-এর সংযোজন হল একটি বাইজেকটিভ।

iv) যদি $f : A \rightarrow B$ হয়, তবে $foI_A = I_Bof = f$

v) ধরা যাক, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ হল দুটি অপেক্ষক যেখানে $gof = I_A$

vi) ধরা যাক, $f : A \rightarrow B$ এবং $g : B \rightarrow C$ হল দুটি অপেক্ষক। তাহলে,

a) $gof : A \rightarrow C$ একটি উপরিচিত্রণ $\Rightarrow g : B \rightarrow C$ একটি উপরিচিত্রণ।

b) $gof : A \rightarrow C$ একটি এক-এক চিত্রণ $\Rightarrow f : A \rightarrow B$ একটি এক-এক চিত্রণ।

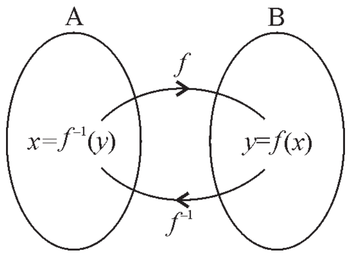
c) $gof : A \rightarrow C$ একটি উপরিচিত্রণ এবং $g : B \rightarrow C$ হল এক-এক চিত্রণ $\Rightarrow f : A \rightarrow B$ হল উপরিচিত্রণ।

d) $gof : A \rightarrow C$ হল এক-এক চিত্রণ এবং $f : A \rightarrow B$ হল উপরিচিত্রণ $\Rightarrow g : B \rightarrow C$ হল এক-এক চিত্রণ।

- **কোনো অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক :**

ধরা যাক $f : A \rightarrow B$ অপেক্ষকটি বাইজেকটিভ। তাহলে, একটি অপেক্ষক $g : B \rightarrow A$ যেটি প্রতিটি পদ $y \in B$ -কে একটি অনন্য পদ $x \in A$ -এর সাথে এমনভাবে সংযুক্ত যাতে $f(x)=y$ হয়, তাকে f -এর বিপরীত অপেক্ষক বলে।

অর্থাৎ, $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$। f -এর বিপরীত অপেক্ষককে সাধারণ f^{-1} দ্বারা সূচীত করা হয়। অর্থাৎ, যদি $f : A \rightarrow B$ একটি বাইজেকটিভ চিত্রণ হয়, তবে $f^{-1} : B \rightarrow A$ হবে যেখানে $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$.



- **কিছু ফলাফল :**
  - i) কোনো বাইজেকটিভ চিত্রণের বিপরীত চিত্রণটি অনন্য।
  - ii) কোনো বাইজেকটিভ চিত্রণের বিপরীত চিত্রণ বাইজেকটিভ হয়।
  - iii) যদি $f : A \to B$ একটি বাইজেকটিভ চিত্রণ এবং $g : B \to A$, f-এর বিপরীত চিত্রণ হয়, তবে $fog = I_B$ এবং $gof = I_A$, যেখানে I_A ও I_B হল যথাক্রমে সেট A ও সেট B-এর অভেদ অপেক্ষক।
  - iv) যদি $f : A \to B$ ও $g : B \to C$ দুটি বাইজেকটিভ চিত্রণ হয়, তবে $gof : A \to C$ চিত্রণটি বাইজেকটিভ এবং $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ।
  - v) ধরা যাক, $f : A \to B$ এবং $g: B \to A$ অপেক্ষক দুটি এমন যে $gof = I_A$ এবং $fog = I_B$। তাহেল, f ও g বাইজেকটিভ চিত্রণ এবং $g = f^{-1}$।
  - vi) ধরা যাক, $f : A \to B$ হল একটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক। তাহলে $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ ।

দ্বিপদ প্রক্রিয়া :

কোনো সেট S-এ একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হল $S \times S$ থেকে S সেটে সংজ্ঞায়িত একটি অপেক্ষক অর্থাৎ, $f : S \times S \to S$। কোনো সেট S-এর ওপর সংজ্ঞায়িত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$*$', S-এর যে-কোনো দুটি পদের মধ্যে প্রয়োগ হয়ে ওই সেটেরই একটি অনন্য পদ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $a, b \in S \Rightarrow a*b \in S$।

- কোনো সেট S-এর ওপর সংজ্ঞায়িত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া '$*$' কে
  - i) বিনিময়যোগ্য বলা হবে, যদি সব $a,b \in S$ এর জন্য $a*b = b*a$ হয়।
  - ii) সংযোজ্য বলা হবে, যদি সব $a,b,c \in S$-এর জন্য $(a*b)*c = a*(b*c)$ হয়।
  - iii) বন্টনযোগ্য বলা হবে, যদি S-এ আরেকটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া 'o' -এর অস্তিত্ব থাকে, যেখানে $a*(boc) = (a*b)o(a*c)$ এবং $(boc)*a = (b*a)o(c*a)$, সব $a,b,c \in S$ এর জন্য।
- দ্বিপদ প্রক্রিয়া $*$ এর জন্য একটি পদ $e \in S$ কে একসম উপাদান বলা হয়, যদি $\forall\ a \in S,\ a*e = a = e*a$ হয়।
- ধরা যাক, S-সেটের ওপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হল $*$ এবং $e \in S$ হল S-এর একসম উপাদান। তাহলে একটি পদ $a \in S$-কে বিপরীতকরণযোগ্য বলা হয়, যদি এমন একটি পদ $b \in S$-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $a*b = e = b*a$।
- . **প্রক্রিয়া তালিকা :**

  . কোনো সসীম সেটের ওপর সংজ্ঞায়িত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়াকে যে তালিকার মাধ্যমে সম্পূর্ণভাবে বর্ণনা করা যায় তাকে প্রক্রিয়া তালিকা বলে।

  ধরা যাক, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ হল একটি সসীম সেট এবং '$*$' হল S এর ওপর সংজ্ঞায়ত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। তাহলে '$*$' এর জন্য প্রক্রিয়া তালিকাটি হবে নিম্নরূপ :

$*$	a_1	a_2	a_3	....	a_n
a_1	a_1*a_1	a_1*a_2	a_1*a_3	....	a_1*a_n
a_2	a_2*a_1	a_2*a_2	a_2*a_3	....	a_2*a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_n	a_n*a_1	a_n*a_2	a_n*a_3	....	a_n*a_n

উপরের প্রক্রিয়া তালিকা থেকে আমরা নিম্নের বৈশিষ্ট্যগুলি অনুমান করতে পারি।

i) * বিনিময়যোগ্য হবে যদি প্রক্রিয়া তালিকাটি মুখ্য কর্ণের সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

ii) যদি একটি উপাদান e বরাবর সারিটি সবথেকে উপরের সারির সঙ্গে একই হয় এবং e বরাবর স্তম্ভটি সবথেকে বামের স্তম্ভের সাথে একই হয়, তবে e -কে একসম উপাদান বলা যাবে।

iii) যদি প্রতিটি সারি (সবথেকে উপরের সারি বাদে) অথবা প্রতিটি স্তম্ভ (সবথেকে বামের স্তম্ভ বাদে)-তে একসম উপাদানটি থাকে তবে প্রদত্ত দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে সেটের প্রতিটি উপাদান বিলোমযোগ্য হবে।

- n সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোনো সেটের ওপর সংজ্ঞায়িত মোট দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হল n^{n^2} ।

- n সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোনো সেটে মোট বিনিময়যোগ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হল $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ।

- ***n*-ভাজক নির্ভর যোগ :**

ধরা যাক n হল 1 অপেক্ষা বড় একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $a,b \in Z_n$, where $Z_n = \{0,1,2,......,(n-1)\}$।
তাহলে, n ভাজক নির্ভর যোগ অর্থাৎ $+_n$ -কে আমরা নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞায়িত করি :
$a +_n b$ = সবথেকে ছোটো অ-ঋনাত্মক ভাগশেষ, যখন $(a+b)$ কে n দ্বারা ভাগ করা হবে।

- ***n*-ভাজক নির্ভর গুণ :**

ধরা যাক n হল1 অপেক্ষা বড় একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $a,b \in Z_n$, যেখানে $Z_n = \{0,1,2,....(n-1)\}$।
তাহলে, n-ভাজক নির্ভর গুণ অর্থাৎ $\times_n$-কে আমরা নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞায়িত করি —
$a \times_n b$ = সবথেকে ছোটো অ-ঋণাত্মক ভাগশেষ যখন ab কে n.দ্বারা ভাগ করা হবে।

অনুশীলনী : 1

ক-বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2]

1. বহু বিকল্পভিত্তিক :

i) সেট A = $\{1,2,3,4\}$ -তে সংজ্ঞায়িত একটি সম্বন্ধ R হল নিম্নরূপ —
R=$\{(1,2),(2,2),(1,1),(4,4),(1,3),(3,3),(3,2)\}$
তাহলে —
a) R হল স্বসম ও প্রতিসম কিন্তু সংক্রমণ নয়।
b) R হল স্বসম ও সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়।
c) R হল প্রতিসম ও সংক্রমণ কিন্তু স্বসম নয়।
d) R হল সমতুল্য সম্বন্ধ

ii) **C** থেকে **R** সেটে একটি সম্বন্ধ ψ নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :
$x\psi y \Leftrightarrow |x|=y$ । নিম্নের কোন্‌টি সঠিক ?
a) $(2+3i)\ \psi\ 13$ b) $3\ \psi\ (-3)$ c) $(1+i)\ \psi\ 2$ d) $i\ \psi\ 1$

iii) কোনো সমতলে সকল সরললেখার সেটের ওপর একটি সম্বন্ধ R এরূপ যে $l_1 R l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$। তাহলে R হল

a) প্রতিসম b) স্বসম c) সংক্রমণ d) সমতুল্যতা

iv) যদি সেট A-তে সংজ্ঞায়িত বৃহত্তম সম্বন্ধ R এবং S হল A-তে সংজ্ঞায়িত যে-কোনো একটি সম্বন্ধ। তাহলে

a) $R \subset S$ b) $S \subset R$ c) $R = S$ d) এদের কোনোটিই নয়

v) সেট $A = \{1,2,3\}$-তে একটি সম্বন্ধ নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$, তাহলে R হল

a) স্বসম b) প্রতিসম c) সংক্রমণ d) এদের সবগুলি

vi) $N \times N$ এর ওপর একটি সম্বন্ধ নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$, তাহলে R হল —

a) স্বসম কিন্তু প্রতিসম নয় b) স্বসম ও সংক্রমণ কিন্তু প্রতিসম নয়

c) একটি সমতুল্য সম্বন্ধ d) এদের কোনোটিই নয়

vii) নিম্নের কোন্‌টি সেট Z-এর ওপর সমতুল্য সম্বন্ধ নয় ?

a) $aRb \Leftrightarrow a+b$ হল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা b) $aRb \Leftrightarrow a-b$ হল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা

c) $aRb \Leftrightarrow a<b$ d) $aRb \Leftrightarrow a=b$

viii) সব বাস্তব সংখ্যার সেট R-তে একটি সম্বন্ধ S নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$(a,b) \in S \Leftrightarrow ab \geq 0$ । তাহলে, S হল

a) কেবলমাত্র প্রতিসম ও সংক্রমন b) কেবলমাত্র স্বসম ও প্রতিসম

c) একটি আংশিক ক্রম সম্বন্ধ d) একটি সমতুল্য সম্বন্ধ

ix) অখণ্ড সংখ্যার সেট Z-তে একটি সম্বন্ধ R নিম্নরূপ :

$(x,y) \in R \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$ । তাহলে, R হল —

a) স্বসম ও সংক্রমণ b) স্বসম ও প্রতিসম c) প্রতিসম ও সংক্রমণ d) একটি সমতুল্য সম্বন্ধ

x) $f: R \to R$ চিত্রণ $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। তাহলে f হল —

a) ইনজেকটিভ b) সারজেকটিভ c) বাইজেকটিভ d) এদের কোনোটিই নয়।

xi) $f: R \to R$ অপেক্ষক $f(x) = 2^x + 2^{|x|}$ দ্বারা সংজ্ঞাত তাহলে f হল —

a) এক-এক ও উপরিচিত্রণ b) বহু-এক ও উপরিচিত্রণ

c) এক-এক ও অন্তঃচিত্রণ d) বহু-এক ও অন্তঃচিত্রণ

xii) $f(x) = -x^2+6x-8$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: A \to B$ চিত্রণটি বাইজেকটিভ হবে যদি

a) $A = (-\infty, 3]$ এবং $B = (-\infty, 1]$ b) $A = [-3, \infty)$ এবং $B = (-\infty, 1]$

c) $A = (-\infty, 3]$ এবং $B = [1, \infty)$ d) $A = [3, \infty)$ এবং $B = [1, \infty)$

xiii) ধরা যাক $f: R \to R$ চিত্রণটি $f(x) = [x]^2 + [x+1] - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, যেখানে $[x]$ একটি বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা এবং এর মান x এর সমান বা তার থেকে ছোটো। তাহলে, $f(x)$ হল

a) বহু-এক ও উপরিচিত্রণ b) বহু-এক ও অন্তঃচিত্রণ

c) এক-এক ও অন্তঃচিত্রণ d) এক-এক ও উপরিচিত্রণ

xiv) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট থেকে অখণ্ড সংখ্যার সেটে একটি অপেক্ষক f নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n-1}{2}, & \text{যখন } n \text{ অযুগ্ম}\\ -\frac{n}{2}, & \text{যখন } n \text{ যুগ্ম}\end{cases}$$

তাহলে f হল —

a) এক-এক ও উপরিচিত্রণ এদের কোনোটিই নয়।

b) এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়।

c) উপরিচিত্রণ কিন্তু এক-এক নয়।

d) এক-এক ও উপরিচিত্রণ

xv) ধরা যাক, $f(x)=x^2$ এবং $g(x)=2^x$। তাহলে $fog(x)=gof(x)$ -এর সমাধান সেটটি হবে

a) R b) $\{0\}$ c) $\{0,2\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xvi) $f:\mathrm{R}\to\{x\in\mathrm{R} : x<1\}$ অপেক্ষকটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

তাহলে f-এর বিপরীত অপেক্ষকটি হবে

a) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ b) $\frac{1}{2}\log\frac{2+x}{2-x}$ c) $\frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xvii) ধরা যাক, $f(x)=\frac{1}{1-x}$। তাহলে, $\{fo(fof)\}(x)$ হল —

a) $x,\ \forall x\in\mathrm{R}$ b) $x,\ \forall x\in\mathrm{R}-\{1\}$ c) $x,\ \forall x\in\mathrm{R}-\{0,1\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xviii) ধরা যাক, $f(x)=\frac{\alpha x}{x+1}, x\neq-1$। তাহলে, α -এর কোন্ মানের জন্য $f(f(x))=x$ হবে?

a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) 1 d) –1

xix) $f(\mathrm{x})=x^3$ অপেক্ষকের সংজ্ঞার অঞ্চল $\{0,1,2,3\}$ হলে f^{-1} -এর সংজ্ঞার অঞ্চল হবে —

a) $\{3,2,1,0\}$ b) $\{0,-1,-2,-3\}$ c) $\{0,1,8,27\}$ d) $\{0,-1,-8,-27\}$

xx) যদি $g(x) = x^2+x-2$ এবং $\frac{1}{2}gof(x)=2x^2-5x+2$ হয়, তবে $f(x)$ = ?

a) $2x-3$ b) $2x+3$ c) $2x^2+3x+1$ d) $2x^2-3x-1$

xxi) যদি $f(x) = \sin^2 x$ এবং $g(f(x))=|\sin x|$ হয়, তাহলে $g(x)$ = ?

a) $\sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{x}$ c) $\sqrt{x+1}$ d) $-\sqrt{x}$

xxii) যদি $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ অপেক্ষকটি $f(x)=x^3+3$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়, তবে $f^{-1}(x)$ = ?

a) $x^{1/3}-3$ b) $x^{1/3}+3$ c) $(x-3)^{1/3}$ d) $x+3^{1/3}$

xxiii) যদি $a*b=a^2+b^2$ হয়, তাহলে $(4*5)*3$ এর মান হবে —

a) $(4^2+5^2)+3^2$ b) $(4+5)^2+3^2$ c) 41^2+3^2 d) $(4+5+3)^2$

xxiv) সব ধনাত্মক মূলদ সংখ্যার সেটকে Q^+ দ্বারা সূচীত করা হয়। যদি Q^+ সেটে দ্বিপদ প্রক্রিয়া $\odot$, $a\odot b=\frac{ab}{2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে 3-এর বিপরীত উপাদান হবে —

a) $\frac{4}{3}$ b) 2 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

xxv) ধরা যাক $Q-\{1\}$ সেটে '$*$' দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b=a+b-ab$ নিয়ম দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে '$*$'-এর অভেদ উপাদানটি হল —

a) 1 b) $\frac{a-1}{a}$ c) $\frac{a}{a-1}$ d) 0

xxvi) সব $a,b\in Z$ এর জন্য, Z সেটে '$*$' দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b=a^2+b^2$ দ্বারা সংজ্ঞাত। তাহলে '$*$' —

a) বিনিময়যোগ্য ও সংযোজ্য b) সংযোজ্য কিন্তু বিনিময়যোগ্য নয়

c) সংযোজ্য নয় d) দ্বিপদ প্রক্রিয়া নয়

xxvii) Q^+ সেটে '$*$' দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b=\frac{ab}{100}$ দ্বারা সংজ্ঞাত, সব $a,b\in Q^+$ এর জন্য। তাহলে 0.1-এর বিপরীত উপাদানটি হবে —

a) 10^5 b) 10^4 c) 10^6 d) এদের কোনোটিই নয়

xxviii) G হল $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$ আকারের সব ম্যাট্রিক্সের সেট, যেখানে $x\in R-\{0\}$। তাহলে দ্বিপদ প্রক্রিয়া হিসাবে ম্যাট্রিক্সের গুণ-এর সাপেক্ষে একসম উপাদানটি হবে —

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

xxix) 2টি উপাদান বিশিষ্ট কোনো সেটে সংজ্ঞায়িত দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হল —

a) 8 b) 4 c) 16 d) 64

xxx) ধরা যাক, $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{p,q\}$, তাহলে A থেকে B সেটে সংজ্ঞাযিত উপরিচিত্রণের সংখ্যা হবে—

a) 8 b) 6 c) 30 d) 32

2. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী :

i) বাস্তব সংখ্যার সেটে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ সেট $R=\{(a,b):a<b\}$ একটি সংক্রমণ সম্বন্ধ কিনা যাচাই করো।

ii) যদি $f: A\rightarrow B$ একটি বাইজেকটিভ চিত্রণ হয় যেখানে, তবে $n(A)=10$?

iii) $f: R\rightarrow R$ চিত্রণ $f(x)=x^3$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে, f চিত্রণটি এক-এক চিত্রণ কিনা যাচাই করো।

iv) একটি সেট A যার $n(A)=3$। A-সেটে সম্ভাব্য স্বসম সংখ্যা কয়টি?

v) $S=\{1,2,3\}$ সেটে R সম্বন্ধটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$R=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$.

কোন্ পদ বা পদগুলি R থেকে বাদ দিলে সেটি একটি সমতুল্য সম্বন্ধ হবে?

vi) বাস্তব সংখ্যার সেটে সংজ্ঞায়িত সম্বন্ধ সেট $R=\{(a,b):\sqrt{a}=b\}$ একটি অপেক্ষক কিনা যাচাই করো।

vii) X সেটে সংজ্ঞায়িত একটি সমতুল্য সম্বন্ধ R, X-কে সমতুল্যতা শ্রেণি X_1, X_2, X_3 -তে বিভক্ত করেছে। তাহলে $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ এবং $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ কত হবে ?

viii) যদি $f(x)=x+7$ এবং $g(x)=x-7$, $x \in R$ হয়, তবে $(fog)(x)$ -এর মান নির্ণয় করো।

ix) এটি কি সত্য যে প্রতিটি সম্বন্ধ যা প্রতিসম ও সংক্রমণ সেটে স্বসমও হবে? কারণ দেখাও।

x) বাস্তব সংখ্যার সেটে সংজ্ঞায়ত সম্বন্ধ সেট $R=\{(a,b):a \leq b^3\}$ সংক্রমণ সম্বন্ধ কিনা যাচাই করো।

xi) এমন একটি অপেক্ষকের উদাহরণ দাও যেটি এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়।

xii) যদি $n(A) = 5$ হয়, তবে A থেকে A -তে এক-এক অপেক্ষকের সংখ্যা লিখ।

xiii) যদি $A=\{1,2,3\}$ এবং $B=\{a,b\}$ হয়, তবে A থেকে B সেটে সংজ্ঞায়িত মোট অপেক্ষকের সংখ্যা লিখ।

xiv) $A=\{1,2,3,4\}$ সেটে সংজ্ঞাত একটি সম্বন্ধ সেট $R=\{(a,b):b=a+1\}$ কি একটি স্বসম সম্বন্ধ?

xv) যদি $n(A)=n(B)=3$ হয়, তবে A থেকে B-সেটে কয়টি বাইজেকটিভ অপেক্ষক তৈরী হবে?

খ-বিভাগ

3. সংক্ষিপ্তধর্মী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) যদি $f:\{1,3\}\to\{1,2,5\}$ এবং $g:\{1,2,5\}\to\{1,2,3,4\}$ অপেক্ষক দুটি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয় -
$f=\{(1,2),(3,5)\}$, $g=\{(1,3),(2,3),(5,1)\}$ তবে gof লিখ।

ii) যদি $f: R\to R$ চিত্রণ, যেটি $f(x)=\dfrac{2x-1}{5}$ দ্বারা সংজ্ঞাত, একটি বিপরীতকরণযোগ্য অপেক্ষক হয়, তবে $f^{-1}(x)$ লিখ।

iii) ধরা যাক R সেটে সংজ্ঞাত একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া হল $*$। যদি $a*b=\dfrac{(a+b)^2}{3}$ হয়, তবে $(2*3)*4$ নির্ণয় করো।

iv) যদি $f: R\to A$ চিত্রণ যেটি $f(x)=x^2-2x+2$ দ্বারা সংজ্ঞাত, একটি উপরিচিত্রণ হয় তবে, সেট A নির্ণয় করো।

v) যদি $f(x)=\dfrac{4x+3}{6x-4}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$ হয়, তবে f^{-1} নির্ণয় করো।

vi) যদি $f: R\to R$ এবং $g: R\to R$ যথাক্রমে $f(x) = 2x + x^2$ এবং $g(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে fog এর মান নির্ণয় করো।

vii) যদি $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ হয়, তবে দেখাও যে, $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$।

viii) সব $a,b\in$N এর জন্য, N সেটে '$*$' দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b=a+ab$ দ্বারা সংজ্ঞাত হলে, N-সেটে, যদি অস্তিত্ব থাকে, একসম উপাদানটি লিখ।

ix) $f:$ R$\rightarrow$R চিত্রণ যেটি $f(x)=|x-1|$ দ্বারা সংজ্ঞাত কি একটি এক-এক চিত্রণ? কারণ দেখাও।

x) A$=\{3,7,8\}$ সেটে সংজ্ঞাত সম্বন্ধ সেট R$=\{(7,8),(8,3)\}$ প্রদত্ত। সবচেয়ে কম কয়টি ক্রমযুগল সম্বন্ধ সেট R-এ যুক্ত করলে এটি একটি সমতুল্য সম্বন্ধ সেটে রূপান্তরিত হবে? কারণ দেখাও।

xi) $f(x)=\log_4\left(\log_5\left(\log_3\left(18x-x^2-77\right)\right)\right)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো।

xii) $f(x)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক নির্ণয় করো।

xiii) ধরা যাক $f:$ R$\rightarrow$R ও $g:$ R$\rightarrow$R অপেক্ষক দুটি যথাক্রমে $f(\mathrm{x})=5x-4$ এবং $g(x)=x^3+7$ দ্বারা সংজ্ঞাত। তাহলে $(fog)^{-1}(x)=?$

xiv) সেট $S=\{1,2,3,.........,12\}$ কে সমসংখ্যক পদবিশিষ্ট তিনটি সেট A, B, C -তে এমনভাবে বিভক্ত করা হয়েছে যাতে A$\cup$B$\cup$C=S, A$\cap$B=B$\cap$C=C$\cap$A=ϕ হয়। S সেটকে যত প্রকারে এই শর্তে বিভক্ত করা যায় তা নির্ণয় করো।

xv) x-এর বাস্তব মানের জন্য $f(\mathrm{x})=x^3+5x+1$ অপেক্ষকটি বাইজেকটিভ কিনা পরীক্ষা করো। তোমার উত্তরের সাপেক্ষে যুক্তি দাও।

গ-বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6]

i) ধরা যাক সব স্বাভাবিক সংখ্যাটর সেটকে N দ্বারা সূচীত করা হয়েছে এবং N$\times$N সেটের ওপর R সম্বন্ধটি (a,b)R$(c,d)\Leftrightarrow ad(b+c)=bc(a+d)$ দ্বারা সংজ্ঞাত। N$\times$N সেটে R সম্বন্ধটি সমতুল্য সম্বন্ধ কিনা যাচাই করো।

ii) ধরা যাক $f:$ N$\rightarrow$N অপেক্ষক নিম্নরূপে সংজ্ঞাত :

$$f(n)=\begin{cases} n+1, & \text{যখন } n \text{ অযুগ্ম} \\ n-1, & \text{যখন } n \text{ যুগ্ম} \end{cases}$$

দেখাও যে f একটি বাইজেকটিভ চিত্রণ।

iii) দেখাও যে $f:$ R$\rightarrow$R চিত্রণ যা $f(x)=x-[x]$ দ্বারা সংজ্ঞাত সেটি এক-এক অথবা উপরিচিত্রণ এদের কোনোটিই নয়।

iv) ধরা যাক, A $=\{x\in$ R $: 0\le x\le 1\}$। যদি $f:$ A$\rightarrow$A অপেক্ষক নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয়,

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{যদি } x\in Q \\ 1-x, & \text{যদি } x\notin Q \end{cases}$$

তাহলে প্রমাণ করো যে $fof(x)=x,\ \forall\ x\in$A।

v) যদি $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R$ এবং $g:[-1,1]\to R$ যথাক্রমে $f(x)=\tan x$ এবং $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তাহলে fog and gof নির্ণয় করো।

vi) যদি $f(x)=\left(a-x^n\right)^{\frac{1}{n}}$, যেখানে $a>0$ এবং $n\in N$ হয়, তবে দেখাও যে $f\left(f(x)\right)=x$।

vii) যদি $f:Q\to Q$ এবং $g:Q\to Q$ অপেক্ষক দুটি যথাক্রমে $f(x)=2x$ ও $g(x)=x+2$ দ্বারা সংজ্ঞাত হয়, তবে দেখাও যে, f এবং g হল বাইজেকটিভ চিত্রণ। এছাড়া, $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ এর যথার্থতা যাচাই করো।

viii) অখণ্ড সংখ্যার সেটের জন্য 5 ভাজক নির্ভর গুণের তালিকাটি লিখ।

ix) $S=\{0,1,2,3,4\}$ সেটে সংজ্ঞাত $+_5$ -এর প্রক্রিয়া তালিকাটি নির্ণয় করো।

x) ধরা যাক $+_6$ (6 ভাজক নির্ভর যোগ) হল $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ সেটে একটি দ্বিপদী প্রক্রিয়া। তাহলে $2+_6 4^{-1}+_6 3^{-1}$ এর মান নির্ণয় করো।

xi) নিম্নে প্রদত্ত অপেক্ষকগুলি এক-এক ও উপরিচিত্রণ কিনা যাচাই করো :

a) $f:R\to R,\ f(x)=\frac{2x-3}{7}$

b) $f:R\to R,\ f(x)=|x+1|$

c) $f:R-\{2\}\to R,\ f(x)=\frac{3x-1}{x-2}$

d) $f:R\to[-1,1],\ f(x)=\sin^2 x$

xii) $f:R\to R,\ g:R\to R$ যথাক্রমে $f(x)=[x]$ ও $g(x)=|x|$ দ্বারা সংজ্ঞাত, তাহলে $(fog)\left(-\frac{2}{3}\right)$ ও $(gof)\left(-\frac{2}{3}\right)$এর মান নির্ণয় করো।

xiii) $R-\{0\}$ সেটে '$*$' দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি $a*b=\frac{2a}{b^2}$ দ্বারা সংজ্ঞাত। তাহলে '$*$' বিনিময়যোগ্য ও সংযোজ্য কিনা পরীক্ষা করো।

উত্তরমালা

ক-বিভাগ

1. i) b ii) d iii) a iv) b v) d vi) c
vii) c viii) d ix) b x) d xi) c xii) a
xiii) b xiv) d xv) c xvi) a xvii) c xviii) d
xix) c xx) a xxi) b xxii) c xxiii) c xxiv) a
xxv) d xxvi) c xxvii) a xxviii) c xxix) c xxx) c

2. i) R হল সংক্রমণ ii) 10 iii) f হল এক-এক চিত্রণ iv) 2^6

v) (1,2) vi) যেহেতু $a \in (-\infty, 0)$-তে $\sqrt{a}$ অসংজ্ঞাত সুতরাং এটি অপেক্ষক নয়।

vii) $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X$ এবং $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \phi$ viii) x ix) না x) সংক্রমণ নয়

xii) 120 xiii) 8 xiv) না xv) 6

খ-বিভাগ

3. i) $\{(1,3),(3,1)\}$ ii) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+1}{2}$ iii) $\dfrac{1369}{27}$ iv) $A=[1,\infty)$

v) $f^{-1} = \dfrac{3+4y}{6y-4}$ vi) $2x^3 + x^6$ vii) এর অস্তিত্ব নেই

ix) যেহেতু $f(3)=f(-1)=2$, তাই f এক-এক চিত্রণ নয় x) 7 xi) $x \in (8,10)$

xii) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(2^x - 2^{-x}\right)$ xiii) $\left(\dfrac{x-31}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ xiv) $\dfrac{12!}{(4!)^3}$

xv) f হল বাইজেকটিভ

গ-বিভাগ

4. i) হ্যাঁ, R একটি সমতুল্য সম্পর্ক

v) $fog : [-1,1] \rightarrow R$, $fog(x) = \tan\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞাত।

$gof : \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \rightarrow R$, $gof(x) = \sqrt{1-\tan^2 x}$ দ্বারা সংজ্ঞাত।

viii)

$\times_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

ix)

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

x) 1

xi) (a) বাইজেকটিভ (b) এক-এক ও উপরিচিত্রণের কোনোটিই নয় (c) এক-এক কিন্তু উপরিচিত্রণ নয়, (d) এক-এক ও উপরিচিত্রণের কোনোটিই নয়।

xii) $(fog)\left(-\frac{2}{3}\right)=0$ এবং $(gof)\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

xiii) বিনিময়যোগ্য বা সংযোজ্য এদের কোনোটিই নয়।

অধ্যায়- 2

ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহ

(Inverse Trigonometric Functions)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু এবং ফলাফল :

- $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$ — এই অপেক্ষকগুলিকে ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক বলা হয়।

- লক্ষ্য কর যে $\sin^{-1}x \neq \dfrac{1}{\sin x}$ এবং $(\sin^{-1}x)^2 \neq \sin^{-2}x$ এবং $\sin^{-1}x \neq (\sin x)^{-1}$।

- বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্র বা অঞ্চল (domain) প্রসার বা পাল্লা (range) এবং মুখ্যমান (Principal value) ($n \in Z$)-এর ছক :

অপেক্ষক (Function)	ক্ষেত্র বা অঞ্চল (Domain)	প্রসার বা পাল্লা (Range)	মুখ্যমান (Principal value)
$\sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$n\pi+(-1)^n\alpha$	α, যেখানে $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$
$\cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$2n\pi\pm\alpha$	α, যেখানে $0\leq\alpha\leq\pi$
$\tan^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$	$n\pi+\alpha$	α, যেখানে $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$
$\cot^{-1}x$	$(-\infty, \infty)$	$n\pi+\alpha$	α, যেখানে $0<\alpha<\pi$
$\text{cosec}^{-1}x$	$\|x\|\geq1$	$n\pi+(-1)^n\alpha$	α, যেখানে $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha\neq0$
$\sec^{-1}x$	$\|x\|\geq1$	$2n\pi\pm\alpha$	α, যেখানে $0\leq\alpha\leq\pi$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$

- কোনো ত্রিকোণমিতিক বিপরীত অপেক্ষকের মান যা মুখ্য শাখার অন্তর্গত তাকে ঐ ত্রিকোণমিতিক বিপরীত অপেক্ষকের মুখ্যমান বলা হয়।

- $\sin^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $-1\leq x\leq1$ হয়

  $\sin^{-1}x$ -এর মুখ্যমান α হলে $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ হয়।

- $\cos^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $-1\leq x\leq1$ হয়
  $\cos^{-1}x$ -এর মুখ্যমান α হলে $0\leq\alpha\leq\pi$ হয়।

- $\tan^{-1}x$ অপেক্ষকটি x -এর যেকোনো বাস্তব মানে সংজ্ঞাত অর্থাৎ $-\infty<x<\infty$; হলে $\tan^{-1}x$ সংজ্ঞাত হয় $\tan^{-1}x$

-এর মুখ্যমান α হলে $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ।

- $\cot^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয় যদি $-\infty<x<\infty$ হয়

  $\cot^{-1}x$ -এর মুখ্যমান α হলে $0<\alpha<\pi$ হয়।

- $\sec^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $|x|\geq 1$ হয়

  $\sec^{-1}x$ -এর মুখ্যমান α হলে $0\leq\alpha\leq\pi$ এবং $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ হয়।

- $\mathrm{cosec}^{-1}x$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞাত হয়, যদি $|x|\geq 1$ হয় (অর্থাৎ $x\geq 1$ অথবা $x\leq -1$) হয়।

  $\mathrm{cosec}^{-1}x$ -এর মুখ্যমান α হলে $-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$ এবং $\alpha\neq 0$ হয়।

- ত্রিকোণমিতিক বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ধর্মাবলী :

i) $\sin^{-1}(\sin x)=x$; $\sin(\sin^{-1}x)=x$

$\cos^{-1}(\cos x)=x$; $\cos(\cos^{-1}x)=x$

$\tan^{-1}(\tan x)=x$; $\tan(\tan^{-1}x)=x$

$\mathrm{cosec}^{-1}(\mathrm{cosec}\,x)=x$; $\mathrm{cosec}(\mathrm{cosec}^{-1}x)=x$

$\sec^{-1}(\sec x)=x$; $\sec(\sec^{-1}x)=x$

$\cot^{-1}(\cot x)=x$; $\cot(\cot^{-1}x)=x$

ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{cosec}^{-1}x$; $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sec^{-1}x$

$\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\cot^{-1}x,\quad x>0$; $\mathrm{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\sin^{-1}x$

$\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos^{-1}x$; $\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\tan^{-1}x$

iii) $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$; $\mathrm{cosec}^{-1}(-x)=-\mathrm{cosec}^{-1}x$

$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$; $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$

$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$; $\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x$

iv) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

$\sec^{-1}x+\mathrm{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$

v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$, যখন xy < 1

$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}$, যখন xy < −1

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \pi + \tan^{-1} \left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right), \ xy > 1, \ x, y > 0$

vi) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right) = 2\tan^{-1} x$

vii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$

$\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

$\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$

$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$

অনুশীলনী–2

ক-বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2]

বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

1) $\cot^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ -এর মুখ্য মান —

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$ c) $\dfrac{\pi}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{2}$

2) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ -এর সাধারণ মান —

a) $n\pi - (-1)^n \dfrac{\pi}{3}$ b) $n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{3}$ c) $n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}$ d) $n\pi$

3) $\cos\sin^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$-এর মান হবে —

a) $\dfrac{5}{4}$ b) $\dfrac{4}{5}$ c) $-\dfrac{5}{4}$ d) $-\dfrac{4}{5}$

4) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}+\sec^{-1}3\right)+\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}2\right)$-এর মান হবে —

a) –1 b) 0 c) 1 d) 2

5) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ -এর সাধারণ মান হবে —

a) $n\pi+\frac{5\pi}{6}$ b) $n\pi-\frac{5\pi}{6}$ c) $n\pi+\frac{\pi}{6}$ d) $n\pi-\frac{\pi}{6}$

6) যদি $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}k$ হয় তবে k -এর মান হবে —

a) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ b) $\frac{2x}{1-x^2}$ c) $\frac{2x}{1+x^2}$ d) $\frac{2x^2}{1+x^2}$

7) নীচের প্রদত্ত বিবৃতিগুলির কোন্‌টি মিথ্যা ?

a) $\sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\frac{\pi}{2}$ সূত্রটি সত্য হয় যখন $|x|\geq 1$।

b) $\sin^{-1}\cos\tan^{-1}\sqrt{3}$ দ্বারা কোণ সূচিত হয়।

c) $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\theta$ হলে $\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5}$ -এর মান হবে$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$।

d) $\sin^{-1}x=\theta$ হলে $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ -এর মান θ হবে।

8) নীচের কোনটি $\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$-এর মান বলো ?

a) $\frac{5\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$

9) $\sec^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}y$ হলে নীচের কোন্‌টি $\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}+\cos^{-1}\frac{1}{y}\right)$-এর মান বলো?

a) π b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$

10) $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ হলে নীচের কোন্‌টি x-এর মান প্রকাশ করে?

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-এর মুখ্যমান নির্ণয় করো।

2) $\sec^{-1}(-2)$ বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকের ক্ষেত্র বা সাধারণ মান নির্ণয় করো।

3) $\cot^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

4) $\sec^2\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\tan^2\cos ec^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

5) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

6) দেখাও যে, $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cot^{-1}\frac{5}{3}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ ।

7) যদি $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{4\pi}{5}$ হয়, তবে $\cot^{-1}x + \cot^{-1}y$ এর মান নির্ণয় করো।

8) যদি $\cot(\tan^{-1}x + \cot^{-1}\sqrt{3}) = 0$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।

9) $\tan\frac{1}{3}\left(\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$, $x>0$ -এর মান নির্ণয় করো।

10) $\tan\cot^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

11) যদি $3\tan^{-1}x+\cot^{-1}x = \pi$ হয় তবে x-এর মান নির্ণয় করো।

12) $\cos^{-1}(2x-1)$ অপেক্ষকের ক্ষেত্র নির্ণয় করো।

খ-বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

1) $\sin^{-1}\left[\cos\left(\frac{33\pi}{5}\right)\right]$ -এর মান নির্ণয় করো।

2) প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\cos(\sin^{-1}x) + \cos^{-1}\sin(\cos^{-1}x) = \frac{\pi}{2}$.

3) দেখাও যে, $4(2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{3}) = \pi$.

4) দেখাও যে, $\frac{1}{2}\tan^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}}$.

5) দেখাও যে, $2\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}-\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$.

6) প্রমাণ করো যে, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$ ।

7) প্রমাণ করো যে, $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$ ।

8) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}a+\cot^{-1}b=\cot^{-1}\frac{b-a}{1+ab}$ ।

9) সমাধান করো : $2\sin^{-1}x = \cos^{-1}x$.

10) সমাধান করো : $2\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\pi}{3}$

গ-বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\tan^{-1}\left[\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$-এর মান নির্ণয় করো।

2) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)+\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

3) প্রমাণ করো যে, $\cot\left(\frac{\pi}{4}-2\cot^{-1}3\right)=7$

4) দেখাও যে, $2\tan^{-1}(-3)=-\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$

5) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}x^2$

6) প্রমাণ করো যে, $\sin^{-1}\frac{8}{17}+\sin^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$

7) দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{63}{16}$

8) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}$

9) সমাধান করো :

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3} \text{ and } \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{\pi}{3}$$

10) যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ এবং $x+y+z=\sqrt{3}$ হয় তবে দেখাও যে $x=y=z$।

11) যদি $\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta=\frac{4}{3}$ হয় তবে দেখাও যে $\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$ ।

12) প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{5\cos x+3}{5+3\cos x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right)$

13) প্রমাণ করো যে, $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}-\tan^{-1}\frac{1-y}{1+y}=\sin^{-1}\frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$

14) যদি $2\cos4\theta + 9\cos2\theta - 7 = 0$ হয় তবে দেখাও যে $\theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{4}$.

15) সমাধান করো : $\sin^{-1}\frac{ax}{c}+\sin^{-1}\frac{bx}{c}=\sin^{-1}x$, যেখানে $a^2+b^2=c^2$ এবং $c\neq0$।

উত্তরমালা

ক-বিভাগ

বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

1) c 2) b 3) b 4) c 5) d 6) c
7) d 8) c 9) d 10) d

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) $\frac{5\pi}{6}$ 2) $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, যেখানে $n=0, \pm1, \pm2$......... 3) π 4) 5

5) 0 7) $\frac{\pi}{5}$ 8) $x=\sqrt{3}$ 9) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 10) $-\frac{3}{4}$ 11) $x=1$

12) $0 \le x \le$ (অর্থাৎ $x \,\varepsilon[0, 1]$)

খ -বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) $-\frac{\pi}{10}$ 9) $\frac{1}{2}$ 10) $2-\sqrt{3}$

গ -বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) $-\frac{\pi}{12}$ 2) 0 9) $x=\frac{1}{2}$ এবং $y=1$ 15) $\frac{\pi}{4}$

অধ্যায়- 3

ম্যাট্রিক্স
(Matrices)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

- কয়েকটি সারি এবং কয়েকটি স্তম্ভের সাহায্যে সংখ্যাসমূহের আয়তকার সজ্জাকে একটি ম্যাট্রিক্স (Matrix) বলা হয়। $m\times n$ সংখ্যক সংখ্যা $\boldsymbol{m}$-সংখ্যক সারি (row) এবং $\boldsymbol{n}$-সংখ্যক স্তম্ভ (column)-এর মাধ্যমে আয়তাকারে সাজালে (arranged in a rectangular), তাকে **$m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স** (**matrix of order $m\times n$**) বলা হয়। একটি **$m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সকে** সাধারণত নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হয় :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots\ldots a_{3n} \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

এখানে ম্যাট্রিক্স (matrix)-এর অন্তর্গত a_{11}, a_{12} ইত্যাদি সংখ্যাকে তার পদ (element) বলা হয়।

- নীচের প্রদত্ত তিন ধরণের প্রতীকের যে কোনো একটি ব্যবহার করে কোনো ম্যাট্রিক্সের অন্তর্গত পদগুলোকে লেখা হয় :

$$(\ \ );\ [\ \ ];\ \|\ \ \|$$

- **আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular matrix) :**

$m.n$ সংখ্যক সংখ্যা m সংখ্যাক সারি ও n সংখ্যক স্তম্ভের মাধ্যমে আয়তাকারে সজ্জিত হলে এবং $m=n$ না হলে, সজ্জাটিকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

- **বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square matrix) :**

m^2 সংখ্যক সংখ্যা m সংখ্যক সারি ও m সংখ্যক স্তম্ভের মাধ্যমে বর্গাকারে সজ্জিত হলে, সজ্জাটিকে বর্গম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

- **সারি ম্যাট্রিক্স এবং স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স (Row matrix and column matrix) :**

যদি কোনো ম্যাট্রিক্সের একটিমাত্র স্তম্ভ থাকে, তাহলে এটিকে স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

কোনো ম্যাট্রিক্সের যদি একটি মাত্র সারি থাকে, তবে এটিকে সারি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

- **শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null or zero matrix) :**

একটি ম্যাট্রিক্সকে শূন্য বলা হয়, যদি এটির সকল উপাদানগুলো শূন্য হয়।

যেমন:

$$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal matrix) :**

যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এ প্রারম্ভিক কর্ণ বরাবর পদগুলি শূন্য নয় কিন্তু অন্য সব পদের মান শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে।

- **স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar matrix) :**

যে সকল কর্ণ ম্যাট্রিক্সের প্রারম্ভিক কর্ণ বরাবর একই পদ থাকে, সে সকল কর্ণ ম্যাট্রিক্সকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলে।

- **একক ম্যাট্রিক্স (Identity matrix) :**

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স যার কর্ণের প্রতিটি পদ 1 এবং অবশিষ্ট সকল উপাদানগুলো শূন্য, এটিকে একক ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of matrices) :**

দুটি ম্যাট্রিক্সকে পরস্পর সমান বলা হয় যদি তারা একই ক্রমের হয় এবং তাদের অনুরূপ স্থানে একই পদ থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B-এর সমতা A=B দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- **পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স (Transpose of a matrix) :**

মনো করো A একটি প্রদত্ত $m \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স; A ম্যাট্রিক্স-এর সারি ও স্তম্ভগুলির পদগুলি যথাক্রমে স্তম্ভ ও সারি বরাবর লিখে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্স এর পরিবর্ত (Transpose) ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং তা A' বা A^T প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

- **প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symmetric and Skew-symmetric matrices) :**

  একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে প্রতিসম বলা হবে যদি ম্যাট্রিক্সটি তার পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স এর সঙ্গে সমান হয় অর্থাৎ $A^T = A$। একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A-কে বিপ্রতিসম বলা হবে যদি $A^T = -A$ হয়।

- **একটি ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণ (Scalar multiplication of matrix) :**

  একটি ম্যাট্রিক্স A এবং একটি স্কেলার k-এর গুণফল হল একটি ম্যাট্রিক্স যার প্রত্যেকটি পদ A ম্যাট্রিক্স এর প্রত্যেকটি পদের k গুণ; একটি ম্যাট্রিক্স $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ এবং একটি স্কেলার k-এর গুণফল kA অথবা Ak দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- **দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ (Addition and Subtraction of two matrices) :**

  দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর যোগফল সংজ্ঞাত হবে যদি তারা একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়। A ও B এর যোগফল সংজ্ঞাত হবে যদি তারা একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয়। A ও B এর উভয়েই $m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হলে তাদের সমষ্টি (A+B) ও $m\times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্স হবে, যার পদগুলি A ও B এর অনুরূপ পদ দুটির সমষ্টি দ্বারা নির্ণীত।

  দুটি ম্যাট্রিক্সের বিয়োগফল সংজ্ঞাত হয় যদি ম্যাট্রিক্স দুটি একই ক্রমের হয়। একই ক্রমের দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B-এর বিয়োগফল হল A ম্যাট্রিক্সের সঙ্গে ঋণাত্মক B ম্যাট্রিক্সের যোগফল এবং এটি (A–B) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, $A-B = A+(-B) = A+(-1)B$.

- যদি A, B এবং C তিনটি একই ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে,

  i) $A+B = B+A$

  ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

  iii) $K(A+B) = KA+KB$, যেখানে K একটি স্কেলার

  iv) $A+O = O+A = A$

  v) $A+(-A) = (-A)+A = O$ যেখানে O হল শূন্য ম্যাট্রিক্স।

  vi) যদি $A+C = B+C$, তবে $A=B$.

- **ম্যাট্রিক্সের গুণ (Multiplication of matrices) :**

  দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর গুণফল AB এর অস্তিত্ব আছে বলা হয় যখন A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ সংখ্যা B ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যার সমান হয় এবং এক্ষেত্রে A ও B ম্যাট্রিক্স দুটিকে AB গুণফলের জন্য সংজ্ঞাত বলা হয়। যদি $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ এবং $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ ম্যাট্রিক্স হয়, তাহলে A ম্যাট্রিক্সের স্তম্ভ সংখ্যা $(=p)$ এবং B ম্যাট্রিক্সের সারি সংখ্যা $(=p)$ পরস্পর সমান হয় বলে AB গুণফল সংজ্ঞাত হয়।

- যদি A, B এবং C তিনটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে —

  i) সাধারণভাবে $AB \neq BA$ অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের গুণ সাধারণভাবে বিনিময় নিয়ম (commutative) সিদ্ধ করে না।

  ii) $(AB)C = A(BC)$; যখন সংশ্লিষ্ট গুণফলগুলি সংজ্ঞাত।

  iii) $A(B+C) = AB+AC$ যখন সংশ্লিষ্ট যোগফলগুলি ও গুণফলগুলি সংজ্ঞাত।

  iv) $CA = CB$ হলে $A=B$ হবে, এমন স্থিরতা নেই।

v) $A.O = O.A = O$ যেখানে O হল শূন্য ম্যাট্রিক্স।

vi) $A.I = I.A. = A$, যেখানে I হল একক ম্যাট্রিক্স।

vii) $A \neq O$ ও $B \neq O$ হলেও $AB = O$ হতে পারে, যেখানে O হল শূন্য ম্যাট্রিক্স।

- A বর্গ ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত A^T এবং $A.A^T = A^T.A = I$ হলে A-কে লম্ব (Orthogonal) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।.

- A ও B ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত যথাক্রমে A^T ও B^T হলে,

i) $\left(A^T\right)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T+B^T$

iii) $(A-B)^T = A^T-B^T$

iv) $(AB)^T = B^T.A^T$

- একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A-কে একটি প্রতিসম (symmetric) ম্যাট্রিক্স এবং একটি বিপ্রতিসম (skew-symmetric) ম্যাট্রিক্সের সমষ্টির আকারে প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ,

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

যেখানে $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ প্রতিসম ম্যাট্রিক্স এবং $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

- **বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্স (Invertible matrices) :**

যদি A; m ক্রমের একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং যদি একই ক্রম m এর অপর একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স B-এর অস্তিত্ব থাকে, যেখানে AB=BA=I, তবে B কে ম্যাট্রিক্স A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং এটিকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে A কে বলা হয় বিপরীতকরণযোগ্য। A হল B-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ $A=B^{-1}$ অন্যভাবে বলা যায় $B=A^{-1}$।

- **বিপরীতকরণযোগ্য ম্যাট্রিক্সের ধর্মাবলী :**

i) বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অনন্যতা (Uniqueness of inverse) যদি বিপরীত বর্গ ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকে, তবে এটি অনন্য।

ii) A ম্যাট্রিক্সের পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স A^T হলে $\left(A^T\right)^T = A$ হবে।

iii) দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগফল (বা বিয়োগফল)-এর পরিবর্ত তাদের পরিবর্ত দুটির যোগফল (বা বিয়োগফল)-এর সমান হবে, অর্থাৎ A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স হলে $(A+B)^T = A^T+B^T$ এবং $(A-B)^T = A^T-B^T$ হবে।

iv) দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফলের পরিবর্ত তাদের পরিবর্ত দুটির বিপরীত গুণফলের সমান; অর্থাৎ দুটি ম্যাট্রিক্স A ও B এর ক্ষেত্রে $(AB)^T = B^T \times A^T$ হবে।

v) যে কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সকে একটি প্রতিসম এবং একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি আকারে প্রকাশ করা যায়।

- যদি B; A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A এবং B উভয়েই বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

- A-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং A-এর অন্যোনক ম্যাট্রিক্স পরস্পর সমান।

- একক ম্যাট্রিক্স নিজেই নিজের বিপরীত ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ $I^{-1}=I$।

- শূন্য ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাটিক্স নেই।

- **প্রাথমিক প্রক্রিয়া দ্বারা একটি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স [Elementary Operation (Transformation) of a matrix] :**

  একটি ম্যাট্রিক্সের প্রাথমিক প্রক্রিয়া সমূহ নিম্নরূপ —

  i) যে কোনো দুটি সারি অথবা দুটি স্তম্ভের মধ্যে পরস্পর স্থান বিনিময় সাংকেতিকভাবে i-তম এবং j-তম স্তম্ভের পরস্পর স্থান বিনিময় $R_i \leftrightarrow R_j$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় এবং i-তম ও j-তম স্তম্ভের পরস্পর স্থান বিনিময় $C_i \leftrightarrow C_j$-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

  ii) যে কোনো সারি অথবা স্তম্ভের উপাদানগুলোকে একটি অ-শূণ্য সংখ্যা দ্বারা গুণন সাংকেতিকভাবে, i-তম সারির প্রতিটি উপাদানকে K দ্বারা গুণন $R_i \rightarrow KR_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $K\neq 0$। অনুরূপে স্তম্ভ প্রক্রিয়াটি $C_j \rightarrow KC_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

  iii) যে কোনো সারি অথবা স্তম্ভের উপাদানগুলোর সঙ্গে অপর একটি সারি অথবা স্তম্ভের অনুরূপে উপাদানগুলোকে একটি অ-শূণ্য সংখ্যা দ্বারা গুণ করে যোগ করা সাংকেতিকভাবে, j-তম সারির উপাদানগুলোকে K দ্বারা গুণ করে i-তম সারি অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ করাকে $R_i \rightarrow R_i + KR_j$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অনুরূপ স্তম্ভ প্রক্রিয়াটি $C_i \rightarrow C_j + KC_j$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনুশীলনী—3

ক-বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1] সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

i) যদি AB=A এবং BA=B, তবে B^2 সমান হবে —

a) B b) A c) –B d) B^3

ii) যদি A ম্যাট্রিক্সের ক্রম 3×4 এবং B ম্যাট্রিক্স এরূপ যে $A'B$ এবং $B'A$ উভয়ই সংজ্ঞাত, তবে B-এর ক্রম হবে —

a) 4×4 b) 3×4 c) 4×3 d) 3×3

iii) যদি $A=\begin{bmatrix} 3 & x-1 \\ 2x+3 & x+2 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে x এর মান হবে —

a) 4 b) 3 c) –4 d) –3

iv) যদি $A=[a_{ij}]_{2\times2}$, যেখানে $a_{ij}=i+j$; তবে A ম্যাট্রিক্সটি হবে —

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

v) যদি $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ হয়, তবে adj (adjA) -এর মান হবে —

a) A b) I c) A^2 b) A'

vi) মনে করো, 4×4 ক্রমের A ম্যাট্রিক্সটি এরূপ যে |A|=4 এবং |adjA|=8K, তবে K-এর মান হবে

a) 5 b) 8 c) 3 d) 2

vii) যদি A ম্যাট্রিক্স একটি যথার্থ লম্ব ম্যাট্রিক্স হয়, তবে —

a) |A|=0 b) |A|=1 c) |A|=2 d) |A|=3

viii) যদি A একটি 3×3 ক্রমের বিপরীতযোগ্য ম্যাট্রিক্স হয় এবং |A|=5, তবে $|adj A|$ এর মান সমান হবে —

a) 30 b) 21 c) 24 d) 25

ix) যদি ম্যাট্রিক্স A প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম উভয়ই হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সটি হবে —

a) কর্ণ ম্যাট্রিক্স b) শূন্য ম্যাট্রিক্স c) বর্গ ম্যাট্রিক্স d) এদের কোনোটিই নয়।

x) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 2×2 ক্রমের ম্যাট্রিক্সটি বিপরতীযোগ্য হওয়ার প্রয়োজনীয় এবং যথার্থ শর্তটি হবে —

a) $ab-cd=0$ b) $ad-bc\neq0$ c) $ac-bd\neq0$ d) $ad+bc\neq0$

2] অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

i) যদি $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, তবে A^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে কী?

ii) দেখাও যে, $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ একটি প্রকৃত লম্ব ম্যাট্রিক্স। অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

iii) যদি $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ হয় তবে দেখাও যে $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$, যেখানে A^T হল A এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স।

iv) দেখাও যে, $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্স $x^2-6x+17=0$. সমীকরণ সিদ্ধ করে। অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

v) যদি $A=\begin{pmatrix}22 & 13\\ 17 & 8\end{pmatrix}$; তবে নির্ণয় করো B=A+$A^T$ এবং দেখাও যে B^T=B।

vi) যদি 2×2 ক্রমের A ম্যাট্রিক্সটি এরূপ যে A^2=A, তবে দেখাও যে $(I-A)^2=I-A$, যেখানে I হল 2×2 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

vii) A ম্যাট্রিক্সটি এরূপ যে $A=A^{-1}$; তবে দেখাও যে $A(A^3+I)=A+I$, যেখানে I হল একক ম্যাট্রিক্স।

viii) $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ এবং $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করো যে, $(A-2I)(A-3I)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$।

ix) যদি $A=\begin{bmatrix}5a & -b\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ এবং $A\,adjA=AA^T$; তবে $(5a+b)$ এর মান নির্ণয় করো।

x) 2×2 ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স লিখ যা প্রতিসম এবং বিপ্রতিসম।

খ–বিভাগ

3] সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) যদি $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$, তবে দেখাও যে α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ অসমতাকে সিদ্ধ করে, যখন $A+A^T=\sqrt{2}I_2$ এবং A^T হল A -এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স।

ii) যদি A বর্গ ম্যাট্রিক্সটি এরূপ যে A^2=I, তবে $(A-I)^3+(A+I)^3-7A$-এর সরলতম মান নির্ণয় করো।

iii) যদি $A=\begin{bmatrix}P & 2\\ 2 & P\end{bmatrix}$ এবং $|A^3|=125$; তবে P -এর মান নির্ণয় করো।

iv) 3×3 ক্রমের নন-সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্স A এরূপ যে $AA^T=A^TA$ এবং $B=A^{-1}A^T$; তবে BB^T এর মান নির্ণয় করো।

v) যদি $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ এবং $A^2-4A+3I=0$, যেখানে I হল একক ম্যাট্রিক্স তবে A^{-1} নির্ণয় করো।

vi) প্রাথমিক স্তম্ভ রূপান্তর প্রয়োগ করে $\begin{bmatrix}-3 & 5\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত নির্ণয় করো।

vii) যদি $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, তবে দেখাও যে $6A^{-1}+5I=A$

viii) যদি $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 7 & 5\end{pmatrix}$ এবং $A^2=-xI+yA$, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো, যেখানে I হল 2 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

ix) A ও B দুটি বর্গ ম্যাট্রিক্স এর জন্য যদি AB=BA হয়, তবে গাণিতিক অরোহন পদ্ধতির প্রয়োগে প্রমান করো $(AB)^n=A^nB^n$.

x) যদি $A=\begin{bmatrix}z & q\\ o & i\end{bmatrix}$ এবং $A^8=\begin{pmatrix}x & yq\\ o & i\end{pmatrix}$ হয়, তবে x - y এর মান নির্ণয় করো।

খ–বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) যদি $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, তবে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করো।

ii) যদি $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, তবে AA^T; নির্ণয় করো; অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

iii) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটিকে একটি প্রতিসম (symmetric) এবং একটি বিপ্রতিসম (skew-symmetric) ম্যাট্রিক্সের সমষ্টি আকারে প্রকাশ করো।

iv) যদি $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, তবে adjA নির্ণয় করো এবং যাচাই করো $A(adjA) = (adjA)A = |A| = I_3$।

v) মনে করো, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; যদি U_1 এবং U_2 স্তম্ভ ম্যাট্রিক্স দুটি এরূপ যে $AU_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ এবং $AU_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; তবে U_1+U_2 নির্ণয় করো।

vi) যদি $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \left(\frac{-1}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $Q = PAP^T$, তবে $P^TQ^{2015}P$ -এর মান নির্ণয় করো।

vii) দেখাও যে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি $A^2-4A-5I_3=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং অতঃপর A^{-1} নির্ণয় করো।

viii) a) যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ y & 7 & -2 \\ 5 & z & -4 \end{bmatrix}$ একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে x, y এবং z -এর মান নির্ণয় করো।

b) যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & x \\ y & 0 & z \\ 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স হয়, তবে x, y এবং z -এর মান নির্ণয় করো।

ix) যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, তবে দেখাও যে $(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})(a\mathrm{A}-b\mathrm{B}) = (a^2+b^2)\mathrm{A}$.

x) R(t) ম্যাট্রিক্সটি এরূপে প্রদত্ত যে, $\mathrm{R}(t)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$। তবে দেখাও যে, $\mathrm{R}(s).\mathrm{R}(t)=\mathrm{R}(s+t)$.

xi) প্রদত্ত আছে যে, $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{bmatrix}$ এবং $\mathrm{A}(adj\mathrm{A})=\mathrm{K}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, তবে K-এর মান নির্ণয় করো।

xii) প্রাথমিক রূপান্তর প্রক্রিয়া প্রয়োগে, $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ -3 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত (inverse) নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1). i) a ii) b iii) c iv) d v) a vi) b
vii) b viii) d ix) b x) a

2). i) হ্যাঁ ii) $A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ iv) $\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

v) $B = A + A^T = \begin{pmatrix} 44 & 30 \\ 30 & 16 \end{pmatrix}$ vii) $\alpha = 11$ ix) 5 x) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

খ–বিভাগ

3). i) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, যা $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ অসমতাকে সিদ্ধ করে ii) A iii) ± 3 iv) $BB^T = I$

vi) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ viii) x=8, y=8 x) 1.

গ–বিভাগ

4). ii) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ v) $U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} 1 & 2015 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vii) $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

viii) a) $x = 5,\ y = 1, z = 2$
b) $x = 6,\ y = -2, z = 5$

xii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

অধ্যায়- 4

নির্ণায়ক
(Determinants)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু এবং ফলাফল :

- যদি A=[a_{ij}] একটি $n\times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তবে A ম্যাট্রিক্সের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত একটি রাশিকে নির্ণায়ক বলা হবে এবং এটি |A| বা det A বা $|a_{ij}|$ (i=1,2,3.........n; j=1,2,3,.....n) প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হবে, যেখানে

$$\text{i.e. } |A| \text{ বা } |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

এখানে $|A| = |a_{ij}|$ নির্ণায়কটি n সংখ্যক সারি ও n-সংখ্যক স্তম্ভের দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে এবং এটিকে n ক্রমের নির্ণায়ক বলা হয়।

- **দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়ক বিস্তৃতকরণ (Expansion of a second order determinant) :**

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\text{মুখ্য কর্ণের পদ দুটির গুণফল}) - (\text{গৌণ কর্ণের পদ দুটির গুণফল}) = a_1b_2 - a_2b_1$$

- **তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক বিস্তৃতকরণ (Expansion of a third order determinant) :**

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

[প্রথম সারির পদগুলির সাপেক্ষে বিস্তৃত করে]

- ম্যাট্রিক্স $A=[a_{ij}]_{i\times j}$ এর নির্ণায়ক হল $|a_{ij}|=a_{ij}$।

- **মাইনর (Minors) :**

একটি নির্ণায়কের a_{ij} পদের মাইনর হল a_{ij} পদের সাথে যুক্ত i-তম সারি এবং j-তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত নির্ণায়ক।
a_{ij} পদের মাইনরকে M_{ij} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
$n(n\geq 2)$ ক্রমের কোনো নির্ণায়কের একটি পদের মাইনর হল n–1 ক্রমের একটি নির্ণায়ক।

- **সহ গুণনীয়ক (Cofactors) :**

কোন পদ a_{ij}, এর সহ-গুণনীয়ককে A_{ij} দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যা হল $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, যেখানে M_{ij} হল a_{ij} এর মাইনর।

- D_2 নির্ণায়ককে a_1, b_1, c_1 ইত্যাদি পদের সহগুণনীয়কগুলি যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 ইত্যাদি হলে

$$a_i A_j + b_i B_j + c_i C_j = \begin{cases} 0 & \text{যখন } i \neq j \\ D_2 & \text{যখন } i = j \end{cases}$$

এবং $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3 = D_2$
এবং $a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0$ ইত্যাদি।

- **নির্ণায়কের ধর্মাবলী (Properties of Determinants) :**

যে কোনো বর্গম্যাট্রিক্স A এর জন্য |A| নিম্নলিখিত ধর্মাবলী মেনে চলে —

1. $|A'| = |A|$, যেখানে $A' =$ A এর পরিবর্ত ম্যাট্রিক্স।
2. যদি আমরা যে কোনো দুটি সারির (বা স্তম্ভের) স্থান বিনিময় করি, তবে নির্ণায়কের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।
3. যদি যে কোনো দুটি সারি বা যে কোনো দুটি স্তম্ভ অভিন্ন অথবা সমানুপাতী হয়, তবে নির্ণায়কের মান শূণ্য হবে।
4. যদি কোনো নির্ণায়কের সারি বা একটি স্তম্ভের প্রত্যেক উপাদানসমূহকে ধ্রুবক সংখ্যা K দ্বারা গুণ করা হয়, তবে নির্ণায়কটির মান মূল নির্ণায়কের মানের K গুণ হবে।
5. একটি নির্ণায়ককে K দ্বারা গুণ করার অর্থ হল এটির কেবলমাত্র একটি সারির (বা একটি স্তম্ভের) উপাদানসমূহকে K দ্বারা গুণ করা।
6. যদি $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ হয়, তবে $|K.A| = K^3|A|$
7. যদি কোনো নির্ণায়কের একটি সারি বা একটি স্তম্ভের উপাদানসমূহকে দুইটি বা তার অধিক পদের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায় তাহলে প্রদত্ত নির্ণায়কটিকে দুইটি বা তার অধিক নির্ণায়কের সমষ্টিরূপ প্রকাশ করা যায়।
8. যদি কোনো নির্ণায়কের যে কোনো সারি বা স্তম্ভের প্রত্যেক উপাদানের সাথে অনুরূপ অপর কোনো সারি বা স্তম্ভের উপাদানকে সমগুণনীয়ক দ্বারা গুণ করে যোগ করা হয়, তবে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে লেখা হয়

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- তিনটি বিন্দু সমরেখ হওয়ার শর্ত :

ক্ষেত্রফল $(\Delta ABC) = 0$

- ম্যাট্রিক্স A এর নির্ণায়কের পদের মাইনর হল i-তম সারি এবং j-তম স্তম্ভ বাদ দিয়ে প্রাপ্ত নির্ণায়ক এবং এটিকে M_{ij} দ্বারা সূচিত করা হয়।

- যদি A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ তবে adjA= $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

  যেখানে A_{ij} হল a_{ij} এর সহগুণনীয়ক।

- A(adjA)=(adjA)A=|A|I, যেখানে A হল n ক্রমের বর্গম্যাট্রিক্স।

- একটি বর্গম্যাট্রিক্স A-কে সিঙ্গুলার বা নন্ সিঙ্গুলার বলা হবে যখন |A|=0 বা |A|≠0।

- যদি AB=BA=I হয়, যেখানে B একটি বর্গম্যাট্রিক্স, তবে B-কে A-এর বিপরীত বলা হয়, তাছাড়া A^{-1}=B বা B^{-1}=A হবে এবং তাই $\left(A^{-1}\right)^{-1}$=A।

- একটি বর্গম্যাট্রিক্স A-এর বিপরীত থাকবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি A নন্‌সিঙ্গুলার হয়।

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj A)$

- যদি $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

  তবে এই সমীকরণগুলোকে $AX = B$ রূপে লেখা যায়, যেখানে —

  $$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- AX=B সমীকরণের অনন্য সমাধানের জন্য X=A^{-1}B হয় যেখানে |A|≠0।

- একটি সমীকরণ তন্ত্র সংগত অথবা অসংগত হয় যদি এর সমাধানের অস্তিত্ব থাকে অথবা না থাকে।

- A বর্গ ম্যাট্রিক্সের ম্যাট্রিক্স সমীকরণ AX=B এর

  i) অনন্য সমাধান এর অস্তিত্ব থাকে, যদি |A|≠0 হয়।

  ii) যদি |A|=0 এবং (adjA)B≠0 হয়, তবে সমীকরণগুলোর কোনো সমাধানের অস্তিত্ব থাকে না।

  iii) যদি |A|=0 এবং (adjA)B=0 হয়, তবে সমীকরণ তন্ত্রটি সংগত হতে পারে অথবা নাও হতে পারে।

- একটি প্রদত্ত নির্ণায়ক D-এর অ্যাডজুগেট্ হল একটি নির্ণায়ক যার পদগুলি D নির্ণায়কের পদগুলির সহগুণনীয়কগুলি এবং এটি D' প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। D নির্ণায়কের অ্যাডজুগেট নির্ণায়ক D' হলে $D' = D^2$।

অনুশীলনী–4

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ এর মান হবে

a) 193　　b) –193　　c) 190　　d) –192

2) $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এবং a_1, b_1, c_1..... ইত্যাদির সহগুণনীয়কগুলি যথাক্রমে A_1, B_1, C_1..... ইত্যাদি হলে

D-এর মান হবে —

a) $a_2C_2+b_2C_2+c_2C_2$　　b) $c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3$　　c) $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1$　　d) $a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3$

3) একটি একক ম্যাট্রিক্সের পদগুলির দ্বারা গঠিক নির্ণায়কের মান হবে —

a) 1　　b) –1　　c) 2　　d) –2

4) কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি (বা দুটি স্তম্ভ) অভিন্ন (identical) হলে নির্ণায়কের মান হবে —

a) 1　　b) 2　　c) –1　　d) এদের কোনোটিই নয়।

5) $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ –9 হলে অপর বীজ দুটি হবে —

a) –2, 7　　b) 2, –7　　c) 2, 7　　d) –2, –7

6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ এর মান হবে —

a) –1640　　b) 1480　　c) 1640　　d) 1380

7) $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ যেখানে ω হল 1-এর একটি অবাস্তব ঘণমূল। এর মান হলো —

a) 1　　b) 3　　c) –3　　d) –1

8) যদি $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ হয়, তবে x-এর মান হবে —

a) 3 b) ±3 c) ±6 d) 6

9) যদি (–3,0), (3,0) এবং (0,K) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে K-এর মান হবে —

a) 9 b) 3 c) –9 d) 6

10) যদি কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণ A, B এবং C হয় তবে নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}$ সমান হবে

a) 0 b) –1 c) 1 d) এদের কোনটিই নয়।

11) যদি cos2θ=0 হয়, তবে $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ সমান হবে

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) –2

12) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sin\theta & 1 \\ 1+\cos\theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$, যেখানে θ একটি বাস্তব সংখ্যা

নির্ণায়কের সর্বোচ্চ মান হবে —

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}}{4}$

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} b^2-ab & b-c & bc-ac \\ ab-a^2 & a-b & b^2-ab \\ bc-ac & c-a & ab-a^2 \end{vmatrix}$

2) যদি $\begin{vmatrix} 32 & 24 & 16 \\ 8 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ হয়, তবে K এর মান নির্ণয় করো।

3) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$

4) বিস্তৃতি না করে মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{bc} & \mathrm{bc}\,(\mathrm{b}+\mathrm{c}) \\ 1 & \mathrm{ca} & \mathrm{ca}\,(\mathrm{c}+\mathrm{a}) \\ 1 & \mathrm{ab} & \mathrm{ab}\,(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \end{vmatrix}$

5) যদি $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয় তবে x -এর মান নির্ণয় করো যেখানে $|5A| = \lambda\,|A|$.

6) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} \cos 15^0 & \sin 15^0 \\ \sin 75^0 & \cos 75^0 \end{vmatrix}$

7) যদি $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, তবে x এর মান লিখো।

8) যদি $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ নির্ণয়কের a_{ij} পদের সহগুণনীয়ক A_{ij} তবে $a_{32}.A_{32}$ এর মান নির্ণয় করো।

9) যদি $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ হয় তবে a_{23} পদের মাইনর বের করো।

10) নিম্নলিখিত নির্ণায়কের দ্বিতীয় সারি এবং তৃতীয় স্তম্ভের (a_{23}) পদের মাইনর বের করো :

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

11) নিম্নলিখিত নির্ণায়কের a_{12} পদের সহগুণনীয়ক বের করো :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

12) x-এর কি মানের জন্য নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটি সিঙ্গুলার?

$$\begin{bmatrix} 5-x & x+1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

13) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

14) মান নির্ণয় করো : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & a & b+c \\ 4 & b & c+a \\ 4 & c & a+b \end{vmatrix}$

15) যদি $A = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ হয় তবে A^{-1} কত লিখো।

খ—বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

1) (2,7), (1,1) ও (10,8) শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

2) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

3) দেখাও যে A(3,8), B(–4,2) এবং C(10,14) বিন্দুগুলি সমরেখ।

4) A(–2,0), B(0,4) এবং C(0,K) তিনটি বিন্দু এমন যে ক্ষেত্রফল (ΔABC)=4 বর্গ একক হলে K -এর মান নির্ণয় করো।

5) নির্ণায়ক ব্যবহার করে A(2,4) এবং B(6,12) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

6) যদি (a,b), (a',b') এবং $(a-a', b-b')$ বিন্দুগুলি সমরেখ হয় তবে দেখাও যে $ab' = a'b$ ।

7) কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$ হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

গ—বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$$

2) মান নির্ণয় করো : $\begin{vmatrix} Cos^2\theta & Sin\theta\, Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta\, Cos\theta & Sin^2\theta & Cos\theta \\ Sin\theta & -Cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

3) দেখাও যে $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}=0$ যেখানে a, b, c সমান্তর প্রগতিতে আছে।

4) নিম্নলিখিত সমীকরণ তন্ত্রটি ম্যাট্রিক্স পদ্ধতিতে সমাধান করো : $x + 3y = 3$, $y + 3z = 7$, $z + 4x = 2$

5) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ a-b & 3b & c-b \\ a-c & b-c & 3c \end{vmatrix} = 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

6) বিস্তৃত না করে প্রমাণ করো $\begin{vmatrix} 1 & ab & \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \\ 1 & bc & \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ 1 & ca & \frac{1}{c}+\frac{1}{a} \end{vmatrix}=0$

7) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

8) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে x এর সমাধান করো

$$\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$$

9) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$$

10) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে নিম্নের নির্ণায়কটি প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

11) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$$

12) দেখাও যে $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

13) দেখাও যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1+\mathrm{p} & 1+\mathrm{p}+\mathrm{q} \\ 2 & 3+2\mathrm{p} & 4+3\mathrm{p}+2\mathrm{q} \\ 3 & 6+3\mathrm{p} & 10+6\mathrm{p}+3\mathrm{q} \end{vmatrix} = 1$

14) নির্ণায়কের ধর্মাবলী প্রয়োগ করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 2\left(3abc-a^3-b^3-c^3\right)$$

15) যদি a, b, c ধনাত্মক এবং অসমান হয় তবে প্রমাণ করো নিম্নের নির্ণায়কটি ঋনাত্মক।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

16) যদি a, b এবং c ধনাত্মক এবং ভিন্ন হয় তবে দেখাও যে $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ ।

17) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে নিম্নের নির্ণায়কটি প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a+bx^2 & c+dx^2 & p+qx^2 \\ ax^2+b & cx^2+d & px^2+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(x^4-1\right)\begin{vmatrix} b & d & q \\ a & c & p \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

18) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে নিম্নের নির্ণায়কটি প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz(x-y)(y-z)(z-x)$$

19) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে —

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc\ .$$

20) নির্ণায়কের ধর্মাবলী ব্যবহার করে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} y+5 & y & y \\ y & y+5 & y \\ y & y & y+5 \end{vmatrix} = 25(3y+5)$$

21) নিম্নলিখিত সমীকরণ তন্ত্রের ম্যাট্রিক্সের প্রয়োগে সমাধান করো :

$4x + 2y + 3z = 2$; $x + y + z = 1$; $3x + y - 2z = 5$

22) যদি a, b, c বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো —

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$$ যেখানে, ω হল 1 এর একটি অবাস্তব ঘনফল.

23) ABC ত্রিভুজে যদি $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin c \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix} = 0$ হয়, তবে প্রমাণ করো ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

24) ধর, $f(t) = \begin{vmatrix} \cos t & t & 1 \\ 2\sin t & t & 2t \\ \sin t & t & t \end{vmatrix}$, তবে $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t^2}$ এর মান নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

1. (b)	2(b)	3(a)	4(d)	5(c)	6(c)	7(b)
8 (c)	9(b)	10(a)	11(b)	12(a)		

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) 0	2) 32	3) −8	4) 0	5) $\lambda = 125$	6) 0
7) 2	8) 110	9) 7	10) 13	11) 46	12) $x=3$

13) $a^2+b^2+c^2+d^2$ 14) 0 15) $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

খ—বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

1) $\frac{47}{2}$ বর্গ একক 4) $K=0$ অথবা $K=8$ 5) $y = 2x$

7) $a^2|(t_1-t_2)(3_2-t_3)(t_3-t_1)|$ বর্গ একক

গ —বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

2) 1 4) $x = 0, y = 1, z = 2$ 8) $x = 0$ অথবা $x = 3a$ 21) $x = \frac{1}{2},\ x = \frac{3}{2},\ z = -1$

24) 0

অধ্যায়- 5

সন্ততা এবং অন্তরকলনযোগ্যতা

(Continuity and Differentiability)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

- **অপেক্ষকের কোনো একটি বিন্দুতে সন্ততা :**

  ধরো, বাস্তব সংখ্যার একটি উপসেটের উপর f একটি বাস্তব অপেক্ষক এবং c হল f -এর সংজ্ঞার অঞ্চলের একটি বিন্দু। তবে c বিন্দুতে f সন্তত হবে যদি $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ হয়।

  আরও বিশদভাবে বলা যায় যে, $x=c$ বিন্দুতে f-কে সন্তত বলা হবে, যদি বামপক্ষের সীমা, ডান-পক্ষের সীমা এবং $x=c$ বিন্দুতে অপেক্ষকের মানের অস্তিত্ব থাকে এবং এরা পরস্পর সমান হয়, অর্থাৎ,

  $$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$

- **সন্ততার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :**

  i) $x=c$ বিন্দুতে f অপেক্ষক সন্তত হবে, যদি অপেক্ষকটির লেখচিত্রের $(c, f(c))$ বিন্দুতে কোনো ভগ্ন না থাকে।

  ii) একটি অন্তরালে অপেক্ষককে সন্তত বলা হবে, যদি অপেক্ষকটির লেখচিত্রের সম্পূর্ণ অন্তরালের মধ্যে কোনো ভগ্ন না থাকে।

- **একটি অন্তরালের সন্ততা :**

  i) একটি মুক্ত অন্তরাল (a,b) এর মধ্যে f -কে সন্তত বলা হবে, যদি এই অন্তরালের সকল বিন্দুতে এটি সন্তত হয়।

  ii) একটি বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$ এর মধ্যে f -কে সন্তত বলা হবে, যদি

  1) (a, b) মুক্ত অন্তরালে f সন্তত হয়।

  2) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

  3) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

- **অসন্ততা :**

  নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলোর যে কোনো একটির জন্য $x=c$ বিন্দুতে একটি অপেক্ষক f অসন্তত হবে।

  i) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ -এর অস্তিত্ব আছে কিন্তু এরা সমান নয়।

  ii) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ -এর অস্তিত্ব আছে এবং এরা সমান কিন্তু $f(c)$-এর সমান নয়।

  iii) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ -এর অস্তিত্ব নেই।

  iv) $f(c)$ সংজ্ঞাত নয়।

- **কিছু সাধারণ অপেক্ষকসমূহের সন্ততা :**

অপেক্ষক $f(x)$	যে অন্তরালে f সন্তত
i) একটি ধ্রুবক অপেক্ষক, অর্থাৎ, $f(x)=c$	R
ii) একটি অভেদ অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x)=x$.	R
iii) একটি বহুপদ রাশিমালা অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+........+a_{n-1}x+a_n$	R
iv) পরমমান অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x)=\|x\|$.	R
v) সূচকীয় অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x)=e^x$ বা a^x.	R
vi) $f(x) = \sin x$ অথবা $\cos x$	R
vii) মূলদ অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)},\ q(x)\neq 0$	R
viii) একটি লগারিদমিক অপেক্ষক, অর্থাৎ $f(x)=\log x$	$(0,\infty)$
ix) $f(x) = \tan x, \sec x$	$R-\left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n\in z\right\}$
x) $f(x) = \cot x, \operatorname{cosec} x$	$R-\{n\pi : n\in z\}$
xi) $f(x) = \sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \sec^{-1}x, \operatorname{cosec}^{-1}x, \cot^{-1}x$	এদের উপযুক্ত সংজ্ঞার অঞ্চলে।

- **সন্তত অপেক্ষকের বীজগণিত :**

ধরো, $f(x)$ এবং $g(x)$ হল এদের সাধারণ সংজ্ঞার ক্ষেত্রের উপর দুটি সন্তত অপেক্ষক এবং এদের সংজ্ঞার ক্ষেত্রের মধ্যে c একটি বাস্তব সংখ্যা। তবে $x = c$ বিন্দুতে

i) $f+g$ সন্তত।

ii) $f-g$ সন্তত।

iii) $f.g$ সন্তত।

iv) $\dfrac{f}{g}$ সন্তত।

v) $f^n, n\in N$ সন্তত।

- **সংযুক্ত অপেক্ষকের সন্ততা :**

ধরো, f এবং g হল বাস্তব মান সম্মত অপেক্ষক এমন যে c বিন্দুতে (fog) সংজ্ঞাত। যদি c বিন্দুতে g সন্তত হয় এবং $g(c)$ বিন্দুতে f সন্তত হয়, তবে c বিন্দুতে (fog) সন্তত হবে।

- **অন্তরকলনযোগ্যতা :**

ধরো, f একটি বাস্তব অপেক্ষক এবং c হল f-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি বিন্দু। আমরা বলতে পারি যে, c-বিন্দুতে f অন্তরকলনযোগ্য হবে, যদি $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয়। এই সীমাটিকে আমরা $f'(c)$

দ্বারা সূচিত করি, যাকে c বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ বা অবকল সহগ বলা হয়। অন্যকথায়, আমরা বলতে পারি যে একটি অপেক্ষক f এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রের একটি বিন্দু c-এ অন্তরকলনযোগ্য হবে যদি $\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ অথবা $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}$, যাকে বামপক্ষের অন্তরকলজ, যা $\mathrm{L}f'(c)$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং $\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ অথবা $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, যাকে ডানপক্ষের অন্তরকলজ বলা হয়, যা $\mathrm{R}f'(c)$ দ্বারা সূচিত করা হয়, উভয়ই সসীম এবং সমান হয়।

- যদি $\mathrm{L}f'(c) \neq \mathrm{R}f'(c)$ হয়, তবে আমরা বলতে পারি যে $x=c$ বিন্দুতে $f(x)$ অন্তরকলনযোগ্য নয়।

- **একটি অন্তরালের উপর একটি অপেক্ষকের অন্তরকলনযোগ্যতা :**

  i) একটি মুক্ত অন্তরাল (a,b)-এ একটি অপেক্ষক $f(x)$-কে অন্তরকলনযোগ্য বলা হবে, যদি (a,b) অন্তরালের সকল বিন্দুতে এটি অন্তরলকনযোগ্য হয়।

  ii) একটি বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-এ একটি অপেক্ষক $f(x)$-কে অন্তরকলনযোগ্য বলা হবে, যদি মুক্ত অন্তরাল (a,b)-এ এটি অন্তরকলনযোগ্য হয় এবং $\mathrm{L}f'(c)$ ও $\mathrm{R}f'(c)$ অস্তিত্ব থাকে।

- প্রত্যেক অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক সন্তত হয়, কিন্তু প্রত্যেক সন্তত অপেক্ষক অন্তরকলনযোগ্য নাও হতে পারে।

- **অন্তরকলজের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা :**

  $x = c$ বিন্দুতে অপেক্ষক $f(x)$-এর অন্তরকলজ হল $y = f(x)$ বক্রের $\left(c, f(c)\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবনতা।

- **কিছু আদর্শ অন্তরকলজ :**

  i) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$

  ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$

  iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\dfrac{1}{1+x^2},\ -\infty<x<\infty$

  iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{1+x^2},\ -\infty<x<\infty$

  v) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1$

  vi) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1$

- **সংযুক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলজ :**

  (শৃঙ্খল নিয়ম): ধরো, f একটি বাস্তব মানের অপেক্ষক যা হল দুটি অপেক্ষক u এবং v -এর সংযোজন; অর্থাৎ $f = vou$। ধরো, $t=u(x)$ এবং যদি $\dfrac{dt}{dx}$ ও $\dfrac{dv}{dt}$ উভয়েরই অস্তিত্ব থাকে, তবে আমরা পাই $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}$।

  এই শৃঙ্খল নিয়ম দুটির বেশি অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

- **অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের অন্তরকলজ :**

যদি x এবং y চলরাশিগুলো $f(x,y)=0$ আকারের সম্পর্করূপে যুক্ত হয় এবং এটিকে $y=\phi(x)$ অর্থাৎ, y-কে x-এর অপেক্ষক রূপে প্রকাশ করা সম্ভব না হয়, তখন y-কে x-এর অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক বলা হয়। এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয়ের জন্য, আমরা প্রদত্ত সম্পর্কের উভয়পক্ষকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন করি, তবে মনে রাখতে হবে যে x-এর সাপেক্ষে $\phi(y)$-এর অন্তরকলজ হল $\frac{d\phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$ ।

- **লগারিদমের সাহায্যে অবকলন :**

অবকলন করার পূর্বে লগারিদম নেওয়ার পদ্ধতিকে লগরিদমের সাহায্যে অবকলন বলা হয়। যখন আমরা $y=f(x)=[u(x)]^{v(x)}$ আকারের কিছু বিশেষ শ্রেণির অপেক্ষকের অবকলন করব, তখন এর উভয়পক্ষে লগারিদম (নিধান e যুক্ত) নিয়ে অবকলন করব। এই পদ্ধতিতে প্রধান লক্ষ্যনীয় বিষয় হল $f(x)$ ও $u(x)$ অবশ্যই সর্বদা ধনাত্মক হবে অন্যথায় তাদের লগারিদম অসংজ্ঞাত হবে।

- **প্রাচলিক আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলজ :**

কখনও কখনও x এবং y চলরাশি পৃথকভাবে অপর একটি একক চলরাশি t (যাকে প্রাচল বলা হয়)-এর অপেক্ষকরূপে দেওয়া থাকে, অর্থাৎ $x = f(t)$ এবং $y = g(t)$। এই আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয় করার জন্য নিম্নের সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\left(\text{যেখানে } \frac{dx}{dt}\neq 0\right)$$

- **অপর একটি অপেক্ষকের সাপেক্ষে একটি অপেক্ষকের অন্তরকলজ :**

ধরো $u = f(x)$ এবং $v=g(x)$ হল x-এর দুটি অপেক্ষক, তখন $g(x)$-এর সাপেক্ষে $f(x)$-এর অন্তরকলজ অর্থাৎ, $\frac{du}{dv}$ নির্ণয় করার জন্য আমরা $\frac{du}{dv}=\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}$ সূত্রটি ব্যবহার করব।

- **দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ :**

ধরো, $y = f(x)$। তখন $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ -কে x-এর সাপেক্ষে y-এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ বলা হয়। এটিকে y'' অথবা y_2 অথবা $f''(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

রোলের উপপাদ্য :

ধরো, $f:[a,b]\to R$ হল $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত এবং (a,b) অন্তরালে অবকলনযোগ্য, যাতে $f(a)=f(b)$ হয়, যেখানে a ও b যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা। তবে (a,b) অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে, যার জন্য $f'(c)=0$।

জ্যামিতিকভাবে রোলের উপপাদ্য বোঝায় যে, এখানে $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$-এর মধ্যবর্তী অন্তত একটি বিন্দু $(c, f(c))$ আছে যেখানে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

- **মধ্যম মান উপপাদ্য :**

ধরো $f:[a,b]\to R$ হল $[a,b]$ অন্তরালে একটি সন্তত অপেক্ষক এবং (a,b) অন্তরালে অবকলনযোগ্য। তবে (a,b) অন্তরালে অন্তত একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব আছে, যার জন্য $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ হয়।

জ্যামিতিকভাবে, মধ্যম মান উপপাদ্য বোঝায় যে (a,b) অন্তরালে c এরূপ একটি বিন্দু যাতে $(c, f(c))$ বিন্দুতে স্পর্শক, $(a, f(a))$ এবং $(b, f(b))$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদকের সমান্তরাল হয়।

অনুশীলনী - 5

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) যদি একটি অপেক্ষক $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{K}{2}, & x=0\end{cases}$

$x=0$ বিন্দুতে সন্তত হয়, তবে K-এর মান হল —

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

ii) অপেক্ষক $f(x)=[x]$, যেখানে $[x]$ হল বৃহত্তম অখণ্ডসংখ্যা অপেক্ষক, যে বিন্দুতে সন্তত, সেটি হল —

a) 3 b) –2 c) 1.5 d) 1

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$ অপেক্ষকটি যে বিন্দুগুলোতে সন্তত নয়, সেই বিন্দু সংখ্যা হল —

a) 1 b) 2 c) 3 d) এদের কোনটাই নয়।

iv) কোন সেটটির উপর $f(x)=\cot x$ অপেক্ষকটি অসন্তত?

a) $\{n\pi : n\in z\}$ b) $\{2n\pi : n\in z\}$ c) $\left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2} : n\in z\right\}$ d) $\left\{\dfrac{n\pi}{2} : n\in z\right\}$

v) যে বিন্দুগুলোতে $f(x)=|x-2|\cos x$ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য সেগুলো হল —

a) R b) $R-\{2\}$ c) $(0,\infty)$ d) এদের কোনটাই নয়।

vi) যদি $f(x)=3x$ এবং $g(x)=\dfrac{x^3}{3}+3$ হয়, তবে নিম্নের কোনটি অসন্তত অপেক্ষক হতে পারে?

a) $f(x)+g(x)$ b) $f(x)-g(x)$ c) $f(x).g(x)$ d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

vii) $f(x)=\dfrac{5-x^2}{5x-x^3}$ অপেক্ষকটি

a) কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে অসন্তত।

b) ঠিক দুটি বিন্দুতে অসন্তত।

c) ঠিক তিনটি বিন্দুতে অসন্তত।

d) এদের কোনটাই নয়।

viii) যদি $f(x) = |x-2|$ এবং $g(x) = f\{f(x)\}$ হয়, তবে $2 < x < 4$ এর জন্য, $g'(x)$ এর মান হল

a) -1 b) 0 c) 1 d) এদের কোনটাই নয়।

ix) যদি $f(x) = e^x\phi(x)$, $\phi(0) =1$, $\phi'(0) =3$ হয়, তবে $f'(0)$ এর মান হল —

a) 0 b) 2 c) 4 d) এদের কোনটাই নয়।

x) যদি $f(x) = log_x(logx)$ হয়, তবে $f'(e)$ এর মান হল

a) 0 b) e c) $\dfrac{2}{e}$ d) $\dfrac{1}{e}$

xi) যদি $(-\infty,\infty)$ অন্তরালে সংজ্ঞাত $y = f(x)$ একটি অবকলনযোগ্য অযুগ্ম অপেক্ষক এমন যে, $f'(3) =-2$ হয়, তবে $f'(-3)$ এর মান হল—

a) 4 b) 2 c) -2 d) 0

xii) যদি $x^2+y^2 = 1$ হয়, তবে

a) $yy''-2(y')^2+1 = 0$ b) $yy''+(y')^2+1 = 0$

c) $yy''+(y')^2-1 = 0$ d) $yy'+2(y')^2+1=0$

xiii) যদি $f(x) = |\cos x-\sin x|$ হয়, তবে $f'\left(\pi/2\right)$ হল

a) 1 b) -1 c) 0 d) এদের কোনটাই নয়।

xiv) $f(x) = x^3-3x$ অপেক্ষক $[0, \sqrt{3}\,]$ অন্তরালে রোলের উপপাদ্য সিদ্ধ করলে c-এর মান হবে —

a) 1 b) -1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$

xv) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ অপেক্ষক $[1,3]$ অন্তরালে মধ্যম মান উপপাদ্য সিদ্ধ করলে c-এর মান হবে —

a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) এদের কোনটাই নয়।

2] অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর)

i) যদি $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}, & x\neq 0\\ K, & x=0\end{cases}$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত হয়, তবে K-এর মান নির্ণয় করো।

ii) $f(x) = |x-1|+|x-3|$ অপেক্ষকটির $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরকলজের মান নির্ণয় করো।

iii) যদি $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ হয়, তবে $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}$ এর মান নির্ণয় করো।

iv) যদি $y=\sec^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)+\sin^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, $x>0$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো।

v) $\tan^{-1}x$ -এর সাপেক্ষে $log(1+x^2)$-এর অন্তরকলন করো।

vi) যদি $y = log_a x$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

vii) যদি $f(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক হয়, তবে $f'(x)$ যুগ্ম না অযুগ্ম অপেক্ষক লিখ।

viii) যদি $x = t^2$, $y = t^3$ হয়, তবে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

ix) যদি $y = \sin x^0$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

x) যদি $y = \sin^{-1}(\cos x)$ হয়, তবে $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করো।

খ—বিভাগ

3] সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) প্রমাণ করো যে, সকল $x\geq 0$ এর জন্য $f(x)=\sqrt{|x|-x}$ অপেক্ষকটি সন্তত।

ii) দেওয়া আছে $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ । $f\{f(x)\}$ অপেক্ষকটির অসন্তত বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

iii) $x=0$ বিন্দুতে $f(x)=x|x|$ অপেক্ষকটির অবকলনযোগ্যতা আলোচনা করো।

iv) যদি $x=e^{\frac{x}{y}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x\log x}$ ।

v) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর x-এর সাপেক্ষে অবকলন করো :

a) $3^{\sin^2 x}$ b) $\dfrac{5^x}{x^5}$ c) $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ d) $\log_{10}(\log\cos x)$

e) $\tan^{-1}\left\{\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right\},\ 0<x<\pi$ f) $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{1+6x^2}\right)$ g) $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)$

h) $\sin(x^x)$ i) $e^{x\log x}$

vi) যদি $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$, $h(x) = \cos x$ এবং $\phi(x) =\{go(foh)\}.(x)$ হয়, তবে $\phi''\left(\pi/4\right)$ এর মান নির্ণয় করো।

vii) যদি $y = e^{nx}$ হয়, তবে $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right).\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)$ নির্ণয় করো।

গ—বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

4] নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর নির্দেশিত বিন্দুতে সন্ততা আলোচনা করো :

i) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2|x|+x^2}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}, \quad x=0 \text{ বিন্দুতে}$$

ii) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left(3e^{1/x}+4\right)}{2-e^{1/x}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}, \quad x=0 \text{ বিন্দুতে}$$

iii) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{\log(1+2x)}, & x\neq 0\\ 7, & x=0\end{cases}, \quad x=0 \text{ বিন্দুতে}$$

iv) $$f(x)=\begin{cases}|x-a|\sin\left(\dfrac{1}{x-a}\right), & x\neq a\\ 0, & x=a\end{cases}, \quad x=a \text{ বিন্দুতে}$$

v) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}, & x<0\\ \dfrac{3}{2}, & x=0\\ \dfrac{\log(1+3x)}{e^{2x}-1}, & x>0\end{cases}, \quad x=0 \text{ বিন্দুতে}$$

vi) $f(x)=|x-1|+|x+1|$, $x=-1, 1$ বিন্দুতে

5] নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলো নির্দেশিত বিন্দুগুলোতে সন্তত হলে a এবং b-এর মান নির্ণয় করো :

i) $$f(x)=\begin{cases}x+a\sqrt{2}\sin x, & 0\le x<\pi/4\\ 2x\cot x+b, & \pi/4\le x<\pi/2\\ a\cos 2x-b\sin x, & \pi/2\le x\le\pi\end{cases}, \quad x=\pi/4 \text{ এবং } \pi/2 \text{ বিন্দুতে}$$

ii) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-4}{|x-4|}+a, & x<4\\ a+b, & x=4,\\ \dfrac{x-4}{|x-4|}+b, & x>4\end{cases}, \quad x=4 \text{ বিন্দুতে}$$

6) দেখাও যে, $x = 2$ বিন্দুতে $f(x) = |x-2| + |x-3|$ অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয়।

7) $f : R \to R$ অপেক্ষকটি $f(x+y) = f(x).f(y)$ সকল $x,y \in \mathrm{R}$, $f(x) \neq 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে। মনে করো যে $f(x)$ অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে অবকলনযোগ্য এবং $f'(0) = 2$। প্রমাণ কর যে $f'(x) = 2f(x)$।

8) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + a, & x \leq 1 \\ bx + 2, & x > 1 \end{cases}$ অপেক্ষকটি x এর সকল বাস্তব মানে অবকলনযোগ্য হলে, a এবং b -এর মান নির্ণয় করো।

9) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{16+\sqrt{x}}-4}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \\ \dfrac{1-\cos 4x}{x^2} & x < 0 \end{cases}$ অপেক্ষকটি $x=0$ বিন্দুতে সন্তত হলে, a-এর মান নির্ণয় করো।

10) $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো, যখন —

i) $y = \log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

ii) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{a\cos x - b\sin x}{b\cos x + a\sin x}\right)$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ এবং $\dfrac{a}{b}\tan x > -1$.

iii) $y = \tan^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right\}$, $-1 < x < 1,\ x \neq 0$

iv) $y = \cos^{-1}\left\{\dfrac{2x - 3\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{13}}\right\}$

v) $xy = \sin(x+y)$

vi) $\tan(x+y) + \tan(x-y) = 1$

vii) $y = \log_{\sin x}\sec x + 10^{x^2}$

viii) $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$

ix) $(\cos\ x)^y = (\cos\ y)^x$

x) $x = e^{\theta}\left(\theta + \dfrac{1}{\theta}\right)$ এবং $y = e^{-\theta}\left(\theta - \dfrac{1}{\theta}\right)$

xi) $x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ এবং $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$

11) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$-এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

12) যদি $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y=0$

13) যদি $y=\cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right\}$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{dy}{dx}$ -এর মান x নিরপেক্ষ।

14) যদি $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=a(x-y)$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

15) যদি $x^m y^n=(x+y)^{m+n}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

16) যদি $y=e^x \sin x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$.

17) যদি $x=a\sin2\theta(1+\cos2\theta)$ এবং $y=b\cos2\theta(1-\cos2\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে $\theta=\frac{\pi}{4}$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$ ।

18) যদি $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}-y=0$.

19) যদি $x=\sec\theta-\cos\theta$ এবং $y=\sec^n\theta-\cos^n\theta$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $(x^2+4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=n^2(y^2+4)$

20) যদি $x=a(1-\cos\theta)$, $y=a(\theta+\sin\theta)$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\theta=\pi/2$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{a}$ ।

21) যদি $y=\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^m$ হয়, তবে দেখাও যে $(x^2+1)y_2+xy_1-m^2y=0$.

22) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর নির্দেশিত অন্তরালে রোলের উপপাদ্য যাচাই করো :

i) $f(x)=(x-1)(x-2)^2$, $[1, 2]$ অন্তরালে।

ii) $f(x)=\log(x^2+2)-\log3$, $[-1, 1]$ অন্তরালে।

iii) $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$, $[0, \pi/2]$ অন্তরালে।

iv) $f(x) = e^x \sin x$, $[0, \pi]$ অন্তরালে।

23) রোলের উপপাদ্য প্রয়োগে $y=x(x-4)$, $x\in[0,4]$ বক্রের উপরিস্থিত একটি বিন্দু নির্ণয় করো, যেখানে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

24) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর নির্দেশিত অন্তরালে মধ্যম মান উপপাদ্য যাচাই করো :

i) $f(x) = x^3-2x^2-x+3$, $[0, 1]$ অন্তরালে।

ii) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$, $[-3, 4]$ অন্তরালে।

iii) $f(x) = \sin x - \sin 2x - x$, $[0, \pi]$ অন্তরালে।

25) $y = x^3-3x$ বক্রের উপর বিন্দুগুলো নির্ণয় করো, যেখানে স্পর্শক $(1-2)$ এবং $(2,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-এর সমান্তরাল।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) i) b ii) c iii) d iv) a v) b vi) d
vii) c viii) c ix) c x) d xi) c xii) b
xiii) a xiv) a xv) b

2) i) $K=1$ ii) 0 iii) $\frac{4}{5}$ iv) 0 v) $2x$ vi) $\frac{1}{x\log_e^a}$

vii) অযুগ্ম viii) $\frac{3}{4t}$ ix) $\frac{\pi}{180}\cos x^0$ x) 0

খ —বিভাগ

3) ii) $x=1, 2$

v) a) $3^{\sin^2 x}\log 3.\sin 2x$ b) $\frac{5^x}{x^5}\left(\log 5-\frac{5}{x}\right)$ c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

d) $\frac{-\tan x}{\log 10 \log(\cos x)}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) $\frac{3}{1+9x^2}-\frac{2}{1+4x^2}$

g) 1 h) $x^x(1+\log x)\cos(x^x)$ i) $x^x(1+\log x)$

vi) -4

vii) $-ne^{-nx}$

গ —বিভাগ

4) i) অসন্তত ii) সন্তত iii) অসন্তত iv) সন্তত v) সন্তত vi) সন্তত

5) i) $a=\frac{\pi}{6}$, $b=-\frac{\pi}{12}$ ii) $a=1$, $b=-1$

8) $a=3$, $b=5$

9) $a=8$

10) i) $\sec x$ ii) -1 iii) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ iv) $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ v) $\frac{\cos(x+y)-y}{x-\cos(x+y)}$

vi) $\frac{\sec^2(x+y)+\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)-\sec^2(x+y)}$ vii) $\frac{\tan x\log\sin x+\cot x\log\cos x}{(\log\sin x)^2}+2x\log 10.10^{x^2}$

viii) $(\tan x)^{\cot x}.\mathrm{cosec}^2 x\,(1-\log\tan x)+(\cot x)^{\tan x}.\sec^2 x(\log\cot x-1)$

ix) $\frac{\log\cos y+y\tan x}{\log\cos x+x\tan y}$ x) $e^{-2\theta}\cdot\frac{\theta^2-\theta^3+\theta+1}{\theta^3+\theta^2+\theta-1}$ xi) $\frac{x}{y}$

11) $\frac{1}{4}$

23) $(2,-4)$

25) $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{3}},\ \ \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

অধ্যায়- 6

অন্তরকলজের প্রয়োগ

(Application of Derivatives)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **পরিবর্তনের হার হিসাবে অন্তরকলজ :**

  ফলিত গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে কোনো একটি চলরাশির সাপেক্ষে আরেকটি চলরাশি কী হারে পরিবর্তিত হচ্ছে, তা জানার প্রয়োজন হয়। সাধারণত পরিবর্তনের হার বলতে সময়ের সাপেক্ষে বোঝায়, কিন্তু সময় ব্যতীত অন্য চলরাশির সাপেক্ষেও পরিবর্তনের হার থাকতে পারে।

  উদাহরণস্বরূপ, একজন চিকিৎসক এটি জানতে চাইতে পারেন যে ওষুধের ডোজ (dose) এর কিছু পরিবর্তনে কীভাবে শরীরের প্রতিক্রিয়ায় প্রভাব ফেলতে পারে।

- যদি $y = f(x)$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ হল x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার।

- $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ বলতে বোঝায় $x=x_0$ বিন্দুতে x-এর সাপেক্ষে y-এর পরিবর্তনের হার।

- সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার t সময়ে সরণ s যদি $s=f(t)$ দ্বারা প্রদত্ত হয় তবে

  i) $v =$ t সময়ে বেগ $= \dfrac{ds}{dt}$

  $a =$ t সময়ে ত্বরণ $= \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2} = v.\dfrac{dv}{ds}$

  ii) যখন সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা স্থিরাবস্থায় আসে, তখন আমরা পাই $\dfrac{ds}{dt} = 0$ এবং $\dfrac{d^2s}{dt^2} = 0$ ।

  iii) যখন সরলরেখায় গতিশীল একটি কণা তাৎক্ষণিকভাবে স্থিরাবস্থায় আসে, তখন আমরা পাই $\dfrac{ds}{dt} = 0$ কিন্তু $\dfrac{d^2s}{dt^2} \neq 0$ ।

- **অবকল, ত্রুটি ও আসন্নমান :**

- **অবকল :**

  ধরা যাক, $y = f(x)$ হল x-এর একটি অপেক্ষক এবং x-এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন হল Δx। যদি x-এর ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx-এর জন্য y-এর পরিবর্তন Δy হয়, তবে —

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \in, \text{ যেখানে } \in \to 0 \text{ যখন } \Delta x \to 0$$

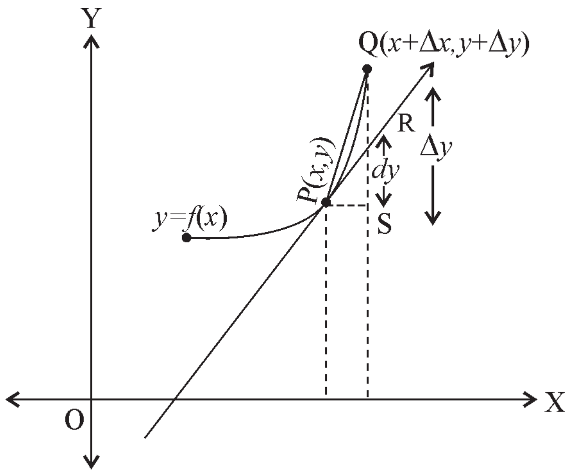
$$\Rightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x + \in \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = f'(x)\Delta x \quad \text{(আসন্নমানে)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x \quad \text{(আসন্নমানে)}$$

- **অবকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য :**

ধরা যাক $y=f(x)$ বক্রের ওপর $P(x,y)$ যে-কোনো একটি বিন্দু। $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ বিন্দুটি বক্রের ওপর P বিন্দুর একটি নিকটবর্তী বিন্দু, যেখানে x-এর ক্ষুদ্র বৃদ্ধি Δx-এর জন্য y-এর বৃদ্ধি Δy। পাশের চিত্র থেকে, এটি স্পষ্ট যে, PQ ছেদকের নতি হল $\frac{\Delta y}{\Delta x}$। কিন্তু, যখন $\Delta x \to 0$, তখন $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর সীমাস্থ মান $\frac{dy}{dx}$ এর নিকটবর্তী হয়, যা P বিন্দুতে স্পর্শকের নীতি নির্দেশ করে।



সুতরাং, $\Delta x \to 0$ হলে, $\Delta y(=QS)$-এর আসন্নমান $dy(=RS)$।

আমরা জানি,

$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$

কিন্তু, $\Delta y = \frac{dy}{dx}.\Delta x = f'(x)\Delta x$ (আসন্নমানে)

$\therefore \quad f(x+\Delta x) = y + f'(x)\Delta x$ (আসন্নমানে)

$\Rightarrow \quad f(x+\Delta x) = y + \frac{dy}{dx}.\Delta x$ (আসন্নমানে)

দ্রষ্টব্য : $\frac{dy}{dx}\Delta x$ -কে y-এর অবকল বলা হয় এবং এটিকে dy দ্বারা সূচীত করা হয়।

- **ত্রুটি :** ধরা যাক, $y = f(x)$ হল x-এর একটি বাস্তব অপেক্ষক। যদি x পরিমাপে ত্রুটি Δx হয়, তবে এটির অনুরূপ y-এর ত্রুটি Δy নিম্নে প্রদত্ত —

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

i) x পরিমাপে ত্রুটি Δx এবং y পরিমাপে ত্রুটি Δy-কে পরম ত্রুটি বলা হয়।

ii) $\frac{\Delta x}{x}$ -কে x পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটি বলা হয়।

iii) $\dfrac{\Delta x}{x} \times 100$ -কে x পরিমাপে শতকরা ত্রুটি বলা হয়।

- **মধ্যম মান উপপাদ্য :**
- **রোলের উপপাদ্য :**

$[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত একটি অপেক্ষক f যদি —

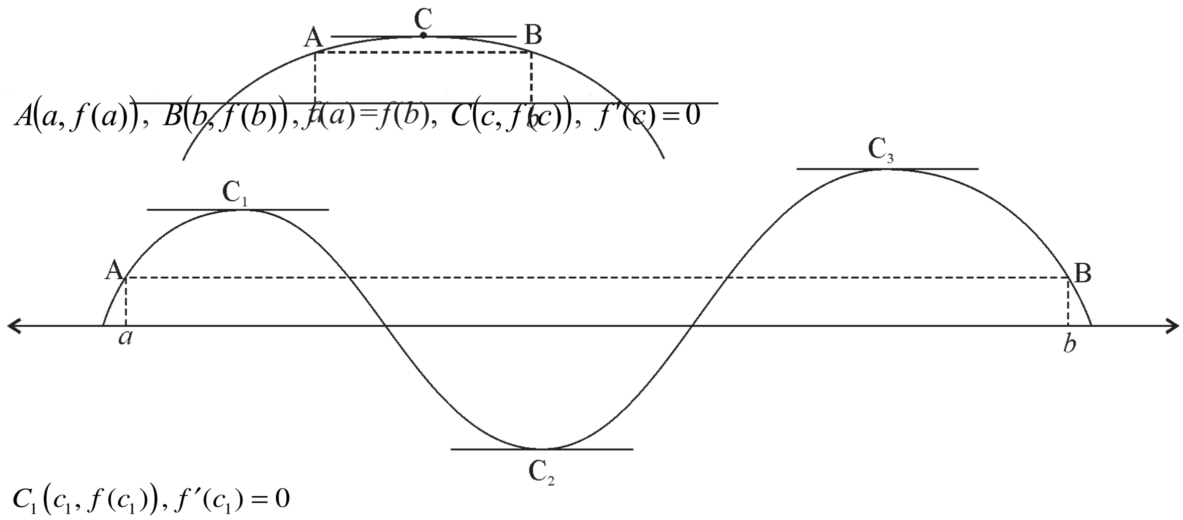
i) $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত।

ii) (a,b) মুক্ত অন্তরালে অবকলনযোগ্য এবং

iii) $f(a) = f(b)$ হয়, তাহলে a ও b মান দুটির মাঝে অন্তত একটি বাস্তব মান c-এর অস্তিত্ব থাকবে $(a<c<b)$ যাতে $f'(c) = 0$ হয়।

- **রোলের উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য :**

ধরা যাক, $y = f(x)$ বক্র যা $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত এবং (a,b) মুক্ত অন্তরালে অবকলনযোগ্য, এর লেখচিত্র নিম্নে প্রদত্ত —



$$A(a, f(a)),\ B(b, f(b)),\ f(a)=f(b),\ C(c, f(c)),\ f'(c)=0$$

$C_1(c_1, f(c_1)), f'(c_1) = 0$

$C_2(c_2, f(c_2)), f'(c_2) = 0$

$C_3(c_3, f(c_3)), f'(c_3) = 0$

সহজভাবে বলা যায়, $f(x)$ এর লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত এমন দুটি বিন্দু আছে যাদের কোটি সমান এবং এই বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী অন্তত একটি বিন্দুর অস্তিত্ব থাকবে যেখানে এই বিন্দুগামী স্পর্শকটি x-অক্ষের সমান্তরাল হবে।

- **রোলের উপপাদ্যের বীজগাণিতিক ব্যাখ্যা :**

$f(x)$-এর a ও b শূণ্য দুটির মধ্যবর্তী (অর্থাৎ $f(x)$=0-এর দুটি বীজ a ও b-এর মধ্যবর্তী) অন্তত একটি মানের অস্তিত্ব থাকবে যেটি $f'(x)$-এর শূন্য।

- **লাগ্রাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্য :**

  $[a,b]$-বদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত একটি অপেক্ষক f যদি

  i) $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সন্তত এবং

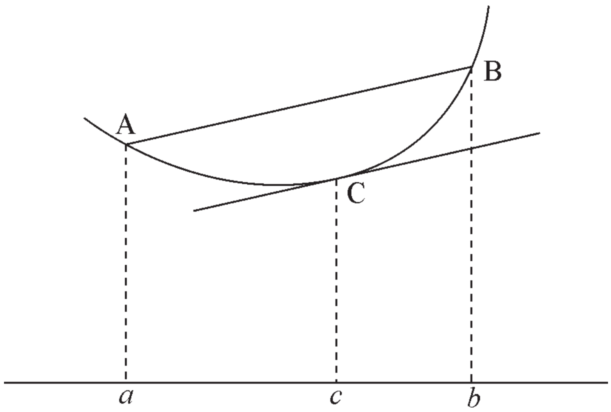
  ii) (a,b) মুক্ত অন্তরালে অবকলনযোগ্য হয়, তবে a ও b মান দুটির মধ্যবর্তী অন্তত একটি বাস্তব মান $c(a<c<b)$ -এর অস্তিত্ব থাকবে যেখানে

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

- **লাগ্রাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্যের জ্যামিতিক তাৎপর্য :**

  সহজভাবে উপপাদ্যটির ব্যাখ্যা হল, $f(x)$ লেখচিত্রের ওপর অবস্থিত দুটি বিন্দু A ও B -এর মধ্যবর্তী অন্তত একটি বিন্দুর অস্তিত্ব থাকবে যাতে ওই বিন্দুতে অঙ্কিত বক্রের স্পর্শকটি AB জ্যা-এর সমান্তরাল হয়।

  $C(c, f(c))$, $f'(c)=$ AB-এর নতি ।



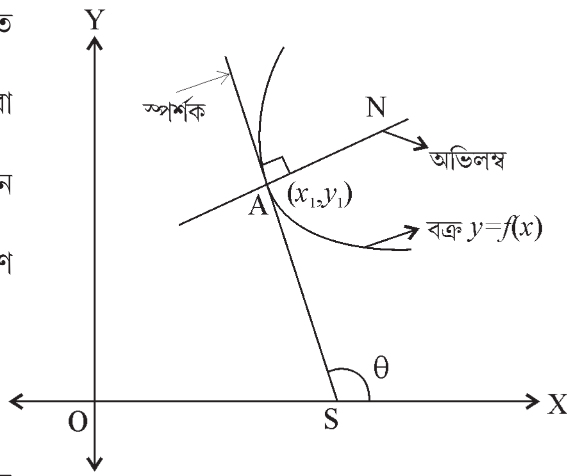
- **স্পর্শক ও অভিলম্ব :**

- **স্পর্শকের নতি :**

  ধরা যাক, $y=f(x)$ যে-কোনো একটি বক্র এবং এই বক্রের ওপর অবস্থিত একটি বিন্দু হল $A(x_1, y_1)$। তাহলে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}$ -কে $y=f(x)$ বক্রের ওপর অবস্থিত A বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবনতা বা নতি বলা হয়। প্রবনতা বা নতিকে আমরা $\tan\theta$ দিয়ে সূচীত করি অর্থাৎ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}=\tan\theta$, যেখানে θ হল স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করেছে সেটি।

  যদি $\theta=0$ হয়, তবে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}=\left(f'(x)\right)_{A(x_1,y_1)}=0$

  যদি $\theta=90^0$ হয়, অর্থাৎ A বিন্দুগামী স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল।



- **অভিলম্বের নতি :**

  যে-কোনো সরলরেখা যেটি $A(x_1,y_1)$ বিন্দুতে বক্রের উপর লম্ব ($\perp$) এবং এছাড়া $A(x_1,y_1)$ বিন্দুগামী সেটিকে অভিলম্ব বলা হয়।

  $$A(x_1,y_1) \text{ বিন্দুতে অভিলম্বের নতি} = -\frac{1}{A(x_1, y_1) \text{ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি}} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{A(x_1,y_1)}$$

- **স্পর্শকের সমীকরণ :**

  $A(x_1,y_1)$ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়ে তাদের নতি $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}$ -এর প্রয়োজন হয়।

  ধরা যাক, নতি হল m, তাহলে স্পর্শকের সমীকরণ হবে :

  $$y-y_1 = m(x-x_1) \quad \text{বা,} \quad y-y_1=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}(x-x_1)$$

- **অভিলম্বের সমীকরণ :**

  যে সরলরেখা কোনো বক্রের ওপর অবস্থিত $A(x_1,y_1)$ বিন্দুগামী এবং এই বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর লম্ব ($\perp$) সেটিকে অভিলম্ব বলা হয়। যেহেতু $A(x_1,y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $m=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}$ । সুতরাং, অভিলম্বের নতি হবে $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{A(x_1,y_1)}}$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ হবে :

  $$y-y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(x-x_1)$$

  অর্থাৎ যদি, $m(y-y_1) = -(x-x_1)$

  বা, $(x-x_1)+m(y-y_1) = 0$

- **প্রাচলিক আকারে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ :**

  ধরা যাক, প্রাচলিক আকারে বক্র দুটির সমীকরণ হল $x=f(t)$, $y=g(t)$। তাহলে $A(x_1,y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি $= \frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}$

  এক্ষেত্রে $A(x_1, y_1)$ এর স্থানাঙ্ক হবে $A\left(f(t_1), g(t_1)\right)$ এবং স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ হবে :

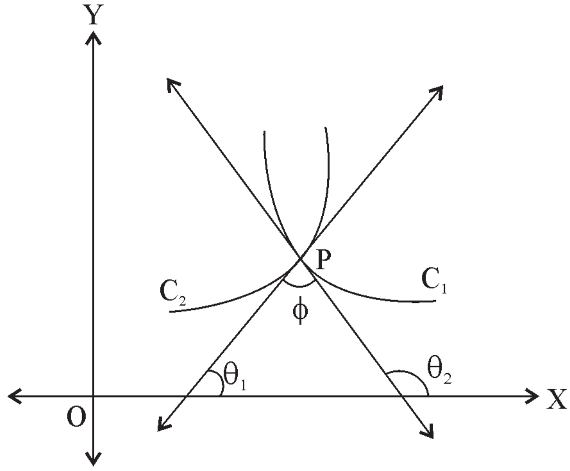
$$y - g(t_1) = \frac{g'(t_1)}{f'(t_1)}\left(x - f(t_1)\right)$$

- **লম্ব বক্ররেখা :**

  যদি দুটি বক্ররেখার ছেদ কোণ সমকোণ (90^0) হয়, তবে আমরা বলব যে বক্ররেখা দুটি লম্বভাবে ছেদ করেছে এবং বক্ররেখাগুলোকে লম্ব বক্ররেখা বলা হয়।

  যদি বক্রগুলো লম্ব হয়, তবে $\phi = \pi/2$

  $$\therefore m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{c_1} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{c_2} = -1$$



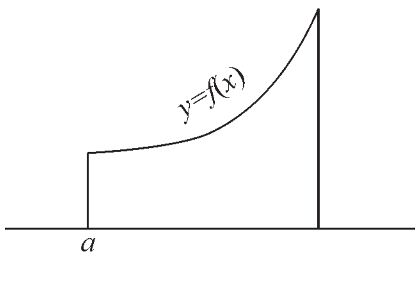
- **একদিষ্ট অপেক্ষক :**

  কোনো একটি মুক্ত অন্তরাল $I=(a,b)$-তে সংজ্ঞাত একটি সন্তত অপেক্ষক $f(x)$-কে একদিষ্ট অপেক্ষক বলা হবে যদি এটি নিম্নের যে-কোনো একটি শর্ত সিদ্ধ করে।

- $f(x)$ ক্রমবর্ধমান বা বর্ধিষ্ণু হবে যদি, সব $x_1, x_2 \in I$ এর জন্য,

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

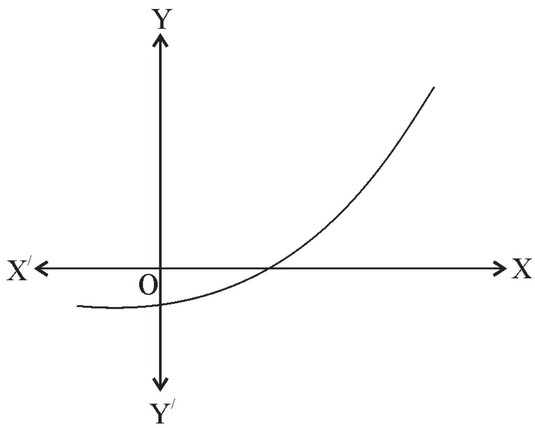
  বা, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



- $f(x)$ যথার্থ ক্রমবর্ধমান হবে যদি সব $x_1, x_2 \in I$ এর জন্য,

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

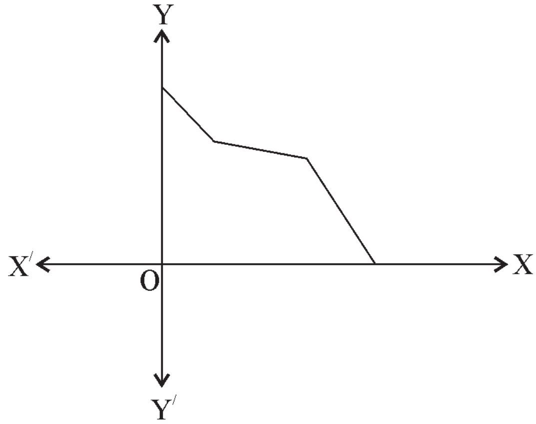
  বা, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



- $f(x)$ ক্রমহ্রাসমান বা ক্ষয়িষ্ণু হবে যদি সব $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য,

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

  বা, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

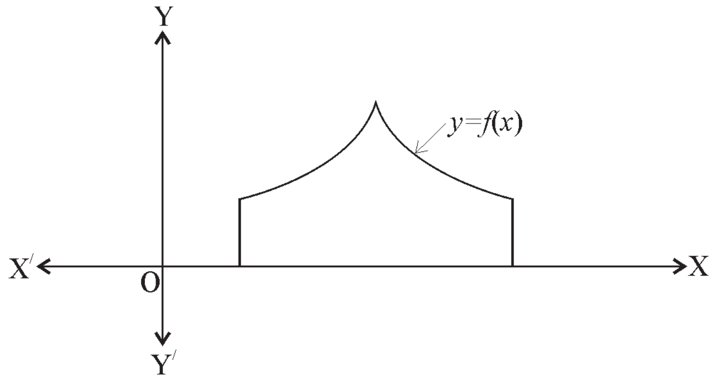


- $f(x)$ যথার্থ ক্রমহ্রাসমান হবে যদি সব $x_1, x_2 \in$ I এর জন্য,

  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

  বা, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

দ্রষ্টব্য : কখনও কখনও এটি সম্ভব যে $y=f(x)$ অপেক্ষক কোনো প্রদত্ত অন্তরালে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু এদের কোনোটাই নয় এবং এটি নিম্নের চিত্রে দেখানো হয়েছে :



- **x_0 বিন্দুতে বর্ধিষ্ণু এবং ক্ষয়িষ্ণু অপেক্ষক :**

ধরা যাক, x_0 হল কোনো বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক f -এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভুক্ত একটি বিন্দু। তাহলে x_0 সমন্বিত এমন একটি মুক্ত অন্তরাল I$=(x_0-h, x_0+h)$ -এর অস্তিত্ব থাকবে যেখানে

(i) x_0 বিন্দুতে f বর্ধিষ্ণু হবে, যদি I-তে $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$

(ii) x_0 বিন্দুতে f যথার্থ বর্ধিষ্ণু হবে, যদি I-তে $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

(iii) x_0 বিন্দুতে f ক্ষয়িষ্ণু হবে, যদি I-তে $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$

(iv) x_0 বিন্দুতে f যথার্থ ক্ষয়িষ্ণু হবে, যদি I-তে $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

- **বর্ধিষ্ণু / ক্ষয়িষ্ণু / ধ্রুবক অপেক্ষক যাচাই-এর জন্য পরীক্ষা :**

ধরা যাক, বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-তে f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং মুক্ত অন্তরাল (a,b)-তে f অবকলনযোগ্য। তাহলে,

(i) $[a,b]$-তে f বর্ধিষ্ণু হবে যদি সকল $x \in (a,b)$-এর জন্য $f'(x)>0$ হয়।

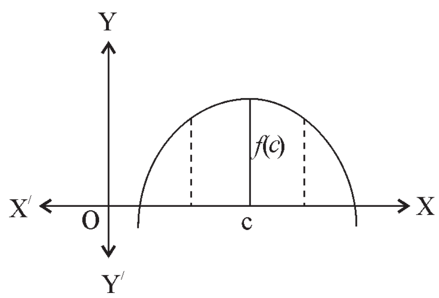
(ii) $[a,b]$-তে f ক্ষয়িষ্ণু হবে যদি সকল $x \in (a,b)$-এর জন্য $f'(x)<0$ হয়।

(iii) $[a,b]$-তে f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক হবে যদি সকল $x \in (a,b)$-এর জন্য $f'(x)=0$ হয়।

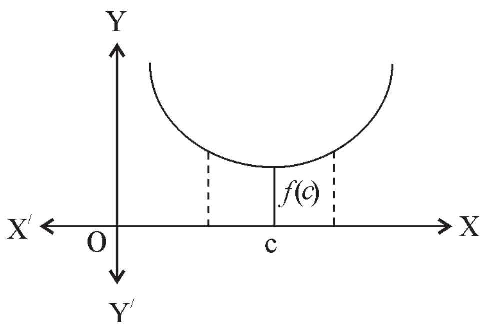
- **চরম মান, অবম মান ও প্রান্তিক মান :**

ধরা যাক, f একটি অপেক্ষক যা অন্তরাল I-তে সংজ্ঞাত, তাহলে f-এর

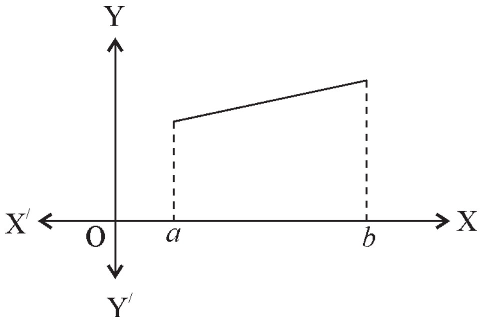
(i) চরম মান আছে যদি I -তে এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c) \geq f(x)$, সব $x \in$ I এর জন্য। c বিন্দুটিকে I-তে চরম মানের বিন্দু বলা হয়।



(ii) অবম মান আছে যদি I -তে এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c) \leq f(x)$, সব $x \in$ I এর জন্য। c বিন্দুটিকে I-তে অবম মানের বিন্দু বলা হয়।



(iii) প্রান্তিক মান আছে যদি I -তে এমন একটি বিন্দু c-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে I-তে $f(c)$-এর হয় চরম মান অথবা অবম মান থাকে। c বিন্দুটিকে বলা হয় প্রান্তিক বিন্দু।



- **স্থানীয় চরম মান ও স্থানীয় অবম মান :**

  ধরা যাক f হল একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং c হল f-এর সংজ্ঞার অঞ্চলে অবস্থিত একটি বিন্দু। তাহলে,

  (i) c-কে স্থানীয় চরম মানের বিন্দু বলা হবে যদি এমন একটি $h>0$-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c)\geq f(x)$ হয়, সব $x\in(c-h, c+h)$-এর জন্য।

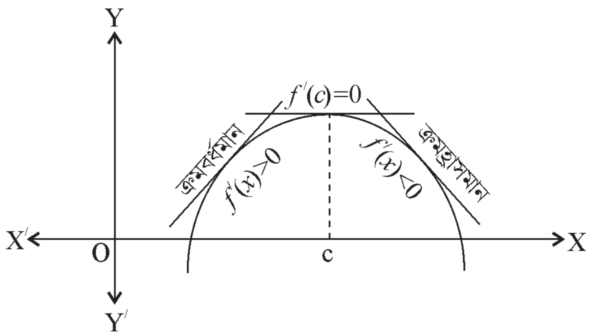
  $f(c)$-এর মানকে f-এর স্থানীয় চরম মান বলা হয়।

  (ii) c-কে স্থানীয় অবম মানের বিন্দু বলা হবে যদি এমন একটি $h>0$-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে $f(c)\leq f(x)$ হয়, সব $x\in(c-h, c+h)$-এর জন্য।

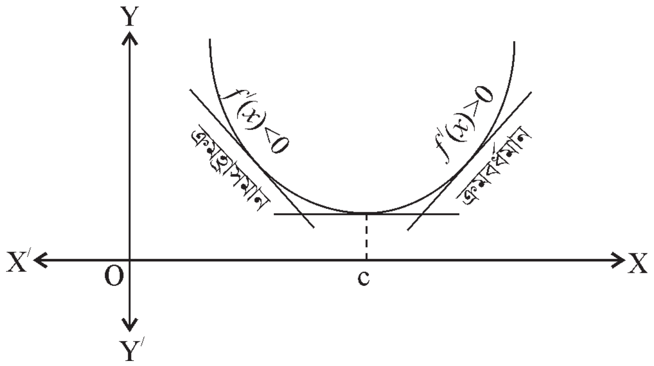
  $f(c)$-এর মানকে f-এর স্থানীয় অবম মান বলা হয়।

- **জ্যামিতিক তাৎপর্য :**

  যদি $x = c$, f-এর স্থানীয় চরম মানের বিন্দু হয়, তবে $(c-h, c)$ অন্তরালে f ক্রমবর্ধমান $\left(f'(x)>0\right)$ এবং $(c, c+h)$ অন্তরালে f ক্রমহ্রাসমান হবে। অর্থাৎ $f'(c) = 0$।

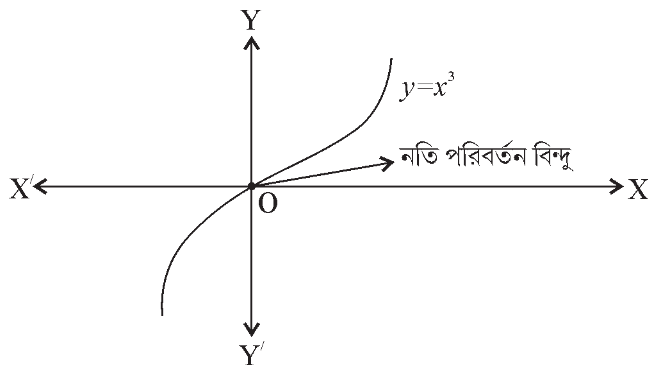


আবার, যদি $x = c$, f-এর স্থানীয় অবম মানের বিন্দু হয়, তবে $(c-h, c)$ অন্তরালে f ক্রমহ্রাসমান $\left(f'(x)<0\right)$ এবং $(c, c+h)$ অন্তরালে f ক্রমবর্ধমান $\left(f'(x)>0\right)$ হবে। অর্থাৎ $f'(c) = 0$।



- **নতি-পরিবর্তন বিন্দু :**

  যখন x-এর মান c-এর দিকে বৃদ্ধি পেতে পেতে c-কে অতিক্রম করে, তখন যদি $f'(x)$ -এর চিহ্নের কোনো পরিবর্তন না হয়, তবে c-কে স্থানীয় চরম মানের বিন্দু অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দু এদের কোনোটিই বলা যাবে না। এধরণের বিন্দুকে নতি-পরিবর্তন বিন্দু বলা হয়।



- **চরম মান এবং অবম মানের জন্য দ্বিতীয় ক্রমের অন্তর্কলজ পরীক্ষা :**

  ধরা যাক, f হল I অন্তরালে সংজ্ঞাত একটি অপেক্ষক এবং $c\in$I। f অপেক্ষকটি c-তে অবকলনযোগ্য। তাহলে,

  (i) $x=c$ -কে স্থানীয় চরম মানের বিন্দু বলা হবে যদি $f'(c)=0$ এবং $f''(c)<0$।

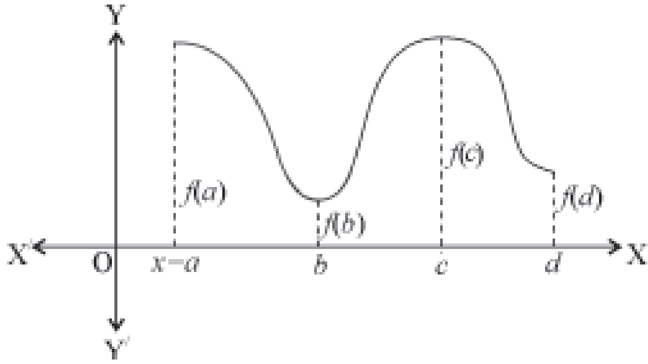
  (ii) $x=c$ -কে স্থানীয় অবম মানের বিন্দু বলা হবে যদি $f'(c)=0$ এবং $f''(c)>0$।

  (iii) যদি $f'(c)=0$ এবং $f''(c)=0$ হয় তবে পরীক্ষাটি ব্যর্থ বলে বিবেচিত হবে। তখন আমরা প্রথম ক্রমের অন্তরকলজের পরীক্ষা প্রয়োগ করব যেখানে x-এর মান c -এর দিকে বৃদ্ধি পেতে থাকবে এবং x-কে নতি-পরিবর্তন বিন্দু বলা হবে।

- **বদ্ধ অন্তরালে চরম মান এবং অবম মান :**

  $x\in[0,1]$ -তে $f(x)=x+6$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করি। এখানে $f'(c)\neq 0$। এটির চরম মান বা অবম মান কোনোটিই নেই। কিন্তু $f(0)=6$। এটি হল লঘিষ্ঠ মান।

  এছাড়া, $f(1)=7$। এটিকে গরিষ্ঠ মান বলা হয়।



- **অপেক্ষকের গরিষ্ঠ মান ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় :**

    (i) f-এর সমস্ত সংকট বিন্দু নির্ণয় করো যার জন্য $f'(x) = 0$ অথবা f অবকলনযোগ্য নয়।

    (ii) প্রান্ত বিন্দুগুলোও বিবেচনা করো।

    (iii) (i) ও (ii) -এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলোর জন্য অপেক্ষকের মান নির্ণয় করো।

    (iv) (iii)-এ প্রাপ্ত f-এর মানগুলোর মধ্যে চরম মান এবং অবম মান শনাক্ত করো।
    এগুলিকে অপেক্ষকের গরিষ্ঠ মান এবং লঘিষ্ঠ মান বলা হয়।

- **মনে রাখার জন্য পরিমিতির প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী :**

1. আয়তঘন এর আয়তন $= lbh$
2. আয়তঘন এর ক্ষেত্রফল $= 2(lb+bh+hl)$
3. ঘনকের আয়তন $= a^3$
4. ঘনকের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$
5. শঙ্কুর আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
6. শঙ্কুর পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ (l = তির্যক উচ্চতা)
7. শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(r+l)$
8. চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r+h)$
9. চোঙের আয়তন $= \pi r^2 h$
10. গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$
11. গোলকের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$
12. অর্ধ গোলকের আয়তন $= \frac{2}{3}\pi r^3$
13. অর্ধ গোলকের ক্ষেত্রফল $= 3\pi r^2$
14. প্রিজমের আয়তন = (ভূমির ক্ষেত্রফল) $\times$ উচ্চতা
15. প্রিজমের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = (ভূমির পরিসীমা) $\times$ উচ্চতা
16. প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = (পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল) +2(ভূমির ক্ষেত্রফল)

17. পিরামিডের আয়তন = $\frac{1}{3}$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $\times$ উচ্চতা

18. পিরামিডের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা) $\times$ তির্যক উচ্চতা

অনুশীলনী –6

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহু বিকল্পভিত্তিক প্রশ্ন :

i) যদি $S = t^3-4t^2+5$ সূত্র দ্বারা কোনো একটি কণার গতি বর্ণনা করা হয়, তবে কণাটির ত্বরণ শূণ্য হলে এর বেগ হবে —

a) $\frac{16}{9}$ একক/সেকেন্ড b) $\frac{-32}{3}$ একক/সেকেন্ড

c) $\frac{4}{3}$ একক/সেকেন্ড d) $\frac{-16}{3}$ একক/সেকেন্ড

ii) সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহু 8 সেমি/ঘন্টা হারে বৃদ্ধি পায়। বাহুর দৈর্ঘ্য যখন 2 সেমি তখন এর ক্ষেত্রফল বৃদ্ধির হার হবে —

a) $8\sqrt{3}$ সেমি^{2}/ঘন্টা b) $4\sqrt{3}$ সেমি^{2}/ঘন্টা c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ সেমি^{2}/ঘন্টা d) এদের কোনোটিই নয়।

iii) 6 ফুট উচ্চতা বিশিষ্ট একজন লোক 15 ফুট উঁচু ল্যাম্পপোস্ট থেকে সেকেন্ডে 9 ফুট সমবেগে দূরে সরে যাচ্ছেন। যে হারে তার ছায়ার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাচ্ছে, তা হল —

a) 15 ফুট/ সেকেন্ড b) 9 ফুট/ সেকেন্ড c) 6 ফুট/ সেকেন্ড d) এদের কোনোটিই নয়।

iv) কোনো গোলকের আয়তনের পরিবর্তনের হার যদি এর ব্যাসার্ধ পরিবর্তনের হারের সমান হয়, তবে গোলকটির ব্যাসার্ধ হবে —

a) 1 একক b) $\sqrt{2\pi}$ একক c) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ একক d) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ একক

v) x-এর মান কত হলে x^3-5x^2+5x+8 এর বৃদ্ধির হার x-এর বৃদ্ধির হারের দ্বিগুণ হবে?

a) $-3,-\frac{1}{3}$ b) $-3, \frac{1}{3}$ c) $3,-\frac{1}{3}$ d) $3, \frac{1}{3}$

vi) $16x^2+9y^2 = 400$ উপবৃত্তের উপর যে বিন্দুতে কোটি যে হারে কমে ভুজ সেই হারে বৃদ্ধি পায় তা হল

a) $\left(3,16/3\right)$ b) $\left(-3,16/3\right)$ c) $\left(3,-16/3\right)$ d) $(3, -3)$

vii) 0.5 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি চোঙাকার পাত্র 0.25π মি^{3}/মিনিট হারে তেল দিয়ে ভর্তি করা হল।

তেলের উপরিতল যে হারে বাড়ছে তা হল —

a) 1 মিটার/মিনিট b) 2 মিটার/মিনিট c) 5 মিটার/মিনিট d) 1.25 মিটার/মিনিট

viii) একটি শঙ্কুর উচ্চতা 20 সেমি এবং অর্ধ শীর্ষকোণ 30^0। যদি শঙ্কুর অর্ধ শীর্ষকোণ প্রতি সেকেন্ডে 2^0 বৃদ্ধি পায় তাহলে এর ভূমির ব্যাসার্ধ যে হারে বৃদ্ধি পাবে তা হল

a) 30 সেমি/সেকেন্ড b) $\frac{160}{3}$ সেমি/সেকেন্ড c) 10 মিটার/সেকেন্ড d) 160 সেমি/সেকেন্ড

ix) কোনো সরল দোলকের দোলকের দৈর্ঘ্য পরিমাপে ত্রুটি যদি 2% হয়, তবে এর পূর্ণ দোলনের সময় পরিমাপে শতকরা ত্রুটি হবে —

a) 1% b) 2% c) 3% d) 4%

x) যদি $\log_e^4 = 1.3868$ হয়, তবে $\log_e^{4.01} = ?$

a) 1.3968 b) 1.3898 c) 1.3893 d) এদের কোনোটিই নয়।

xi) যদি $y = x^n$ হয়, তবে y ও x পরিমাপে আপেক্ষিক ত্রুটির অনুপাত হবে —

a) 1:1 b) 2:1 c) $1:n$ d) $n:1$

xii) একটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাপে $x\%$ ত্রুটি হলে, পৃষ্ঠতল পরিমাপে শতকরা ত্রুটি হবে—

a) $2x\%$ b) $\frac{x}{2}\%$ c) $3x\%$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xiii) 100 মিলিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলককে 98 মিলিমিটার ব্যাসার্ধে সংকুচিত করা হয়েছে। তাহলে এর আয়তনে আনুমানিক হ্রাস হবে —

a) 12000π মিমি^{3} b) 800π মিমি^{3} c) 80000π মিমি^{3} d) 120π মিমি^{3}

xiv) কোনো শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার অনুপাত 1:2 এবং এর ব্যাসার্ধ পরিমাপে শতকরা ত্রুটি যদি $\lambda\%$ হয়, তবে এর আয়তন পরিমাপে ত্রুটি হবে

a) $\lambda\%$ b) $2\lambda\%$ c) $3\lambda\%$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xv) যদি $4a+2b+c=0$ হয়, তাহলে $3ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণটির কমপক্ষে একটি বাস্তব বীজ যে অন্তরালের অন্তর্ভুক্ত সেটি হল—

a) (0,1) b) (1,2) c) (0,2) d) এদের কোনোটিই নয়।

xvi) $y = x\log x$ বক্রের স্পর্শকটি (1,0) ও (e,e) বিন্দুদ্বয় সংযোজক জ্যার সমান্তরাল হলে x-এর মান হবে —

a) $e^{1/(1-e)}$ b) $e^{(e-1)(2e-1)}$ c) $e^{\frac{2e-1}{e-1}}$ d) $\frac{e-1}{e}$

xvii) $y = ae^x$ ও $y = be^{-x}$ বক্র দুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে, যদি—

a) $a = b$ b) $a=-b$ c) $ab=1$ d) $ab=2$

xviii) $y^2 = x$ বক্রের যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল—

a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ c) (4, 2) d) (1, 1)

xix) $y = 2x^7+3x+5$ বক্রের যে-কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক

a) x-অক্ষের সমান্তরাল　　b) y-অক্ষের সমান্তরাল

c) x-অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে　　d) x-অক্ষের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে

xx) $y = 6x-x^2$ বক্রের ওপর অবস্থিত যে বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x+y = 0$ রেখার সাথে $\pi/4$ কোণে নত সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল —

a) $(-3, -27)$　　b) $(3, 9)$　　c) $\left(7/2, 35/4\right)$　　d) $(0, 0)$

xxi) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ বক্রের $\theta = \pi/4$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল —

a) $x = 0$　　b) $y = 0$　　c) $x = y$　　d) $x+y = a$

xxii) $x = \dfrac{1}{t}, y = t$ বক্রের 't' বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবনতা হল

a) $\dfrac{1}{t}$　　b) $\dfrac{1}{t^2}$　　c) t　　d) $-t$

xxiii) যেসব বিন্দুতে $y = x^2-3x+2$ বক্রটি x-অক্ষের সাথে মিলিত হয় সেইসব বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হল

a) $x-y+2 = 0 = x-y-1$　　b) $x+y-1 = 0 = x-y-2$

c) $x-y-1 = 0 = x-y$　　d) $x-y = 0 = x+y$

xxiv) মুক্ত অন্তরাল $(1, 2)$-তে $f(x) = 2|x-1|+3|x-2|$ অপেক্ষকটি

a) বর্ধিষ্ণু　　b) ক্ষয়িষ্ণু　　c) ধ্রুবক　　d) এদের কোনোটিই নয়।

xxv) $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ অপেক্ষকটি

a) যথার্থ বর্ধিষ্ণু　　b) যথার্থ ক্ষয়িষ্ণু

c) বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু কোনোটিই নয়　　d) এদের কোনোটিই নয়।

xxvi) যদি $f(x) = x^2-Kx+5$ অপেক্ষকটি বদ্ধ অন্তরাল $[2, 4]$-তে বর্ধিষ্ণু হয়, তবে

a) $K\in(2,\infty)$　　b) $K\in(-\infty, 2)$　　c) $K\in(4,\infty)$　　d) $K\in(-\infty, 4)$

xxvii) $f(x) = 2x - \tan^{-1} x - \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ অপেক্ষকটি যথার্থ বর্ধিষ্ণু হবে যখন

a) $x>0$　　b) $x<0$　　c) $x\in R$　　d) $x\in R-\{0\}$

xxviii) $f(x) = x^x$ অপেক্ষকটি যে অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু হবে সেটি হল

a) $(0, e)$　　b) $(0, 1)$　　c) $\left(0, 1/e\right)$　　d) এদের কোনোটিই নয়।

xxix) বদ্ধ অন্তরাল $[0,6]$-তে $f(x) = x^3-6x^2+6x$ -এর সর্বনিম্ন ও সর্বাধিক মান হল

a) 3, 4　　b) 0,6　　c) 0,3　　d) 3, 6

xxx) ধরা যাক, $f(x) = (x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$। তাহলে x-এর যে মানের জন্য $f(x)$-এর অবম মান আছে সেটি হল —

a) $\dfrac{a+b+c}{3}$ b) $\sqrt[3]{abc}$ c) $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

2] অতি সংক্ষিপ্তধর্মী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 1)

i) যদি একটি বস্তুকণা সরলরেখা বরাবর এমনভাবে গতিশীল যে t সময় পর বস্তুকণাটির সরণ $s = t^3-6t^2+9t+8$ দ্বারা প্রদত্ত। বস্তুকণাটির প্রাথমিক বেগ নির্ণয় করো।

ii) কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহু 0.1 সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পায়। এটির পরিসীমা কী হারে বৃদ্ধি পায় তা নির্ণয় করো।

iii) যদি $y = \log_e^x$ হয়, তখন Δy নির্ণয় করো যখন $x = 3$ এবং $\Delta x = 0.03$.

iv) ঘনক আকৃতির একটি বরফের টুকরা এমনভাবে গলছে যে এর বাহু পরিমাপে শতকরা ত্রুটি a। তাহলে এর আয়তন নির্ণয়ে শতকরা ত্রুটি নির্ণয় করো।

v) $x = t^2+3t-8$, $y = 2t^2-2t-5$ বক্রের $t = 2$ বিন্দুতে স্পর্শকের নতি নির্ণয় করো।

vi) $y = f(x)$ বক্রের (x,y) বিন্দুতে অভিলম্ব যদি y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো।

vii) বক্রের (x,y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যদি স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সাথে সমানভাবে নত থাকে, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো।

viii) $y = x + \sin x\cos x$ বক্রের $x = \dfrac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণটি লিখ।

ix) $y = x^2-x+2$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে y-অক্ষকে অতিক্রম করে সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো।

x) a-এর ওইসব মানগুলোর সেটটি নির্ণয় করো যার জন্য $f(x) = \cos x+a^2x+b$ অপেক্ষকটি **R**-এ যথার্থ বর্ধিষ্ণু।

xi) $f(x) = \tan x-x$ অপেক্ষকটি এর সংজ্ঞার অঞ্চলে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু কিনা তা যাচাই করো।

xii) 'b' এর ওইসব মানগুলোর সেটটি নির্ণয় করো যার জন্য $f(x) = b(x+\cos x)+4$ অপেক্ষকটি **R**-এ ক্ষয়িষ্ণু।

xiii) $f(x) = x^{1/x}$ এর চরম মান নির্ণয় করো।

xiv) $f(x) = ax+\dfrac{b}{x}$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো যেখানে $a>0$, $b>0$ এবং $x>0$।

xv) $f(x) = x\log_e^x$ অপেক্ষকটি যে বিন্দুতে অবম মান অর্জন করে সেই বিন্দুটি নির্ণয় করো।

খ—বিভাগ

3] সংক্ষিপ্তধর্মী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) অন্তরালসমূহ নির্ণয় করো, যেখানে নিম্নের অপেক্ষকগুলো বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু :

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 15$

b) $f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$

c) $f(x) = (x + 2)\, e^{-x}$

d) $f(x) = \frac{x}{\log x}$

e) $f(x) = x^x$

f) $f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x},\ 0 \le x \le 2\pi$

g) $f(x) = (x+1)^3(x-3)^3$

h) $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$

ii) প্রমাণ করো যে, $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ অপেক্ষকটি $x = -1$ ছাড়া x এর সকল বাস্তবমানে বর্ধিষ্ণু।

iii) প্রমাণ করো যে $f(\theta) = \frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta} - \theta$ অপেক্ষকটি $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু।

iv) দেখাও যে $f(x) = x^{100} + \sin x$ অপেক্ষকটি $(-1,1)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু এদের কোনোটিই নয়।

v) a -এর সর্বনিম্ন মানটি নির্ণয় করো যার জন্য $x^3 + 3ax + 5$ অপেক্ষকটি $[1,2]$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু।

vi) a-এর যেই মানগুলোর জন্য $f(x) = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 1$ অপেক্ষকটি x-এর যে-কোনো বাস্তব মানের জন্য ক্ষয়িষ্ণু সেই মানগুলো নির্ণয় করো।

vii) দেখাও যে $f(x) = \log\sin x$ অপেক্ষকটি $\left(0, \pi/2\right)$ অন্তরালে বর্ধিষ্ণু এবং $\left(\pi/2, \pi\right)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু।

viii) দেখাও যে $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$ অপেক্ষকটি $\left(\pi/4, \pi/2\right)$ অন্তরালে ক্ষয়িষ্ণু।

ix) অন্তরালগুলো নির্ণয় করো যেখানে $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ অপেক্ষকটি বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু।

x) অন্তরালগুলো নির্ণয় করো যেখানে $f(x) = (x+2)e^{-x}$ অপেক্ষকটি বর্ধিষ্ণু অথবা ক্ষয়িষ্ণু।

xi) দেখাও যে $(0,1)$ অন্তরালে $f(x) = x - [x]$ অপেক্ষকটি বর্ধিষ্ণু।

xii) নিম্নের অপেক্ষকগুলোর স্থানীয় চরম মান অথবা স্থানীয় অবম মানের বিন্দুসমূহ, যদি থাকে, নির্ণয় করো। এছাড়া, স্থানীয় চরম মানসমূহ অথবা স্থানীয় অবম মান সমূহ নির্ণয় করো :

a) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = 2\sin x - x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$

d) $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$

xiii) $x = 1 - a\sin\theta,\ y = b\cos^2\theta$ বক্রের $\theta = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবনতা নির্ণয় করো।

xiv) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ বক্রের ওপর অবস্থিত ওই বিন্দুগুলো নির্ণয় করো যেগুলোতে অঙ্কিত স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল।

xv) $xy + ax + by = 2$ বক্রের $(1, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের প্রবনতা যদি 2 হয়, তবে a ও b -এর মান নির্ণয় করো।

xvi) $y = x^2$ বক্রের ওপর অবস্থিত যে বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবনতা বিন্দুটির ভুজের সমান সেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

xvii) *‘a’* এর কোন মানের জন্য $3x + 4y = 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ বক্রের একটি স্পর্শক হবে?

গ—বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) স্থির ভূমি b বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান দুটি বাহু 3 সেমি/সেকেন্ড হারে হ্রাস পায়। এটির ক্ষেত্রফল কী হারে হ্রাস পাবে, যখন সমান দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির দৈর্ঘ্যের সমান হয়?

ii) একটি ফাঁপা গোলকের মধ্যে ধাতুর আয়তন ধ্রুবক। যদি এর অন্তঃ ব্যাসার্ধ 1 সেমি/সেকেন্ড হারে বৃদ্ধি পায় তাহলে এর বহিঃ ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হার নির্ণয় করো যখন এর ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 4 সেমি ও 8 সেমি।

iii) একটি সরল দোলকের একটি পূর্ণ দোলনের সময় T, কার্যকরী দৈর্ঘ্য l সম্পর্কিত সমীকরণ $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ প্রদত্ত, যেখানে g হল ধ্রুবক। যদি l-এর দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি পায় তবে T পরিমাপে শতকরা ত্রুটি কত হবে?

iv) যদি ABC ত্রিভুজে c বাহু এবং C কোণ অপরিবর্তিত থাকে, তাহলে অবকলের ধারণা প্রয়োগ করে দেখাও যে, $\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} = 0$ ।

v) অবকলের সাহায্যে নিম্নলিখিতগুলির আসন্নমান নির্ণয় করো :

a) $\tan 46^0$, যেখানে $1^0 = 0.01745$ রেডিয়ান।

b) $\log_e^{4.04}$, যেখানে $\log_{10}^4 = 0.6021$ এবং $\log_{10}^e = 0.4343$.

c) $f(5.001)$, যেখানে $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15$

d) $\sin\left(\frac{22}{14}\right)$

e) $\frac{1}{\sqrt{25.1}}$

vi) নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি বক্রের নির্দেশিত বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণগুলো নির্ণয় করো :

a) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ বিন্দুতে

b) $x^{2/3}+y^{2/3}=2$, $(1,1)$ বিন্দুতে

c) $y^2=4ax$, $\left(a/m^2, 2a/m\right)$ বিন্দুতে

d) $x=\frac{2at^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2at^3}{1+t^2}$, $t=\frac{1}{2}$ বিন্দুতে

e) $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$, t-তে

vii) $4x^2+9y^2=1$ বক্রের ওপর অবস্থিত যেসব বিন্দুগুলোতে অঙ্কিত স্পর্শকগুলো $2y+x=0$ সরলরেখার উপর লম্ব সেইসব বিন্দুগুলো নির্ণয় করো।

viii) দেখাও যে $x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta)$, $y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta)$ বক্রের θ বিন্দুতে অভিলম্ব, মূলবিন্দু থেকে ধ্রুবক দূরত্বে অবস্থিত।

ix) $y^2=4ax$ এবং $x^2=4by$ অধিবৃত্ত দুটির ছেদবিন্দুতে (মূলবিন্দু ব্যতীত), এদের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় করো।

x) $ax^2+by^2=1$ এবং $a'x^2+b'y^2=1$ বক্র দুটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে প্রমাণ করো যে, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a'}-\frac{1}{b'}$ ।

xi) প্রমাণ করো যে, $4x=y^2$ এবং $4xy=K$ বক্র দুটি পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করবে যদি $K^2=512$ হয়।

xii) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি প্রদত্ত হলে প্রমাণ করো যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফলের মান বৃহত্তম হবে যখন বাহু দুটির মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{3}$ হয়।

xiii) $x^2+y^2=3$ বৃত্তটির এরূপ স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করো যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^o কোণে নত।

xiv) $x^2-y^2=16$ পরাবৃত্তটির $(4\sec\theta, 4\tan\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো। অত:পর দেখাও যে $2x+4y=9$ এই পরাবৃত্তটির একটি অভিলম্ব।

xv) $y^2=12x$ অধিবৃত্তটির $(3t^2, 6t)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো। অত:পর অধিবৃত্তটির এরূপ অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135^o কোণে আনত।

xvi) যদি $lm + my + n = 0$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হয় তবে প্রমাণ করো, $a^2l^2 + l^2m^2 = m^2$।

xvii) যদি $lx + my = 1$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির অভিলম্ব হয় তবে প্রমাণ করো, $al^3 + 2alm^2 = m^2$।

xviii) প্রমাণ করো, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্রের উপরিস্থ যে কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।

xix) প্রমাণ করো, একটি প্রদত্ত বৃত্তে যে সর্ববৃহৎ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অর্ন্তলিখিত করা যায় তা একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

xx) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5 cm হলে তার ক্ষেত্রফলের বৃহত্তম মান কত?

xxi) r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি অর্ধবৃত্তে একটি আয়তক্ষেত্র এরূপভাবে অর্ন্তলিখিত আছে যে আয়তক্ষেত্রটির একটি বাহু অর্ধবৃত্তটির ব্যাস বরাবর। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হলে তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ r এর মাধ্যমে নির্ণয় করো।

xxii) $5\sqrt{3}$ সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনও গোলকে যে সর্ববৃহৎ আয়তনের চোঙ অর্ন্তলিখিত করা যায় তার আয়তন নির্ণয় করো।

xxiii) c^2 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বোর্ড দিয়ে বর্গাকার ভূমিবিশিষ্ট উপর খোলা একটি বাক্স তৈরি করা হলে, প্রমাণ করো বাক্সটির বৃহত্তম আয়তন $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ ঘন একক।

xxiv) $x^2 = 2y$ বক্রের উপর এরূপ একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যা (0 , 3) এর নিকটবর্তী।

xxv) $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + 2$ অপেক্ষকটির (2 , - 2) বিন্দুতে প্রান্তিক মান থাকলে 'a' ও 'b' এর মান নির্ণয় করে। দেখাও যে, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অবম মান আছে।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1)	i) d	ii) a	iii) c	iv) d	v) d	vi) a
	vii) a	viii) b	ix) a	x) c	xi) d	xii) a
	xiii) c	xiv) c	xv) c	xvi) a	xvii) c	xviii) b
	xix) c	xx) b	xxi) c	xxii) b	xxiii) b	xxiv) b
	xxv) a	xxvi) d	xxvii) c	xxviii) c	xxix) a	xxx) a
2)	i) 9 একক/মিনিট	ii) 0.4 সেমি/সেকেন্ড		iii) 0.01	iv) $3a$	v) $\frac{6}{7}$
	vi) 0	vii) ±1	viii) $2x=\pi$	ix) $x+y-2=0$	x) $a\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	
	xi) বর্ধিষ্ণু	xii) $b\in(-\infty,0)$	xiii) $e^{\frac{1}{e}}$	xiv) $2\sqrt{ab}$	xv) $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$	

খ—বিভাগ

3) i) <u>বর্ধিষ্ণু</u> <u>ক্ষয়িষ্ণু</u>

	বর্ধিষ্ণু	ক্ষয়িষ্ণু
a)	$[0, 1] \cup [2, \infty]$	$[-\infty, -2] \cup [1, 2]$
b)	$(-2, 1) \cup (3, \infty)$	$(-\infty, -2) \cup (1, 3)$
c)	$[-\infty, -1]$	$[-1, \infty)$
d)	(e, ∞)	$(0, e) - \{1\}$
e)	$\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$	$\left(0, \frac{1}{e}\right)$
f)	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
g)	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$
h)	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

v) -1 vi) $a \in (-\infty, -3)$ ix) $(0, \infty)$-তে বর্ধিষ্ণু ও $(-1, 0)$-তে ক্ষয়িষ্ণু

x) $(-\infty, -1)$-তে বর্ধিষ্ণু ও $(-1, \infty)$-তে ক্ষয়িষ্ণু

xii) a) $x = \frac{\pi}{4}$ হল স্থানীয় অবম মানের বিন্দু এবং স্থানীয় অবম মান $= \frac{1}{2}$

b) $x = \frac{\pi}{3}$ হল স্থানীয় চরম মানের বিন্দু এবং স্থানীয় চরম মান $= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

$x = -\frac{\pi}{3}$ হল স্থানীয় অবম মানের বিন্দু এবং স্থানীয় অবম মান $= -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

c) $(0, \pi)$ অন্তরালে অন্তর্ভুক্ত নয়।

d) $x = -1$ হল স্থানীয় চরম মানের বিন্দু; স্থানীয় চরম মান $= 0$

$x = -\frac{1}{5}$ হল স্থানীয় অবম মানের বিন্দু; স্থানীয় অবম মান $= -\frac{3456}{3125}$

xiii) $-\frac{a}{2b}$ xiv) $(\pm 3, 0)$ xv) $a = 5, b = -4$ xvi) $(0, 0)$ xvii) $-\frac{3}{16}$

গ—বিভাগ

i) $\sqrt{3}b$ সেমি^{2}/সেকেন্ড ii) $\frac{1}{4}$ সেমি/সেকেন্ড iii) $\frac{1}{2}$%

v) a) 1.03490 b) 1.396368 c) –34.99 d) 1 e) 0.198

vi) স্পর্শক — অভিলম্ব

স্পর্শক	অভিলম্ব
a) $\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1$	$ax\cos\theta+by\cot\theta = a^2+b^2$
b) $x+y-2 = 0$	$y-x = 0$
c) $m^2x-my+a = 0$	$m^2x+m^3y-2am^2-a = 0$
d) $13x-16y-2a = 0$	$16+13y-19a = 0$
e) $bx\cos t+ay\sin t=ab\sin t\cos t$	$ax\sin t-by\cos t = a^2\sin^4 t-t^2\cos^4 t.$

vii) $\left(\frac{3}{2\sqrt{10}},\frac{-1}{3\sqrt{10}}\right)$ এবং $\left(\frac{-3}{2\sqrt{10}},\frac{1}{3\sqrt{10}}\right)$

ix) $\tan^{-1}\left\{\frac{3(ab)^{1/3}}{2\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)}\right\}$

xiii) $y=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{3}$

xiv) $x\cos\theta+y\cot\theta=8$

xv) $tx + y = 6t + 3t^3$ এবং $x + y = 9$.

xx) $\frac{25}{4}$ বর্গ সেমি।

xxi) দৈর্ঘ্য = $r\sqrt{2}$ একক প্রস্থ = $\frac{r}{\sqrt{2}}$ একক

xxii) 500π ঘনসেমি।

xxiv) (2, 2) ও (–2, 2)।

xxv) a = –15, b = 12।

অধ্যায়- 7

সমাকল

(Integration)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

- সমাকলন হল অবকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া। ধরো $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$। তাহলে আমরা লিখি $\int f(x)dx = F(x) + C$। এই সমাকলগুলোকে অনির্দিষ্ট সমাকল বা সাধারণ সমাকল বলা হয়, C-কে বলা হয় সমাকলন ধ্রুবক। এইসব সমাকলগুলো একটি ধ্রুবক দ্বারা পার্থক্য যুক্ত হয়।

- জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে অনির্দিষ্ট সমাকল দ্বারা বক্রের পরিবারের সংগ্রহ বোঝায়, যার প্রতিটি সদস্য y-অক্ষ বরাবর উপর দিকে অথবা নীচের দিকে নিজেদের মধ্যে সমান্তরালভাবে স্থানান্তরের মাধ্যমে পাওয়া যায়।

- **অনির্দিষ্ট সমাকলের কিছু ধর্মাবলী :**

  i) অবকলন এবং সমাকলন পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া। অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ এবং

  $\int f'(x)dx = f(x) + c$, যেখানে c হল যে-কোনো স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

  ii) একই অবকলজ যুক্ত দুটি অনির্দিষ্ট সমাকল একই পরিবারের বক্রকে নির্দেশ করে এবং তাই এরা সমতুল্য।

  যদি f এবং g দুটি অপেক্ষক এমন যে $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\int g(x)dx$, তাহলে $\int f(x)dx$ এবং $\int g(x)dx$ হল সমতুল্য।

  iii) দুটি অপেক্ষকের সমষ্টি অথবা অন্তরের সমাকল, এদের সমাকলের সমষ্টি অথবা অন্তরফলের সমান হয়।

  অর্থাৎ, $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$।

  iv) একটি ধ্রুবক উৎপাদক সমাকল চিহ্নের হয় আগে অথবা পরে লেখা যেতে পারে, অর্থাৎ

  $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, যেখানে '$a$' একটি ধ্রুবক।

  v) ধর্ম (iii) এবং (iv)-কে সসীম সংখ্যক অপেক্ষক $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots., f_n$ এবং বাস্তব সংখ্যা $K_1, K_2, \ldots\ldots, K_N$ -এর জন্য সাধারণীকরণে পাওয়া যায় -

  $$\int [K_1 f_1(x) \pm K_2 f_2(x) \pm \cdots \pm K_n f_n(x)]dx = K_1\int f_1(x)dx \pm K_2\int f_2(x)dx \pm \cdots \pm K_n\int f_n(x)dx$$

- **কিছু আদর্শ সমাকল :**

  i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$ বিশেষত, $\int dx = x + c$

ii) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

iii) $\int 0.dx = c$

iv) $\int e^x \, dx = e^x + c$

v) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

vi) $\int \cos x dx = \sin x + c$

vii) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

viii) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$

ix) $\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$

x) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

xi) $\int \cos \text{ec} x \cot x dx = -\cos \text{ec} x + c$

xii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c = -\cos^{-1} x + c$

xiii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$

xiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + c = -\text{cosec}^{-1} x + c$

- **সমাকলনের পদ্ধতি সমূহ :**

- **রূপান্তর পদ্ধতি :**

  যখন সমাকল্যটি একটি ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক হয়, তখন আমরা প্রদত্ত অপেক্ষকটিকে আদর্শ সমাকলে অথবা ত্রিকোণমিতিক সূত্র প্রয়োগ করে এদেরকে বীজগাণিতিক যোগফলে রূপান্তর করি।

- **প্রতিস্থাপনের দ্বারা সমাকলন :**

  উপযোগী প্রতিস্থাপন দ্বারা, $\int f(x)\, dx$ -এর চলরাশি x-কে অপর চলরাশি t-তে পরিবর্তন করা হয় যাতে $f(x)$ সমাকল্য $F(t)$-তে পরিবর্তিত হয় যা একটি আদর্শ সমাকল অথবা আদর্শ সমাকলের বীজগাণিতিক যোগফল হয়। উপযুক্ত প্রতিস্থাপন নির্ণয় করার জন্য এখানে কোনো সাধারণ নিয়ম নেই। প্রতিস্থাপন কৌশল প্রয়োগে আমরা নিম্নলিখিত আদর্শ সমাকলগুলো পাই।

i) $\int \tan x dx = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c$

ii) $\int \cot x dx = \log|\sin x| + c$

iii) $\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c = \log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$

iv) $\int \operatorname{cosec} x dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$

- **কিছু বিশেষ অপেক্ষকসমূহের সমাকল :**

i) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

ii) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

iii) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c$

iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$

vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$

- **আংশিক সমাকলন :**

প্রদত্ত অপেক্ষক f_1 এবং f_2 -এর জন্য আমরা পাই,

$$\int f_1(x).f_2(x)dx = f_1(x)\int f_2(x)dx - \int\left[\frac{d}{dx}f_1(x).\int f_2(x)dx\right]dx$$

অর্থাৎ, **দুটি অপেক্ষকের গুণফলের সমাকল = প্রথম অপেক্ষক $\times$ দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল – {প্রথম অপেক্ষকের অবকল $\times$ দ্বিতীয় অপেক্ষকের সমাকল}-এর সমাকল।**

অবশ্য প্রথম অপেক্ষক এবং দ্বিতীয় অপেক্ষক পছন্দের ক্ষেত্রে যত্নবান হতে হবে। অবশ্যই, আমরা সেটিকেই দ্বিতীয় অপেক্ষক হিসেবে পছন্দ করি যার সমাকল আমাদের ভালো করে জ্ঞাত আছে।

যদি দুটি অপেক্ষক বিভিন্ন ধরণের হয়, তবে ‘ILATE’ শব্দে যেটি প্রথম আসে সেটিকে প্রথম অপেক্ষক বিবেচনা করা হয়। যেখানে

I : বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক।

L : লগারিদমিক অপেক্ষক।

A : বীজগাণিতিক অপেক্ষক।
T : ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক।
E : সূচকীয় অপেক্ষক।

- $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx = e^x f(x)+c$

- **সমাকলের কয়েকটি বিশেষ প্রকার :**

i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+c$

iv) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ অথবা $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ অথবা $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের সমাকলগুলোকে নিম্নরূপে আদর্শ সমাকলে রূপান্তরিত করা যায়।

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

v) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ অথবা $\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ অথবা $\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ আকারের সমাকলগুলোকে নিম্নরূপে আদর্শ সমাকলে রূপান্তরিত করা যায়।

$px+q=A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B=A(2ax+b)+B$, যেখানে উভয়দিকে সহগের তুলনার মাধ্যমে A ও B নির্ণয় করা হয়।

- **আংশিক ভগ্নাংশে বিভাজনের দ্বারা সমাকলন :**

$\int\frac{p(x)}{g(x)}dx$ আকারের সমাকলকে সমাকল্যর আংশিক ভগ্নাংশে সমাধানের মাধ্যমে সমাকলন করা যেতে পারে। আমরা নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হই।

$p(x)$-এর মাত্রা < $g(x)$-এর মাত্রা যাচাই করি। অন্যথ্যায় $p(x)$-কে $g(x)$ দিয়ে ভাগ করি যতক্ষণ না এর মাত্রা কম হয়। অর্থাৎ, ধরো আকারটি হল - $\frac{p(x)}{g(x)}=r(x)+\frac{f(x)}{g(x)}$, যেখানে $f(x)$-এর মাত্রা < $g(x)$-এর মাত্রা।

এখন $\frac{f(x)}{g(x)}$ এর সমাকল করা যায় $\frac{f(x)}{g(x)}$ কে নিম্নলিখিতরূপে আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টির মাধ্যমে :

i) $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b},\ a\neq b$

ii) $$\frac{px+q}{(x-a)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$$

iii) $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)}+\frac{C}{x-c}$$

iv) $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$$

v) $$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$$

যেখানে, x^2+bx+c-কে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না।

- **নির্দিষ্ট সমাকল :**

একটি নির্দিষ্ট সমাকলকে $\int_a^b f(x)dx$, দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, যেখানে a-কে সমাকলের নিম্নসীমা এবং b-কে সমাকলের ঊর্ধ্বসীমা বলা হয়। নির্দিষ্ট সমাকল নিম্নলিখিত দুটি উপায়ে নির্ণয় করা যায়।

i) যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকল।

ii) $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, যদি $f(x)$-এর একটি প্রতি-অন্তরকলজ $F(x)$ হয়।

- **যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকল :**

নির্দিষ্ট সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ হল, $y=f(x)$ বক্ররেখা, $x=a$, $x=b$ কোটিদ্বয় এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল এবং যা হল —

$\int_a^b f(x)dx=\underset{h\to 0}{Lim}\, h\left[f(a)+f(a+h)+.......+f\{a+(n-1)h\}\right]$ যেখানে $h=\dfrac{b-a}{n}\to 0$ যখন $n\to\infty$।

- **কলনবিদ্যার মৌলিক উপপাদ্য :**

i) **ক্ষেত্রফল অপেক্ষক :** ক্ষেত্রফল অপেক্ষককে $A(x)$ অপেক্ষক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

$$A(x)=\int_a^x f(x)dx.$$

ii) **সমাকলন বিদ্যার প্রথম মৌলিক উপপাদ্য :**

ধরো বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-এর উপর f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং মনে করো $A(x)$ হল ক্ষেত্রফল অপেক্ষক।

তাহলে $A'(x)=f(x)$, সকল $x\in[a,b]$-এর জন্য।

iii) **সমাকলন বিদ্যার দ্বিতীয় মৌলিক উপপাদ্য :**

ধরো বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$-এর উপর f একটি সন্তত অপেক্ষক এবং f-এর প্রতি-অন্তরকলজ হল F। তাহলে

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$ ।

- **নির্দিষ্ট সমাকলের কয়েকটি ধর্মাবলী :**

i) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

ii) $$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

iii) $$\int_a^a f(x)dx=0$$

iv) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$ যেখানে $a<c<b$ ।

v) $$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

vi) $$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$$

vii) $$\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx$$

viii) $$\int_0^{2a} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \text{যদি } f(2a-x)=f(x) \text{ হয়}\\ 0 & , \text{ যদি } f(2a-x)=-f(x) \text{ হয়}\end{cases}$$

ix) $$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \text{যদি } f(-x)=f(x) \text{ হয়, অর্থাৎ, যুগ্ম অপেক্ষক}\\ 0 & , \text{ যদি } f(-x)=-f(x) \text{ হয়, অর্থাৎ অযুগ্ম অপেক্ষক}\end{cases}$$

অনুশীলনী—7

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলি : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)a^{x+\frac{1}{x}}$, $a>0$ অপেক্ষকের প্রতি-অন্তরকলজ হল

a) $\dfrac{a^{x+\frac{1}{x}}}{a}$ b) $\dfrac{a^{x+\frac{1}{x}}}{x}$ c) $\dfrac{a^{x+\frac{1}{x}}}{\log a}$ d) $a^{x+\frac{1}{x}}.\log a$

ii) $\int e^x(1-\cot x+\cot^2 x)dx =$

a) $e^x\cot x+c$ b) $-e^x\cot x+c$ c) $e^x\operatorname{cosec} x+c$ d) $-e^x\operatorname{cosec} x+c$

iii) যদি $\int \frac{2^{1/x}}{x^2}dx = k2^{1/x}+c$ হয়, তবে k-এর মান হল

a) $-\dfrac{1}{\log_e^2}$ b) $-\log_e^2$ c) -1 d) $\dfrac{1}{2}$

iv) যদি $\int \frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)}dx = Ax+B\log\sin(x-\alpha)+C$, হয়, তবে (A, B) -এর মান হল —

a) $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ b) $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ c) $(\sin\alpha, \cos\alpha)$ d) $(-\cos\alpha, \sin\alpha)$

v) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ এর সমান হল

a) $\tan x + \cot x+c$ b) $(\tan x+\cot x)^2+c$ c) $\tan x-\cot x + c$ d) $(\tan x-\cot x)^2 + c$

vi) $\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$ এর সমান হল

a) $\int_a^b f(x)dx$ b) $\int_{a-c}^{b-c} f(x)dx$ c) $\int_a^b f(x-c)dx$ d) $\int_a^b f(x+c)dx$

vii) $\int \frac{d^2}{dx^2}(\tan^{-1} x)dx$ এর সমান হল

a) $\dfrac{1}{1+x^2}+c$ b) $\tan^{-1}x+c$ c) $x\tan^{-1} x-\dfrac{1}{2}\log\left|1+x^2\right|+c$ d) কোনটিই নয়

viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)$ এর মান হল

a) $-\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{2}$ d) 1

ix) যদি [0,1] অন্তরালে f এবং g সন্তত অপেক্ষকগুলো $f(x)=f(a-x)$ এবং $g(x)+g(a-x)=a$-কে সিদ্ধ করে, তবে $\int_0^a f(x).g(x)dx$ এর মান হল

a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ c) $\int_0^a f(x)dx$ d) $a\int_0^a f(x)dx$

x) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{1+\cos 2x}$ এর মান হল

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

xi) $\int_1^3 |x-2|\, dx$ এর মান হল

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

xii) যদি $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_a^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$ হয়, তবে a এর মান হল

a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{\pi}{3}$

xiii) $\int_{-1}^{1} (x+\sqrt{x^2+1})\, dx$ এর মান

a) 0 b) $\log\frac{1}{2}$ c) $\log 2$ d) $\frac{1}{2}\log 2$

xiv) $\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ এর মান হল

a) 0 b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$

xv) যদি $\int_n^{n+1} f(x)dx = n$ হয়, তবে $\int_2^{n+1} f(x)dx$ এর মান হবে-

a) 12 b) 10 c) 8 d) 9

xvi) যদি $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ হয়, তবে a এর মান হল

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) 1

xvii) যদি $\int f(x)dx = g(x)$, এবং $\int f(x)dx = h(x)$ হয়, তবে

a) $h(x)+g(x) =$ ধ্রুবক　　b) $g(x) - h(x) =$ ধ্রুবক

c) $h(x).g(x) =$ ধ্রুবক　　d) $g(x) = h(x)$

খ—বিভাগ

2] সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) নিম্নলিখিত সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো :

a) $\int \frac{x^6+1}{x^2+1} dx$　　b) $\int \frac{1}{a^x b^x} dx$

c) $\int \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx$　　d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x}+1}$

e) $\int \frac{\sin 2x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$　　f) $\int \tan x \tan 2x \tan 3x dx$

g) $\int \frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)} dx$　　h) $\int 2^{2^{2^x}} 2^{2^x} 2^x dx$

i) $\int x^x (1+\log x) dx$　　j) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

k) $\int \frac{x^2-1}{x^2+4} dx$　　l) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+a^6}$

m) $\int \sqrt{\frac{x}{a^3-x^3}} dx$　　n) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$

o) $\int e^x \left(\frac{2-\sin 2x}{1-\cos 2x}\right) dx$　　p) $\int_0^1 x(1-x^5) dx$

q) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$　　r) $\int_{-1}^1 e^{|x|} dx$

s) $\int_0^{1.5} [x^2] dx$　　t) $\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + e^{-\cos x}} dx$

ii) যদি $f'(x)=x^2+\sin x$ এবং $f(0)=0$ হয়, তবে $f(x)$-এর মান নির্ণয় করো।

iii) যদি $\int g(x)dx = f(x)$ হয়, তবে $\int f(x).g(x)dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

iv) যদি $f(x)=x+\phi(x)$, যেখানে $\phi(x)$ হল একটি যুগ্ম অপেক্ষক, তবে $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

v) যদি $f(x)=f(a+x)$ হয়, তবে দেখাও যে $\int_0^{a+t} f(x)dx$ -এর মান a নিরপেক্ষ।

গ—বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

3] **নিম্নলিখিত সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো :**

i) $\int \frac{dx}{\tan x+\cot x+\sec x+\cos ecx}$

ii) $\int \frac{dx}{\sin x+\sec x}$

iii) $\int \frac{dx}{x\left\{6(\log x)^2+7\log x+2\right\}}$

iv) $\int \sqrt{\sec x-1}\,dx$

v) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$

vi) $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}dx$

vii) $\int \frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}$

viii) $\int \cot^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx$

ix) $\int e^{2x}\left(\frac{\sin 4x-2}{1-\cos 4x}\right)dx$

x) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

xi) $\int \frac{dx}{\cos x(5-4\sin x)}$

xii) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

xiii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\left(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x\right)^2}$

xiv) $\int_0^{\pi} |\sin x+\cos x|\,dx$

xv) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \log(\sin x+\cos x)dx$

xvi) $\int_0^{\pi} \frac{x\tan x}{\sec x\cos ecx}dx$

4) যদি $r=2(1-\cos\theta)$ হয়, তবে দেখাও যে $\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=8$

5) দেখাও যে $\int_0^{\pi}\frac{xdx}{1+\cos\alpha\sin x}=\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}\ (0<\alpha<\pi)$

6) প্রমাণ করো যে $\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{19}{2}$, যেখানে $f(x) = |x-1|+|x-2|+|x-3|$

7) দেখাও যে $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1-x+x^2\right)dx=\log 2$

8) দেখাও যে $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

9) যোগফলের সীমারূপে নিম্নলিখিত সমাকলগুলোর মান নির্ণয় করো :

i) $\int_0^1 (3x^2-5x)dx$ ii) $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ iii) $\int_0^1 3^x dx$ iv) $\int_0^3 (2x^2+3x-5)dx$

v) $\int_a^b e^{mx+c}dx$

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1)	i) c	ii) b	iii) a	iv) b	v) c	vi) d
	vii) a	viii) c	ix) b	x) a	xi) b	xii) c
	xiii) a	xiv) c	xv) d	xvi) b	xvii) b	

খ—বিভাগ

2) i) a) $\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+x+c$ b) $\frac{-a^{-x}b^{-x}}{-\log(ab)}+c$ c) sec$x$–tan$x$+x+c

d) $\frac{2}{3}x^{3/2}-x+2\sqrt{x}-2\log\left|\sqrt{x}+1\right|+c$ e) $\frac{1}{a^2-b^2}\log\left|a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x\right|+c$

f) $-\frac{1}{3}\log|\cos 3x|+\frac{1}{2}\log|\cos 2x|+\log|\cos x|c$

g) $x\cos(b-a)+\sin(b-a)\log|\sin(x-b)|+c$ h) $\frac{1}{(\log 2)^3}2^{2^{2^x}}+c$ i) x^x+c

j) $\frac{1}{2}\sec^{-1}(x^2)+c$ k) $x-\frac{5}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$

l) $\frac{1}{3a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x^3}{a^3}\right)+c$ m) $\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x^{3/2}}{a^{3/2}}\right)+c$

n) $\sin^{-1}\left(\frac{e^x}{4}\right)+c$ o) $C-e^x\tan x$ p) $\frac{1}{42}$

q) π r) $2(e-1)$ s) $2-\sqrt{2}$ t) $\frac{\pi}{2}$

ii) $\frac{x^3}{3}-\cos x+1$

iii) $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + c$

iv) $\frac{2}{3}$

গ—বিভাগ

3) i) $\frac{1}{2}(\sin x - \cos x - x) + c$

ii) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\sin x - \cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}\right| + \tan^{-1}(\sin x + \cos x) + c$

iii) $\log\left|\frac{2\log x + 1}{3\log x + 2}\right| + c$

iv) $-\log\left|\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\cos^2 x + \cos x}\right| + c$

v) $a\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + c$

vi) $x\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + a\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} + c$

vii) $\tan^{-1}\left(1 + \tan\frac{x}{2}\right) + c$

viii) $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log\left|1 + x^2\right| - (1-x)\tan^{-1}(1-x) + \frac{1}{2}\log\left|1 + (1-x)^2\right| + c$

ix) $\frac{1}{2}e^{2x}\cot 2x + c$

x) $-\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

xi) $\frac{1}{18}\log|1 + \sin x| - \frac{1}{2}\log|1 - \sin x| + \frac{4}{9}\log|5 - 4\sin x| + c$

xii) $\frac{1}{3}\log|x - 1| - \frac{1}{6}\log\left|x^2 + x + 1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

xiii) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^2 + b^2}{a^3b^3}\right)$

xiv) $2\sqrt{2}$

xv) $-\frac{\pi}{4}\log 2$

xvi) $\frac{\pi^2}{4}$

9) i) $-\frac{3}{2}$ ii) $\frac{1}{4}$ iii) $\frac{2}{\log_e^3}$ iv) $\frac{93}{2}$ v) $\frac{e^c}{m}\left(e^{mb} - e^{ma}\right)$

অধ্যায়- 8

সমাকলের প্রয়োগ

(Application of Integration)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

কোটিদ্বয় এবং বক্র দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল :

মনেকরি, $y=f(x)$ একটি সন্তত অপেক্ষক যা $[a,\ b]$ অন্তরালে সংজ্ঞাত।

- যদি $y=f(x)$ বক্রটি $[a,\ b]$ অন্তরালে x-অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত হয়, তবে $y=f(x)$ বক্র, x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের —

  ক্ষেত্রফল $=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)dx$

- যদি $y=f(x)$ বক্রটি $[a,\ b]$ অন্তরালে x-অক্ষের নীচের দিকে অবস্থিত হয়, তবে $y=f(x)$ বক্র, x-অক্ষ এবং $x=a$ ও $x=b$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের —

  ক্ষেত্রফল $=-\int_a^b y\,dx=-\int_a^b f(x)dx$

ভুজদ্বয় এবং বক্রদ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল :

- যদি $x=f(y)$ বক্রটি $[c,\ d]$ অন্তরালে y-অক্ষের ডান দিকে অবস্থিত হয়, তবে $x=f(y)$ বক্র, y-অক্ষ এবং $y=c$ ও $y=d$ ভুজদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের —

  ক্ষেত্রফল $=\int_c^d x\,dy=\int_c^d f(y)dy$

- যদি $x=f(y)$ বক্রটি $[c,\ d]$ অন্তরালে y-অক্ষের বাম দিকে অবস্থিত হয়, তবে $x=f(y)$ বক্র, y-অক্ষ এবং $y=c$ ও $y=d$ ভুজদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের —

  ক্ষেত্রফল $=-\int_c^d x\,dy=-\int_c^d f(y)dy$

দুটি বক্রের মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল :

- $y=f(x)$, $y=g(x)$ বক্রদ্বয় এবং $x=a,\ x=b$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের —

  ক্ষেত্রফল $=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$, যেখানে $[a,\ b]$ অন্তরালে $f(x)\geq g(x)$

- যদি $[a,\ c]$ অন্তরালে $f(x)\geq g(x)$ এবং $[c,\ b]$ অন্তরালে $f(x)\leq g(x)$ হয়, যেখানে $a<c<b$, তখন

  ক্ষেত্রফল $=\int_a^c [f(x)-g(x)]dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]dx$

অনুশীলনী–8

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) $(x-2)^2+y^2=4$ বৃত্তদ্বারা বদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হল —

a) 2π বর্গ একক b) 4π বর্গ একক c) 8π বর্গ একক d) $4\pi^2$ বর্গ একক

ii) $y = 4x-x^2$ বক্র এবং x-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) $\frac{30}{7}$ বর্গ একক b) $\frac{31}{7}$ বর্গ একক c) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক d) $\frac{34}{4}$ বর্গ একক

iii) $y^2 = 8x$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং এর নাভিলম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক b) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক c) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক d) $\frac{23}{3}$ বর্গ একক

iv) $y = -x$ সরলরেখা, y-অক্ষ এবং $x = 3$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) 6 বর্গ একক b) 3 বর্গ একক c) 9 বর্গ একক d) $\frac{9}{2}$ বর্গ একক

v) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত এবং $x=a$ কোটি দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) $\frac{4a^2}{3}$ বর্গ একক b) $\frac{4a}{3}$ বর্গ একক c) $\frac{8a^2}{3}$ বর্গ একক d) এদের কোনটিই নয়

vi) $y = a\sin x,\ x = 0,\ x = \pi$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) a বর্গ একক b) $2a$ বর্গ একক c) $3a$ বর্গ একক d) এদের কোনটিই নয়

vii) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল হল —

a) 12π বর্গ একক b) 6π বর্গ একক c) 3π বর্গ একক d) π বর্গ একক

viii) $y = e^x$ বক্র, $x =1$, $x = e$ এবং x-অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (বর্গ এককে) হল —

a) $e-1$ b) $1-e$ e) e^e-e d) $1-e^e$

ix) $y = \log_e^x$ বক্র, x-অক্ষ, $x =1$ এবং $x = e$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল (বর্গ এককে) হল—

a) $2e$ b) 1 c) $2e-1$ d) $2e+1$

x) $x^2 = y$ বক্র, x-অক্ষ, $x = 1$ এবং $x = k$ $(k>1)$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $\frac{26}{3}$ বর্গ একক হয়, তবে k-এর মান হল —

a) 2 b) 3 c) 4 d) এদের কোনটিই নয়।

খ—বিভাগ

2] **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) $y = |x|$ বক্ররেখা, $x = -1$, $x = 1$ এবং x-অক্ষ দ্বারা বদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

ii) $x = \sqrt{y}$ বক্র, y-অক্ষ এবং $y = 1$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

iii) $y = \tan x$, x-অক্ষ এবং $x = \dfrac{\pi}{4}$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

iv) $xy = 1$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = e$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

v) সমাকলনের সাহায্যে $y-1 = x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = -2$ ও $x = 3$ কোটিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

গ—বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

3) সমাকলনের সাহায্যে, x-অক্ষের উপর এবং $x-2y+4 = 0$, $x = 3$, $x = 6$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

4) একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো, যার বাহুগুলো যথাক্রমে $y = 4x+5$, $x+y = 5$ এবং $4y = x+5$।

5) সমাকলনের সাহায্যে, ΔABC-এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার শীর্ষবিন্দুগুলো হল A(2, 1), B(3, 4) এবং C(5, 2)।

6) $\{(x, y): y^2 \le 6ax\}$ এবং $\{(x, y): x^2 + y^2 \le 6a^2\}$ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

7) দেখাও যে, $y = |x| - 1$ এবং $y = -|x| + 1$ বক্ররেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল 2 বর্গ একক।

8) সমাকলনের সাহায্যে দেখাও যে, $x = 0$, $y = 0$ এবং $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল $\dfrac{a^2}{6}$ বর্গ একক।

9) যদি $y = ax^2$ এবং $x = ay^2$ $(a>0)$ বক্ররেখাগুলোর মধ্যবর্তী অঞ্চলের ক্ষেত্রফল 1 বর্গএকক হয়, তবে a-এর মান নির্ণয় করো।

10) $y = f(x)$ বক্ররেখার $(x, f(x))$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবনতা হল $2x+1$। যদি বক্ররেখাটি (1, 2) বিন্দুগামী হয়, তবে বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

11) সমাকলনের সাহায্যে, $y^2=2x+1$ এবং $x-y-1=0$ বক্ররেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

12) $\{(x, y): x^2 + y^2 \le 2ax,\ y^2 \ge ax,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ অঞ্চলটির খড়সা লেখচিত্র অংকন কর এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

13) $\{(x, y): x^2 + y^2 \le 4,\ x + y \ge 2\}$ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

14) $y = x^3$ বক্ররেখা, $y = x+6$ এবং $y = 0$ সরলরেখাগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

15) $x = 3\cos t$ এবং $y = 2\sin t$ বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) i) b ii) c iii) c iv) d v) c vi) b
vii) a viii) c ix) b x) b

খ—বিভাগ

2) i) 1 বর্গ একক ii) $\frac{2}{3}$ বর্গ একক iii) $\frac{1}{2}\log 2$ বর্গ একক iv) 1 বর্গ একক v) $\frac{17}{2}$ বর্গ একক

গ—বিভাগ

3) $\frac{51}{4}$ বর্গ একক

4) $\frac{15}{2}$ বর্গ একক

5) 4 বর্গ একক

6) $\frac{4a^2}{3}\left(4\pi + \sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

9) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

10) $\frac{5}{6}$ বর্গ একক

11) $\frac{16}{3}$ বর্গ একক

12) $\left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{2}{3}a^2\right)$ বর্গ একক

13) $(\pi - 2)$ বর্গ একক

14) 28 বর্গ একক

15) 6π বর্গ একক

অধ্যায়- 9

অবকল সমীকরণ

(Differential Equations)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু ও ফলাফল :

সংজ্ঞা :

একটি সমীকরণ যা স্বাধীন চল (চলসমূহ) এর সাপেক্ষে অধীন চলের অন্তরকলজ যুক্ত হয় তাকে বলা হয় অবকল সমীকরণ।

- অবকল সমীকরণের ক্রম হল ওই সমীকরণে অন্তর্গত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের ক্রম।
- অবকল সমীকরণের মাত্রা বা ঘাত সংজ্ঞাত হয় যদি এটি তার অন্তরকলজ সমূহের বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ হয়।
- অবকল সমীকরণের মাত্রা (যখন সংজ্ঞাত) হল ওই সমীকরণের সংযুক্ত সর্বোচ্চ ক্রমের অন্তরকলজের মাত্রা বা ঘাত (কেবলমাত্র ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)।
- নীচে কয়েকটি অবকল সমীকরণের উদাহরণ দেওয়া হল :

i) $x\frac{dy}{dx}=2y$ এবং $xdy+y^2dx=dx$ হল প্রথম ক্রম এবং প্রথম মাত্রার সমীকরণ।

ii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}$ হল দ্বিতীয় ক্রম এবং প্রথম মাত্রার সমীকরণ।

iii) $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-x\frac{dy}{dx}=x^2$ প্রথম ক্রম এবং দ্বিতীয় মাত্রার সমীকরণ।

iv) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ হল দ্বিতীয় ক্রম এবং দ্বিতীয় মাত্রার সমীকরণ।

v) $x^2\frac{d^3y}{dx^3}-2y\frac{dy}{dx}=x$ হল তৃতীয় ক্রম এবং প্রথম মাত্রার সমীকরণ।

- একটি অপেক্ষক যা প্রদত্ত অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাকে ওই সমীরণের সমাধান বলা হয়। যে সমাধানে অবকল সমীকরণের ক্রমসংখ্যার সমসংখ্যক স্বেচ্ছা ধ্রুবক যুক্ত থাকে তাকে বলা হয় সাধারণ সমাধান এবং যে সমাধানটি স্বেচ্ছা ধ্রুবক মুক্ত হয় তাকে বলা হয় বিশেষ সমাধান।
- একটি প্রদত্ত অপেক্ষক থেকে একটি অবকল সমীকরণ গঠন করার জন্য আমরা অপেক্ষকটিতে যত সংখ্যক স্বেচ্ছা ধ্রুবক আছে ততবার অপেক্ষকটিকে ধারাবাহিকভাবে অবকলন করব এবং তারপর স্বেচ্ছাক ধ্রুবগুলোকে অপসারিত করব।

- **প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণ**
  (Differential equation of the first order and of the first degree) :
  প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার যে কোনো অবকল সমীকরণকে $Mdx+Ndy=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়, এখানে M ও N উভয়েই x ও y এর অপেক্ষক অথবা ধ্রুবক। এই জাতীয় অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধানে কেবলমাত্র একটি অনির্দিষ্ট বা স্বেচ্ছা ধ্রুবক (arbitrary constant) থাকে।

- চলের পৃথকীকরণ পদ্ধতি প্রয়োগ করে এমন একটি সমীকরণ সমাধান করা যায় যার চলরাশি সমূহকে সম্পূর্ণরূপে পৃথক করা সম্ভব। অর্থাৎ y যুক্ত পদসমূহ dy এর সাথে এবং x যুক্ত পদসমূহ dx এর সাথে সর্বদা থাকবে।

- একটি অবকল সমীকরণ থাকে $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ অথবা $\frac{dx}{dy}=g(x,y)$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $f(x,y)$ এবং $g(x,y)$ হল শূণ্য মাত্রা বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক, তাকে সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ বলা হয়।

- একটি $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, আকার বিশিষ্ট অবকল সমীকরণ, যেখানে P এবং Q হল ধ্রুবক অথবা কেবলমাত্র x-এর অপেক্ষক, তাকে বলা হয় একটি প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণ।

- **প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি সমূহ**
  (Methods of solving first order, first degree differential equation) :
  এই অনুচ্ছেদে আমরা প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণ সমাধানের তিনটি পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

- **চলরাশির পৃথকীকরণযোগ্য অবকল সমীকরণ**
  (Differential equations with variables separable) :
  একটি প্রথম ক্রম ও প্রথম মাত্রার অবকল সমীকরণের আকার হল

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

যদি $F(x,y)$ কে $g(x)$ $h(y)$ আকারের গুণফল রূপে প্রকাশ করা যায়, যেখানে $g(x)$ হল x-এর একটি অপেক্ষক এবং $h(y)$ হল y-এর একটি অপেক্ষক, তাহলে (1) নং অবকল সমীকরণকে বলা হয় চলরাশির পৃথকীকরণযোগ্য আকারের অবকল সমীকরণ।

তাহলে (1) নং অবকল সমীকরণের আকার হয়

$$\frac{dy}{dx}=h(y).g(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

যদি $h(y)\neq 0$ হয়, তবে চলরাশি দুটি পৃথক করে (2) নং সমীকরণকে পুনরায় লেখা যায়

$$\frac{1}{h(y)}dy=g(x)dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(3) নং এর উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই

$$\int\frac{1}{h(y)}dy=\int g(x)dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

এভাবে (4) নং সমীকরণ থেকে প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধানটিকে লেখা যায়

$H(y) = G(x) + C$

এখানে $H(y)$ এবং $G(x)$ হল যথাক্রমে $\frac{1}{h(y)}$ এবং $g(x)$ এর বিপরীত অবকলন এবং C হল স্বেচ্ছাধ্রুবক।

- **সমমাত্রিক অপেক্ষক এবং সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ**
  (Homogeneous function and Homogeneous differential equation) :

একটি অপেক্ষক $F(x, y)$ কে n মাত্রা বা ঘাত বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক (Homogeneous function of degree n) বলা হয়, যদি কোনো অশূণ্য ধ্রুবক λ এর জন্য $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x,y)$ হয়।

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ আকারের অবকল সমীকরণকে সমমাত্রিক (Homogeneous) বলা হয়, যদি $F(x, y)$ একটি শূণ্য মাত্রা বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক হয় তাহলে $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x, y)$

উদাহরণস্বরূপ :
$(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)dx$

বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$ একটি সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ কারণ এখানে —

$$F(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2 + \lambda x.\lambda y}$$

$$= \frac{\lambda^2\left(x^2+y^2\right)}{\lambda^2\left(x^2+xy\right)}$$

$$= \lambda^0 F(x, y)$$

$\therefore$ $F(x, y)$ একটি শূণ্যমাত্রা বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$ হল একটি সমমাত্রিক অবকল সমীকরণ।

a) $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ আকারের অবকল সমীকরণকে সমমাত্রিক (Homogeneous) বলা হয়, যদি $F(x, y)$ একটি শূণ্য মাত্রা বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক হয়।

$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ....(1)

আকারের সমমাত্রিক অবকল সমীকরণের সমাধান করার জন্য আমরা প্রতিস্থাপন করব

$y=v.x$......................................(2)

(2) নং সমীকরণকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন বা অন্তরকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{..(3)}$$

(3) নং সমীকরণের $\frac{dy}{dx}$ -এর মান (1) নং সমীকরণে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই,

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

বা, $$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v \quad \text{..(4)}$$

(4) নং সমীকরণের চলরশি সমূহ পৃথক করে আমরা পাই

$$\frac{dv}{g(v)-v} = \frac{dx}{x} \quad \text{..(5)}$$

(5) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমাকলন করে আমরা পাই

$$\int \frac{dv}{g(v)-v} = \int \frac{1}{x}dx + C \quad \text{..(6)}$$

(6) নং সমীকরণ হল (1) নং অবকল সীকরণের সাধারণ সমাধান (মৌলিক), যখন আমরা v-এর স্থলে $\frac{y}{x}$ প্রতিস্থাপন করি।

b) যদি সমমাত্রিক অবকল সমীকরণের আকার $\frac{dx}{dy} = F(x, y)$ হয়, যেখানে $F(x, y)$ হল শূণ্য মাত্রা বিশিষ্ট সমমাত্রিক অপেক্ষক, তাহলে আমরা $\frac{x}{y} = v$ অর্থাৎ $x = vy$ প্রতিস্থাপন করি এবং উপরোক্ত আলোচনা অনুসারে $\frac{dx}{dy} = F(x, y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ রূপে লিখে সাধারণ সমাধান নির্ণয়ে অগ্রসর হই।

- **রৈখিক অবকল সমীকরণ (Linear differential equation) :**

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ আকার বিশিষ্ট একটি অবকল সমীকরণ যেখানে, P ও Q ধ্রুবক অথবা শুধুমাত্র x -এর অপেক্ষক।

তাহলে সমাকল গুণক $(I.F) = e^{\int Pdx}$

এখন প্রদত্ত অবকল সমীকরণের সমাধান হল :

$$y(I.F) = \int (Q \times I.F)\, dx + C, \qquad C = \text{সমাকল ধ্রুবক}$$

$$y \,.\, e^{\int pdx} = \int [Q.\, e^{\int pdx}]\, dx + C$$

যদি প্রথম ক্রমের রৈখিক অবকল সমীকরণটির আকার $\frac{dx}{dy}+P_1x=Q_1$ হয়, যেখানে P_1 এবং Q_1 ধ্রুবক অথবা শুধুমাত্র y-এর অপেক্ষক, তাহলে I.F = $e^{\int P_1 dy}$ এবং অবকল সমীকরণের সমাধান হল

$$x.(I.F)=\int \left(Q_1\times I.F\right)dy+C$$

বা, $$x.e^{\int Pdy}=\int\left(Q_1.e^{\int Pdy}\right)dy+C,\quad C = \text{সমাকল ধ্রুবক}$$

অনুশীলনী—9

ক—বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

i) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3+\frac{d^3y}{dx^3}=\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}$ অবকল সমীকরণের ক্রম —

a) 6 b) 4 c) 3 d) 7

ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\frac{dy}{dx}+y=6x^3$ অবকল সমীকরণের মাত্রা —

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{5}}=0$ অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা যথাক্রমে —

a) 2 এবং 4 b) 2 এবং 2 c) 2 এবং 3 d) 3 এবং 3

iv) নীচের অবকল সমীকরণগুলির মধ্যে কোন্‌টি দ্বিতীয় ক্রমের ?

a) $(y')^2+x=y^2$ b) $y'y''+y=\sin x$ c) $y'''+(y'')^2+y=0$ d) $y'=y^2$

v) $y\frac{dy}{dx}+x=C$ অবকল সমীকরণটি নিম্নে কোনটিকে নির্দেশ করে —

a) পরাবৃত্ত সমূহের সেট b) অধিবৃত্ত সমূহের সেট

c) উপবৃত্ত সমূহের সেট d) বৃত্ত সমূহের সেট

vi) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-3\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=y^4$ অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা হল —

a) 1, 4 b) 3, 4 c) 2, 4 d) 3, 2

vii) যদি $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$, হয়, তবে y এর সমাধান হবে —

a) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=0$ b) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$

c) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0$ d) $\frac{d^2y}{dx^2}+2y=0$

viii) $xdy-ydx=0$ অবকল সমীকরণের সমাধানটি হল

a) একটি আয়তাকার পরাবৃত্ত b) অধিবৃত্ত যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে

c) মূলবিন্দুগামী একটি সরলরেখা d) একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দুতে

ix) $\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{x-1}$, অবকল সমীকরণের সমাধান সংখ্যা হবে, যখন $y(1)=2$

a) এক b) দুই c) অসংখ্য d) এদের কোনটিই নয়

x) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ অবকল সমীকরণের সমাধান হবে

a) $y=\tan^{-1}x$ b) $y-x=K(1+xy)$ c) $x=\tan^{-1}y$ d) $\tan(xy)=K$

xi) $\frac{dy}{dx}+y\tan x-\sec x=0$ অবকল সমীকরণের সমাকল গুণক —

a) $\cos x$ b) $\sec x$ c) $e^{\cos x}$ d) $e^{\sec x}$

xii) $x\frac{dy}{dx}-y=x^4-3x$ অবকল সমীকরণের সমাকল গুণক —

a) x b) $\log x$ c) $\frac{1}{x}$ d) $-x$

xiii) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ এর সমাধান হবে যখন $y(0)=0$

a) $y=e^x(x-1)$ b) $y=xe^{-x}$ c) $y=xe^{-x}+1$ d) $y=(x+1)e^{-x}$

xiv) $e^x\cos y dx-e^x\sin y dy=0$ এর সাধারণ সমাধান হবে —

a) $e^x\cos y=K$ b) $e^x\sin y=K$ c) $e^x=K\cos y$ d) $e^x=K\sin y$

xv) $\frac{dy}{dx}=2xe^{x^2-y}$ এর সাধারণ সমাধান হবে —

a) $e^{x^2-y}=C$ b) $e^{-y}+e^{x^2}=C$ c) $e^y=e^{x^2}+C$ d) $e^{x^2+y}=C$

2] অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর)

i) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\frac{d^2y}{dx^2}$ অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা নির্ণয় করো।

ii) সমাধান করো : $e^{\frac{dy}{dx}} = x^2$

iii) নীচের অবকল সমীকরণের ক্রম এবং মাত্রা নির্ণয় করো :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b^2}$$

iv) $y = Ax + \frac{B}{x}$ এর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করো, যেখানে A এবং B হল স্বেচ্ছ ধ্রুবক।

v) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} = 1 - x + y - xy$

vi) $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$ অবকল সমীকরণের সমাকল গুণক নির্ণয় করো।

vii) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} - \frac{y(x+1)}{x} = 0$

viii) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + 1$

ix) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{x}$ অবকল সমীকরণের সমাকল গুণক নির্ণয় করো।

x) সমাধান করো : $(\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy = 0$

খ—বিভাগ

3] সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

1) দেখাও যে, $v = \frac{A}{r} + B$ সমাধানটি $\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$ অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

2) $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ সমীকরণ থেকে a অপনয়ন করে অবকল সমীকরণ গঠন করো।

3) সমাধান করো : $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

4) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-3y}{3x-2y}$

5) $(2y-1)dx - (2x+3)dy = 0$ অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করো।

6) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ এর সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করো।

7) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করো।

8) সমাধান করো : $x\frac{dy}{dx} + y = e^x$

9) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$

10) $(x\log x)\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ অবকল সমীকরণের সমাকল গুণক লিখো

গ —বিভাগ

4] দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$, অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত আছে $y=0$ যখন $x=0$।

2) সমাধান করো : $2x^2\frac{dy}{dx} - 2xy + y^2 = 0$

3) $\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y=1$, যখন $x=0$।

4) $x(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 1$; অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y=0$, যখন $x=2$।

5) সমাধান করো : $x\frac{dy}{dx} = y - x\tan\left(\frac{y}{x}\right)$

6) সমাধান করো : $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$

7) দেখাও যে, $x\frac{dy}{dx}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x - y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ অবকল সমীকরণটি সমমাত্রিক এবং সমীকরণটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $x=1$, যখন $y = \frac{\pi}{2}$।

8) সমাধান করো : $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\log x}.y = \frac{2}{x}$

9) সমাধান করো : $xy\frac{dy}{dx} - y^2 = (x+y)^2\ e^{\frac{-y}{x}}$

10) $(1+x^3)\frac{dy}{dx} + 6x^2y = (1+x^2)$ অবকল সমীকরণের বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত $y=1$, যখন $x=1$।

11) সমাধান করো : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{2x-2y+3}$

12) সমাধান করো : $y-x\dfrac{dy}{dx}=2(1+x^2\dfrac{dy}{dx})$ প্রদত্ত $y=1$, যখন $x=1$.

13) দেখাও যে, $\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right)dx=xdy$ অবকল সমীকরণটি সমমাত্রিক এবং সমীকরণটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত যে $x=1$, যখন $y=1$।

14) $\dfrac{dx}{dy}+x\cot y=2y+y^2\cot y,\ (y\neq 0)$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাধান নির্ণয় কর, প্রদত্ত আছে $x=0$, যখন $y=\dfrac{\pi}{2}$।

15) এমন একটি বক্ররেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দুগামী এবং $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x^2$ অবকল সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

16) সমাধান করো : $y+\dfrac{d}{dx}(xy)=x(\sin x+\log x)$

17) $(1+\tan y)(dx-dy)+2xdy=0$ সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো :

18) সমাধান করো : $\dfrac{dy}{dx}=\cos(x+y)+\sin(x+y)$

19) (2,1) বিন্দুগামী কোনো বক্রের যদি (x, y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ হয় তবে বক্রটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

20) (1,0) বিন্দুগামী কোনো বক্রের যদি (x, y) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি $\dfrac{y-1}{x^2+x}$ হয় তবে বক্রটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

21) সমাধান করো : $x\dfrac{dy}{dx}=y\left(\log y-\log x+1\right)$

22) (1, 1) বিন্দুগামী কোনো বক্রের যদি বক্রের উপর $P(x,y)$ যে কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যাতে P বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হয় তবে বক্রটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

23) $\dfrac{dy}{dx}-3y=\sin 2x$ -এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

24) $dy=\cos x(2-y\,\mathrm{cosec}\,x)dx$ অবকল সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করো, প্রদত্ত আছে $y=2$ যখন $x=\dfrac{\pi}{2}$।

25) $\left(1+y^2\right)+\left(x-e^{\tan^{-1}y}\right)\dfrac{dy}{dx}=0$ অবকল সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) **বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :**

i) b   ii) c   iii) a   iv) b   v) d   vi) d

vii) c   viii) c   ix) a   x) b   xi) b   xii) c

xiii) b   xiv) a   xv) c

2) **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

i) ক্রম = 2 এবং মাত্রা = 1   ii) $y=2(x\log x-x)+c$ iii) ক্রম = 1 এবং মাত্রা = 2

iv) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=0$ v) $\log|1+y|=x-\dfrac{x^2}{2}+c$ vi) $e^{\tan^{-1}x}$

vii) $y=xe^{x+c}$ viii) $e^{y-x}=x+c$ ix) $e^x.\dfrac{1}{x}$

x) $x\cos y+y\sin x=c$

খ—বিভাগ

3) **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

2) $2y^2y_1^{\,2}+4xyy_1+x^2(1-y_1^{\,2})=0$

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C$

4) $y^2-3xy+x^2=C$

5) $\dfrac{2x+3}{2y-1}+K$, যেখানে $K=c^2$

6) $y\sec x=\tan x+c$

7) $e^y-e^x=\dfrac{x^3}{3}+C$

8) $y=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{K}{x}$

9) $x(y+\cos x)=\sin x+c$

10) $\log x$

গ—বিভাগ

4) **দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন :**

1) $4e^{3x}+3e^{-4y}=7$

2) $\log|x|+c=\dfrac{2x}{y}$

3) $\tan^{-1}y=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{\pi}{4}$

4) $y=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right|-\frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$

5) $x\sin\frac{y}{x}=C$

6) $y=\left(\tan^{-1}x-1\right)+Ce^{-\tan^{-1}x}$

7) $\cos\frac{y}{x}=\log|x|$

8) $y\log x=(\log x)^2+C$

9) $(x+y)\log|xc|=xe^{\frac{y}{x}}$

10) $y\left(1+x^3\right)^2=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x+\frac{9}{4}$

11) $x-2y=\log|x-y+2|+c$

12) $(y-2)^2\ (2x+1)^2=9x^2$

13) $e^{\frac{y}{x}}\log x-e^{\frac{y}{x}-1}+1=0$

14) $x\sin y=y^2\sin y-\frac{\pi^2}{4}$

15) $y=\frac{4x^3}{3(1+x^2)}$

16) $y=-\cos x+\frac{2\sin x}{x}+\frac{2\cos x}{x^2}+\frac{x}{3}\log x-\frac{x}{9}+Cx^{-2}$

17) $x(\sin y+\cos y)=\sin y+Ce^{-y}$

18) $\log\left|1+\tan\frac{x+y}{2}\right|=x+c$

19) $2(x^2-y^2)=3x$

20) $(y-1)(x+1)+2x=0$

21) $\log\left(\frac{y}{x}\right)=Cx$

22) $xy=1$

23) $y=-\frac{1}{13}(2\cos 2x+3\sin 2x)+Ce^{3x}$

24) $y\sin x=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$

25) $2xe^{\tan^{-1}y}=e^{2\tan^{-1}y}+K$

অধ্যায়- 10

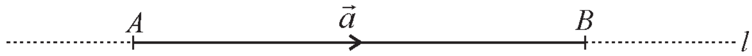
ভেক্টর বীজগণিত

(Vector Algebra)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

- **ভেক্টর (Vector) :**

একটি রাশি যার মান এবং পাশাপাশি দিকও আছে, তাকে **ভেক্টর** (Vector) বলে।



একটি দিক্ নির্দেশিত রেখাংশ হল একটি ভেক্টর, যা $\overrightarrow{AB}$ বা সহজভাবে $\vec{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং একে 'ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$' বা 'ভেক্টর $\vec{a}$' হিসেবে পড়া হয়।

একটি বিন্দু A যেখান থেকে ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ শুরু হয় তাকে এর প্রারম্ভিক বিন্দু (initial point) বলে, এবং B বিন্দু যেখানে ভেক্টরটি শেষ হয়, তাকে এর অন্তিম বিন্দু (terminal point) বলে, ভেক্টরের প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দুর মধ্যেকার দূরত্বকে ভেক্টরটির মান (বা দৈর্ঘ্য) বলা হয়, যা $|\overrightarrow{AB}|$ বা $|\vec{a}|$ বা a-এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

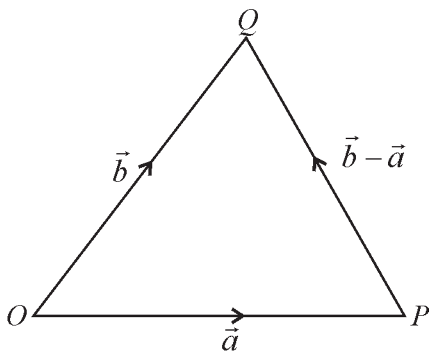
- **অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) :**

মনেকরো, O একটি অনির্দিষ্ট বিন্দু। তাহলে, $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর (position vector) বলা হয়। প্রারম্ভিক বিন্দু (initial point) O কে নির্দেশতন্ত্রের মূলবিন্দু বলা হয়।

মনেকরো, O মূলবিন্দু সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$; তাহলে $\vec{a}=\overrightarrow{OP}$ এবং $\vec{b}=\overrightarrow{OQ}$।

$\therefore$ PQ = (Q-এর অবস্থান ভেক্টর) – (P-এর অবস্থান ভেক্টর)

$= \vec{b}-\vec{a}$

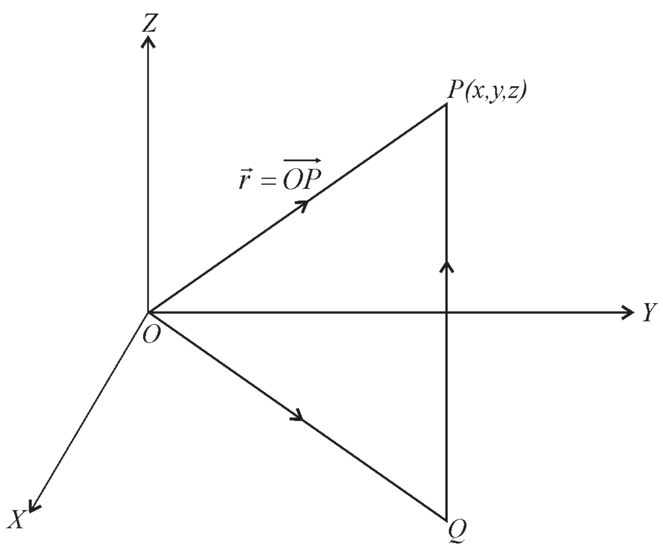


- $P(x, y, z)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরকে লেখা হয়

$\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ রূপে এবং এর মান হল

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ।

এখানে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ যথাক্রমে $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OZ}$ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর।



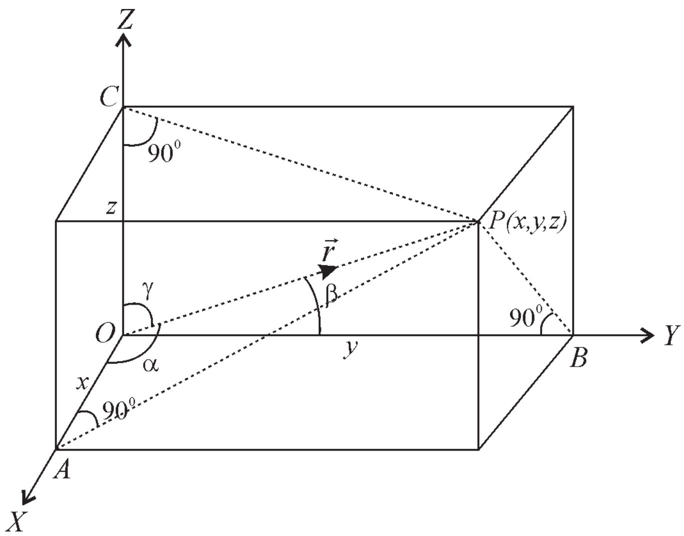
- P এবং Q যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$। ওই বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখাংশকে R বিন্দুটি $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করলে তার অবস্থান ভেক্টর হবে এবং

  i) $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ অন্তর্বিভক্তির ক্ষেত্রে।

  ii) $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রে।

- **দিক্ - কোসাইন (Direction Cosines of Vectors) :**

  ধরা যাক; চিত্রে প্রদর্শিত $P(x,y,z)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হল $\overrightarrow{OP}$ (বা $\vec{r}$)। $\vec{r}$ ভেক্টর x, y এবং z-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যথাক্রমে α, β, γ কোণ উৎপন্ন করলে, কোণগুলোকে $\vec{r}$-এর **দিক্-কোণ (direction angles)** বলা হয়। এই কোণগুলোর কোসাইনের মান অর্থাৎ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ এবং $\cos\gamma$ কে ভেক্টরের দিক্-কোসাইন বলা হয় এবং যথাক্রমে l, m এবং n দ্বারা সাধারণত প্রকাশ করা হয়।



  চিত্র থেকে আমরা পাই যে, OAP হল একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং এর থেকে পাই $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$। একইভাবে OBP এবং OCP সমকোণী ত্রিভুজ থেকে $\cos\beta = \dfrac{y}{r}$ এবং $\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$। এইভাবে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (lr, mr, nr) রূপেও প্রকাশ করা যায়। দিক্-কোসাইনের সঙ্গে সমানুপাতিক lr, mr এবং nr সংখ্যা তিনটিকে $\vec{r}$ ভেক্টরের দিক্-অনুপাত (direction - ratios) বলা হয় এবং যথাক্রমে a, b এবং c দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

- **ভেক্টরের বিভিন্ন প্রকার (Types of Vectors) :**

- **শূন্য ভেক্টর (Zero Vector) :** কোনো ভেক্টরের প্রারম্ভিক এবং অন্তিম বিন্দু সমপাতিত হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর (বা অকার্যকর ভেক্টর) বলা হয় এবং এটি $\vec{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক আরোপিত করা যায় না কারণ এর মান শূন্য। অথবা বিকল্পভাবে অন্যথায় এটি যে কোনো দিক্-নির্দেশক হিসেবে বিবেচিত হতে পারে। $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ ভেক্টরদ্বয় শূন্য ভেক্টরকে উপস্থাপিত করে।

- **একক ভেক্টর (Unit Vector) :** একটি ভেক্টর যার মান এক (অর্থাৎ 1 একক); তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{a}$-এর দিক বরাবর একক ভেক্টরকে $\hat{a}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ।

- **সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর (Coinitial Vectors) :** দুই বা ততোধিক ভেক্টরের একই প্রারম্ভিক বিন্দু থাকলে, তাদের সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর বলা হয়।

- **সমরেখ ভেক্টর (Collinear Vectors) :** দুই বা ততোধিক ভেক্টরকে সমরেখ বলা হবে, যদি মান এবং দিক্ নির্বিশেষে তারা একই সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

- **সমান ভেক্টর (Equal Vectors) :** দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ কে সমান বলা হবে, যদি তাদের মান সমান হয় এবং দিকের ক্ষেত্রে তাদের প্রারম্ভিক বিন্দুর অবস্থান অগ্রাহ্য করা হয় এবং তা $\vec{a} = \vec{b}$ রূপে লেখা হয়।

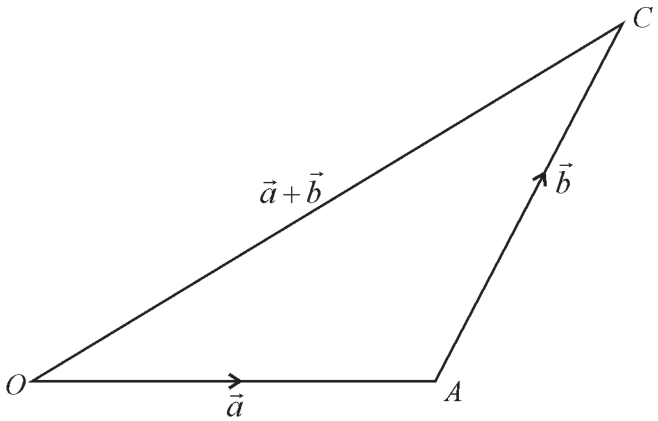
- **ঋণাত্মক ভেক্টর (Negative of a Vector) :** একটি ভেক্টর যার মান প্রদত্ত ভেক্টরের (ধরাযাক, $\overrightarrow{AB}$) সমান কিন্তু এর দিক প্রদত্ত ভেক্টরের বিপরীত; তাকে প্রদত্ত ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর বলা হয়। যেমন - ভেক্টর $\overrightarrow{BA}$ হল $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের ঋণাত্মক ভেক্টর এবং $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ রূপে লেখা যায়।

- **সামতলিক বা একতলীয় ভেক্টর (Coplanar Vectors) :** তিন বা তার বেশি সংখ্যক ভেক্টর একই সমতলে অবস্থিত হলে অথবা একই সমতলের সমান্তরাল হলে, ভেক্টরগুলিকে সামতলিক বা একতলীয় বলা হয়।

- **মুক্ত ভেক্টর (Free Vectors) :** একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে কোনো প্রদত্ত ভেক্টরের সমান্তরাল করে অঙ্কিত ভেক্টরকে স্থানিক ভেক্টর বলে; কিন্তু কোনো ভেক্টর যখন কেবলমাত্র তার মান ও দিকের ওপর নির্ভর করে এবং তার অবস্থান সাপেক্ষে নিরপেক্ষ হয়, তখন তাকে মুক্ত ভেক্টর বলে।

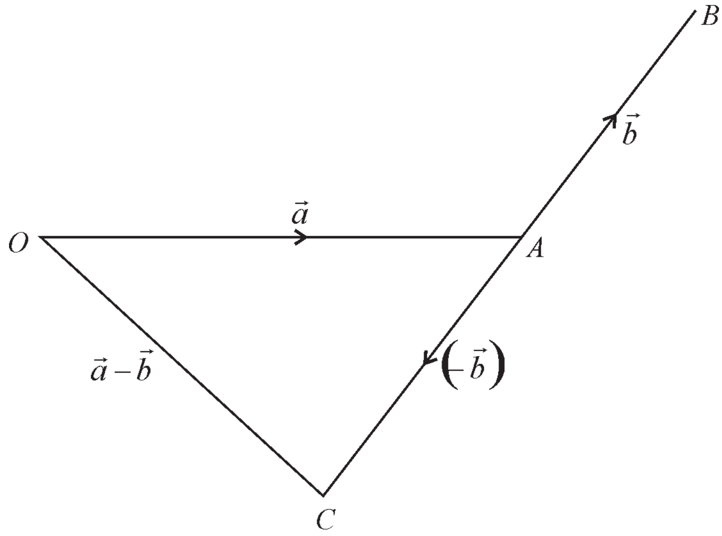
- **ভেক্টরের যোগ এবং বিয়োগ (Addition and Subtraction of Vectors) :**

  যদি O, A, C এরূপ তিনটি বিন্দু হয় যে, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, তবে, $\overrightarrow{OC}$ হবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির যোগফল এবং তা $\vec{a} + \vec{b}$ আকারে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ।



দুটি ভেক্টরের যোগফল নির্ণয়ের এই প্রক্রিয়াকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র বলে।

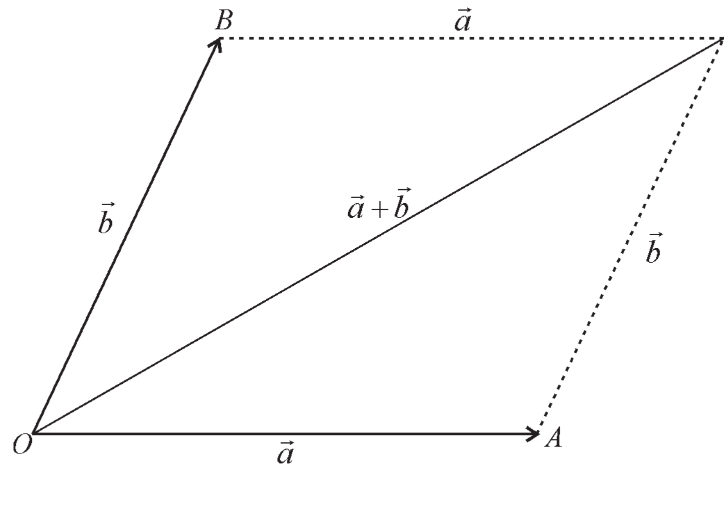
আবার, $\vec{a}$ ভেক্টরের সঙ্গে $-\vec{b}$ যোগ করে $\vec{a}$ ভেক্টর থেকে $\vec{b}$ ভেক্টরের বিয়োগ সংজ্ঞাত হয়। সুতরাং $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$।



যদি $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ হয়, তবে

$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{OA}+\left(-\overrightarrow{AB}\right)\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

- যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মান ও দিক্‌কে প্রকাশ হয়। বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি $\vec{a}+\vec{b}$ এর মান ও দিক্ নির্দেশ করে। এটি ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র হিসেবে পরিচিত।



- **ভেক্টর যোগের ধর্মাবলী (Properties of Vector addition) :**

i) যেকোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর জন্য

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (বিনিময় ধর্ম)

ii) যেকোন দুটি ভেক্টর $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ -এর জন্য

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

iii) যেকোন ভেক্টর $\vec{a}$ -এর জন্য

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

এখানে, শূন্য ভেক্টর $\vec{0}$ কে ভেক্টর যোগের ক্ষেত্রে যোগজ অভেদ (additive identity) বলা হয়।

- **কোনো ভেক্টরকে একটি স্কেলার দিয়ে গুণ (Multiplication of a vector by a scalar) :**

1. ধরা যাক, $\vec{a}$ হল একটি প্রদত্ত ভেক্টর এবং λ একটি স্কেলার। তবে ভেক্টর $\vec{a}$ এর সাথে স্কেলার λ-এর গুণকে স্কেলার λ দিয়ে ভেক্টর $\vec{a}$ কে গুণ করা বলা হয়, যা $\lambda\vec{a}$ রূপে প্রকাশ করা হয়।

i) যা $\vec{a}$ ভেক্টরের সঙ্গে সমরেখ।

ii) যার মান (magnitude or modulus) = $|\vec{a}||\lambda|$

iii) যার দিক $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিমুখে, যখন $\lambda>0$ এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের বিপরীত অভিমুখে, যখন $\lambda<0$।

যদি $\lambda=0$ অথবা $\vec{a}=\vec{0}$ তবে $\lambda\vec{a}$ একটি শূণ্য ভেক্টর। আবার $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিমুখে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে $\vec{a}=|\vec{a}|\hat{a}$ বা $\hat{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ।

2. m ও n দুটি স্কেলার এবং $\vec{a}$ একটি ভেক্টর হলে, ভেক্টরকে স্কেলার দ্বারা গুণনের সংজ্ঞার সাহায্যে পাই,

$m\left(n\vec{a}\right)=(mn)\vec{a}=n\left(m\vec{a}\right)$ এবং

$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

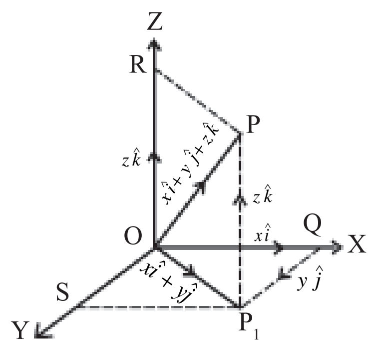
- **একটি ভেক্টরের উপাংশ (Components of a vector) :**

একটি বিন্দু $P(x,y,z)$ এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$ বিবেচনা করি। ধরা যাক, P_1 হল বিন্দু থেকে XOY সমতলের উপর লম্বের পাদবিন্দু। এইভাবে, আমরা দেখতে পারি যে P_1P হল Z-অক্ষের সমান্তরাল। যেহেতু $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ হল যথাক্রমে x, y এবং z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্কের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই $\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OR}=z\hat{k}$,

অনুরূপে $\overrightarrow{QP_1}=\overrightarrow{OS}=y\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OQ}=x\hat{i}$ ।

অতএব, $\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP_1}=x\hat{i}+y\hat{j}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$



সুতরাং, O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় —

$\overrightarrow{OP}$ (বা $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এই আকারের কোনো ভেক্টরকে এর উপাংশ আকার (component form) বলে। যেখানে x, y এবং z কে ভেক্টর $\vec{r}$ -এর স্কেলার উপাংশ বলা হয় এবং $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ এবং $z\hat{k}$ কে যথাক্রমে অনুরূপ অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ এর ভেক্টর উপাংশ বলা হয়।

- যেকোনো ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ -এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য সমকোণী ত্রিভুজ OQP_1 থেকে পাই,

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{QP_1}\right|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

এবং OPP_1 ত্রিভুজ থেকে $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(P\vec{P}_1)2 + b\vec{P})^2} = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$

$\therefore$ যেকোনো ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ -এর দৈর্ঘ্য $\left|\vec{r}\right| = \left|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির উপাংশ আকার যথাক্রমে $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ হয়, তবে

i) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর সমষ্টি বা ফলাফল হল

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

ii) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর অন্তরফল হল

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$

iii) ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ এবং $a_3=b_3$।

iv) যেকোনো স্কেলার λ দ্বারা ভেক্টর $\vec{a}$ -এর গুণফল হল —

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

v) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

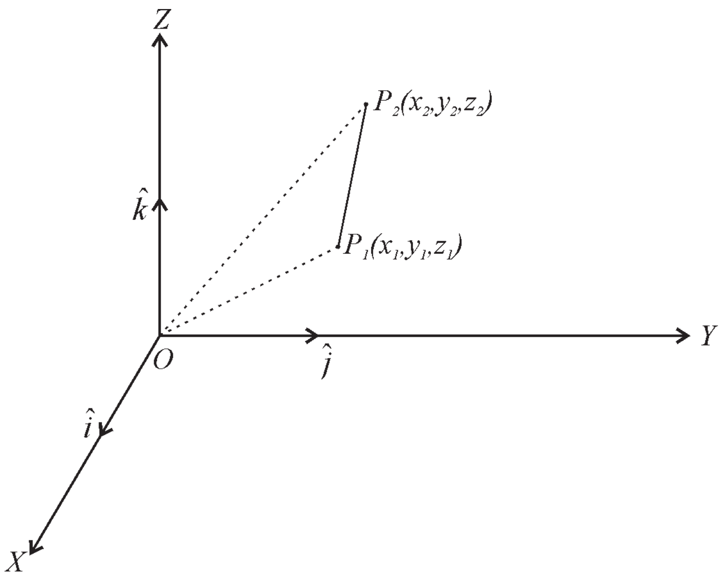
vi) যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ তবে a_1, a_2, a_3 কে $\vec{a}$ -এর দিক্-অনুপাত বলা হয়।

- **দুটি বিন্দুর সংযোগ ভেক্টর (Vector joining two points) :**

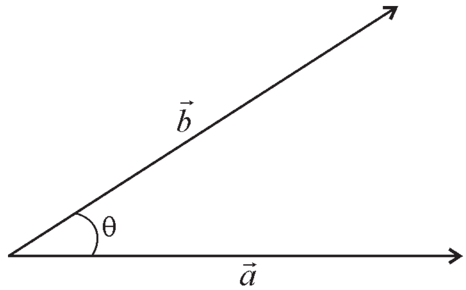
যদি $P_1(x_1, y_1, z_1)$ এবং $P_2(x_2, y_2, z_2)$ যেকোনো দুটি বিন্দু হয়, তবে P_1 এবং P_2 -এর সংযোগকারী ভেক্টরটি হলো $\overrightarrow{P_1P_2}$ ।

$\overrightarrow{P_1P_2}$ ভেক্টরটির মান হল

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



- **দুটি ভেক্টরের স্কেলার (বা ডট্) গুণ**
  (Scalar (or dot) product of two vectors) :



দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর স্কেলার গুণফল $\vec{a}.\vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ রূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়, যেখানে θ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ এবং $0\le\theta\le\pi$।

- i) ধরো, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি অশূণ্য ভেক্টর, তবে $\vec{a}.\vec{b}=0$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর লম্ব হয়। অর্থাৎ $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ।

  ii) যদি $\theta=0$ হয়, তবে $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$

  iii) যদি $\theta=\pi$ হয়, তবে $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$

  iv) পরস্পর লম্ব তিনটি একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ থেকে আমরা পাই —
  $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$
  $\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=0$

  v) দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

  $$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ বা } \theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

  vi) স্কেলার গুণ, বিনিময় ধর্ম মেনে চলে, অর্থাৎ
  $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

vii) যদি দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ কে $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ উপাংশ আকারে লেখা যায়, তবে তাদের স্কেলার গুণফল হল —

$\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

- **কোনো সরলরেখার উপর একটি ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection of a vector on a line) :**

ধরা যাক, একটি ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে, একটি প্রদত্ত দিক নির্দেশিত রেখা l (ধরি) এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তবে l-এর উপর $\overrightarrow{AB}$ -এর অভিক্ষেপ হল একটি ভেক্টর $\vec{p}$ (ধরো) যার মান $\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\cos\theta\right|$ এবং $\vec{p}$ ও সরলরেখা l-এর অভিমুখ একই দিকে (বা বিপরীতে) হবে তা নির্ভর করে $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক না কি ঋনাত্মক। ভেক্টর $\vec{p}$ -কে বলা হয় অভিক্ষেপ ভেক্টর (Projection Vector) এবং এর মান $|\vec{p}|$ কে সাধারণত দিক্ নির্দেশিত রেখা l এর উপর ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ বলা হয়।

- i) যদি l রেখা বরাবর $\hat{p}$ একটি একক ভেক্টর হয়, তবে l রেখার উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হল $\vec{a}.\hat{p}$ ।

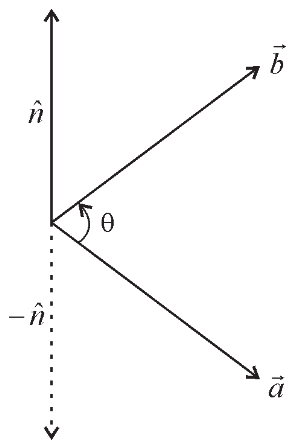
  ii) $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $\vec{a}.\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, বা $\frac{1}{|\vec{b}|}\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$.

  iii) যদি $\theta=0$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হবে $\overrightarrow{AB}$ নিজেই এবং যদি $\theta=\pi$ হয় তবে $\overrightarrow{AB}$ এর অভিক্ষেপ ভেক্টর হবে $\overrightarrow{BA}$ ।

  iv) যদি $\theta=\pi/2$ বা $\theta=3\pi/2$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ -এর অভিক্ষেপ হবে শূন্য ভেক্টর।

- **দুটি ভেক্টরের ভেক্টর (বা ক্রস) গুণ (Vector (or cross) product of two vectors) :**

দুটি অশূন্য ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর ভেক্টর গুণকে $\vec{a}\times\vec{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যায়। $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ যেখানে, θ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ, $0\le\theta\le\pi$ এবং $\hat{n}$ হল $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয়ের উপর লম্ব একটি একক ভেক্টর।



i) ধরা যাক, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি অশূন্য ভেক্টর। তবে $\vec{a}\times\vec{b}=0$ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল (বা সমরেখ) হয়, অর্থাৎ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$ ।

ii) যদি $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ হয়, তবে $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|$ হয়।

iii) $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি পরস্পর লম্ব একক ভেক্টরের জন্য আমরা পাই —

$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=\vec{0}$

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

iv) ভেক্টর গুণের আকারে, দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণকে নিম্নরূপে লেখা যায় —

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

v) দুইটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন কখনই বিনিময় সূত্র মান্য করে না, কারণ a × b = − b × a

প্রকৃতপক্ষে, $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ যেখানে $\vec{a},\vec{b}$ ও $\hat{n}$ দক্ষিণাবর্তী তন্ত্র গঠন করে।

vi) $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ এবং $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

vii) যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একটি ত্রিভুজের দুইটি সংলগ্ন বাহুকে প্রকাশ করে, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল হল $\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ ।

viii) যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ একটি সামন্তরিকের দুইটি সংলগ্ন বাহুকে প্রকাশ করে, তবে সামন্তরিকটির ক্ষেত্রফলকে $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ দ্বারা লেখা যায়।

ix) যদি $\vec{a},\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ যেকোনো তিনটি ভেক্টর এবং λ একটি স্কেলার, তবে

i) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

ii) $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$

x) ধরা যাক, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি প্রদত্ত ভেক্টরের উপাংশ আকার যথাক্রমে $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ এবং $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$; তাহলে তাদের ক্রস গুণফলকে (cross product) লেখা হয়

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

- যেকোনো ভেক্টরের মান (r), দিক-অনুপাত (a, b, c) এবং দিক-কোসাইন (l, m, n) নিম্নরূপে সম্বন্ধযুক্ত

$$l=\frac{a}{r},\ m=\frac{b}{r},\ n=\frac{c}{r}$$

- একটি ভেক্টরের স্কেলার উপাংশ হল তার দিক্-অনুপাত এবং অনুরূপ অক্ষ বরাবর তার অভিক্ষেপ প্রকাশ করা হয়।
- কোন নির্দিষ্ট ক্রমে গৃহীত একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর ভেক্টর যোগফল হল $\vec{0}$।
- দুটি সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর-এর ভেক্টর যোগফল সামন্তরিকটির কর্ণ বরাবর প্রকাশ করা হয় যেখানে সংলগ্ন বাহুদ্বয় হল প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়।

অনুশীলনী—10

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

i) A থেকে B এর দিকে, A(–2, 1, 0) এবং B(–1, 2, 3) বিন্দু সংযোগকারী ভেক্টরটি হবে

a) $\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$ b) $-3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ c) $3\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ d) $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$

ii) (3, –1, 2) এবং (5, –4, 2) বিন্দুসংযোগকারী ভেক্টরটির দিক্ কোসাইন হবে —

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}},0\right)$ b) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}},0\right)$

c) $\left(\frac{-2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}},0\right)$ d) কোনোটিই নয়।

iii) $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটির একক ভেক্টর হবে, যেখানে A এবং B বিন্দুগুলো হল (5, –3, 2) এবং (3, 3, 5) —

a) $-\frac{2}{7}\hat{i}+\frac{6}{7}\hat{j}+\frac{3}{7}\hat{k}$ b) $\frac{8\hat{i}+\hat{j}+7\hat{k}}{\sqrt{113}}$

c) $\frac{8\hat{i}+7\hat{k}}{\sqrt{113}}$ d) $\frac{2}{7}\hat{i}+\frac{6}{7}\hat{j}+\frac{3}{7}\hat{k}$

iv) (1, 2, –1) এবং (–1, 1, 1) বিন্দু সংযোগকারী রেখা যে বিন্দুতে 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, সেই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হবে —

a) $\left(-\frac{1}{5},\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{5},\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{5},\frac{8}{5},\frac{-1}{5}\right)$ d) $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{-1}{5}\right)$

v) $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $6\hat{i}+\lambda\hat{j}-9\hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমতলীয় হলে λ এর মান হবে —

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) –3 d) কোনোটিই নয়।

vi) যদি $|\vec{a}|=3$ এবং $-1\le K\le 2$ হলে $|K\vec{a}|$ অন্তরালে থাকবে —

a) [0, 6] b) [–3, 6] c) [3, 6] d) [1, 2]

vii) O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে সুষম ষড়ভুজ ABCDEF অন্তর্লিখিত, তবে $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$ সমান হবে —

a) $2\overrightarrow{AO}$ b) $4\overrightarrow{AO}$ c) $6\overrightarrow{AO}$ d) $6\overrightarrow{OA}$

viii) একটি ভেক্টর $\vec{r}$ -এর মান $3\sqrt{2}$ একক; যা y এবং z অক্ষের সাথে যথাক্রমে $\frac{\pi}{4}$ এবং $\frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে $\vec{r}$ হবে —

a) $\hat{i}+\hat{j}$ b) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$ c) $\pm\left(3\hat{i}+3\hat{j}\right)$ d) $\pm3\hat{i}+3\hat{j}$

ix) $\hat{i}.\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)+\hat{j}.\left(\hat{i}+\hat{k}\right)+\hat{k}.\left(\hat{i}+\hat{j}\right)$ এর মান হবে —

a) 2 b) –1 c) 3 d) 1

x) যদি $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ এবং $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ তবে $\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}$ সমান হবে —

a) $\frac{29}{2}$ b) $-\frac{29}{2}$ c) $\frac{19}{2}$ d) $-\frac{19}{2}$

2] অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

i) দেখাও যে, $-\hat{i}+\hat{j}$, $-4\hat{i}-6\hat{j}$ এবং $5\hat{i}+5\hat{j}$ হল সমকোণী ত্রিভুজের বাহু।

ii) যদি A এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}$ এবং $\vec{b}=-2\hat{i}+5\hat{j}$ হয়, তবে $\overrightarrow{AB}$ সংযোগকারী রেখার মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো।

iii) A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $3\hat{i}-\hat{j}+7\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$; তবে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের মান এবং দিক্-কোসাইন নির্ণয় করো।

iv) দেখাও যে, $\vec{\alpha}=-3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{\beta}=-2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুটো পরস্পর লম্ব।

vi) যদি $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$, তবে $(\vec{a}+\vec{b})$ এবং $(\vec{a}-\vec{b})$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

vi) দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এরূপ যে $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, তবে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

vii) যদি $\vec{a}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\vec{c}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ হয়, তবে $\left[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right]$ নির্ণয় করো।

viii) a) (2, –1, 40) এবং (0, 1, 5) b) (4, 3, –5) এবং (–2, 1, –8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার দিক্ কোসাইন নির্ণয় করো।

ix) BA এবং BC সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের কোসাইন নির্ণয় করো, যেখানে A, B, C বিন্দুগুলো যথাক্রমে (1, 2, 3), (2, 5, –1) এবং (–1, 1, 2)।

x) যদি $X\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর একতলীয় হয়, তবে X-এর মান নির্ণয় করো।

খ—বিভাগ

3] **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) (4, –3, –1) এবং (1, –1, 5) বিন্দুদ্বয় সংযোগকারী রেখার দিক্-কোসাইন নির্ণয় করো।

ii) যদি $\hat{i}+\hat{j}$ ভেক্টরের উপর $\lambda\hat{i}-\hat{j}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ শূন্য হয়, তবে λ-এর মান নির্ণয় করো।

iii) প্রমাণ করো যে, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

iv) যদি $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{b}=3\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k}$ হয়, তবে $(\vec{a}-\vec{b})$ ভেক্টরের সমান্তরাল দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় করো।

v) যদি $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{c}=-3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, তবে $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ নির্ণয় করো।

vi) $\vec{\alpha}$ একটি ভেক্টর যার মান $5\sqrt{2}$, যা X-অক্ষের সহিত $\pi/4$, Y-অক্ষের সহিত $\pi/2$ এবং Z-অক্ষের সহিত সূক্ষ্মকোণ θ উৎপন্ন করে, তবে $\vec{\alpha}$ নির্ণয় করো।

vii) X-অক্ষ এবং $\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

viii) একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (1, 5, –1), (0, 4, –2) এবং (2, 3, 4)। তবে ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

ix) একটি রেখার দিক্ কোণ (direction angle) যথাক্রমে α, β, γ হলে, প্রমাণ করো যে —
$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$

x) $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ তিনটি একক ভেক্টর এরূপ যে $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right|=1$ এবং $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$-এর উপর লম্ব যেখানে $\vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}$ এবং $\vec{\beta}$-এর সহিত যথাক্রমে θ এবং ϕ কোণ উৎপন্ন করে, তবে $\cos\theta+\cos\phi$-এর মান নির্ণয় করো।

গ—বিভাগ

4] **দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) যদি $\vec{\alpha}=3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\vec{c}=5\hat{i}-6\hat{j}+4\hat{k}$ একটি ভেক্টর $\vec{r}$ নির্ণয় করো যা $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ উভয় ভেক্টরের উপর লম্ব এবং $\vec{r}.\vec{c}=0$ সম্বন্ধটি সিদ্ধ করে।

ii) যদি দুটো একক ভেক্টরের সমষ্টি একটি একক ভেক্টর হয়, তবে প্রমাণ করো যে তাদের অন্তরফলের মান হবে $\sqrt{3}$।

iii) যদি $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0$ হয়, তবে দেখাও যে $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি একতলীয়।

iv) যদি $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}$ এবং $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ হয় তবে $\vec{b}$ কে $\vec{b}=\vec{b}_1+\vec{b}_2$ আকারে প্রকাশ করো, যেখানে $\vec{b}_1\parallel\vec{a}$ এবং $\vec{b}_2\perp\vec{a}$।

v) যদি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি একই মান বিশিষ্ট পরস্পর লম্ব ভেক্টর হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$ ভেক্টরটি $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$ এর সহিত একই কোণে আনত।

vi) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের সঙ্গে $\vec{b}=2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\vec{c}=\lambda\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দুটির সমষ্টির দিক্ বরাবর

একক ভেক্টরের স্কেলার গুণের মান 1 হলে λ এর মান নির্ণয় করো।

vii) যদি একটি সরলরেখা, একটি ঘণকের চারটি কর্ণের সঙ্গে α, β, γ, δ কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ করো যে, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta={}^4\!/_3$ ।

viii) A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

ix) A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}+2\vec{b}$ এবং AB রেখাকে $\vec{a}$, 2:3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো।

x) একটি নির্দিষ্ট ভেক্টরের সঙ্গে $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর তিনটির ডট গুণফলের মান যথাক্রমে 4, 0 এবং 2 হলে ভেক্টরটি নির্ণয় করো।

xi) একটি সামন্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু হল $2\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ । সামন্তরিকটির কর্ণ দুটোর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় করো। তাছাড়া, কর্ণ ভেক্টর প্রয়োগে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

xii) প্রমাণ করো : $\left[\vec{a}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{d}\right]=\left[\vec{a}\vec{b}\vec{d}\right]+\left[\vec{a}\vec{c}\vec{d}\right]$

xiii) B(0,–11,4) এবং C(2,–3,1) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার উপর A(1,8,4) বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

xiv) $\vec{e}_1$ ও $\vec{e}_2$ দুটি একক ভেক্টর এবং ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে প্রমাণ করো যে, $|\vec{e}_1-\vec{e}_2|=2\sin{}^{\theta}\!/_2$ ।

xv) যদি একটি ভেক্টর $\vec{v}$ এরূপ যে, $2\vec{v}+\vec{v}\times\left[\hat{i}+2\hat{j}\right]=2\hat{i}+\hat{k}$ এবং $|\vec{v}|=\frac{1}{3}\sqrt{m}$, তবে m এর মান নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) i) d　ii) a　iii) a　iv) c　v) b　vi) a
vii) c　viii) d　ix) d　x) b

2) ii) $\hat{i}+\hat{j}$　iii) $\sqrt{69}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{69}}, \frac{-2}{\sqrt{69}}, \frac{-8}{\sqrt{69}}$　v) $\pi/2$

vi) $\pi/4$　vii) –10

viii) a) $-2/3,\ 2/3,\ 1/3$ or $2/3, -2/3, -1/3$

b) $-6/7, -2/7, -3/7$ or $6/7,\ 2/7,\ 3/7$

ix) $\cos^{-1}\left(\frac{27}{2\sqrt{221}}\right)$　x) $x=\frac{29}{3}$

খ—বিভাগ

3) i) $\frac{-3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}$　ii) $\lambda=1$　iv) $\frac{1}{\sqrt{21}}\left(-2\breve{i}+\breve{j}+4\breve{k}\right)$

v) –3　vi) $\vec{\alpha}=5\hat{i}+5\hat{k}$　vii) $\cos^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$

viii) (27, –18, –54), (27, –18, 54), (–27, 18, –54)　ix) –1

গ—বিভাগ

4) i) $13\left(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)$

iv) $\vec{b}_1+\vec{b}_2=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}=\vec{b}$

v) $\cos^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right)$

vi) $\lambda=1,\ \frac{3}{7}\hat{i}+\frac{6}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}$

viii) π

ix) $\vec{a}-3\vec{b}$

x) $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

xi) $2\sqrt{101}$ বর্গ একক

xiii) (4, 5, –2)

xv) 6

অধ্যায়- 11

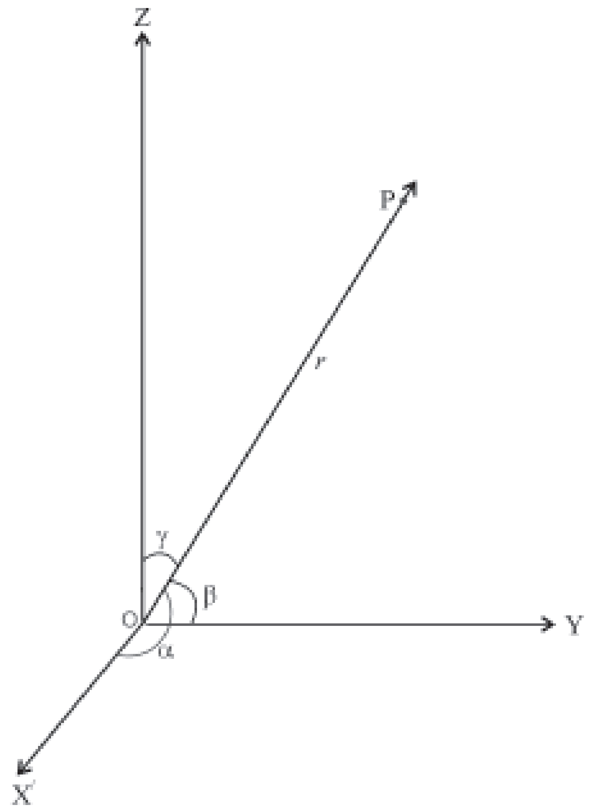
ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি
(Three dimensional Geometry)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় এবং ফলাফল :

- **একটি সরলরেখার দিক্ কোসাইন এবং দিক্ অনুপাত**
  (Direction cosines and direction ratios of a line) :

  মূলবিন্দুগামী কোনো নির্দেশিত রেখা $\overline{OP}$ যদি x, y ও z অক্ষের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে, যাদের দিক্-কোণ বলা হয়, তবে তাদের কোসাইন; যথা - $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ও $\cos\gamma$-কে এই নির্দেশিত রেখা $\overline{OP}$-এর দিক্ কোসাইন বলা হয়।

  যদি আমরা $\overline{OP}$-এর দিকটিকে উল্টিয়ে দিই, তবে দিক্-কোণগুলো তাদের সম্পূরক, অর্থাৎ $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, এবং $\pi-\gamma$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত হবে।



- **একটি সরলরেখার দিক্-অনুপাত**
  (Direction ratios of a Line) :

  যেকোনো তিনটি সংখ্যা যেগুলো একটি সরলরেখার দিক্ কোসাইনের সাথে সমানুপাতিক, তাদের ওই সরলরেখার দিক্-অনুপাত (direction ratio) বলা হয়। যদি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n ও দিক্-অনুপাতগুলো a, b, c হয়, তবে $a=\lambda l$, $b=\lambda m$ এবং $c=\lambda n$ হবে। যে কোনো অ-শূন্য সংখ্যা $\lambda\in R$-এর জন্য।

- যদি একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইন সমূহ l, m, n হয়, তবে $l^2+m^2+n^2=1$

- যদি একটি সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n এবং উহার দিক্-অনুপাতগুলো a, b, c হয়, তবে $l=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $m=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $n=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ ।

- $P(x_1,y_1,z_1)$ এবং $Q(x_2,y_2,z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার দিক্-কোসাইনগুলো হলো $\dfrac{x_2-x_1}{PQ}$, $\dfrac{y_2-y_1}{PQ}$, $\dfrac{z_2-z_1}{PQ}$ । যেখানে $PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ ।

- $P(x_1,y_1,z_1)$ এবং $Q(x_2,y_2,z_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের দিক-অনুপাতগুলো নিম্নরূপে দেওয়া যেতে পারে, $x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1$ অথবা $x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2$।

- **ত্রিমাত্রিক দেশে একটি সরলরেখার সমীকরণ (Equation of a line in space) :**

  একটি সরলরেখা স্বতন্ত্ররূপে নির্ধারণ করা যায়, যদি,

  i) ইহা একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী এবং উহার একটি প্রদত্ত দিক্ থাকে, অথবা

  ii) ইহা প্রদত্ত দুটি বিন্দুগামী হয়।

- যে সরলরেখাটি একটি প্রদত্ত বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং উহা একটি প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{b}$ এর সমান্তরাল,তার ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ।

- (x_1,y_1,z_1) বিন্দুগামী এবং l, m, n দিক্-কোসাইন বিশিষ্ট একটি সরলরেখার সমীকরণ হলো

  $$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

- (x_1, y_1, z_1) বিন্দুগামী এবং a, b, c দিক্-অনুপাত বিশিষ্ট একটি সরলরেখার সমীকরণ

  $$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

  এটি হলো সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ।

- দুটি বিন্দুগামী সরলরেখা যাদের অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$, সেই রেখাটির ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r}=\vec{a}+\lambda(\vec{b}-\vec{a})$

- যে সরলরেখা (x_1,y_1,z_1) ও (x_2,y_2,z_2) দুটি বিন্দুগামী, তার কার্তেসীয় সমীকরণ হলো

  $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

- যদি দুটি সরলরেখার দিক-অনুপাতগুলো যথাক্রমে a_1, b_1, c_1 ও a_2, b_2, c_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়,

  তবে $\cos\theta = \left| \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$ ।

- যদি দুটি সরলরেখার দিক-কোসাইনগুলো যথাক্রমে l_1, m_1, n_1 ও l_2, m_2, n_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়, তবে

  $\cos\theta = | l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 |$ এবং

  $\sin\theta = \sqrt{(l_1m_1 - l_2m_2)\ - (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2}$

- যদি $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ও $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda\vec{b}_2$ এর মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণ θ হয়, তবে $\cos\theta = \left| \dfrac{\vec{b}_1.\vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|} \right|$.

- যদি দুটি সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{l_1} = \dfrac{y-y_1}{m_1} = \dfrac{z-z_1}{n_1}$ ও $\dfrac{x-x_2}{l_2} = \dfrac{y-y_2}{m_2} = \dfrac{z-z_2}{n_2}$ হয়, তবে তাদের মধ্যবর্তী সূক্ষ্মকোণকে নিম্নরূপে লেখা যায়

  $\cos\theta = | l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 |$

- দুটি সরলরেখা, যাদের দিক্-অনুপাত a_1, b_1, c_1 এবং a_2, b_2, c_2

  i) লম্ব হবে, যদি $\theta = 90^0$, তবে $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

  ii) সমান্তরাল অর্থাৎ যদি $\theta = 0$, তবে $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

- কোনো ত্রিমাত্রিক দেশে **অসামতলিক সরলরেখা** হলো এই সরলরেখাগুলো যেগুলো ছেদিত অথবা সমান্তরাল এদের কোনোটিই নয়। তারা ভিন্ন ভিন্ন সমতলে অবস্থিত।

- **অসামতলিক রেখার মধ্যবর্তী কোণ** হলো যে-কোনা বিন্দু (মূলবিন্দুগামী অগ্রাধিকারযোগ্য) থেকে অঙ্কিত পরস্পর চ্ছেদি প্রতিটি অসামতলিক রেখার সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ।

- দুটি সরলরেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতম দূরত্ব বলতে আমরা বুঝি যে, একটি সরলরেখার ওপর অবস্থিত একটি বিন্দুর সঙ্গে অপর সরলরেখার ওপর অবস্থিত আরেকটি বিন্দুকে এমনভাবে যুক্ত করতে হবে যাতে প্রাপ্ত রেখাংশের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম হবে।

  অসামতলিক সরলরেখার ক্ষেত্রে, ক্ষুদ্রতম দূরত্বের রেখাটি উভয় সরলরেখার উপর লম্ব হবে।

- দুটি অসামতলিক সরলরেখার মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো একটি রেখাংশ যেটি উভয় সরলরেখার উপর লম্ব। এরূপ দুটি সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ও $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ এর মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$\left|\frac{\left(\vec{b}_1\times\vec{b}_2\right)\cdot\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right)}{\left|\vec{b}_1\times\vec{b}_2\right|}\right|$$

- $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ এবং $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব হলো

$$=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\left(b_1c_2-b_2c_1\right)^2+\left(c_1a_2-c_2a_1\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}}$$

- সমান্তরাল সরলরেখা $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}$ এবং $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব হলো $\left|\frac{\vec{b}\times\left(\vec{a}_2-\vec{a}_1\right)}{\left|\vec{b}\right|}\right|$ ।

- একটি সমতলকে অনন্যরূপে (uniquely) নির্ণয় করা যায় যদি নিম্নলিখিতগুলোর মধ্যে যে-কোন একটি জানা থাকে :
  - i) সমতলটির অভিলম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে উহার দূরত্ব দেওয়া থাকলে, অর্থাৎ সমতলের অভিলম্ব আকারে সমীকরণ।
  - ii) ইহা একটি বিন্দুগামী এবং একটি প্রদত্ত অভিমুখের সঙ্গে লম্ব।
  - iii) ইহা তিনটি প্রদত্ত অসমরেখ বিন্দুগামী।

- ভেক্টর আকারে, যে সমতলটি মূলবিন্দ থেকে d একক দূরত্বে অবস্থিত এবং সমতলটির অভিলম্বের একক ভেক্টর $\hat{n}$ যদি মূলবিন্দুগামী হয় তবে, ওই সমতলটির সমীকরণ হবে $\vec{r}.\hat{n}=d$ ।

- যে সমতলটি মূলবিন্দু থেকে d একক দূরত্বে অবস্থিত এবং উহার অভিলম্বের দিক্-কোসাইনগুলো যথা l, m, n হয় তবে, সমতলটির সমীকরণ হবে $lx+my+nz = d$ ।

- যদি $\vec{r}.\left(a\,\hat{i}+b\,\hat{j}+c\,\hat{k}\right)=d$ কোনো একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হয়, তবে $ax+by+cz=d$ সমতলটির কার্তেসীয় সমীকরণ হবে, যেখানে a, b এবং c হল সমতলটির অভিলম্বের দিক্-অনুপাত।

- যদি মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব d এবং মূলবিন্দুগামী সমতলের উপর অভিলম্বের দিক্-কোসাইনগুলো l, m, n হয় তবে, লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (ld, md, nd)।

- যে সমতলটি একটি বিন্দুগামী যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ এবং উহা ভেক্টর $\vec{N}$ এর উপর লম্ব, তার সমীকরণ হলো $(\vec{r}-\vec{a}).\vec{N}=0$ ।

- যে সমতলটি A, B, C দিক্ অনুপাত বিশিষ্ট একটি প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব এবং একটি প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1, z_1)-গামী, তার সমীকরণ হলো —
  $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0$

- তিনটি অসমরেখ বিন্দু যথা — (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ও (x_3, y_3, z_3)-গামী একটি সমতলের সমীকরণ হলো —

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট তিনটি অসমরেখ বিন্দু ধারণকারী একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হলে

$$(\vec{r}-\vec{a}).\left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right] = 0$$

- যে সমতলটি স্থানাঙ্ক অক্ষগুলোকে $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ও $(0, 0, c)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তার সমীকরণ হলো $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ।

- $\vec{r}.\vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n}_2 = d_2$ সমতলের ছেদক-সরলরেখাগামী একটি সমতলের ভেক্টর সমীকরণ হলো $\vec{r}.(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$, যেখানে λ হলো যে কোনো একটি অ-শূন্য ধ্রুবক রাশি।

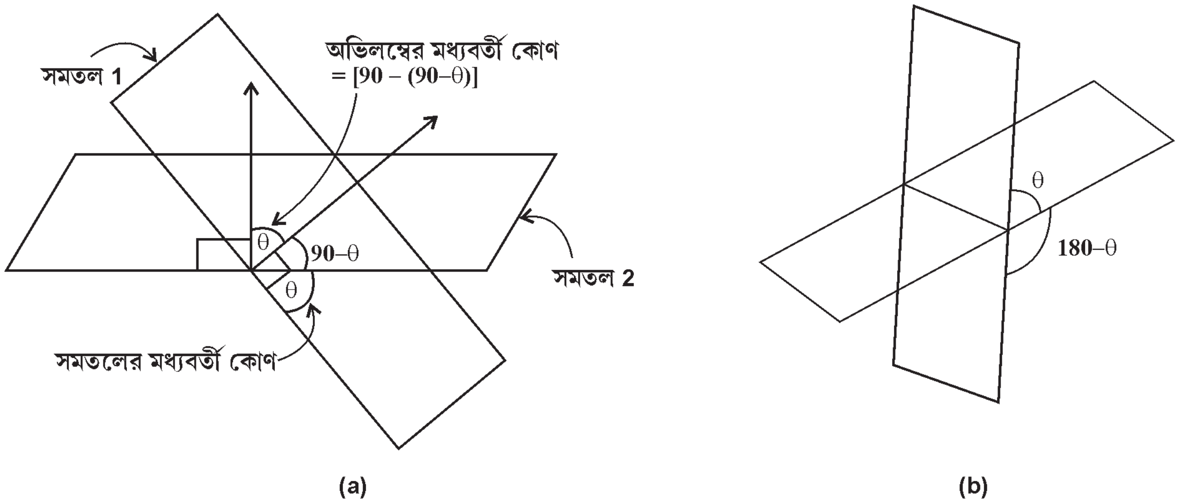
- দুটি প্রদত্ত সমতল যথা $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ এবং $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ -এর ছেদক-সরলরেখাগামী একটি সমতলের কার্তেসীয় সমীকরণ হলো —
  $(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

- দুটি সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ এবং $\vec{r} = \vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ সামতলিক হবে যদি $(\vec{a}_2-\vec{a}_1).(\vec{b}_1\times\vec{b}_2) = 0$ হয়।

- কার্তেসীয় আকারে $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ এবং $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ সরলরেখা দুটি সামতলিক হবে যদি $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ হয়।

- **দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ (Angle between two planes) :**

  দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ বলতে তাদের অভিলম্বের অন্তর্ভুক্ত কোণকে বোঝায়। যদি দুটি সমতলের মধ্যবর্তী একটি কোণ θ হয় তবে অপরটি হবে $(180-\theta)$। আমরা দুটি সমতলের মধ্যবর্তী কোণ হিসেবে সূক্ষ্মকোণটিকে নেবো।



যদি $\vec{r}.\vec{n}_1 = d_1$ এবং $\vec{r}.\vec{n}_2 = d_2$ সমতলদুটির অভিলম্ব $\vec{n}_1$ ও $\vec{n}_2$ এবং মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে সমতল দুটির কোনো সাধারণ বিন্দু থেকে সমতল দুটিতে অঙ্কিত অভিলম্ব দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ হবে।

অতএব, $\cos\theta = \left|\dfrac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|$.

- সমতল দুটি পরস্পর লম্ব হয়ে যদি $\vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0$ হয় এবং সমান্তরাল হবে যদি $\vec{n}_1$ ও $\vec{n}_2$ সমান্তরাল হয়।

- **কার্তেসীয় আকার**, যদি $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ ও $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ সমতল দুটির মধ্যবর্তী কোণ θ, সমতল দুটির অভিলম্বের দিক্-অনুপাত সমূহ যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 এবং A_2, B_2, C_2।

$$\therefore\ \cos\theta = \left|\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

- যদি সমতল দুটি সমকোণে নত হয়, তবে θ=90^0 এবং তাই cosθ=0। সুতরাং cosθ=$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$।

- যদি সমতল দুটি সমান্তরাল হয়, তবে $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ ।

- সরলরেখা $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ এবং সমতল $\vec{r}.\hat{n} = d$ এর মধ্যবর্তী কোণ ϕ হলে, $\sin\varphi = \left|\dfrac{\vec{b}.\hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|}\right|$ ।

- $\vec{r}.\hat{n} = d$ সমতল থেকে অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ বিশিষ্ট একটি বিন্দুর দূরত্ব হলো $|d - \vec{a}.\hat{n}|$ ।

- (x_1, y_1, z_1) বিন্দু থেকে $Ax+By+Cz+D=0$ সমতলের দূরত্ব হলো $\left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$ ।

অনুশীলনী–11

ক—বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

i) $2x+3y-z=5$ এবং $3x-my+3z=6$ সমতলদুটি পরস্পর লম্ব হলে m এর মান হবে —

a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $-\frac{1}{2}$

ii) যদি তিনটি ভেক্টর $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ একতলীয় হলে, λ এর মান হবে —

a) -3 b) 3 c) -4 d) 4

iii) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{4}$ সরলরেখা $2x+4y-z=3$ সমতলকে ছেদ করলে, ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

a) $(3, 1, -1)$ b) $(3, -1, 1)$ c) $(3, -1, -1)$ d) কোনোটিই নয়।

iv) $x+y+2z=6$ এবং $2x-y+z=9$ is সমতলের মধ্যবর্তী কোণ হবে —

a) $\pi/4$ b) $\pi/6$ c) $\pi/2$ d) $\pi/3$

v) $(1, 0, 2)$ বিন্দু থেকে $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-2}{12}$ সরলরেখা এবং $x-y+z=16$ সমতলের ছেদবিন্দুর দূরত্ব হবে —

a) $3\sqrt{21}$ b) 13 c) $2\sqrt{14}$ d) 8

vi) যদি $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ এবং $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{1}$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতম দূরত্ব $\sqrt{K}$ হয়, তবে K -এর মান হবে —

a) 3 b) 4 c) 2 d) 5

vii) $(1, 1, 2)$ বিন্দু থেকে $2x-2y+4z+5=0$ সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

a) $\left(\dfrac{1}{12},\dfrac{25}{12},\dfrac{2}{12}\right)$ b) $\left(-\dfrac{1}{12},\dfrac{25}{12},\dfrac{-2}{12}\right)$ c) $\left(\dfrac{1}{12},\dfrac{25}{12},\dfrac{-2}{12}\right)$ d) কোনোটিই নয়।

viii) $3x-3y+10z-26=0$ সমতল সাপেক্ষে $\dfrac{x-1}{9}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+3}{-3}$ রেখার প্রতিবিম্ব রেখা হল —

a) $\dfrac{2x-5}{18}=\dfrac{2y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$ b) $\dfrac{2x-5}{18}=\dfrac{2y+1}{-2}=\dfrac{z-2}{3}$

c) $\dfrac{2x+5}{18}=\dfrac{2y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$ d) $\dfrac{2x-5}{18}=\dfrac{2y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{-3}$

ix) যদি $\vec{r}.\left(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)=15$ সমতল এবং $\vec{r}=\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}\right)$ সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ θ হয়, তবে cosecθ এর মান হবে —

a) 5 b) 2 c) 4 d) 3

x) $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ ও $\vec{r}=\vec{a}_1+s\vec{b}$ সমান্তরাল সরলরেখা দুটি সমরেখ হওয়ার শর্ত হল —

a) $\left|(\vec{a}-\vec{a}_1)\cdot\vec{b}\right|=0$ b) $\left|(\vec{a}+\vec{a}_1)\cdot\vec{b}\right|=0$

c) $\left|(\vec{a}+\vec{a}_1)\times\vec{b}\right|=0$ d) $\left|(\vec{a}-\vec{a}_1)\times\vec{b}\right|=0$

2] **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

i) $6x–2 = 3y+1 = 2z–4$ সরলরেখার দিক কোসাইনগুলো লিখ।

ii) (1, 2, 3) বিন্দুগামী যে সরলরেখা $\frac{x-1}{2}=\frac{7-y}{3}=-z$ সরলরেখার সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

iii) (1,1,0) বিন্দু থেকে Z-অক্ষের লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করো।

iv) (2, 3, –1) বিন্দুগামী যে সমতল তিনটি অক্ষকে ধনাত্মক দিকে মূলবিন্দু থেকে সমান দূরত্বে ছেদ করে, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

v) (2, 1, –1) বিন্দুগামী যে সমতল $x–y+z=1$ ও $3x+4y–2z=0$ সমতলের প্রত্যেকটির ওপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

vi) (0,0,0) এবং (3,–1,2) বিন্দুগামী যে সমতল $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+1}{7}$ সরলরেখার সমান্তরাল, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

vii) $\vec{r}.\left(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}\right)=17$ সমতলটি $-2\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$ এবং $3\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে কী অনুপাতে বিভক্ত করবে নির্ণয় করো।

viii) (1,–3,–2) বিন্দুগামী এবং $x+2y+2z=5$ ও $3x+3y+2z=8$ সমতল দুটির ওপর লম্ব সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

ix) $x=y=z$ সরলরেখা বরাবর (1, –5, 9) বিন্দু থেকে $x–y+z=5$ সমতলের দূরত্ব নির্ণয় করো।

x) যদি $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+4}{3}$ সরলরেখাটি $lx+my–z=9$ তলে অবস্থিত হয়, তবে দেখাও যে l^2+m^2 এর মান 2 হবে।

খ —বিভাগ

3) **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) $l_1 : x=5,\ \frac{y}{3-\alpha}=\frac{z}{-2}$ এবং $l_2 : x=\alpha,\ \frac{y}{-1}=\frac{z}{2-\alpha}$ সরলরেখা দুটি সমতলীয় হলে, α-এর মান নির্ণয় করো।

ii) $\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}\right)+t\left(\frac{1}{2}\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$ এবং $\vec{r}=\left(2\hat{i}-6\hat{k}\right)+t'\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো।

iii) দেখাও যে, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{5}$ এবং $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{-2}$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে না।

iv) দেখাও যে $\vec{r}=\hat{i}+t\left(5\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)$ এবং $\vec{r}=\hat{i}+s\left(-10\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}\right)$ সরলরেখা দুটি সমাপতিত।

v) (1, 2, 3), (2, 3, 1) ও (3, 1, 2) বিন্দুগামী সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

vi) দেখাও যে, (1, 2, 1), (-2, 2, -1) ও (1, 1, 0) দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের স্থানাঙ্ক $(-\frac{1}{2},2,0)$।

vii) $x+8y-6z+16=0$ সমতল এবং xy, yz ও zx সমতলগুলির মধ্যবর্তী কোণগুলি নির্ণয় করো।

viii) যে সমতলটি $2x-2y-z-3=0$ সমতলের সমান্তরাল এবং সমতলটি থেকে 7 একক দূরে অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

ix) যদি AB সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ $\frac{x-1}{2}=\frac{2y-1}{12}=\frac{z+5}{3}$ হয়, তবে AB সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার দিক্ কোসাইন নির্ণয় করো।

x) যে সমতলটি (1, –1, 2) বিন্দুগামী এবং সমতলটির অভিলম্বের দিক অনুপাত 2, 3, 2 হলে, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

গ —বিভাগ

4] দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ সরলরেখাটির সাপেক্ষে (1, 6, 3) বিন্দুর প্রতিবিম্ব বিন্দু নির্ণয় করো এবং প্রদত্ত বিন্দু ও তার প্রতিবিম্বের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ এবং উক্ত রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

ii) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ এবং $\frac{x}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+1}{4}$ সরলরেখা দুটির ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

iii) একটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\left(3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ হলে, $\vec{r}.\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)=4$ সমতলে বিন্দুটির প্রতিবিম্ব বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করো।

iv) $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-6}$ সরললেখার সমান্তরাল দিকে পরিমিত (1, –2, 3) বিন্দুটির থেকে $x-y+z=5$ সমতলের দূরত্ব নির্ণয় করো।

v) $\vec{r}.\left(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}\right)=1$ এবং $\vec{r}.\left(\hat{i}-\hat{j}\right)+4=0$ সমতলদ্বয়ের ছেদরেখাগামী যে সমতল

$\vec{r}.\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+8=0$ সমতলের উপর লম্ব, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

vi) $(1, 2, 4)$ বিন্দুগামী যে সরলরেখা $3x + 2y - z - 4 = 0$ ও $x - 2y - 2z - 5 = 0$ তলদ্বয়ের সাথে সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

vii) $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ এবং $\vec{r}=\hat{i}+\hat{j}+\mu(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ সমন্বিত সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করো। মূলবিন্দু থেকে সমতলটির দূরত্ব নির্ণয় করো। তাছাড়া $(2, 2, 2)$ বিন্দু থেকে সমতলটির দূরত্ব নির্ণয় করো।

viii) $2x-y+z+3=0$ সমতলের সাপেক্ষে $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-5}$ সরলরেখার প্রতিবিম্ব নির্ণয় করো।

ix) $(1, -1, 2)$ বিন্দুগামী এবং $2x+3y-2z = 5$ ও $x+2y-3z = 8$ সমতল দুটির ওপর লম্বর সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো। অতপর সমতলটি থেকে $P(-2, 5, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।

x) মনে করো, $x-y+z=3$ সমতলের সাপেক্ষে $(3, 1, 7)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব P । যে সমতল P বিন্দুগামী এবং $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ সরলরেখার ধারক তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) i) c ii) c iii) c iv) d v) b vi) c
vii) b viii) d ix) b x) b

2) i) $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ ii) $\frac{x-11}{2}=\frac{2-y}{3}=\frac{3-z}{1}$

iii) 4.18 একক iv) $x+y+z=4$

v) $-2(x-2)+5(y-1)+7(z+1)=0$ vi) $x-19y-11z=0$

vii) 766; 3:10 viii) $2x-4y+3z-8=0$

ix) $10\sqrt{3}$ একক

খ —বিভাগ

3) i) 4, 1 ii) 0 v) $x+y+z=6$

vii) xy সমতল : $\cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{101}}\right)$; yz সমতল : $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{101}}\right)$; zx সমতল : $\cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{101}}\right)$

viii) $2x-2y-z=24$ এবং $2x-2y-z+18=0$

ix) $2/7, 6/7, 3/7$ x) $\vec{r}.\left(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)=3$

গ —বিভাগ

4) i) (1,0,7) এবং $2\sqrt{13}$ একক ii) 4.817 একক

iii) $\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$ iv) 1

v) $\vec{r}.\left(-5\hat{i}+2\hat{j}+12\hat{k}\right)=47$ vi) $\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-4}{8}$

vii) $-x+y+z=0$, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ একক viii) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-5}$

ix) $5x-4y-z-7=0$ এবং $\sqrt{42}$ একক x) $x-4y+7z=0$

অধ্যায়- 12

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি

(Linear Programming Problems)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু এবং ফলাফল :

- **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি :**

  রৈখিক প্রোগ্রামবিধি এমন একটি শক্তিশালী গাণিতিক পদ্ধতি যা প্রয়োগে সীমিত সম্পদকে (resources) [যেমন — জমি (land), শ্রম (labour), মূলধন (capital), সময় (time), যন্ত্রপাতি (machines), সংগঠন (organiser)] কাজে লাগিয়ে উৎপাদকের মুনাফা সর্বাধিক (maximum profit) অথবা উৎপাদন ব্যয় সর্বনিম্ন (minimum cost) করা যায়।

- **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা :**

  একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হল প্রান্তিকীকরণ সমস্যা (optimisation problem) যেখানে,

  i) একটি রৈখিক অপেক্ষকের (অপেক্ষকটি দুই বা ততোধিক সিদ্ধান্ত চলরাশির রৈখিক অপেক্ষক) চরম এবং অবম মান নির্ণয় করার চেষ্টাকে বলা হয় বিষয়াত্মক অপেক্ষক (objective function)।

  ii) সিদ্ধান্ত চলরাশিগুলি অবশ্যই বাধাগোষ্ঠী (constraints) কে সিদ্ধ করবে। বাধাগোষ্ঠীর প্রতিটি শর্ত একটি রৈখিক সমীকরণ বা একটি রৈখিক অসমীকরণ।

  iii) প্রতিটি সিদ্ধান্ত চল x_j এর চিহ্ন ঋনাত্মক হবে না অর্থাৎ, $x_j \geq 0$।

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা সব একটি প্রান্তিকীকরণ সমস্যা (optimization problem) এবং এই সমস্যায় ঋনাত্মক নয় এমন দুই বা ততোধিক বাস্তব চলের (real variables) একটি রৈখিক অপেক্ষকের (যার নাম বিষয়বস্তু অপেক্ষক) চরম বা অবম (maximum or minimum) মান নির্ণয় করা হয় এক বা একাধিক শর্তসাপেক্ষে। শর্তগুলি যা বাস্তব চলগুলির রৈখিক সমীকরণ বা অসমীকরণকে বাধাগোষ্ঠী (constraints) বলে। চলগুলিকে বলা হয় সিদ্ধান্ত চলরাশি (decision variables)।

এখন, রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সঙ্গে যুক্ত কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ পদের সংজ্ঞা দেওয়া হল।

i) বিষয়াত্মক অপেক্ষক (Objective function) :

রৈখিক অপেক্ষক $Z = ax+by$, যেখানে a, b হল ধ্রুবক, যার চরম বা অবম মান নির্ণয় করতে হবে। তাকে বিষয়াত্মক অপেক্ষক বলা হয়।

ii) সিদ্ধান্ত চলরাশি (Decision variables) :

যদি $Z=ax+by$ একটি রৈখিক বিষয়াত্মক অপেক্ষক হয় তবে চলরাশি x এবং y কে বলা হয় সিদ্ধান্ত চলরাশি।

iii) বাধা গোষ্ঠী (Constraints) :

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় চলরাশির উপর রৈখিক অসমতা অথবা সমতা অথবা সীমাবদ্ধতাকে বাধাগোষ্ঠী বলা হয়। $x\geq0$, $y\geq0$ শর্তগুলোকে বলা হয় অ-ঋনাত্মক সীমাবদ্ধতা।

iv) প্রান্তিকীকরণ সমস্যা (Optimisation Problem) :

একটি সমস্যা যা একটি রৈখিক অপেক্ষকের (যেমন x এবং y দুটি চলরাশি) নির্দিষ্ট বাধাগোষ্ঠীর সাপেক্ষে একটি রৈখিক অসমতার সেটের চরম বা অবম মান নির্ণয় করতে চায়, তাকে প্রান্তিকীকরণ সমস্যা বলে। রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হলো বিশেষ ধরণের প্রান্তিকীকরণ সমস্যা।

- **রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বিভিন্ন প্রকারভেদ**
(Different types of Linear programming problems) :
কিছু গুরুত্বপূর্ণ রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা নিম্নে লিপিবদ্ধ করা হলো —

1) উৎপাদন সমস্যা (Manufacturing Problems) :

এই সমস্যায়, আমরা নির্ণয় করব যে, একটি উৎপাদন সংস্থা দ্বারা বিভিন্ন পণ্যের সংখ্যা যা উৎপাদন করা এবং বিক্রি করা উচিত, যখন প্রতিটি পণ্যের জন্য একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক শ্রমিক সংখ্যা, মেশিনে ব্যবহৃত সময়, শ্রমঘন্টা, উৎপাদিত পণ্যের জন্য গুদামে রাখার জায়গা ইত্যাদির উপর লক্ষ রাখতে হবে যাতে সর্বাধিক লাভ হয়।

2) পণ্য বিষয়ক সমস্যা (Diet Problems) :

এই সমস্যায়, আমরা বিভিন্ন ধরণের উপাদান পুষ্টির পরিমাণ নির্ণয় করব যা পথ্যের মধ্যে থাকা উচিত যাতে প্রয়োজনীয় পক্ষের মূল্য সর্বনিম্ন হয়, যেখানে এদের প্রতিটির মধ্যে সর্বনিম্ন পরিমাণ উপাদান/পুষ্টি থাকা প্রয়োজন।

3) পরিবহন সমস্যা (Transportation Problems) :

এই সমস্যায়, আমরা বিভিন্ন জায়গায় অবস্থিত স্থান/কারখানা থেকে বিভিন্ন বাজারে একটি পণ্য সরবরাহে ন্যূনতম খরচের জন্য পরিবহন প্রণালী নির্ণয় করব।

- একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সকল বাধাগোষ্ঠী সহ অ-ঋনাত্মক বাধাগোষ্ঠী $x \geq 0$, $y \geq 0$ দ্বারা নির্ণীত সাধারণ অঞ্চলকে বলা হয় এই সমস্যার কার্যকর অঞ্চল (অথবা সমাধান অঞ্চল)।
- কার্যকর অঞ্চলের ভিতরে এবং সীমারেখারে ওপর অবস্থিত বিন্দুগুলো, বাধাগোষ্ঠীর কার্যকর সমাধানকে বোঝায়।
- কার্যকর অঞ্চলের বাইরে অবস্থিত যেকোনো বিন্দু হল একটি অকার্যকর সমাধান।
- কার্যকর অঞ্চলের যে কোনো বিন্দু যা একটি বিষয়াত্মক অপেক্ষকের প্রান্তিক মান (চরম অথবা অবম) দেয়, তাকে বলা হয় প্রান্তিক সমাধান।
- যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তবে একটি চরম বা একটি অবম মানের অস্তিত্ব নাও থাকতে পারে। উপরন্তু, যদি ইহার অস্তিত্ব থাকে এটি অবশ্যই R-এর একটি কৌনিক বিন্দুতে উৎপন্ন হয়।
- একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সমাধানের জন্য কৌনিক বিন্দু পদ্ধতি নিম্নলিখিত ধাপগুলো নিয়ে গঠিত :

i) একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কার্যকর অঞ্চল এবং এর কৌনিক বিন্দুগুলো (শীর্ষবিন্দু) নির্ণয় করো।

ii) বিষয়াত্মক অপেক্ষক, $Z=ax+by$ এর প্রতিটি কৌনিক বিন্দুতে মান নির্ণয় করো। ধরো M এবং m যথাক্রমে ঐ বিন্দুগুলোতে বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম মান।

iii) যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তবে বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম এবং অবম মান যথাক্রমে M এবং m।

যদি কার্যকর অঞ্চলটি অসীমাবদ্ধ হয়, তখন

a) বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির চরম মান M হবে যদি, কার্যকর অঞ্চলে $ax+by>M$ দ্বারা নির্ণীত খোলা অর্ধতলে কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায়, বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির কোনো চরম মান থাকে না।

b) বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির অবম মান m হবে যদি, কার্যকর অঞ্চলে $ax+by>M$ দ্বারা নির্ণীত খোলা অর্ধতলে কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে। অন্যথায়, বিষয়াত্মক অপেক্ষকটির কোনো অবম মান থাকে না।

- যদি কার্যকর অঞ্চলের দুটি কৌনিক বিন্দুতে উভয় প্রান্তিক সমাধান একই ধরণের হয়, অর্থাৎ উভয়েই একই চরম অথবা অবম মান উৎপন্ন করে, তখন এই দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের উপর যে কোনো বিন্দুতেও একই ধরণের প্রান্তিক সমাধান থাকবে।

- দ্বিচল বিশিষ্ট একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করা যায়। লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করা যায়। লেখচিত্রের সাহায্যে একটি সমাধাযোগ্য রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার প্রান্তিক বিন্দুগুলি পাওয়া যায়। কোনা কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার নির্দিষ্ট একক প্রান্তিক সমাধান (finite and unique optimal solution) পাওয়া যায়। কিছু সমস্যার একাধিক সমাধান থাকে। আবার কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার অসীমাবদ্ধ সমাধান (unbounded solution) থাকে এবং সমাধানহীন রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাও পরিলক্ষিত হতে পারে।

অনুশীলনী—12

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

i) বিষয়াত্মক অপেক্ষক সিদ্ধান্ত চলরাশিগুলি —

a) অমূলদ সংখ্যা b) ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক

c) সূচক অপেক্ষক d) রৈখিক অপেক্ষক

ii) ধরা যাক একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা $Z = (6x+10y)$ কে চরম করো যখন বাধাগোষ্ঠী হয় —

$3x+5y \leq 10,$

$5x+3y \leq 15$

এবং $x, y \geq 0$

সমস্যাটির প্রান্তিক সমাধানের সংখ্যা

a) এক b) দুই c) সসীম সংখ্যক (finite) d) অসীম সংখ্যক (infinite)

iii) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কোনো সমাধান ঋণাত্মক না হলে সমাধানটিকে বলা হয় —

a) প্রান্তিক সমাধান (optimal solution)

b) কার্যকর সমাধান (feasible solution)

c) মৌলিক সমাধান (basic solution)

d) এদের কোনোটিই নয়।

iv) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সিদ্ধান্ত চলরাশিগুলি

a) যে কোনো বাস্তব সংখ্যা
b) শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যার মান
c) যে কোনো ঋণাত্মক নয় এমন বাস্তব সংখ্যা
d) শুধুমাত্র ঋনাত্মক নয় এমন পূর্ণসংখ্যার মান।

v) একটি অকার্যকর (infeasible) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার —

a) একটি একক সমাধান থাকে
b) একাধিক সমাধান থাকে
c) অনাবদ্ধ সমাধান থাকে
d) কোনো সমাধান থাকে না।

vi) যদি কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান অসীম হয় তবে সমস্যাটির সমাধানকে বলা হবে —

a) অসীমাবদ্ধ সমাধান
b) অসীম সমাধান
c) সীমাবদ্ধ সমাধান
d) কোনো সমাধান থাকে না

vii) যে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার অসীমাবদ্ধ সমাধান থাকে তার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের মান —

a) শূন্য হয়
b) একটি বৃহৎ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়
c) একটি বৃহৎ ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়
d) অসীম হয়।

viii) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার নীচের সম্পর্কগুলির মধ্যে যেটি সঠিক তা হল —

a) অবম $Z = -$ চরম $(-Z)$
b) অবম $Z = -$ চরম Z
c) অবম $Z =$ চরম $(-Z)$
d) এদের কোনোটিই নয়।

ix) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দুটি অজ্ঞাত চল বিশিষ্ট $2x+3y=12$ সমীকরণের সমাধান হবে —

a) x, y এর একটি করে নির্দিষ্ট মান
b) x-এর জন্য চরম মান এবং y-এর অবম মান
c) অসংখ্য
d) এদের কোনোটিই নয়।

x) ধরা যাক রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির —

$Z = 3x + 4y$ কে অবম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $-2x+3y \leq 9$

$x-5y \geq -20,$

এবং $x, y \geq 0$

রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির —

a) একটি একক প্রান্তিক সমাধান (a unique optimal solution) আছে।
b) বিকল্প প্রান্তিক সমাধান (alternative optional solutions) আছে।
c) একটি অসীমাবদ্ধ সমাধান (unbounded solutions) আছে।
d) এদের কোনোটিই নয়।

xi) ধরা যাক কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি হল,

$Z=3x-y$ কে অবম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $2x+3y \geq 1,$

এবং $x, y \geq 0$

সমস্যাটির প্রান্তিক সমাধান হল —

a) $x=0,\ y=\frac{1}{2}$ b) $x=0,\ y=\frac{1}{3}$

c) $x=\frac{1}{3},\ y=0$ d) $x=\frac{1}{2},\ y=0$

xii) ধরা যাক, কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি হল

$Z=x+y$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $x+2y \le 4,$

$x+2y \ge 6$

এবং $x,\ y \ge 0$

প্রদত্ত সমস্যাটির —

a) একক কার্যকর সমাধান (unique feasible solution)

b) অসীম সংখ্যক কার্যকর সমাধান (infinite number of feasible solution)

c) কোনো কার্যকর সমাধান নেই।

d) এদের কোনোটিই নয়।

xiii) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কার্যকর অঞ্চল সীমাবদ্ধ না হলে (unbounded) সমস্যাটির —

a) সসীম কার্যকর সমাধান (bounded feasible solution) থাকে

b) অসীমাবদ্ধ সমাধান (unbounded solution) থাকে

c) সীমাবদ্ধ কার্যকর সমাধান এবং অসীমাবদ্ধ কার্যকর সমাধান (bounded as well as unbounded feasible solution) থাকে।

d) এদের কোনোটিই নয়।

xiv) নীচের প্রদত্ত বিবৃতিগুলির কোন্‌টি মিথ্যা ?

a) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় ব্যবহৃত অপেক্ষক, সমীকরণ ও অসমীকরণগুলি কেবলমাত্র রৈখিক অপেক্ষক, সমীকরণ ও অসমীকরণ হয়।

b) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম বা অবম মান পাওয়া যেতে পারে একাধিক প্রান্তিক বিন্দুতে।

c) একাধিক প্রান্তিক সমাধানবিশিষ্ট কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার ক্ষেত্রে প্রতিটি সমাধান বিষয়াত্মক অপেক্ষকের চরম বা অবম মান।

d) একটি অকার্যকর (infeasible) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কোনো কার্যকর সমাধান পাওয়া যায় না।

2] অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

i) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি কি? উদাহরণ দিয়ে বুঝিয়ে দাও।

ii) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার সংজ্ঞা লিখ।

iii) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার দুটি সুবিধা লিখ।

iv) কার্যকর সমাধান এবং কার্যকর অঞ্চলের সংজ্ঞা লিখ।

v) বিষয়াত্মক অপেক্ষকের সংজ্ঞা লিখ।

vi) সিদ্ধান্ত চলরাশির সংজ্ঞা লিখ।

vii) বাধাগোষ্ঠী কাকে বলে?

viii) প্রান্তিকীকরণ সমস্যা বলতে কি বুঝ?

ix) প্রান্তিক সমাধান-এর সংজ্ঞা লিখ।

x) প্রান্তিক বিন্দু বলতে কি বুঝ?

খ—বিভাগ

3] **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) ধরা যাক রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি হল

$Z = 2x+3y$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয়

$3x+y \leq 3,$

এবং $x \geq 0, \; y \geq 0$

লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির প্রান্তিক বিন্দুসমূহ (0, 0), (1, 0) এবং (0, 3)।

ii) ওপরের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির প্রান্তিক সমাধান (optimal solution) নির্ণয় করো এবং Z-এর চরম মানও নির্ণয় করো।

iii) নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির বাধাগোষ্ঠীর অসমীকরণ দুটির লেখচিত্র অঙ্কন করো

$Z = 3x_1+2x_2$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $2x_1+x_2 \leq 2$

$3x_1+4x_2 \geq 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

iv) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের অসমীকরণগুলির কার্যকর অঞ্চল (feasible region) (যদি তার অস্তিত্ব থাকে) নির্ণয় করো

$x \leq 2, y \leq 3, x + y \geq 1$ এবং $x, y \geq 0$

v) রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির প্রান্তিক বিন্দুগুলো (corner points) নির্ণয় করো

$Z = x+2y$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $3x+5y \leq 10$

$5x+3y \leq 15$

$x, y \geq 0$

vi) নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির প্রান্তিক বিন্দুগুলো (corner points) নির্ণয় করো।

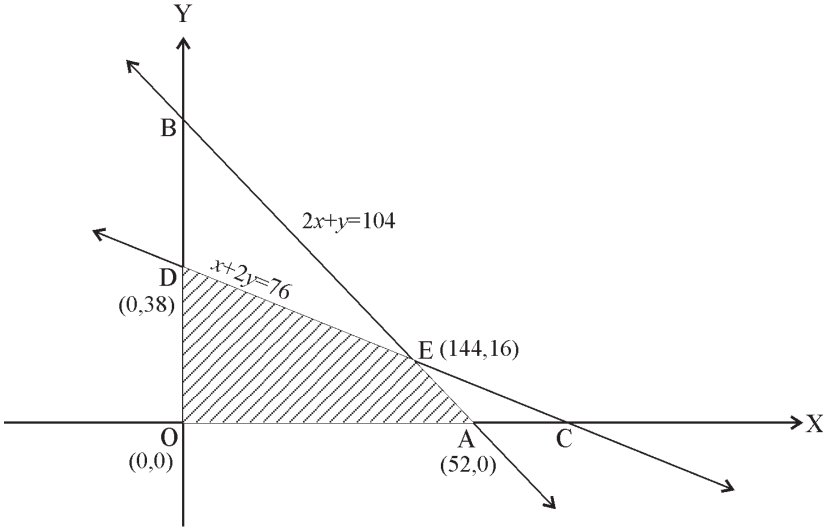
$Z=2x+5y$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $0 \leq x \leq 4$

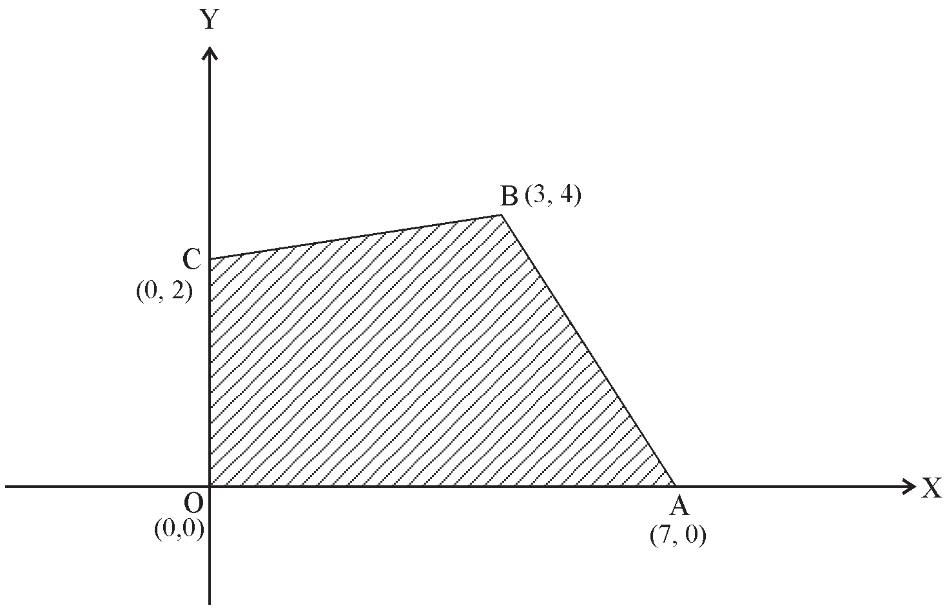
$0 \leq y \leq 3$

$x+y \leq 6$

vii) কোনো রৈখিক বিধি সমস্যায় নিম্নের প্রদত্ত লেখচিত্রে নির্দেশিত কার্যকর অঞ্চল (ছায়াবৃত অঞ্চল)-এর জন্য $Z=3x+4y$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো।



viii) কোনো রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সম্পর্কিত সমস্যায় নিম্নের প্রদত্ত লেখচিত্রে নির্দেশিত কার্যকর অঞ্চল (ছায়াবৃত অঞ্চল)-এর জন্য $Z=5x+7y$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো।



গ —বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 বা 6 নম্বর]

1) i) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির কার্যকর অঞ্চলের প্রান্তিক বিন্দুসমূহ (corner points) নির্ণয় করো।

$Z = 2x_1+x_2$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $x_1+3x_2 \le 15$

$3x_1- 4x_2 \le 12$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$

ii) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির সমাধান করো :

$Z = 5x+7y$ কে অবম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয়,

$3x+2y \ge 12$

$2x+3y \ge 13$

এবং $x \ge 0, y \ge 0$

2) একজন আসবাব প্রস্তুতকারক চেয়ার 3 টেবিল প্রস্তুত করে। তার কাজে 400 বোর্ডফুট মেহগিনি কাঠ মজুত আছে এবং 450 শ্রমঘন্টার কাজ করার মতো শ্রমিক আছে। একটি চেয়ার তৈরি করতে 5 বোর্ডফুট কাঠ ও 40 শ্রম ঘন্টা লাগে। একটি টেবিল তৈরি করতে 20 বোর্ডফুট কাঠ ও 15 শ্রম-ঘন্টা লাগে। প্রতি চেয়ার বিক্রি করে সে লাভ করে 45 টাকা এবং টেবিল বিক্রি করে সে লাভ করে 80 টাকা। কত সংখ্যক চেয়ার ও কত সংখ্যক টেবিল তৈরি করলে তার লাভ সর্বোচ্চ হয় তা নির্ণয়ের সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হিসেবে প্রকাশ করো।

$\left[1 \text{ বোর্ডফুট } = \frac{1}{2} \text{ ঘণফুট}\right]$

3) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি সমাধান করো।

$Z = x + y$ কে চরম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয়,

$5x+10y \le 50$

$x+y \ge 1$

$y \le 4$

এবং $x \ge 0, y \ge 0$

দেখাও যে উপরোক্ত সমস্যাটির একটি একক (unique) প্রান্তিক সমাধান (optimal solution) আছে।

4) প্রতি গ্রাম F_1 খাদ্যে 5 একক ভিটামিন A ও 6 একক ভিটামিন B আছে এবং প্রতি গ্রাম F_1 খাদ্যের মূল্য 20 পয়সা। প্রতি গ্রাম F_2 খাদ্যে 8 একক ভিটামিন A ও 10 একক ভিটামিন B আছে এবং প্রতি গ্রাম F_2 খাদ্যের মূল্য 30 পয়সা। প্রত্যেক লোকের দৈনিক 80 একক ভিটামিন A ও 100 একক ভিটামিন B দরকার। ন্যূনতম কত খরচ করলে একজন লোকের পক্ষে প্রয়োজনীয় দু'ধরণের ভিটামিন গ্রহণ করা সম্ভব তা রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যারূপে প্রকাশ করো।

5) ধরা যাক রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটি হল

$$\text{চরম করো, } Z = 2x+3y$$

$$\text{যখন বাধাগোষ্ঠী হয়, } \quad 3x - y \le -3$$

$$x - 2y \ge 2$$

$$\text{এবং } x \ge 0, y \ge 0$$

লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে সমস্যাটির কোনো কার্যকর সমাধন (feasible solution) নেই।

6) A ও B দুই জায়গায় দুটি কারখানা (factory) আছে। কারখানা দুটি থেকে C, D ও E তিনটি ডিপোতে একটি দ্রব্য (commodity) জোগান দেওয়া হয়। সপ্তাহে 5, 5 ও 4 একক দ্রব্য প্রয়োজন। A ও B কারখানাতে উৎপাদন হয় যথাক্রমে 8 ও 6 একক দ্রব্য। কারখানাগুলি থেকে বিভিন্ন ডিপোতে এক একক দ্রব্য পাঠাবার খরচ নীচের তালিকায় দেওয়া হল —

কারখানা	ডিপো		
	C	D	E
A	R 160	R 100	R 150
B	R 100	R 120	R 100

কীভাবে কারখানা দুটি থেকে দ্রব্যটি তিনটি ডিপোতে পাঠালে ডিপোগুলির চাহিদা মিটবে এবং পাঠাবার খরচ ন্যূনতম হবে, এই সমস্যাকে রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যায় প্রকাশ করো।

7) লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যার কার্যকর অঞ্চল (feasible region) অসীমাবদ্ধ (unbounded) কিন্তু সমস্যাটির একটি একক প্রান্তিক সমাধান $x=3$ এবং $y=18$ আছে

$$Z = 4x + 2y \text{ কে অবম করো}$$

$$\text{যখন বাধাগোষ্ঠী হয়, } 3x + y \ge 27$$

$$-x - y \le -21$$

$$x + 2y \ge 30$$

$$\text{এবং } x \ge 0, \ y \ge 0$$

8) লেখচিত্রের সাহায্যে দেখাও যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটির একটি অসীমাবদ্ধ (unbounded) সমাধান আছে

$$Z = 3x + 4y \text{ কে চরম করো}$$

$$\text{যখন বাধাগোষ্ঠী হয়, } -2x + 3y \le 9$$

$$x - 5y \ge -20$$

$$\text{এবং } x \ge 0, \ y \ge 0$$

9) কোনো কোম্পানী A ও B এই দু'ধরণের খেলনা উৎপাদন করে। প্রত্যেকটি A খেলনা উৎপাদনে কাটিং (cutting) করতে 5 মিনিটি ও বিভিন্ন অংশজুড়তে 1010 মিনিটে এবং প্রত্যেকটি B খেলনা উৎপাদনে কাটিং করতে 8 মিনিট ও বিভিন্ন অংশ জুড়তে 8 মিনিট সময় লাগে। প্রত্যহ কাটিংয়ের জন্য 3 ঘন্টা এবং বিভিন্ন অংশ জুড়তে 4 ঘন্টা সময়

পাওয়া যায়। প্রতিটি A ও B খেলনা বিক্রি করে কোম্পানী যথাক্রমে 50 টাকা ও 60 টাকা লাভ করে। কোম্পানী তার লাভের পরিমাণ সর্বাধিক করতে চাইলে কোন্ ধরণের কটি খেলনা উৎপাদন করবে? সর্বাধিক লাভের মান কত?

10) একজন গৃহবধু দু'ধরণের খাদ্য X ও Y এমনভাবে মেশাতে যায় যাতে মিশ্রিত খাদ্যে কম করে 10 একক ভিটামিন A, 12 একক ভিটামিন B এবং 8 একক ভিটামিন C থাকে। দু'ধরণের খাদ্যের প্রতি কিলোগ্রাম ভিটামিন তিনটির পরিমাণ নীচের ছকে দেওয়া আছে —

	ভিটামিন A	ভিটামিন B	ভিটামিন C
খাদ্য X	1	2	3
খাদ্য Y	2	2	1

যদি প্রতি কিলোগ্রাম X খাদ্য ও Y খাদ্যের দাম যথাক্রমে 6 টাকা ও 10 টাকা হয়, তবে মিশ্রিত খাদ্যের ক্ষুদ্রতম ব্যয় লৈখিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করো।

11) একটি পরিবহন সংস্থায় পাঁচ জায়গা A, B, C, D ও E অফিস আছে। A ও B-তে অবস্থিত অফিসে যথাক্রমে 8 ও 10টি লরি আছে। C, D, ও E তে অবস্থিত অফিসগুলিতে যথাক্রমে 6, 8 ও 4টি লরির প্রয়োজন। একটি অফিস থেকে অন্য অফিসের দূরত্ব (কিলোমিটারে) নীচের তালিকায় দেওয়া হল —

	C	D	E
A	2	5	3
B	4	2	7

কীভাবে A ও B অফিসের লরিগুলি C, D, ও E তে পাঠালে লরিগুলি নূন্যতম দূরত্ব অতিক্রম করবে, এই সমস্যাকে রৈখিক প্রেগ্রামবিধি সমস্যায় প্রকাশ করো। লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যাটি সমাধান করো।

12) একটি ফার্ম A ও B এই দুধরণের সামগ্রী উৎপাদন করে। প্রতিটি A সামগ্রি 5 টাকা লাভে এবং প্রতিটি B সামগ্রী 3 টাকা লাভে বিক্রয় করে। প্রতিটি A সামগ্রী উৎপাদনে M_1 যন্ত্র 1 মিনিট ও M_2 যন্ত্র 2 মিনিট এবং প্রতিটি B সামগ্রী উৎপাদনে দুটি যন্ত্রই 1 মিনিট করে ব্যবহার করতে হয়। M_1 ও M_2 যন্ত্র দুটি দৈনিক সর্বাধিক যথাক্রমে 5 ঘন্টা ও 6 ঘন্টা ব্যবহার করা যায়। প্রত্যেক প্রকার সামগ্রী দৈনিক কটি করে উৎপাদন করলে লাভের পরিমাণ সর্বাধিক হবে? লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করো।

13) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে সমাধান করো —

চরম করো, $Z = x + y$

যখন বাধাগোষ্ঠী হয়, $x + 4y \le 8$,

$$2x + 3y \le 12$$
$$3x + y \le 9,$$
এবং $x \ge 0,\ y \ge 0$

14) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রেগ্রামবিধি সমস্যাটি সমাধান করো এবং দেখাও যে সমস্যাটির অসংখ্য (infinite) প্রান্তিক সমাধান (optimal solution) আছে।

$Z = x + y$ কে অবম করো

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $5x + 9y \le 45$

$$x + y \ge 2$$
$$x \le 4$$
এবং $x \ge 0,\ y \ge 0$

বিষয়াত্মক অপেক্ষক Z-র অবম মান (যদি থাকে) নির্ণয় করো।

15) লেখচিত্রের সাহায্যে নীচের রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যাটিকে সমাধান করো —

অবম করো, $Z = 3x + y$

যখন বাধাগোষ্ঠী $2x + y \ge 14$

$$x - y \ge 4$$
এবং $x \ge 0,\ y \ge 0$

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী :

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্নের উত্তর :

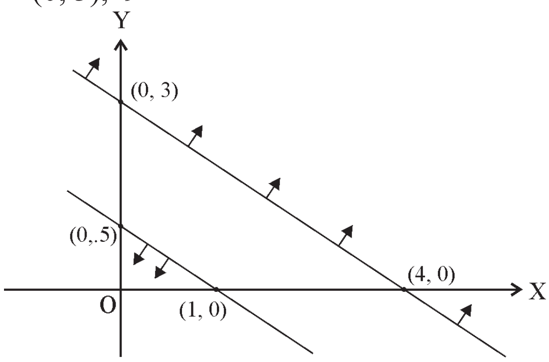
i) d	ii) a	iii) b	iv) c	v) d	vi) a
vii) d	viii) a	ix) c	x) c	xi) b	xii) c
xiii) c	xiv) c				

খ —বিভাগ

3) সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্নের উত্তর :

ii) (0, 3), 9

iii)



v) (0, 0) (3, 0) (0, 2) $\left(\frac{45}{16}, \frac{5}{16}\right)$

vi) (0, 0) (4, 0) (4, 2) (3, 3) (0, 3)

vii) (44, 16), 196

viii) (3, 4) বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান 43

গ —বিভাগ

4) দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নের উত্তর :

1) i) (0, 5) $\left(\frac{96}{13}, \frac{33}{13}\right)$, (4, 0) এবং (0, 0)

ii) (2, 3) এবং $Z_{\text{চরম}} = 31$

2) চরম করো $Z = 45x + 80y$

যখন বাধাগোষ্ঠী হয়, $5x + 20y \leq 400$

$$10x + 15y \leq 450$$

এবং $x \geq 0,\ y \geq 0$

যেখানে x এবং y যথাক্রমে চেয়ার এবং টেবিলের সংখ্যা

4) $Z = 20x + 30y$ কে অবম করো,

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $5x + 8y \geq 80$

$6x + 10y \geq 100$

এবং $x \geq 0,\ y \geq 0$

যেখানে x গ্রাম F_1 খাদ্য ও y গ্রাম F_2 খাদ্য কেনা হয়েছিল

6) $Z = 10(x - 7y + 190)$ কে অবম করো,

যখন বাধাগোষ্ঠী হয় $x + y \leq 8$

$x \leq 5, y \leq 5,$

$x + y \geq 4$

এবং $x \geq 0,\ y \geq 0$

যেখানে x একক ও y একক দ্রব্য A কারখানা থেকে যথাক্রমে C ও D ডিপোতে পাঠানো হয়।

9) A ও B ধরণের খেলনা যথাক্রমে 12টি ও 15টি এবং সর্বাধিক লাভ = 1500 টাকা

10) 52 টাকা

11) সমস্যাটির প্রান্তিক সমাধান $x = 4$, $y = 0$ এবং $Z_{\text{অবম}} = 44$

12) A সামগ্রী 60টি ও B সামগ্রী 240টি এবং সর্বাধিক মান = 2400 টাকা।

13) সর্বোচ্চ মান $3\frac{10}{11}$.

14) $Z_{\text{অবম}} = 2$

15) $Z_{\text{অবম}} = 20$ এবং $x = 6$, $y = 2$.

অধ্যায়- 13

সম্ভাবনা

(Probability)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **শর্তাধীন সম্ভাবনা :**

যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনাদেশের সঙ্গে যুক্ত দুটি ঘটনা E ও F হয় তবে F ঘটনা ইতিপূর্বেই ঘটেছে এই শর্তে E ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে, যেখানে $P(F) \neq 0$, বলা হয় শর্তাধীন সম্ভাবনা এবং এটিকে $P\left(E/F\right)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ $P\left(E/F\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{n(E \cap F)}{n(F)}$ ।

অনুরূপভাবে, $P\left(F/E\right)$ যখন $P(E) \neq 0$, হল E ঘটনা ইতিপূর্বেই ঘটেছে এই শর্তে F ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা।

আসলে, প্রতীক $P\left(E/F\right)$ ও $P\left(F/E\right)$ এর অর্থ হচ্ছে এগুলি ঘটনা E ও F -এর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে এবং এছাড়া এগুলি সমসম্ভব পরীক্ষার প্রকৃতির উপরও নির্ভরশীল।

- **ধর্মাবলী :**

i) ধরা যাক E ও F হল কোনো নমুনাদেশ S-এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা। তাহলে $0 \leq P\left(E/F\right) \leq 1$ ।

ii) যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনাদেশ S-এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা E ও F হয়, তবে

$$P\left(S/F\right) = P\left(F/F\right) = 1$$

$$P\left(E'/F\right) = 1 - P\left(E/F\right)$$

iii) যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনাদেশ S-এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা E ও F এবং G হল আরেকটি ঘটনা যেখানে $P(G) \neq 0$, তবে

$$P\left((E \cap F)/G\right) = P\left(E/G\right) + P\left(F/G\right) - P\left((E \cap F)/G\right)$$

নির্দিষ্টভাবে, যদি E ও F ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তবে

$$P\left((E \cap F)/G\right) = P\left(E/G\right) + P\left(F/G\right)$$

- **সম্ভাবনা তত্ত্বের গুণের উপপাদ্য :**

ধরা যাক, কোনো সম্ভাবনাভিত্তিক পরীক্ষার নমুনা দেশের সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা হল E ও F ।

তাহলে, $P(E \cap F) = P(E).P\left(F/_{E}\right),\ P(E) \neq 0$

বা $P(E \cap F) = P(F).P\left(E/_{F}\right),\ P(F) \neq 0$

যদি কোনো নমুনাদেশের সাথে যুক্ত তিনটি ঘটনা E, F ও G হয়, তবে

$$P(E \cap F \cap G) = P(E).P\left(F/_{E}\right).P\left(G/_{E \cap F}\right)$$

দ্রষ্টব্য : $P\left(F/_{E}\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$ এবং $P\left(E/_{F}\right) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)}$

- **গুণের উপপাদ্যের বর্ধিতরূপ :**

যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে n-সংখ্যক ঘটনা $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_n$ যুক্ত হয়, তবে

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap E_n) = P(E_1).P\left(E_2/_{E_1}\right)P\left(E_3/_{E_1 \cap E_2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots P\left(E_n/_{E_1 \cap E_2 \quad \ldots\ldots\ldots \cap E_{n-1}}\right),$$

যেখানে $P\left(E_n/_{E_1 \cap E_2 \quad \ldots\ldots \cap E_{n-1}}\right)$ হল E_n ঘটনা ঘটার শর্তাধীন সম্ভাবনা, যদি প্রদত্ত থাকে যে $E_1, E_2, \ldots\ldots,$ E_{n-1} ঘটনাগুলি ইতিমধ্যেই সংঘটিত হয়েছে।

- **স্বাধীন বা অনপেক্ষ ঘটনা :**

ধরা যাক, কোনো নমুনাদেশ S-এর সাথে E ও F ঘটনা দুটি যুক্ত। যদি দুটি ঘটনা এরূপ হয় যে, এদের যে-কোনো একটি ঘটনার সংঘটনের উপর অপর ঘটনার সংঘটন নির্ভর করে না, তবে আমরা বলতে পারি যে ঘটনাদ্বয় স্বাধীন। অর্থাৎ, E ও F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হবে, যদি

$P\left(F/_{E}\right) = P(F)$, এই শর্তে যে $P(E) \neq 0$

$P\left(E/_{F}\right) = P(E)$, এই শর্তে যে $P(F) \neq 0$

উদাহরণস্বরূপ : একটি ব্যাগে 6টি সাদা ও 3টি লাল বল আছে। একের পর এক দুটি বল ব্যাগ থেকে তোলা হল। আমরা নিম্নের ঘটনাগুলি বিবেচনা করি —

E = প্রথমে তোলা বলটি সাদা রঙের

F = দ্বিতীয় তোলা বলটি লাল রঙের

যদি প্রথমে তোলা বলটি ব্যাগে পুনঃস্থাপন করা না হয়, তবে E ও F ঘটনাদ্বয় নির্ভরশীল।
অপরপক্ষে, যদি প্রথমে তোলা বলটি ব্যাগে পুনঃস্থাপন করা হয়, তাহলে E ও F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন।

- কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত E ও F ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয়, তবে $P(E \cap F) = P(E).P(F)$।

E, F ও G ঘটনা তিনটি পরস্পর স্বাধীন হবে যদি নিম্নের শর্তগুলি সিদ্ধ হয় —

$$P(E\cap F) = P(E)\,P(F)$$

$$P(E\cap G) = P(E)\,P(G)$$

$$P(F\cap G) = P(F)\,P(G)$$

এবং $P(E\cap F\cap G) = P(E)P(F)P(G)$.

- কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যদি n-সংখ্যক ঘটনা $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_n$ যুক্ত থাকে, তবে এই ঘটনাগুলোকে পরস্পর স্বাধীন বলা হবে যদি তাদের যে-কোনো সসীম সংখ্যক ঘটনার একযোগে ঘটার সম্ভাবনা তাদের পৃথক সম্ভাবনার গুণফলের সমান হয়।

অর্থাৎ,

$$P(E_i\cap E_j) = P(E_i)P(E_j),\ i \neq j;\ i, j=1, 2, \ldots\ldots\ldots n\text{-এর জন্য}$$

$$P(E_i\cap E_j\cap E_k) = P(E_i)P(E_j)P(E_k),\ \text{for } i \neq j \neq k;\ i, j, k = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n\text{-এর জন্য}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$P(E_1\cap E_2\cap \ldots\ldots\cap E_n) = P(E_1)P(E_2)\ldots\ldots\ldots P(E_n)$$

কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত n-সংখ্যক ঘটনা $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_n$ যদি স্বাধীন হয়, তবে

$$P(E_1\cap E_2\cap \ldots\ldots\ldots\cap E_n) = P(E_1)P(E_2)\ldots\ldots P(E_n)$$

- **জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন ঘটনা :**

  কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যদি n-সংখ্যক ঘটনা $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots, E_n$ যুক্ত থাকে, তবে এই ঘটনাগুলোকে জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন বলা হবে যদি $P(E_i\cap E_j) = P(E_i)P(E_j),\ i \neq j\ ;\ i, j=1,2,\ldots\ldots, n$-এর জন্য।

- **মন্তব্য :**

  i) যদি $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ ঘটনাগুলো জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন হয়, তবে তাদের জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন হওয়ার মোট শর্ত হল ${}^nc_2$, যেখানে তাদের পরস্পর স্বাধীন হওয়ার জন্য অবশ্যই ${}^nc_2+{}^nc_3+\ldots\ldots+{}^nc_n=2^n-n-1$ টি শর্তের প্রয়োজন।

  ii) পরস্পর স্বাধীন ঘটনাগুলো সবসময় জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন কিন্তু এর বিপরীত বিবৃতিটি সত্য নয়।

  iii) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত শুধুমাত্র দুটি ঘটনার ক্ষেত্রে, পরস্পর স্বাধীন ঘটনা ও জোড়ায় জোড়ায় স্বাধীন ঘটনার মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই।

- কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা A ও B যদি স্বাধীন হয়, তবে

  i) $\overline{A}$ ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন

ii) A ও $\bar{B}$ ঘটনাদ্বয় স্বাধীন

iii) $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ঘটনাদ্বয় স্বাধীন

- **মন্তব্য :**

i) স্বাধীন ঘটনার মানে হচ্ছে পরস্পর স্বাধীন ঘটনা।

ii) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত A ও B ঘটনাদ্বয় যদি স্বাধীন হয়, তাহলে অন্তত একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= P(A \cup B)$

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$$

iii) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত n-সংখ্যক ঘটনা $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$ -এর জন্য অন্তত একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

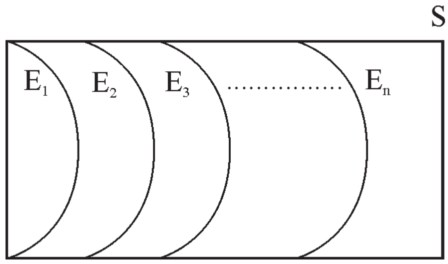
$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup A_n)$

$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots\ldots\ldots\ldots P(\bar{A}_n)$

- **স্বাধীন পরীক্ষা :**

দুটি সমসম্ভব পরীক্ষা স্বাধীন হবে যদি প্রতি জোড়া ঘটনা A ও B -এর জন্য, যেখানে A ঘটনাটি প্রথম পরীক্ষার সাথে যুক্ত এবং B ঘটনাটি দ্বিতীয় পরীক্ষার সাথে যুক্ত, আমরা পাই –
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

- **নমুনাদেশের বিভাজন :**



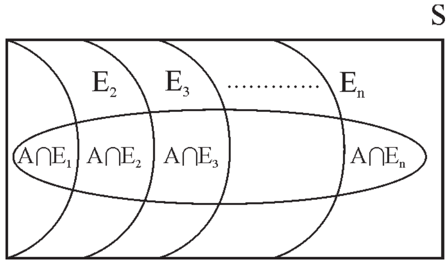
$E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, E_n$ ঘটনাসমূহের একটি সেটকে নমুনাদেশ S -এর বিভাজন বলা হবে যদি

i) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

ii) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup E_n = S$, এবং

iii) প্রতিটি $E_i \neq \phi$, অর্থাৎ, $P(E_i) > 0$, সব $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ এর জন্য।

- **পূর্ণ সম্ভাবনার তত্ত্ব :**



ধরা যাক, $\{E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, E_n\}$ হল নমুনাদেশ S-এর একটি বিভাজন। A হল নমুনাদেশ S-এর সাথে যুক্ত একটি ঘটনা, তাহলে

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)P\left(A/E_j\right)$$

- **বেইজের উপপাদ্য :**

কোনো নমুনদেশের সাথে যুক্ত $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ ঘটনাগুলো পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও পরিপূর্ণ এবং A হল অ-শূন্য সম্ভাবনা বিশিষ্ট যে-কোনো একটি ঘটনা, তাহলে

$$P\left(E_i/A\right)=\frac{P(E_i)P\left(A/E_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(E_i)P\left(A/E_i\right)}$$

- **সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক এবং এর সম্ভাবনা নিবেশন :**

কোনো সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক হল একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক যার সংজ্ঞার অঞ্চল হল সমসম্ভব পরীক্ষার নমুনাদেশ। যদি একটি সম্ভাবনাশ্রীয় চলক X যেটি $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ মানগুলি গ্রহণ করতে পারে এবং এদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, p_n$, তাহলে

X :	x_1	x_2	....	x_n
P(X) :	p_1	p_2	....	p_n

এইভাবে তালিকা প্রকাশ করার রীতিকে বলে X-এর সম্ভাবনা নিবেশন তালিকা, যেখানে $p_i>0$, $i=1,2,\ldots\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ ।

উপরের সম্ভাবনা নিবেশন থেকে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
P(X\le x_i) &= P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots\ldots+P(X=x_i)\\
&= p_1+p_2+\ldots\ldots+p_i\\
P(X<x_i) &= P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots\ldots+P(X=x_{i-1})\\
&= p_1+p_2+\ldots\ldots+p_{i-1}\\
P(X\ge x_i) &= P(X=x_i)+P(X=x_{i+1})+\ldots\ldots+P(X=x_n)\\
&= p_i+p_{i+1}+\ldots\ldots+p_n\\
P(X>x_i) &= P(X=x_{i+1})+P(X=x_{i+2})+\ldots\ldots+P(X=x_n)\\
&= p_{i+1}+p_{i+2}+\ldots\ldots+p_n
\end{aligned}$$

এছাড়া,

$P(X\ge x_i) = 1-P(X<x_i)$ এবং $P(X>x_i)=1-P(X\le x_i)$,

$P(X\le x_i) = 1-P(X>x_i)$ এবং $P(X<x_i)=1-P(X\ge x_i)$

$$P(x_i\le X\le x_j) = P(X=x_i)+P(X=x_{i+1})+\ldots\ldots+P(X=x_j)$$

$$P(x_i<X<x_j) = P(X=x_{i+1})+P(X=x_{i+2})+\ldots\ldots+P(X=x_{j-1})$$

- **বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকের গড়মান :**

যদি X একটি বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক হয় যেটি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ মানগুলি গ্রহণ করতে পারে এবং এদের সম্ভাবনা যথাক্রমে, $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$ হয়, তবে X-এর গড়মান $\overline{X}$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত হয় :

$$\overline{X} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_nx_n$$

বা, $$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

- **মন্তব্য :**

i) সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X -এর গড়মানকে গাণিতিক প্রত্যাশা বা প্রত্যাশিত মানও বলা হয় এবং এটিকে E(X) দ্বারা সূচিত করা হয়।

ii) পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে গড়মান $\overline{X}$ নিম্নে প্রদত্ত :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\left(f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_nx_n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X} = \frac{f_1}{N}x_1 + \frac{f_2}{N}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{f_n}{N}x_n$$

$$\Rightarrow \quad \overline{X} = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_nx_n, \text{ যেখানে } p_i = \frac{f_i}{N}$$

- **দ্রষ্টব্য :** সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকের গড়মান বলতে বোঝায় এর সম্ভাবনা নিবেশনের গড়মান।

- **সম্ভাবনাশ্রয়ী বিচ্ছিন্ন চলকের ভেদমান :**

যদি X একটি বিচ্ছিন্ন সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক হয়, যেটি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ মানসমূহ গ্রহণ করতে পারে এবং এদের সম্ভাবনা যথাক্রমে $p_1, p_2, \ldots, p_n$ হয়, তবে X এর ভেদমান নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞাত হয় —

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_ix_i\right)^2$$

বা, $$Var(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

- **দ্বিপদ নিবেশন :**

একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X যেটি 0, 1, 2,........, n এই মানগুলি গ্রহণ করতে পারে, এটি দ্বিপদ নিবেশন মেনে চলে যদি এর সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক নিম্নরূপ হয় :

$P(X = r) = {}^nc_r p^r q^{n-r}$, $r = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$ যেখানে $p, q \geq 0$, যখন $p+q = 1$

নিবেশনে উপস্থিত দুটি ধ্রুবক n ও p নিবেশনের প্রাচল হিসাবে পরিচিত।

$X \sim B(n, p)$ প্রতীকটি সাধারণত সম্ভাবনশ্রীয় চালক X যেটি n ও p প্রাচল বিশিষ্ট দ্বিপদ নিবেশন মেনে চলে, এটি বোঝাতে ব্যবহৃত হয়।

এক্ষেত্রে সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X-এর সম্ভাবনা নিবেশন নিম্নরূপ হয় :

X	:	0	1	2	r	n
P(X)	:	${}^{n}c_{0}p^{0}q^{n-0}$	${}^{n}c_{1}p^{1}q^{n-1}$	${}^{n}c_{2}p^{2}q^{n-2}$	${}^{n}c_{r}p^{r}q^{n-r}$	${}^{n}c_{n}p^{n}q^{n-n}$

- যদি n সংখ্যক প্রচেষ্টা একটি পরীক্ষা গঠন করে এবং পরীক্ষাটি N-বার পুনরাবৃত্ত হয়, তাহলে 0, 1, 2,..........., n সংখ্যক সাফল্যের পরিসংখ্যা নিম্নরূপ হয় :

  NP (x = 0), NP (x = 1), NP (x = 2),......., NP (x = n)

- n ও p প্রাচল বিশিষ্ট কোনো দ্বিপদ নিবেশনের গড়মান ও ভেদমান হল যথাক্রমে np ও npq।

- যদি (n+1)p কোনও অখণ্ড সংখ্যা না হয় এবং P(X = 0), P(X = 1), ..., P(X = n)

  a) তাহলে, P(X = r) হল বৃহত্তম মান, যখন r = m = [(n+1)p]

  b) যদি (n+1)p কোনও অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে P(X = r) হবে সর্বোচ্চ মান যখন r = m – 1 বা r = m যেখানে m = (n+1)p হল একটি অখণ্ড সংখ্যা।

অনুশীলনী—13
ক—বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) **বহু বিকল্পভিত্তিক :**

i) 52টি তাসের প্যাকেট থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি তাস তোলা হল। যদি জানা থাকে যে তোলা তাসটি রাজা, তবে তাসটি ইস্কাবন হওয়ার সম্ভাবনা হবে —

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$

ii) একটি লুডোর ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হয়েছে। ধরা যাক A হল ছক্কা নিক্ষেপের ফলে 3 উঠার ঘটনা এবং B হল ছক্কা নিক্ষেপের ফলে 5 থেকে ছোট সংখ্যা উঠার ঘটনা। তাহলে $P(A\cup B)$ হল

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) 0 d) 1

iii) 1 থেকে 60 পর্যন্ত সংখ্যাগুলি থেকে যথেচ্ছভাবে একটি সংখ্যা নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত সংখ্যাটি 2 অথবা 5 -এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{10}$ d) $\frac{9}{10}$

iv) {1, 2, 3, 4, 5} সেট থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে দুটি সংখ্যা a ও b ($a \neq b$) পছন্দ করা হল। $\frac{a}{b}$ একটি অখণ্ড সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$

v) একটি ব্যাগে 3টি সাদা, 4টি কালো এবং 2টি লাল বল আছে। প্রতিস্থাপন না করে ব্যাগটি থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে দুটি বল তোলা হলে, বল দুটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{18}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

vi) তিনটি লুডোর ছক্কা একসাথে নিক্ষেপ করা হল। ছক্কা তিনটির উপরিতলে যে সংখ্যা ওঠে তাদের সমষ্টি 5 হওয়ার সম্ভাবনা হল

a) $\frac{5}{216}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{36}$ d) $\frac{1}{49}$

vii) তিনটি বাক্সে যথাক্রমে 3টি সাদা ও 1টি কালো, 2টি সাদা ও 2টি কালো এবং 1টি সাদা ও 3টি কালো বল আছে। যদি প্রতিটি বাক্স থেকে যথেচ্ছভাবে 1টি বল তোলা হয় তবে 2টি সাদা ও 1টি কালো বল উঠার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{13}{32}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{32}$ d) $\frac{3}{16}$

viii) ভালোভাবে মিশ্রিত 52টি তাসের প্যাকেট থেকে A ও B উদ্দেশ্যহীনভাবে একের পর এক দুটি করে তাস টানল। চারটি তাসের সবগুলি একই রকম হওয়ার সম্ভাবনা হল—

a) $\frac{44}{85\times49}$ b) $\frac{11}{85\times49}$ c) $\frac{13\times24}{17\times25\times49}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

ix) A ও B দুটি ঘটনা এরূপ যে P(A)=0.25 এবং P(B)=0.50। ঘটনাদ্বয় একসাথে ঘটার সম্ভাবনা হল 0.14। A ও B ঘটনাদ্বয় একসাথে ঘটবে না এর সম্ভাবনা হল —

a) 0.39 b) 0.25 c) 0.11 d) এদের কোনোটিই নয়।

x) কোনো পরীক্ষায় একজন শিক্ষার্থী প্রথম বিভাগে, দ্বিতীয় বিভাগে ও তৃতীয় বিভাগে উত্তীর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}$ এবং $\frac{1}{4}$। শিক্ষার্থীটি পরীক্ষাতে ব্যর্থ হওয়ার সম্ভাবনা হল

a) $\frac{197}{200}$ b) $\frac{27}{100}$ c) $\frac{83}{100}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xi) একটি অধিবর্ষে 53টি শুক্রবার অথবা 53টি শনিবার হওয়ার সম্ভাবনা হবে —

a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{7}$

xii) A, 75% ক্ষেত্রে সত্য কথা বলে এবং B, 80% ক্ষেত্রে সত্য কথা বলে। একটি বিবৃতিকে কেন্দ্র করে A ও B একে অপরকে বিরোধীতা করার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{13}{20}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

xiii) প্রথম 20টি পূর্ণসংখ্যা থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 3টি সংখ্যা পছন্দ করা হল। তাদের গুণফল যুগ্ম হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{2}{19}$ b) $\frac{3}{29}$ c) $\frac{17}{19}$ d) $\frac{4}{19}$

xiv) একটি মুদ্রা তিনবার টস্ করা হল। যদি A ও B ঘটনাদ্বয় নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয় —

A = দুটি হেড উঠল

B = শেষেরটিতে হেড উঠল।

তাহলে A ও B ঘটনাদ্বয় —

a) স্বাধীন b) নির্ভরশীল c) উভয়ই d) এদের কোনোটিই নয়।

xv) একটি ব্যাগে 5টি বাদামী এবং 4টি সাদা মোজা আছে। একজন লোক ব্যাগ থেকে দুটি মোজা উদ্দেশ্যহীনভাবে টেনে বের করল। মোজা দুটি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{18}{108}$ c) $\frac{30}{108}$ d) $\frac{48}{108}$

xvi) যদি নমুনাদেশ S, $P(A)=\frac{1}{3}P(B)$ এবং $S=A\cup B$, যেখানে A ও B হল পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা, তবে $P(A)=$

a) $1/4$ b) $1/2$ c) $3/4$ d) $3/8$

xvii) A ও B হল দুটি ঘটনা, তাহলে $P(\bar{A}\cap B)=$

a) $P(\bar{A})P(\bar{B})$ b) $1-P(A)-P(B)$ c) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ d) $P(B)-P(A\cap B)$

xviii) যদি $P(A\cup B)=0.8$ এবং $P(A\cap B)=0.3$ হয়, তবে $P(\bar{A})+P(\bar{B})=$

a) 0.3 b) 0.5 c) 0.7 d) 0.9

xix) 22 তম শতাব্দীর যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত কোনো এক বছরে 53টি রবিবার থাকার সম্ভাবনা হবে —

a) $3/28$ b) $2/28$ c) $7/28$ d) $5/28$

xx) 1 থেকে 100 পর্যন্ত সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত 100টি কার্ড থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি কার্ড তোলা হল। তোলা কার্ডের ওপর লেখা সংখ্যাটি 6 অথবা 8 দ্বারা বিভাজ্য কিন্তু 24 দ্বারা বিভাজ্য নয়, এর সম্ভাবনা হল —

a) $6/25$ b) $1/4$ c) $2/5$ d) $4/5$

xxi) একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X-এর সম্ভাবনা নিবেশন তালিকাটি নিম্নরূপ :

X :	1	2	3	4	5	6	7	8
P(X) :	0.15	0.23	0.12	0.10	0.20	0.08	0.07	0.05

E = X হল মৌলিক সংখ্যা, F = X হল 4 থেকে ছোট সংখ্যা।

এই ঘটনাদ্বয়ের জন্য $P(E\cup F)=$

a) 0.50 b) 0.77 c) 0.35 d) 0.87

xxii) একটি সম্ভাবনশ্রয়ী চলক 0, 1, 2, 3 এই মানগুলি গ্রহণ করতে পারে এবং এদের গড়মান হল 1.3। যদি $P(X=3) = 2P(X=1)$ এবং $P(X=2) = 0.3$ হয়, তবে $P(X=0)$ হল —

a) 0.1 b) 0.2 c) 0.3 d) 0.4

xxiii) একটি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলকের সম্ভাবনা নিবেশন তালিকাটি নিম্নরূপ :

x :	0	1	2	3	4	5	6	7
p(x) :	0	2p	2p	3p	p^2	$2p^2$	$7p^2$	2p

এই তালিকার সাহায্যে p-এর মান হবে —

a) $1/10$ b) -1 c) $-1/10$ d) এদের কোনোটিই নয়

xxiv) যদি সম্ভাবনাশ্রয়ী চলক X-এর সম্ভাবনা নিম্নরূপ হয় :

X :	0	1	2	3
P(X=x) :	K	3K	3K	K

তবে এর থেকে K-এর মান ও ভেদমান হবে —

a) $1/8, 22/27$ b) $1/8, 23/27$ c) $1/8, 24/27$ d) $1/8, 3/4$

xxv) চলক X যদি n = 8 এবং $p = \frac{1}{2}$ প্রাচলবিশিষ্ট একটি দ্বিপদ নিবেশন মেনে চলে, তবে $P(|X-4| \le 2) =$

a) $\frac{118}{128}$ b) $\frac{119}{128}$ c) $\frac{117}{128}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xxvi) কোনো দ্বিপদ নিবেশনে যদি n = 4, $P(X = 0) = \frac{16}{81}$ হয়, তবে $P(X = 4) =$

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{81}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{8}$

xxvii) ধরা যাক একটি পক্ষপাতশূন্য মুদ্রা n বার টস্ করা হলে, X হল হেডের সংখ্যা। যদি $P(X=4)$, $P(X=5)$ এবং $P(X=6)$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে n-এর মানগুলি হবে —

a) 7, 14 b) 10, 14 c) 12, 7 d) 14, 12

xxviii) কোনো একটি দ্বিপদ নিবেশনে, সাফল্য পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$ এবং সমক পার্থক্য যদি 3 হয়, তবে, এর গড়মান হবে —

a) 6 b) 8 c) 12 d) 10

xxix) একটি ঝোঁকশূন্য মুদ্রাকে কমপক্ষে যতবার নিক্ষেপ করলে কমপক্ষে একটি হেড ওঠার সম্ভাবনা অন্তত 0.8 হবে তা হল —

a) 7 b) 6 c) 5 d) 3

xxx) চলক X যদি n =100 এবং $p=\frac{1}{3}$ প্রাচল বিশিষ্ট একটি দ্বিপদ নিবেশন মেনে চলে, তবে P(x = r) বৃহত্তম হবে যখন r =

a) 32 b) 34 c) 33 d) 31

2] অতি সংক্ষিপ্তধর্মী :

i) একটি লুডোর ছক্কা তিনবার নিক্ষেপ করা হল। যদি প্রথম নিক্ষেপে 4 উঠে, তবে তিনবার নিক্ষেপে প্রাপ্ত ফলাফলের যোগফল 15 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

ii) একটি মুদ্রা তিনবার টস্ করা হল। যদি প্রথম দুটি টসে হেড উঠে, তবে তৃতীয় টসে হেড উঠার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iii) একটি মুদ্রা টস করা হল তারপর একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। যদি হেড উঠেছে এটি জানা থাকে, তবে '6' পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iv) A ও B ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ এবং $P\left(A/B\right)=\frac{2}{5}$। $P(A\cup B)$ নির্ণয় করো

v) একটি ছক্কার 1, 2, 3 সংখ্যাযুক্ত তলগুলোকে লাল এবং 4, 5, 6 সংখ্যাযুক্ত তলগুলোকে সবুজ রঙ দিয়ে চিহ্নিত করে ছোঁড়া হল। ধরা যাক, E হল যুগ্ম সংখ্যা উঠার ঘটনা এবং O হল অযুগ্ম সংখ্যা উঠার ঘটনা। E ও O ঘটনাদ্বয় কি স্বাধীন?

vi) 1, 2, 3, 5 — এই অঙ্কগুলোর সাহায্যে পুনরাবৃত্তি না করে, চার অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা গঠন করা হল। সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

vii) 6 জন বালক ও 6 জন বালিকা যথেচ্ছভাবে এক সারিতে বসে আছে। তাহলে সব বালিকারা একসাথে বসার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

viii) A ও B স্বাধীন ঘটনাদ্বয় এরূপ যে, P(A)=0.3 এবং $P\left(A\cup \bar{B}\right)=0.8$। তাহলে P(B) নির্ণয় করো।

ix) A ও B দুটি ঘটনার মধ্যে শুধুমাত্র একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে সম্ভাবনা তত্ত্বের সাহায্যে প্রকাশ করো।

x) 100টি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি সংখ্যা পছন্দ করলে সংখ্যাটি ঘনসংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

xi) একটি প্রতিযোগিতায় A, B ও C অংশগ্রহণ করেছে। A-এর জেতার সম্ভাবনা B-এর দ্বিগুণ, B-এর জেতার সম্ভাবনা C-এর দ্বিগুণ। তাহলে A পরাজিত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

xii) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত A, B, C ঘটনা তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনা হলে P(A)+P(B)+P(C)-এর মান লিখ।

xiii) A ও B ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $P\left(\bar{A}\right)=0.3$, P(B)=0.4 এবং $P\left(A\cap\bar{B}\right)=0.5$। $P\left(B/A\cap\bar{B}\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

xiv) K -এর কোন্ মানের জন্য নিম্নের নিবেশনটি একটি সম্ভাবনা নিবেশন?

$X=x_i$:	0	1	2	3
$P(X=x_i)$:	$2K^4$	$3K^2-5K^3$	$2K-3K^2$	$3K-1$

xv) যখন একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল তখন ছক্কার তলের উপর ওঠা সংখ্যাকে যদি X দিয়ে সূচিত করা হয় তাহলে $E(X)$ নির্ণয় করো।

xvi) একটি দ্বিপদ নিবেশনের জন্য যদি $P(X=1)=P(X=2)=\alpha$ হয় তাহলে $P(X=4)$-কে α-এর সাহায্যে প্রকাশ করো।

xvii) কোনো দ্বিপদ নিবেশনে $n=4$ এবং $P(X=0)=\dfrac{16}{81}$ হলে q এর মান নির্ণয় করো।

xviii) একটি দ্বিপদ চলক X-এর গড়মান ও ভেদমান যথাক্রমে 2 এবং 1 হলে, $P(X>1)$-এর মান নির্ণয় করো।

xix) কোনো দ্বিপদ নিবেশনের গড়মান 20 এবং সমক পার্থক্য 4 হলে p-এর মান নির্ণয় করো।

xx) যে দ্বিপদ নিবেশনের গড়মান 20 এবং ভেদমান 16, সেটি নির্ণয় করো।

খ—বিভাগ

3] সংক্ষিপ্ত ধর্মী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) যে-কোনো নির্দিষ্ট দিনে বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা হল 50%। তাহলে, শুধুমাত্র সপ্তাহের প্রথম চার দিনই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

ii) একটি ফ্রিজ বাক্সে 2টি দুধের চকলেট এবং 4টি কালো চকলেট আছে। দুটি চকলেট ইচ্ছামত তোলা হল। দুধের চকলেটের সংখ্যার সম্ভাবনা নিবেশনটি নির্ণয় করো। সর্বাধিক সম্ভবত ফলাফল কোন্‌টি?

iii) E ও F ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $P(E) = 0.8$, $P(F) = 0.7$, $P(E \cap F) = 0.6$। $P(\bar{E} | \bar{F})$ -এর মান নির্ণয় করো।

iv) একটি কালো ও একটি লাল রঙের ছক্কা একসাথে চালা হল। যোগফল 8 হওয়ার শর্তাধীন সম্ভাবন নির্ণয় করো, যদি এটি দেওয়া থাকে যে লাল রঙের ছক্কায় প্রাপ্ত ফলাফলটি 4 থেকে ছোটো সংখ্যা।

v) যদি A ও B ঘটনাদ্বয় স্বাধীন হয় তাহলে প্রমাণ করো যে A ও B-এর মধ্যে কমপক্ষে একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা হবে $1-P(A').P(B')$।

vi) যদি A ও B ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $P(A) \neq 0$ এবং $P\left(B/A\right)=1$, তবে দেখাও যে $A \subset B$।

vii) দুটি ঘটনা A ও B প্রদত্ত যেখানে $P(A)=0.3$ এবং $P(B)=0.6$। $P(A' \cap B')$-এর মান নির্ণয় করো।

viii) যদি $P(A$ নয়$) = 0.7$, $P(B) = 0.7$ এবং $P\left(B/A\right)=0.5$ হয়, তবে $P\left(A/B\right)$ -এর মান নির্ণয় করো।

ix) ধরা যাক্, 100 জন পুরুষের মধ্যে 5 জন এবং 1000 জন মহিলার মধ্যে 25 জন ভালো বক্তা। যদি পুরুষ ও মহিলা সমান সংখ্যক থাকে তাহলে একজন ভালো বক্তা পছন্দ করার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

x) A ও B ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $A \subset B$ এবং $P(B) \neq 0$। তাহলে প্রমাণ করো যে $P\left(A/B\right) \geq P(A)$।

xi) প্রথম 50 টি স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 3টি ভিন্ন সংখ্যা নির্বাচন করা হল। তিনটি সংখ্যার

সবগুলো 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

xii) 80% ক্ষেত্রে A সত্য কথা বলে এবং 90% ক্ষেত্রে B সত্য কথা বলে। কত শতাংশ ক্ষেত্রে তারা একই ঘটনার পরিপ্রেক্ষিতে একে অপরের সাথে একমত হতে পারে?

xiii) যদি $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ এবং $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ হয়, তবে $P\left(B/A\right)+P\left(A/B\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

xiv) ধরা যাক্, $P(A)=\frac{7}{13}$, $P(B)=\frac{9}{13}$ এবং $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$। তাহলে $P\left(A'/B\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

xv) পরস্পর বিচ্ছিন্ন দুটি ঘটনা A ও B প্রদত্ত। $P\left(A/B\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

xvi) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{3}{10}$ এবং $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$ হলে $P\left(A'/B'\right)\,P\left(B'/A'\right)$-এর মান নির্ণয় করো।

xvii) একটি ব্যাগে 2টি লাল এবং 5টি কালো রঙের বল আছে। ব্যাগ থেকে তিনটি বল উদ্দেশ্যহীনভাবে তোলা হল। যদি সম্ভাবনশ্রয়ী চলক X লাল বল তোলার সংখ্যা প্রকাশ করে, তবে X-এর মান নির্ণয় করো।

গ —বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) একটি ব্যাগে 5টি সাদা এবং 4টি লাল রঙের বল আছে। ব্যাগ থেকে প্রতিস্থাপন করে একের পর এক তিনটি বল তোলা হল। লাল রঙের বল তোলার সংখ্যার সম্ভাবনা নিবেশনটি নির্ণয় করো।

ii) A, B ও C এর লক্ষ্যে আঘাত করার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{1}{3},\frac{2}{7}$ এবং $\frac{3}{8}$। যদি তিনজনই একসাথে লক্ষ্যে আঘাত করার চেষ্টা করে, তবে তাদের মধ্যে ঠিক একজন লক্ষ্যে আঘাত করবে এর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iii) দুজন খেলোয়াড় A ও B দুটি ঝোঁকশূন্য ছক্কাকে একজনের পর অপরজন এইভাবে নিক্ষেপ করে, যে আগে 9 ফেলবে সে জিতে যাবে। যদি A খেলা শুরু করে, তবে B-এর জেতার সম্ভাবনা কত?

iv) একজন স্বামী ও একজন স্ত্রী একই পোস্টে সাক্ষাৎকারের জন্য উপস্থিত হয়েছে। স্বামীর নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{7}$ এবং স্ত্রীর নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$। তাহলে

(a) তাদের মধ্যে শুধুমাত্র একজন নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(b) কমপক্ষে একজন নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত?

v) ব্যাগ I-এ 4টি সাদা এবং 2টি কালো, ব্যাগ II-এ 4টি কালো এবং 3টি সাদা রঙের বল আছে। একটি ছক্কা একবার চালা হল। যদি ছক্কাতে প্রাপ্ত ফলাফল 3-এর গুণিতক হয় তাহলে ব্যাগ II নির্বাচন করা হবে অন্যথায় ব্যাগ I নির্বাচন করা হবে এবং নির্বাচিত ব্যাগ থেকে একটি বল তোলা হবে। তোলা বলটি সাদা রঙের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ময় করো।

vi) ধরা যাক্ কোনো পরীক্ষায় 6 বার প্রচেষ্টার জন্য দ্বিপদ চলক x নিম্নের সম্পর্কটি সিদ্ধ করে :

$9P(x=4)=P(x=2)$। তাহলে $P(x=3)$-এর মান নির্ণয় করো।

vii) 20 জন ধনী ব্যক্তির একটি দল আছে, তাদের মধ্যে 5 জন গরীব মানুষদের সাহায্য করে। এদের মধ্যে তিনজন ব্যক্তি উদ্দেশ্যহীনভাবে নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত ব্যক্তিদের মধ্যে যারা গরীবের সাহায্য করে তাদের সম্ভাবনা নিবেশনটি লিখ। এছাড়া, নিবেশনটির গড়মান নির্ণয় করো।

viii) একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হল। যদি এটিতে হেড ওঠে তবে এটিকে পুনরায় নিক্ষেপ করো। কিন্তু যদি এটিতে টেল ওঠে তবে একটি লুডোর ছক্কা নিক্ষেপ করো। যদি সমস্ত সম্ভাব্য ফলাফলগুলো সমসম্ভব ঘটনা হয়, তাহলে লুডোর ছক্কাটিতে 4 অপেক্ষা বৃহত্তম সংখ্যা ওঠে, এই ঘটনাটির শর্তাধীন সম্ভাবনা নির্ণয় করো যদি মুদ্রার প্রথম নিক্ষেপে টেল ওঠে এই ঘটনাটি জানা থাকে।

ix) তিনটি মুদ্রা আছে যার মধ্যে একটি পক্ষপাতশূন্য এবং দুটি পক্ষপাতদুষ্ট। পক্ষপাতশূন্য মুদ্রায় হেড ওঠার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এবং দুটি পক্ষপাতদুষ্ট মুদ্রায় হেড ওঠার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{2}{3}$। মুদ্রা তিনটির মধ্যে যে কোনো একটি মুদ্রা দুবার টস করা হল। যদি উভয় ক্ষেত্রে হেড ওঠে, তাহলে পক্ষপাতদুষ্ট মুদ্রায় হেড ওঠার সম্ভাবনা $\frac{2}{3}$ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

x) যদি A ও B-এর এক বছরের মধ্যে মারা যাওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে x ও y হয়, তাহলে বছরের শেষের দিকে তাদের মধ্যে ঠিক একজন জীবিত থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

xi) যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত একজন ভোটদাতার A-পার্টিকে ভোট দেওয়ার সম্ভাবনা 0.2 এবং B-পার্টিকে ভোট দেওয়ার সম্ভাবনা 0.5, অন্যথায় সে নির্দল পার্টিকে ভোট দেবে। তাহলে 6 জন ভোটদাতার মধ্যে 3 জন অথবা এর অধিক B-পার্টিকে ভোট দেওয়ার সম্ভাবনা কত?

xii) 75% ক্ষেত্রে A সত্য কথা বলে এবং 80% ক্ষেত্রে B সত্য কথা বলে। 1000টি ঘটনার মধ্যে কয়টিতে তাদের মতামত পরস্পর বিরোধী হবে এমন আশা করা যায়?

xiii) A এবং B ক্রমান্বয়ে একজনের পর অপরজন একজোড়া ছক্কা নিক্ষেপ করে। A জিতবে যদি সে B-এর আগে 6 পায় এবং B জিতবে যদি সে A-এর 6 পাওয়ার আগে 7 পায়। যদি A খেলাটি শুরু করে, তবে দেখাও যে A-এর অনুকূলে সুযোগ 30:31।

xiv) TATANAGAR অথবা CALCUTTA শব্দের অক্ষরগুলি থেকে একটি অক্ষর নিতে হবে। খামে শুধুমাত্র পরপর দুটি অক্ষর TA দৃশ্যমান আছে। অপরটি (a) Calcutta, (b) Tatanagar শব্দ থেকে আসবে এর সম্ভাবনা কত?

xv) একটি ক্লাসে, 5% বালক এবং 10% বালিকার বুদ্ধ্যঙ্ক (IQ)150-এর অধিক। এই ক্লাসে, শিক্ষার্থীদের 60% হল বালক। উদ্দেশ্যহীনভাবে একজন শিক্ষার্থী পছন্দ করে যদি দেখা যায় যে শিক্ষার্থীর বুদ্ধ্যঙ্ক 150-এর অধিক, তাহলে শিক্ষার্থীটি একজন বালক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক—বিভাগ

1) i) c ii) d iii) b iv) b v) c vi) c
vii) a viii) a ix) a x) b xi) b xii) a
xiii) c xiv) b xv) d xvi) a xvii) d xviii) d
xix) d xx) a xxi) b xxii) d xxiii) a xxiv) d
xxv) b xxvi) b xxvii) a xxviii) c xxix) d xxx) c

2) i) $\frac{1}{18}$ ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\frac{1}{6}$ iv) $\frac{11}{26}$ v) না vi) $\frac{1}{4}$
vii) $\frac{1}{132}$ viii) $\frac{2}{7}$ ix) $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ x) $\frac{1}{25}$ xi) $\frac{3}{7}$
xii) 1 xiii) $\frac{1}{4}$ xiv) $K=\frac{1}{2}$ xv) 3.5 xvi) $\frac{\alpha}{3}$ xvii) $\frac{2}{3}$
xviii) $\frac{15}{16}$ xix) $\frac{1}{5}$ xx) $P(x=r)={}^{100}c_r\left(\frac{1}{5}\right)^r\left(\frac{4}{5}\right)^{100-r}$; $r=0,1,2,....,100$

খ—বিভাগ

3) i) $\frac{1}{128}$ ii) সর্বাধিক সম্ভবত ফলাফল হল প্রতিটি থেকে একটি করে চকলেট পাওয়া।
iii) $\frac{1}{3}$ iv) $\frac{1}{9}$ vii) 0.28 viii) $\frac{3}{14}$ ix) $\frac{3}{80}$ xi) $\frac{1}{350}$
xii) 74% xiii) $\frac{7}{12}$ xiv) $\frac{5}{9}$ xv) 0 xvi) $\frac{25}{42}$
xvii) 0, 1, 2 -এই মানগুলি x গ্রহণ করে।

গ—বিভাগ

i)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{729}$	$\frac{300}{729}$	$\frac{240}{729}$	$\frac{64}{729}$

ii) $\frac{75}{168}$ iii) $\frac{8}{17}$ iv) a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{11}{35}$ v) $\frac{37}{63}$ vi) $540\left(\frac{1}{4}\right)^6$

vii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{91}{228}$	$\frac{105}{228}$	$\frac{30}{228}$	$\frac{2}{228}$

, গড়মান $=\frac{3}{4}$

viii) $\frac{1}{3}$ ix) $\frac{16}{29}$ x) x+y–2xy xi) $\frac{21}{32}$ xii) 350

xiv) a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{7}{11}$ xv) $\frac{3}{7}$