গণিত ওয়ার্ক বুক

একাদশ শ্রেণি

আজাদি কা অমৃত মহোৎসব

এক ত্রিপুরা, শ্রেষ্ঠ ত্রিপুরা

প্রস্তুতকরণ

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা সরকার

একাদশ শ্রেণির গণিত ওয়ার্ক বুক

প্রথম প্রকাশ- সেপ্টেম্বর, ২০২১

প্রচ্ছদ : অশোক দেব, শিক্ষক

অক্ষর বিন্যাস : এস সি ই আর টি, ত্রিপুরা
সহযোগিতায় জেলা শিক্ষা আধিকারিকের কার্যালয়,
পশ্চিম ত্রিপুরা জেলা।

মুদ্রক : সত্যযুগ এমপ্লয়িজ কো-অপারেটিভ
ইন্ডাস্ট্রিয়াল সোসাইটি লিমিটেড
১৩ প্রফুল্ল সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২

প্রকাশক

অধিকর্তা

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, ত্রিপুরা।

রতন লাল নাথ
মন্ত্রী
শিক্ষা দপ্তর
ত্রিপুরা সরকার

বার্তা

শিক্ষার প্রকৃত বিকাশের জন্য, শিক্ষাকে যুগোপযোগী করে তোলার জন্য প্রয়োজন শিক্ষাসংক্রান্ত নিরন্তর গবেষণা। প্রয়োজন শিক্ষা সংশ্লিষ্ট সকলকে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রশিক্ষিত করা এবং প্রয়োজনীয় শিখন সামগ্রী, পাঠ্যক্রম ও পাঠ্যপুস্তকের বিকাশ সাধন করা। এস সি ই আর টি ত্রিপুরা রাজ্যের শিক্ষার বিকাশে এসব কাজ সুনামের সঙ্গে করে আসছে। শিক্ষার্থীর মানসিক, বৌদ্ধিক ও সামাজিক বিকাশের জন্য এস সি ই আর টি পাঠ্যক্রমকে আরো বিজ্ঞানসম্মত, নান্দনিক এবং কার্যকর করবার কাজ করে চলেছে। করা হচ্ছে সুনির্দিষ্ট পরিকল্পনার অধীনে।

এই পরিকল্পনার আওতায় পাঠ্যক্রম ও পাঠ্যপুস্তকের পাশাপাশি শিশুদের শিখন সক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য তৈরি করা হয়েছে ওয়ার্ক বুক বা অনুশীলন পুস্তক। প্রসঙ্গত উল্লেখ্য, ছাত্র-ছাত্রীদের সমস্যার সমাধানকে সহজতর করার লক্ষ্যে এবং তাদের শিখনকে আরো সহজ ও সাবলীল করার জন্য রাজ্য সরকার একটি উদ্যোগ গ্রহণ করেছে, যার নাম 'প্রয়াস'। এই প্রকল্পের অধীনে এস সি ই আর টি এবং জেলা শিক্ষা আধিকারিকরা বিশিষ্ট শিক্ষকদের সহায়তা গ্রহণের মাধ্যমে প্রথম থেকে দ্বাদশ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য ওয়ার্ক বুকগুলো সুচারুভাবে তৈরি করেছেন। ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত বিজ্ঞান, গণিত, ইংরেজি, বাংলা ও সমাজবিদ্যার ওয়ার্ক বুক তৈরি হয়েছে। নবম দশম শ্রেণির জন্য হয়েছে গণিত, বিজ্ঞান, সমাজবিদ্যা, ইংরেজি ও বাংলা। একাদশ দ্বাদশ শ্রেণির ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য ইংরেজি, বাংলা, হিসাবশাস্ত্র, পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যা, অর্থনীতি এবং গণিত ইত্যাদি বিষয়ের জন্য তৈরি হয়েছে ওয়ার্ক বুক। এইসব ওয়ার্ক বুকের সাহায্যে ছাত্র-ছাত্রীরা জ্ঞানমূলক বিভিন্ন কার্য সম্পাদন করতে পারবে এবং তাদের চিন্তা প্রক্রিয়ার যে স্বাভাবিক ছন্দ রয়েছে, তাকে ব্যবহার করে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবে। বাংলা ও ইংরেজি উভয় ভাষায় লিখিত এইসব অনুশীলন পুস্তক ছাত্র-ছাত্রীদের মধ্যে বিনামূল্যে বিতরণ করা হবে।

এই উদ্যোগে সকল শিক্ষার্থী অতিশয় উপকৃত হবে। আমার বিশ্বাস, আমাদের সকলের সক্রিয় এবং নিরলস অংশগ্রহণের মাধ্যমে ত্রিপুরার শিক্ষাজগতে একটি নতুন দিগন্তের উন্মেষ ঘটবে। ব্যক্তিগত ভাবে আমি চাই যথাযথ জ্ঞানের সঙ্গে সঙ্গে শিক্ষার্থীর সামগ্রিক বিকাশ ঘটুক এবং তার আলো রাজ্যের প্রতিটি কোণে ছড়িয়ে পড়ুক।

(রতন লাল নাথ)

পুস্তকটি তৈরি করেছেন

শ্রী সুমন দাস, শিক্ষক

শ্রী প্রশান্ত সরকার, শিক্ষক

শ্রী সৌমেন দেবনাথ, শিক্ষক

শ্রীমতী মধুমিতা চৌধুরী, শিক্ষিকা

পরিমার্জনায়

শ্রী মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক

শ্রী জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক

শ্রী অমিতাভ মজুমদার, শিক্ষক

সূচিপত্র

সূচিপত্র

অধ্যায় — 1

সেট্‌সমূহ (Sets)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **সেট্ :**

  সুসংজ্ঞাত ভিন্ন ভিন্ন বস্তুসমূহের সংকলন বা সমষ্টিকে সেট্ বলা হয়। প্রতিটি বস্তুকে ওই সেটের সদস্য বা পদ বলা হয়। সাধারণত, ইংরেজি বর্ণমালার বড় হরফের অক্ষর দ্বারা একটি সেট্ এবং ছোট হরফের অক্ষর দ্বারা কোনো সেটের পদসমূহ সূচিত হয়।

- **কোনো সেটের উপস্থাপন :**

  কোনো সেট্‌কে তিনটি পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা যায়।

  1. রস্‌টার অথবা ছকবন্দীকরণ পদ্ধতি :

  এই পদ্ধতি অনুযায়ী সেটের পদসমূহ একটি দ্বিতীয় বন্ধনীর মধ্যে একটির পর একটি পদ যে কোনো ক্রমে কমা দিয়ে উপস্থাপিত করা হয়।

  উদাহরণস্বরূপ : (i) $\{1, 3, 5, ...\}$

  (ii) $\{a, e, i, o, u\}$

2. সেট্ গঠন বা ধর্মভিত্তিক পদ্ধতি :

এই পদ্ধতি অনুযায়ী কোনো সেটের পদসমূহ যে নির্দিষ্ট ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য মেনে চলে তা উল্লেখ করে সেট্‌টি উপস্থাপিত করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : (i) $\{x$ হল $x^2+5x+6 = 0$ সমীকরণের সমাধান$\}$

(ii) $\{x : x \in R,\ x^2 = 9\}$

3. বিবৃতি বা বর্ণনামূলক পদ্ধতি :

এই পদ্ধতিতে কোনো সেটের পদসমূহকে বিবৃতি বা বর্ণনা করে লিখে উপস্থাপন করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : (i) প্রথম পাঁচটি মৌলিক সংখ্যার সেট্।

(ii) পৃথিবীতে সমস্ত ব্যক্তির সেট্।

দ্রষ্টব্য :

(i) সেটের অন্তর্গত কোনো পদকে পুনরাবৃত্তি করা হয় না।

(ii) কোনো সেটের অন্তর্গত পদসমূহের ক্রমের পরিবর্তনে সেট্ অপরিবর্তিত থাকে।

- **সেট্-এর প্রকারভেদ :**

  মূলত কোনো সেট্‌কে দুটি উপায়ে শ্রেণিবদ্ধ করা হয় যথা, (1) সসীম সেট্ (2) অসীম সেট্।

(1) সসীম সেট্ :

কোনো সেট্‌কে সসীম বলা হবে যদি এটিতে কোনো পদ না থাকে অথবা এর পদগুলোকে একটি নির্দিষ্ট স্বাভাবিক সংখ্যা পর্যন্ত গণনা করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ : (i) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$

(ii) $\{x : x$ হল একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $|x| < 5\}$

সসীম সেটের অন্তর্গত নিম্নলিখিত সেটগুলো আছে —

(a) শূন্য সেট্ :

একটি সেটে কোনো পদ না থাকলে তাকে শূন্য সেট্ বলা হয় এবং এটিকে ϕ অথবা $\{\}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : (i) $\{x : x \varepsilon R, x^2 = -1\}$

(ii) এমন লোকের সেট যারা দিনে 24 ঘন্টার বেশি কাজ করে।

(b) একপদী সেট্ :

যে সেটে শুধু একটি মাত্র পদ থাকে, তাকে একপদী সেট্ বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : $\{1\}$, $\{x\}$ ইত্যাদি।

(c) সমতুল্য সেট্ :

দুটি সসীম সেট্ X ও Y কে সমতুল্য সেট্ বলা হবে যদি সেট্ দুটির পদসংখ্যা সমান হয়।

উদাহরণস্বরূপ : $\{1, 2, 3\}$ ও $\{a, b, c\}$ সেট্ দুটি সমতুল্য।

(d) সমান সেট্ :

দুটি সেট্ A ও B কে সমান বলা হবে যদি A সেটের প্রতিটি পদ B সেটেরও পদ এবং B সেটের প্রতিটি পদ A সেটেরও পদ হয়। এটিকে $A = B$ আকারে লেখা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : $\{1, 3, 5\} = \{5, 3, 1\}$

কিন্তু, $\{1, 2, 3\} \neq \{a, b, c\}$

অর্থাৎ, সমান সেট্‌গুলো সমতুল্য সেট্ হয় কিন্তু সমতুল্য সেটগুলো সমান নাও হতে পারে।

(2) অসীম সেট্ :

যে সেটের পদসংখ্যা অসীম, অর্থাৎ পদগুলোকে যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য 1,2,.............,n দ্বারা তালিকাভুক্ত করা যায় না, তাকে অসীম সেট্ বলে।

উদাহরণস্বরূপ : (i) কোনো তলে অবস্থিত সকল বিন্দুসমূহের সেট্।

(ii) $\{2, 4, 6, 8, ...\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 < x < 1\}$

গুরুত্বপূর্ণ কয়েকটি অসীম সেট্‌কে নিম্নলিখিত চিহ্নগুলো দ্বারা সূচিত করা হয় —

N : স্বাভাবিক সংখ্যার সেট্।

W	:	সমগ্র সংখ্যার সেট্।
I / Z	:	পূর্ণ অথবা অখণ্ড সংখ্যার সেট্।
R	:	বাস্তব সংখ্যার সেট্।
Q	:	মূলদ সংখ্যার সেট্।
$\overline{Q}$	:	অমূলদ সংখ্যার সেট্।
C	:	জটিল সংখ্যার সেট্।
R^+	:	ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট্।
R^*	:	অ-শূন্য বাস্তব সংখ্যার সেট্।

সসীম সেটের পদসংখ্যা :

কোনো সসীম সেট্ A-এর অন্তর্গত পরস্পর ভিন্ন পদসমূহের সংখ্যাকে ওই সেটের পদসংখ্যা বলা হয় এবং এটিকে n(A) দ্বারা সূচীত করা হয়। যদি দুটি সেট্ A ও B এর পদসংখ্যা সমান হয়, তবে এটিকে n(A) = n(B) আকারে লেখা হয়।

উপসেট্ :

যদি দুটি সেট্ A ও B এরূপ যে, সেট্ A-এর প্রতিটি পদ সেট্ B এরও একটি পদ হয়, তবে A সেট্কে B সেটের উপসেট্ বলা হয় এবং এটিকে $A \subseteq B$ আকারে লেখা হয়।

যদি সেট্ A, সেট্ B-এর উপসেট্ না হয় তবে এটিকে $A \not\subseteq B$ আকারে লেখা হয়।

যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়, তবে এটিকে $A=B$ আকারে লেখা হয়।

যদি $A \subseteq B$ এবং $A \neq B$ অর্থাৎ $A \subset B$ হয়, তবে A-কে সেট B-এর যথার্থ উপসেট্ এবং B সেট্কে A সেটের অধিসেট্ বলা হয়।

যেমন : (i) $\{3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(ii) $\{1, 5\} \not\subseteq \{5, 3, 2\}$

মন্তব্য :

(i) প্রত্যেক সেট্ তার নিজের উপসেট্।

(ii) শূন্য সেটের কোনো যথার্থ উপসেট্ নেই।

(iii) শূন্য সেট্ যেকোনো সেটের উপসেট্।

(iv) প্রতিটি সেট্ (শূন্যসেট ϕ ব্যতীত)-এর কমপক্ষে দুটি উপসেট্ আছে।

(v) n-পদসংখ্যা বিশিষ্ট একটি সেটের উপসেটের সংখ্যা হল 2^n।

(vi) n-পদসংখ্যা বিশিষ্ট একটি সেটের যথার্থ উপসেটের সংখ্যা হল 2^n-1।

- **সূচক সেট্ বা ঘাত সেট্ :**

কোনো প্রদত্ত সেট্ A-এর সূচক সেট্ বলতে A-এর সমস্ত উপসেটগুলিকে নিয়ে গঠিত সেট্কে বোঝায় এবং একে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$।

যদি A একটি সেট এরূপ যে $n(A) = m$ হয়, তবে $n[P(A)]=2^m$।

- **সার্বিক সেট্ :**

  যদি কিছু সেট্ এমনভাবে বিবেচনা করা হয় যেখানে এদের মধ্যে নির্বাচিত একটি সেট্ অন্যান্য প্রদত্ত প্রতিটি সেটের অধিসেট্ হয়, তবে এমন সেট্‌টিকে সার্বিক সেট্ বলা হয় এবং এটিকে U বা S বা ξ দ্বারা সূচীত করা হয়।

  যেমন — আমরা জানি, $N\subset W\subset Z\subset Q\subset R$

  সুতরাং, এখানে R হল সার্বিক সেট্।

- **ভেনচিত্র :**

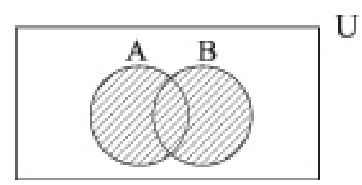
  সেটের অধিকাংশ সম্পর্কগুলোকে বিশেষভাবে চিত্রাকারে উপস্থাপন করার জন্য যে চিত্র ব্যবহার করা হয় সেগুলি হল ভেনচিত্র।

  ভিনচিত্রে, সার্বিক সেট্‌কে সাধারণত আয়তক্ষেত্র এবং এর উপসেট্‌গুলোকে বৃত্ত বা উপবৃত্তের সাহায্যে এই আয়তক্ষেত্রাকার অঞ্চলের ভিতরে উপস্থাপন করা হয়।

- **সেট্ প্রক্রিয়া এবং ভেনচিত্র :**

(a) সেটের সংযোগ :

দুটি অ-শূন্য সেট A ও B -এর সংযোগ হল এমন একটি সেট্ যার উপাদানগুলি হয় A-তে আছে, নয়তো B-তে আছে, নয়তো A ও B উভয়ের মধ্যেই আছে এবং এটিকে $A\cup B$ দ্বারা সূচীত করা হয় এবং এটিকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয়



$A\cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

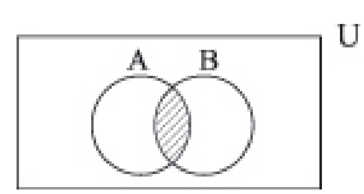
যদি $A\subset B$ হয়, তবে $A\cup B = B$

আবার, যদি $B\subset A$ হয়, তবে $A\cup B = A$.

উদাহরণস্বরূপ : $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,5,6\}$, হলে $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

(b) সেটের ছেদ :

দুটি প্রদত্ত অ-শূন্য সেট্ A ও B এর ছেদ বলতে সেই সেট্‌টিকে বোঝায়, যে সেটের উপাদানগুলো হল A এবং B-এর সাধারণ উপাদানসমূহ এবং এটিকে আমরা $A\cap B$ আকারে প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয় —



$A\cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

যদি $A\subset B$ হয়, তবে $A\cap B = A$.

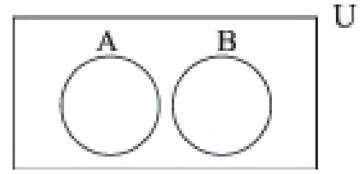
আবার, যদি $B\subset A$ হয়, তবে $B\cap A = B$

উদাহরণস্বরূপ : যদি $A=\{x, y, z, t\}$, $B=\{x, r, s, t\}$ হয়, তবে $A \cap B = [x, t\}$

(c) বিচ্ছিন্ন সেট্ :

দুটি সেট A ও B কে বিচ্ছিন্ন বলা হয় যদি তাদের কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে অথবা তাদের ছেদ একটি

শূন্য সেট অর্থাৎ, $A \cap B = \phi$ হয়।

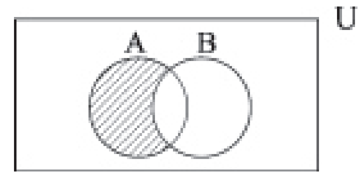


(d) সেটের অন্তর :

ধরা যাক A ও B দুটি প্রদত্ত সেট্ । তবে A ও B -এর অন্তর, এটিকে A–B দ্বারা প্রকাশ করা হয়, বলতে আমরা সেই সেট্‌টিকে বুঝব, যে সেটের উপাদানগুলো A সেটে রয়েছে, কিন্তু B সেটে নেই।

অর্থাৎ, $A - B = \{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

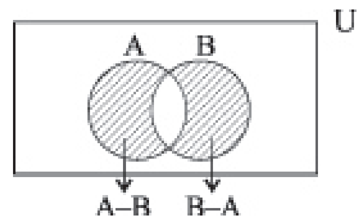
স্পষ্টতই, $A - B \neq B - A$, যদি $A = B$ না হয়।



(e) প্রতিসম অন্তর :

দুটি প্রদত্ত সেট্ A ও B এর প্রতিসম অন্তর বলতে সেই সেট্‌টিকে বোঝায়, যার পদগুলো শুধুমাত্র A সেটে আছে অথবা শুধুমাত্র B সেটে আছে। কিন্তু কোনো পদই A ও B এর সাধারণ পদ হবে না এবং এটিকে $A \Delta B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এটিকে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হয় —

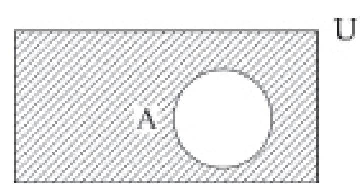
$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$



(f) কোনো সেট্-এর পূরক সেট্ :

ধরা যাক সার্বিক সেট U এবং একটি সেট A প্রদত্ত। তবে সেট্-A এর পূরক সেট্ বলতে সেই সেট্‌টিকে বোঝায় যার পদগুলো সেট্ A-এর অন্তর্ভুক্ত নয় এবং এটিকে A' বা A^C বা $\bar{A}$ দ্বারা সূচীত করা হয় এবং এটিকে নিম্নরূপে উপস্থাপন করা হয় :

$A' = \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$



- **মন্তব্য :** (i) $A - B = A \cap B', B - A = B \cap A'$

  (ii) $U' = \phi,\ \phi' = U$

  (iii) $(A')' = A$

  (iv) $A \cup A' = U$

  (v) $A \cap A' = \phi$

- **সেট্-এর বীজগণিত :**

(a) বর্গৈকসম সূত্র : $A \cup A = A,\ A \cap A = A$

(b) অভেদ সূত্র : $A \cup \phi = A,\ A \cap U = A$

(c) বিনিময় সূত্র : $A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$

(d) সংযোগ সূত্র : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(e) বন্টন সূত্র : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(f) ডিমর্গানের সূত্র : $(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

(g) শোষণ নিয়ম : $A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap (A \cup B) = A$

- **বিভিন্ন প্রকারের অন্তরাল :**

(a) মুক্ত অন্তরাল : $(a, b) = \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$

(b) বদ্ধ অন্তরাল : $[a, b] = \{x : x \in R$ এবং $a \le x \le b\}$

(c) অর্ধ মুক্ত অথবা অর্ধ বদ্ধ অন্তরাল :

$(a,b] = \{x : x \in R$ এবং $a < x \le b\}$

$[a,b) = \{x : x \in R$ এবং $a \le x < b\}$

- **মন্তব্য :** (i) $[0, \infty)$ অন্তরালটি সমস্ত অ-ঋনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট্‌কে প্রকাশ করে।

(ii) $(-\infty, 0)$ অন্তরালটি সকল ঋনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট্‌কে সূচীত করে।

(iii) $(-\infty, \infty)$ অন্তরালটি বাস্তব সংখ্যার সেট্‌টিকে প্রকাশ করে।

(iv) $(b - a)$-কে যেকোনো একটি অন্তরাল (a,b) বা $[a,b]$ বা $[a,b)$ বা $(a,b]$-এর দৈর্ঘ্য বলা হয়।

- **সসীম সেটের পদসংখ্যা সম্পর্কিত ফলাফল :**

যদি A, B ও C সসীম সেট্ এবং U একটি সসীম সার্বিক সেট্ হয় তবে,

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, যদি A ও B বিচ্ছিন্ন সেট্ হয়।

(iii) $n(A-B) + n(A \cap B) = n(A)$

(iv) $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

(v) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$= n(A) + n(B) + n(C)$, যদি A, B ও C পরস্পর বিচ্ছিন্ন সেট্ হয়।

(vi) A, B ও C সেটের মধ্যে ঠিক একটিতে অন্তর্ভুক্ত এমন পদ সংখ্যা
$= n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(B \cap C) - 2n(A \cap C) + 3n(A \cap B \cap C)$

(vii) A, B ও C সেটের মধ্যে শুধুমাত্র দুটিতে অন্তর্ভুক্ত এমন পদ সংখ্যা
$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$

(viii) $n(A' \cup B') = n\left((A \cap B)'\right) = n(U) - n(A \cap B)$

(ix) $n(A' \cap B') = n\left((A \cup B)'\right) = n(U) - n(A \cup B)$

ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহু বিকল্পধর্মী :

(i) দুটি সসীম সেটের পদসংখ্যা m ও n। প্রথম সেটের মোট উপসেটের সংখ্যা দ্বিতীয় সেটের মোট উপসেটের সংখ্যার চেয়ে 56 বেশি। তবে m ও n -এর মান হবে যথাক্রমে —

(a) 3, 6 (b) 3, 3 (c) 6, 3 (d) 6, 6

(ii) কোনো সেটের যথার্থ উপসেটের সংখ্যা হল 63। সেটটির পদসংখ্যা হবে —

(a) 5 (b) 8 (c) 7 (d) 6

(iii) ধরি, S = {x|x হল 100 থেকে ছোটো 3-এর ধনাত্মক গুণিতক},
P = {x|x হল 20 থেকে ছোটো মৌলিক সংখ্যা}

তাহলে n(S) + n(P) হবে —

(a) 41 (b) 31 (c) 33 (d) 30

(iv) নিম্নের কোন্‌টি শূন্য সেট?

(a) $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 = 9\}$

(b) $B = \{0\}$

(c) $C = \{x : x \in Z$ এবং $6x^2-5x+1 = 0\}$

(d) $D = \{x : x \in R$ এবং $-2 < x \le 0\}$

(v) যদি $x \in A \Rightarrow x \in B$ হয়, তবে

(a) A=B (b) $A \subset B$ (c) $A \subseteq B$ (c) $B \subseteq A$

(vi) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়, তবে

(a) $A = \phi$ (b) $A \cap B = \phi$ (c) A=B (d) এদের কোনোটিই নয়

(vii) নিম্নের কোন্ বিবৃতিটি সত্য?

(a) $\{x\} \in \{x, y, z\}$ (b) $x \notin \{x, y, z\}$

(c) $x \subset \{x, y, z\}$ (d) $\{x\} \subset \{x, y, z\}$

(viii) A, B ও C হল সসীম সেট্ যেখানে $n(A) = 10, n(B) = 15, n(C) = 20, n(A \cap B) = 8, n(B \cap C) = 9$, $n(C \cap A) = 7$ এবং $n(A \cap B \cap C) = 6$, তাহলে $n(A \cup B \cup C)$ হবে

(a) 26 (b) 27 (c) 28 (d) এদের কোনোটিই নয়

(ix) ধরা যাক, $A = \{x : x \in N\}$, $B = \{x : x = 2n, n \in N\}$, $C = \{x : x = 2n-1, n \in N\}$ এবং $D = \{x : x$ হল মৌলিক সংখ্যা$\}$। তাহলে $A \cap C$ হবে

(a) B (b) C (c) D (d)

(x) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$ এবং $C = \{4,5,6\}$ হলে $A \cup (B \cap C)$ হবে

(a) $\{1,2,3,4,5,6\}$ (b) $\{1,2\}$ (c) $\{1,2,3,4\}$ (d) $\{1,2,4,5\}$

(xi) ধরা যাক, U হল একটি সার্বিক সেট এবং A ও B হল U এর দুটি উপসেট্ যেখানে $n(U) = 100, n(A) = 40$, $n(B) = 30$ এবং $n(A \cap B) = 10$। $n(A' \cap B')$ এর মান হবে

(a) 20 (b) 60 (c) 30 (d) 40

(xii) $n(A) = 3$, $n(B) = 6$। $n(A \cup B)$ -এর সর্বনিম্ন মান হবে

(a) 18 (b) 6 (c) 9 (d) এদের কোনোটিই নয়

(xiii) যদি $aN = \{ax : x \in N\}$ হয়, তবে $4N \cap 6N$ হবে

(a) 6N (b) 12N (c) 24N (d) এদের কোনোটিই নয়

(xiv) $A = \{x : x \in R, |x| > 1\}$, $B = \{x : x \in R, |x-1| \ge 1\}$ এবং $A \cup B = R - Y$। তাহলে Y=

(a) $\{x : 1 \le x < 2\}$ (b) $\{x : 1 \le x \le 2\}$

(c) $\{x : 1 < x \le 2\}$ (d) এদের কোনোটিই নয়

(xv) A ও B হল দুটি অ-শূন্য সেট। তাহলে $(A \cup B^c)^c \cap (A^c \cup B)^c =$

(a) ϕ (b) U (c) A^c (d) B^c

(xvi) নিম্নলিখিত কোন্ সেট্‌টি সসীম?

(a) {x : x ∈N এবং x হল মৌলিক সংখ্যা}

(b) {x : x^2–2x–15 = 0 এবং x∈z^+}

(c) {x : x হল একজন পৃথিবীর মানুষ}

(d) {x : x হল 3-এর গুণিতক}

(xvii) নিম্নের সেট্‌গুলোর মধ্যে কোন্‌টি সমান সেট্ যুগল ?

$A=\{x : x\in N,\ 2\le x\le 3\}$, $B=\{x : x\in R,\ x^2-5x+6=0\}$

$C=\{x : x\in R,\ x^3+1=0\}$, $D=\{x : x\in R,\ 2\le x\le 3\}$

(a) A, C (b) A, D (c) A, B (d) এদের কোনোটিই নয়

(xviii) A = {s, o, u, r, a, v}, B = {s, a c, h, i, n} এবং C = {d, h, o, n, i}। তাহলে $A\cap(B\Delta C)$ হবে

(a) {a, c, h} (b) {s, o, a} (c) {h, o, s} (d) এদের কোনোটিই নয়

(xix) ভারতীয়দের মধ্যে 52% কফি এবং 73% চা পান করতে পছন্দ করে। যদি x% কফি ও চা উভয়ই পান করতে পছন্দ করে, তবে x-এর মান হবে —

(a) $x\ge 25$ (b) $x\le 52$ (c) $25\le x\le 52$ (d) $x\ge 52$

(xx) A, B ও C তিনটি সেট্ এরূপ যে, n(A)=17, n(B) = 13, $n(A\cap B)$ = 9, $n(B\cap C)$ = 4, $n(C\cap A)$ =5, $n(A\cap B\cap C)$ = 3 এবং n(U) = 50। তাহলে $n(A\cap B^c\cap C^c)$ =

(a) 8 (b) 6 (c) 7 (d) এদের কোনোটিই নয়

(xxi) ধরা যাক্ একই তলে F_1 হল সামান্তরিকের সেট্, F_2 হল আয়তক্ষেত্রের সেট্, F_3 হল রম্বসের সেট্, F_4 হল বর্গক্ষেত্রের সেট্ এবং F_5 হল ট্রাপিজিয়ামের সেট্। তাহলে F_1 =

(a) $F_2\cap F_3$ (b) $F_3\cap F_4$ (c) $F_2\cap F_5$ (d) $F_2\cup F_3\cup F_4\cap F_1$

2. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী :

(i) নীচের সেট্‌গুলিকে তালিকা আকারে প্রকাশ করো :

(a) $A=\{x \mid x^3=x,\ x\in R\}$

(b) $B=\{x : x^4-5x^2+6=0,\ x\in R\}$

(c) $C=\left\{y \,\middle|\, \frac{y-2}{y+3}=3,\ y\in R\right\}$

(d) {x : x হল মৌলিক সংখ্যা যা 60-এর ভাজক}

(e) {x : x ∈ z এবং |x|<6}

(f) {x : x হল পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং 2<x≤49}

(ii) নীচের সেট্‌গুলিকে সেট্-নির্মান বা ধর্মভিত্তিক পদ্ধতিতে লেখো :

(a) $A = \{3, 9, 27, 81, ...\}$

(b) $B = \{...., -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

(c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$

(d) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$

(iii) নিম্নের বিবৃতিগুলির মধ্যে কোন্‌টি সসীম সেট্ ও কোন্‌টি অসীম সেট তা লেখো :

(a) তিনটি অসমরেখ বিন্দুগামী বৃত্তের সেট।

(b) 199 থেকে ছোটো মৌলিক সংখ্যার সেট।

(c) $\{x : x \in N$ এবং $(x-1)(x-2)(x-3)=0\}$

(d) $\{x \in I : 0 < x < 2\}$

(e) 'MATHEMATICS' শব্দের অক্ষরগুলোকে নিয়ে গঠিত সেট।

(f) সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সেট্।

(iv) নীচের সেট্-যুগলের মধ্যে কোন্‌টি সমান-সেট্ যুগল, কোন্‌টি সমতুল্য সেট যুগল ও কোন্‌টি এদের কোনোটিই নয় তা লেখো :

(a) $A = \{A, E, S, T\}$
$B = \{x : x$ হল ASSET শব্দের অক্ষর$\}$

(b) $C = \{\oplus, \lozenge, \Leftrightarrow, \square\}$
$D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

(c) $E = \{x : x$ হল 14 অপেক্ষা ছোট মৌলিক সংখ্যা$\}$
$F = \{2, 3, 5\}$

(d) $G = \{x : x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,\ x \in R\}$
$H = \{x : x^2 - 2x + 1 = 0,\ x \in R\}$

(v) ভারতের দশজন মেধাবী লেখকের সংকলন কী একটি সেট? এর সত্যতা যাচাই করো।

(vi) $X = \{x, y, z\}$-এর ঘাত সেটটি লেখো।

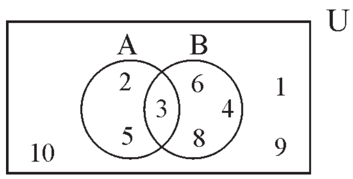
(vii) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$, $B = \{2, 4, 6, ... 18\}$ এবং N সেট্‌টি সার্বিক সেট্ হলে $A' \cup \{A \cup B) \cap B'\}$-এর মান নির্ণয় করো।

(viii) যদি $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ হয়, তবে $A-B$ নির্ণয় করো।

(ix) $\{-1, 0, 1\}$-এর সমস্ত সম্ভাব্য উপসেটগুলো লেখো।

(x) সেট্ $A = \{x \in z \mid x > 6\}$ -এর প্রকৃতি কীরূপ?

(xi) পাশের ভেনচিত্র থেকে নিম্নলিখিত সেটগুলো নির্ণয় করো।



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A - B$

(d) $B - A$ (e) $(A \cap B)'$ (f) $(A \cup B)'$

(xii) ভেনচিত্র ব্যবহার করে, নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলির যর্থাথতা যাচাই করো :

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $(A^c)^c = A$

(xiii) সেট্ প্রক্রিয়ার সাহায্যে প্রমাণ করো যে $2+3=5$।

(xiv) ধরা যাক সেট $A = \{1\}$। তাহলে $P[P\{P(A)\}]$ সেটটিতে কয়টি পদ আছে?

(xv) ϕ এবং $\{\phi\}$ এর মধ্যে কী পার্থক্য?

(xvi) 500 জন গাড়ির মালিকের উপর সমীক্ষায় দেখা গেল 400 জন মারুতি গাড়ির, 200 জন হাইউনদাই গাড়ির এবং 50 জন উভয় প্রকার গাড়ির মালিক। প্রদত্ত রাশিতথ্যটি কি সঠিক?

(xvii) সমান সেটযুগল কী সমতুল্য সেট যুগল? এর বিপরীত বিবৃতিটি কি সত্য?

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্তধর্মী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

(i) যদি $Y = \{ x | x$ হল $2^{p-1}(2^p - 1)$ সংখ্যাটির একটি ধনাত্মক উৎপাদক, যেখানে $2^p - 1$ হল মৌলিক$\}$। তবে Y -কে রোস্টার আকারে লেখো।

(ii) প্রদত্ত $L = \{1,2,3,4\}$, $M = \{3,4,5,6\}$ এবং $N = \{1,3,5\}$। তাহলে $L-(M \cup N = (L-M) \cap (L-N)$-এর সত্যতা যাচাই করো।

(iii) ধরা যাক্ $T = \left\{ x \mid \dfrac{x+5}{x-7} - 5 = \dfrac{4x-40}{13-x} \right\}$। T কি একটি শূন্য সেট? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(iv) ধরা যাক্ $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{30}$ এই ত্রিশটি সেটের প্রতিটিতে 5টি করে উপাদান এবং $B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots, B_n$ এই n সংখ্যক সেটের প্রতিটিতে 3টি করে উপাদান আছে। এছাড়া, যদি $\bigcup\limits_{i=1}^{30} A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j = S$ এবং S-এর প্রতিটি উপাদান ঠিক 10টি A_i সেটে এবং ঠিক 9টি B_j সেটে থাকে, তবে n-এর মান নির্ণয় করো।

(v) সকল সেট A ও B -এর জন্য, দেখাও যে $A-(A-B) = A \cap B$।

(vi) সেট প্রক্রিয়ার সাহায্যে

(a) 15, 40 ও 105 -এর গ.সা.গু নির্ণয় করো।

(b) 12, 15 ও 20 এর ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

(c) দেখাও যে 231 ও 260 সংখ্যা দুটি পরস্পর মৌলিক।

(vii) 840 জন লোকের কোনো একটি শহরে 450 জন লোক হিন্দী পত্রিকা, 300 জন লোক ইংরেজী পত্রিকা এবং 200 জন লোক উভয় পত্রিকা পড়তে পছন্দ করে। কতজন লোক হিন্দী ও ইংরেজী পত্রিকার কোনোটিই পড়তে পছন্দ করে না, তা নির্ণয় করো।

(viii) A ও B দুটি সেট এরূপ যে, $n(A-B) = 20+x$, $n(B-A) = 3x$ এবং $n(A\cap B) = x+1$। যদি $n(A) = n(B)$ হয় তবে, x-এর মান নির্ণয় করো।

(ix) 40 জন শিক্ষার্থীর একটি দলে, 26 জন পদার্থবিদ্যা নিল, 18 জন গণিত নিল এবং 8 জন পদার্থবিদ্যা ও গণিত এই দুটি বিষয়ের কোনোটিই নিল না। কতজন শিক্ষার্থী পদার্থবিদ্যা ও গণিত উভয় বিষয় নিয়েছে?

(x) যদি সেট $A = \{4^n - 3n - 1 : n \in N\}$ এবং সেট $B = \{9(n-1) : n \in N\}$ হয়, তবে দেখাও যে $A \subset B$।

(xi) ধরা যাক্ $U = \{x \in N \mid x \le 9\}$; $A = \{x : x$ হল যুগ্ম সংখ্যা $0 < x < 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$। তাহলে $(A \cup B)' = A' \cap B'$.-এর সত্যতা যাচাই করো।

(xii) $P = \{\theta : \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta\}$ এবং $Q = \{\theta : \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta\}$। দেখাও যে $P = Q$।

(xiii) সেট $\{x : x \in z$ এবং $-1 \le x \le 2\}$-এর সকল উপসেটগুলি লেখো।

(xiv) $aN = \{ax : x \in N\}$ এবং $bN \cap cN = dN$ যেখানে, b, $c \in N$ এবং ওরা পরস্পর মৌলিক। তবে, b, c ও d-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

(i) কোনো কলেজের 1000 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 540 জন ফুটবল, 465 জন ক্রিকেট এবং 370 জন ভলিবল খেলে। মোট সংখ্যার 325 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 260 জন ফুটবল ও ভলিবল, 235 জন ক্রিকেট ও ভলিবল এবং 125 জন প্রত্যেকটি গেম্ খেলে। কতজন ছাত্র —

(a) কোনো গেম্ খেলে না?

(b) কেবল একটি গেম্ খেলে এবং

(c) ঠিক দুটি গেম্ খেলে?

(ii) যে-কোনো তিনটি সেট A, B এবং C এর জন্য প্রমাণ করো যে

(a) $A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

(b) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

(iii) একটি মার্কেট গবেষণা গ্রুপের সমীক্ষায় দেখা গেল যে 50% ক্রেতা A সামগ্রী, 45% ক্রেতা B সামগ্রী, 40%

ক্রেতা C সামগ্রী, 25% ক্রেতা A ও B সামগ্রী, 10% ক্রেতা B ও C সামগ্রী, 16% ক্রেতা C ও A সামগ্রী, 8% ক্রেতা প্রতিটি সামগ্রী পছন্দ করে। তাহলে কত শতাংশ লোক —

(a) কোনো সামগ্রী পছন্দ করে না?

(b) শুধুমাত্র A সামগ্রী পছন্দ করে?

(c) ঠিক দুটি সামগ্রী পছন্দ করে?

(iv) 50 জন শিক্ষার্থীর একটি দলে, শিক্ষার্থীদের কতজন ফরাসী, ইংরেজী ও সংস্কৃত ভাষায় পড়াশোনা করে তা নিম্নে প্রদত্ত :

ফরাসী = 17, ইংরেজী = 13, সংস্কৃত = 15, ফরাসী ও ইংরেজী = 9, ইংরেজী ও সংস্কৃত = 4,

ফরাসী ও সংস্কৃত = 5, ইংরেজী, ফরাসী ও সংস্কৃত = 3।

তাহলে কতজন শিক্ষার্থী —

(a) শুধু ফরাসী ভাষায় পড়াশোনা করে?

(b) ইংরেজী ও সংস্কৃত ভাষায় পড়াশোনা করে কিন্তু ফরাসী ভাষায় পড়াশোনা করে না?

(c) কমপক্ষে একটি ভাষায় পড়াশোনা করে?

(d) তিন প্রকারের ভাষার মধ্যে কোনো প্রকারের ভাষায় পড়াশোনা করে না?

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1. (i) c (ii) d (iii) a (iv) c (v) c
(vi) c (vii) d (viii) b (ix) b (x) c
(xi) d (xii) b (xiii) b (xiv) d (xv) a
(xvi) b (xvii) c (xviii) b (xix) c (xx) b
(xxi) d

2. (i) (a) $\{0, 1, -1\}$ (b) $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right\}$

(c) $\left\{-11/2\right\}$ (d) $\{2, 3, 5\}$

(e) $\{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (f) $\{4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

(ii) (a) $\{x : x = 3^n, n \in N\}$ (b) $\{x : x = 2n$, যেখানে $n \in N\}$

(c) $\{x : x = n^2$, যেখানে $n \in N\}$ (d) $\left\{x : x = \frac{1}{n},\ \text{যেখানে}\ n \in N\right\}$

(iii) (a) সসীম (b) সসীম (c) সসীম

(d) অসীম (e) সসীম (f) অসীম

(iv) (a) সমান (b) সমতুল্য (c) এদের কোনোটিই নয় (d) এদের কোনোটিই নয়

(v) এটি সেট্ নয় কারণ প্রতিভাবান শব্দটি সুসজ্ঞাত নয়।

(vi) $P(X) = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X, \varphi\}$

(vii) N

(viii) $\{1,3,5\}$

(ix) $\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{-1,0,1\}, \phi$

(x) অসীম সেট

(xi) (a) $\{2,3,4,5,6,8\}$ (b) $\{3\}$ (c) $\{2,5\}$

(d) $\{6,4,8\}$ (e) $\{1,2,4,5,6,8,9,10\}$ (f) $\{1,9,10\}$

(xiv) 16

(xv) ϕ প্রতিকটি শূন্য সেট্‌কে প্রকাশ করে এবং $\{\phi\}$ একটি একপদী সেট্‌কে প্রকাশ করে।

(xvi) না

(xvii) হ্যাঁ, বিপরীত বিবৃতিটি সর্বদা সত্য নয়।

খ - বিভাগ

3. (i) $\{1,2,2^2,\ldots\ldots.,2^{p-1}\}$

(iii) না

(iv) 45

(vi) (a) 5 (b) 60

(vii) 290

(viii) 10

(ix) 12

(xiii) $\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{-1,2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{-1,0,1\}, \{0,1,2\},$ $\{1,2,-1\}, \{-1,0,1,2\}, \phi, \{2,-1,0\}$

(xiv) $d = bc$

গ - বিভাগ

4. (i) (a) 320 (b) 110 (c) 445

(iii) (a) 8% (b) 17% (c) 27%

(iv) (a) 6 (b) 1 (c) 30 (d) 20

অধ্যায় — 2

সম্বন্ধ ও অপেক্ষক (Relations and Functions)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **ক্রমিত জোড় :**

  কোনো ক্রমিত জোড়, একটি নির্দিষ্ট ক্রমে প্রথম বন্ধনীতে লিখিত দুটি উপাদান নিয়ে গঠিত হয়।

  কার্তেসিয় তলে, কোনো ক্রমিত জোড়ের প্রথম উপাদানকে x-স্থানাঙ্ক (ভুজ) এবং দ্বিতীয় উপাদানকে y-স্থানাঙ্ক (কোটি) বলা হয়। এটি, কোনো তলে অবস্থিত একটি বিন্দু সনাক্ত করতে সাহায্য করে।

  উদাহরণস্বরূপ : (2, 3), (1, 0), (x, y) ইত্যাদি।

- দুটি ক্রমিত জোড় (a, b) ও (c, d) সমান হবে, যদি তাদের প্রথম পদদ্বয় ও দ্বিতীয় পদদ্বয় সমান হয়, অর্থাৎ $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ এবং $b = d$।

- **কার্তেসিয় গুণফল :**

  ধরা যাক, A ও B হল দুটি প্রদত্ত অ-শূন্য সেট্। তাহলে তাদের কার্তেসিয় গুণফল যাকে $A\times B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, হল (a, b) আকারের সমস্ত ক্রমিত জোড়ের সেট্ যেখনে $a\in A$ এবং $b\in B$।

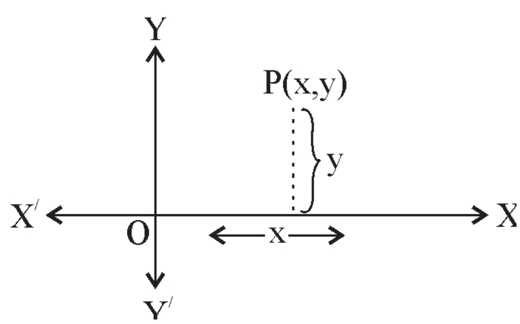
  সাংকেতিকরূপে, এটিকে নিম্নরপে লেখা হয় —
  $A\times B = \{(a, b) : a\in A$ এবং $b\in B\}$
  যেমন - যদি $A = \{x,y,z\}$ এবং $B=\{a,b)$ হয়, তবে
  $A\times B = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\}$
  $B\times A = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$

  স্পষ্টতই, $A\times B \neq B\times A$, যদি না $A=B$ হয়।

  তিনটি প্রদত্ত সেট A, B ও C-এর জন্য
  $A\times B\times C = \{(a, b, c) : a\in A, b\in B$ এবং $c\in C\}$ যেখানে (a, b, c)-কে ক্রমিত ত্রয়ী বলা হয়।

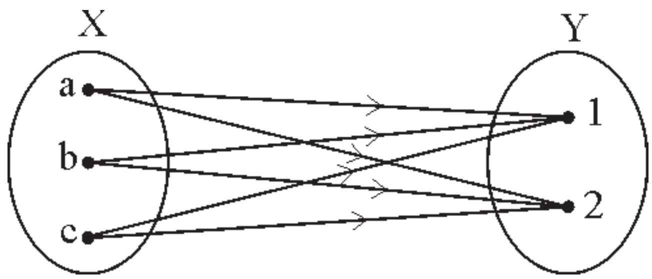
  আমরা এই ধারনাটিকে তিনটির অধিক সেটের জন্যও প্রসারিত করতে পারি। এছাড়া Tree চিত্রের সাহায্যে তিনটি বা এর অধিক সেটের কার্তেসিয় গুণফলের অন্তর্গত সমস্ত পদসমূহ নির্ণয় করতে পারি।

- দুটি লম্ব সরলরেখা, যাদের X-অক্ষ ও Y-অক্ষ হিসাবে বিবেচনা করে, অঙ্কন করে, ক্রমিত জোড় (x, y)-কে একটি তলে উপস্থাপন করা যেতে পারে।



- দুটি সেটের কার্তেসিয় গুণফলকে তির চিহ্ন বিশিষ্ট চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা যেতে পারে।

  উদাহরণস্বরূপ : যদি $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2\}$ হয়, তবে নিম্নের চিত্র $X \times Y$ -এর তির চিহ্ন বিশিষ্ট চিত্রকে নির্দেশ করে



- যদি A ও B সসীম সেট হয় তবে, $n(A\times B) = n(A)\times n(B)$

  যদি $n(A) = p$ এবং $n(B) = q$ হয়, তবে $n(A\times B) = pq$

  মন্তব্য :

  i) যদি A অথবা B অসীম সেট হয়, তবে $A\times B$ ও অসীম সেট হবে।

  ii) যদি A, B ও C সসীম সেট হয়, তবে $n(A\times B\times C)=n(A)\times n(B)\times n(C)$

  iii) $A_1\times A_2\times ....\times A_n=\{(a_1, a_2 ...., a_n) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$

- **সম্বন্ধ :**

  যদি A ও B দুটি অ-শূন্য সেট হয় তবে সেট A থেকে সেট B-তে একটি সম্বন্ধ R হয় কার্তেসিয় গুণফল $A\times B$-এর একটি উপসেট এবং এটিকে $R\subseteq A\times B$ আকারে লেখা হয়। এছাড়া $(x,y)\in R \Rightarrow (x,y)\in A\times B$। যদি $(x,y)\in R$ হয়, তবে আমরা বলি R-সম্বন্ধে x ও y সম্পর্কযুক্ত এবং এটিকে xRy আকারে লেখা হয়। যদি R-সম্বন্ধে x ও y সম্পর্কযুক্ত না হয় তবে, আমরা এটিকে $x \not R y$ আকারে প্রকাশ করি।

  যেমন সেট $A=\{2,3,4,5\}$ থেকে সেট $B=\{3,6,7,10\}$-তে একটি সম্বন্ধ R যদি নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হয় :
  $(x,y)\in R \Leftrightarrow$ x দ্বারা y বিভাজ্য। তবে, $R=\{(2,6), (2,10), (3,3), (3,6), (5,10)\}$

  এখানে, সম্বন্ধ R-এর অন্তর্গত সমস্ত ক্রমিত জোড়গুলোর প্রথম পদগুলোকে নিয়ে গঠিত সেটকে সংজ্ঞার অঞ্চল এবং ক্রমিত জোড়গুলোর দ্বিতীয় পদগুলোকে নিয়ে গঠিত সেটকে প্রসার বলা হয়।
  B সেটটিকে সম্বন্ধ R-এর উপঅঞ্চল বলা হয়।

  প্রসার $\subseteq$ উপঅঞ্চল

  অর্থাৎ, R-এর সংজ্ঞার অঞ্চল $= \{a : (a, b) \in R\}$

  R-এর প্রসার $= \{b : (a, b) \in R\}$

  যদি $n(A)=m$ এবং $n(B)=n$ হয়, তবে A থেকে B সেটে মোট সম্বন্ধের সংখ্যা হল 2^{mn}।

- **সম্বন্ধের উপস্থাপন :**

i) রস্টার পদ্ধতি :

ধরা যাক $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ এবং $B = \{0,1,4,9\}$.

যদি A থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ R হয় যেখানে $aRb \Leftrightarrow a^2=b$, তবে R কে রস্টার পদ্ধতিতে নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে,

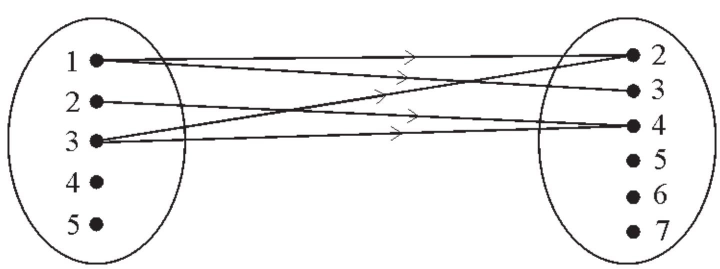
$R = \{(0,0), (-1,1), (-2,4), (1,1), (2,4)\}$

ii) সেট গঠন পদ্ধতি :

$$R = \left\{(a,b) : a \in A, b \in B \text{ এবং } b = \frac{1}{a}\right\}$$

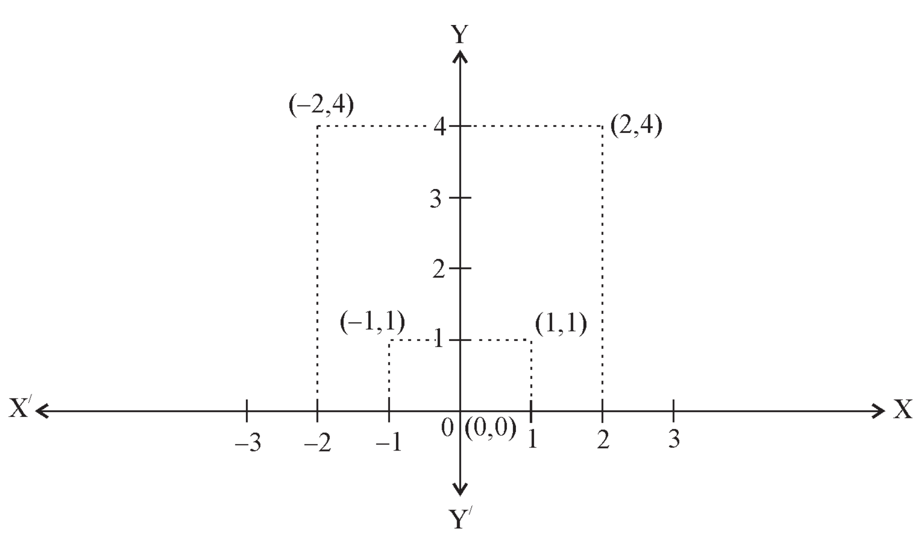
iii) তীর চিহ্ন নির্দেশক চিত্রের সাহায্যে :

ধরো $R = \{(1,2), (2,4), (3,2), (1,3), (3,4)\}$ হলো সেট $A = \{1,2,3,4,5\}$ থেকে সেট $B = \{2,3,4,5,6,7\}$-তে একটি সম্বন্ধ। তাহলে, সম্বন্ধটিকে নিম্নের তীর চিহ্ন বিশিষ্ট চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা যায় —



iv) জালি (Lattice) বা স্থানাঙ্কতলে উপস্থাপন পদ্ধতি :

যদি সেট $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ থেকে সেট $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$-তে একটি সম্বন্ধ $R =\{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}$ হয়, তবে R-কে নিম্নলিখিত lattice-এর মাধ্যমে উপস্থাপন করা যেতে পারে



- **বিভিন্ন প্রকারের সম্বন্ধ :**

    i) শূন্য সম্বন্ধ : যেকোনো সেট A-এর জন্য, $\phi \subset A\times A$

    ii) সার্বিক সম্বন্ধ : যেকোনো সেট A-এর জন্য, $A\times A \subseteq A\times A$

    iii) অভেদ সম্বন্ধ : $I_A = \{(a,a) : a\in A\}$

    iv) স্বসম সম্বন্ধ : $aRa, \quad a\in A.$

    v) প্রতিসম সম্বন্ধ : $aRb \Rightarrow bRa, \quad a, b\in A$

    vi) বি-প্রতিসম সম্বন্ধ : aRb এবং $bRa \Rightarrow a = b, \quad a, b\in A$

    vii) সংক্রমণ সম্বন্ধ : $(a,b)\in R$ এবং $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R, \quad a,b,c\in A$

    viii) সমতুল্য সম্বন্ধ : সম্বন্ধ R, সেট A-এর উপর একটি সমতুল্য সম্বন্ধ হবে যদি এটি স্বসম, প্রতিসম ও সংক্রমণ সম্বন্ধ হয়।

    ix) আংশিক ক্রমের সম্বন্ধ : যদি R, সেট A-এর উপর একসাথে স্বসম, প্রতিসম ও বি-প্রতিসম সম্বন্ধ হয়।

    x) সমগ্র ক্রমের সম্বন্ধ : যদি R, সেট A-এর উপর আংশিক ক্রমের সম্বন্ধ হয়।

- **কিছু প্রয়োজনীয় ফলাফল :**

    যেকোনো চারটি সেট A, B, C ও D - এর জন্য

    i) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

    ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

    iii) $A\times(B-C) = (A\times B) - (A\times C)$

    iv) $A\times B = B\times A \Leftrightarrow A=B$

    v) যদি $A\subseteq B$ হয়, তবে $A\times A\subseteq(A\times B)\cap(B\times A)$

    vi) যদি $A\subseteq B$ হয়, তবে $A\times C\subseteq B\times C$

    vii) যদি $A\subseteq B$ এবং $C\subseteq D$ হয়, তবে $A\times C\subseteq B\times D$

    viii) $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

    ix) $A\times(B'\cup C')' = (A\times B)\cap(A\times C)$

    x) $A\times(B'\cap C')' = (A\times B)\cup(A\times C)$

    xi) যদি A ও B সেট দুটিতে n-সংখ্যক সাধারণ পদ থাকে, তবে $A\times B$ ও $B\times A$ সেটদ্বয়ে n^2 সংখ্যক সাধারণ পদ থাকবে।

    xii) অ-শূন্য সেট A-এর জন্য, $A\times B = A\times C \Rightarrow B=C$।

    xiii) $A\times\phi = \phi$ এবং $\phi\times A = \phi$

xiv) যদি $A \neq B$ হয়, তবে $A \times B \neq B \times A$

- যদি A সেট থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ R হয়, তবে R সম্বন্ধের বিপরীত সম্বন্ধকে আমরা R^{-1} দ্বারা প্রকাশ করি এবং R^{-1} হল B থেকে A সেটে একটি সম্বন্ধ যা নিম্নলিখিতরূপে সংজ্ঞাত হয় :

  $R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$

  এছাড়া, R-এর সংজ্ঞার অঞ্চল = R^{-1}-এর পাল্লা

  এবং R-এর পাল্লা = R^{-1}-এর সংজ্ঞার অঞ্চল।

- **অপেক্ষক/চিত্রণ :**

  A সেট থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ R-কে একটি অপেক্ষক বলা হবে যদি R-এ ক্রমযুগল গুলোর প্রথম পদের পুনরাবৃত্তি না হয়। অন্যভাবে, অপেক্ষক f হল নির্দিষ্ট একটি নিয়ম যা A সেটের প্রত্যেক পদের সঙ্গে B সেটের একটি অনন্য পদকে সংযুক্ত করে এবং এটিকে $f : A \rightarrow B$ বা $A \xrightarrow{f} B$ আকারে প্রকাশ করা হয়।

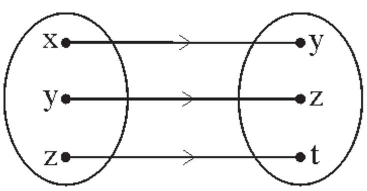
  উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক $A = \{x,y,z\}$, $B=\{y,z,t\}$ এবং f_1, f_2 ও f_3 হল $A \times B$ এর তিনটি উপসেট যা নিম্নে প্রদত্ত :

  $f_1 = \{(x,y), (y,z), (z,t)\}$

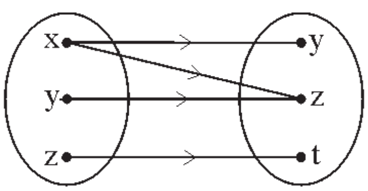
  $f_2 = \{(x,y), (x,z), (y,z), (z,t)\}$

  $f_3 = \{(x,z), (y,t)\}$

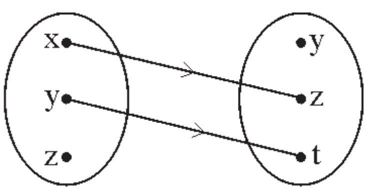
  এখানে f_1 হল A থেকে B-তে একটি অপেক্ষক। কিন্তু f_2 ও f_3 অপেক্ষক নয়। আমরা, f_1, f_2 ও f_3 -কে নিম্নের তীর চিহ্ন বিশিষ্ট চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করতে পারি।



f_1



f_2



f_3

- যদি $f : A \rightarrow B$ হয়, তবে A সেটকে বলা হবে অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল এবং B সেটকে বলা হবে ওই অপেক্ষকটির উপঅঞ্চল। অপেক্ষকের অন্তর্গত সমস্ত ক্রমযুগলের দ্বিতীয় পদগুলোকে নিয়ে গঠিত সেটকে বলা হবে অপেক্ষকটির প্রসার বা পাল্লা। পাল্লা হল উপঅঞ্চলের একটি উপসেট।

  যেমন, ধরো $A = \{2,3,5,7,11\}$ ও $B = \{1,2,3,....,200\}$ হল দুটি সেট এবং $f : A \rightarrow B$ যেখানে $f = \{(2,4), (3,9), (5,25), (7,49), (11,121)\}$

  তাহলে, f-এর সংজ্ঞার অঞ্চল $(D_f) = A$

  f-এর উপঅঞ্চল = B

এবং $\quad$ f -এর পাল্লা (R_f) = {4, 9, 25, 49, 121}

- যদি $f : A \to B$ এবং সেট A-এর যে-কোনো একটি পদ x, একটি নির্দিষ্ট নিয়ম 'f' মেনে, B-এর একটি পদ y-কে সংযুক্ত করে, তবে 'x' কে বলা হবে স্বাধীন চল ও 'y' কে বলা হবে অধীন চল। অন্যভাবে, y-কে x-এর প্রতিবিম্ব অথবা x-কে y-এর প্রাক-প্রতিবিম্ব বলা হয়।

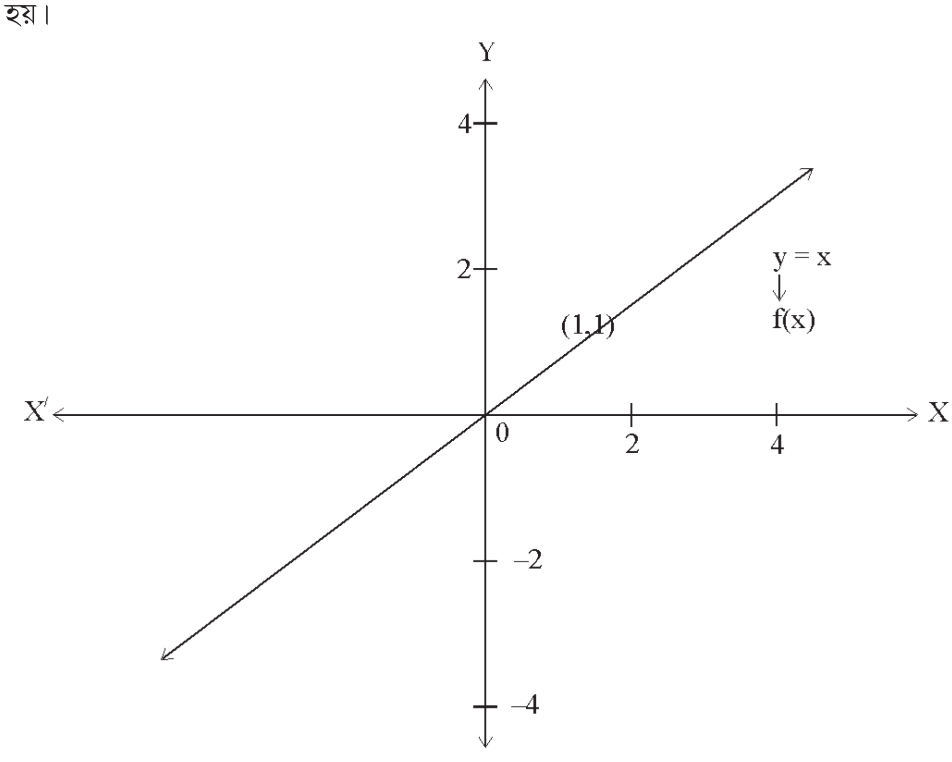
- দুটি চিত্রণ f এবং g-কে সমান বলা হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি —
  a) f-এর ক্ষেত্র (D_f) = g-এর ক্ষেত্র (D_g)
  b) f -এর উপঅঞ্চল = g -এর উপঅঞ্চল এবং
  c) সব $x \in D_f \cap D_g$ -এর জন্য $f(x) = g(x)$ হয় এবং আমরা এটিকে $f = g$ আকারে লিখতে পারি।

- একটি অপেক্ষক যার ক্ষেত্র ও উপক্ষেত্র হল বাস্তব সংখ্যার সেট তাকে বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক বলে।

- **কিছু আদর্শ অপেক্ষক এবং তাদের লেখচিত্র :**

  a) অভেদ অপেক্ষক :

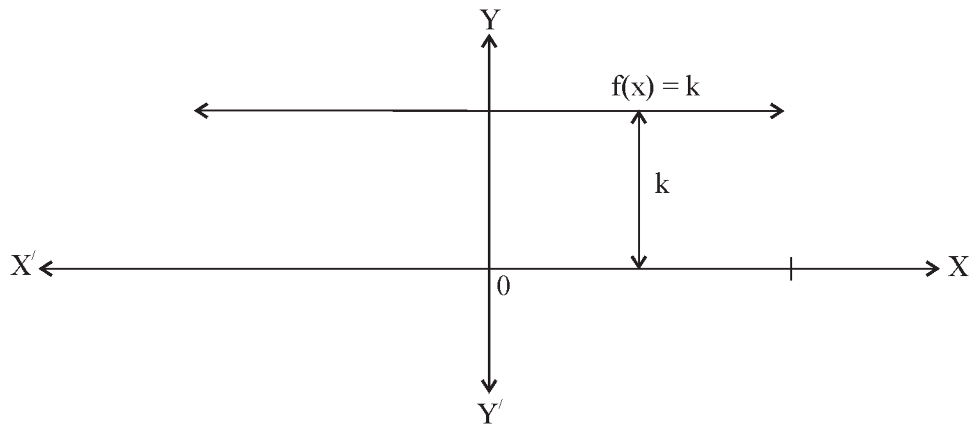
  $f : R \to R$ অপেক্ষকটি এরূপ যে $f(x) = x$, সব $x \in R$ এর জন্য। এধরণের অপেক্ষককে অভেদ অপেক্ষক বলা হয়।



$D_f = R$, $\quad R_f = R$

b) ধ্রুবক অপেক্ষক :

$f : R \to R$ অপেক্ষকটি এরূপে সংজ্ঞাত যে $f(x) = k, \ \forall x \in R$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। এধরণের অপেক্ষককে ধ্রুবক অপেক্ষক বলা হয়।



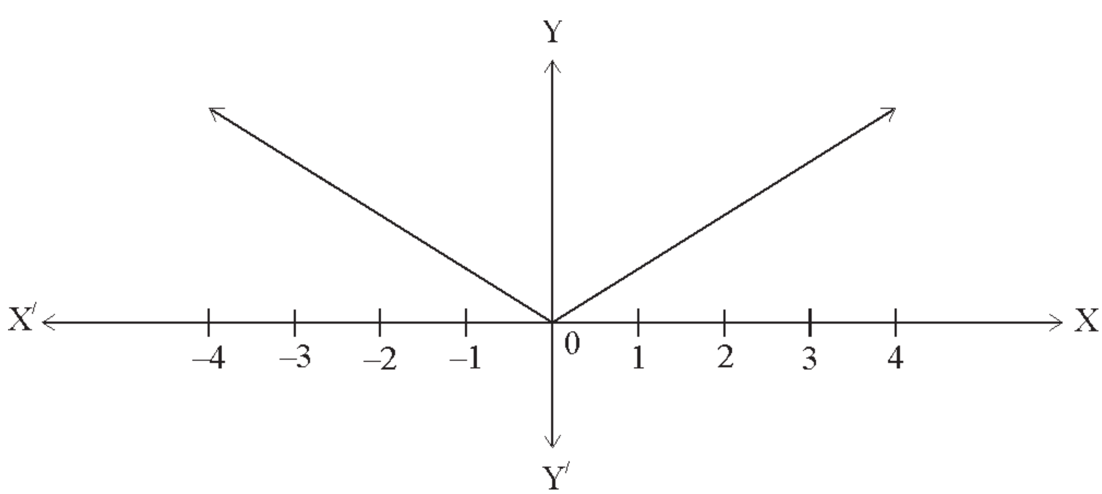
$$D_f = R, \quad R_f = \{k\}$$

c) মডিউলাস বা পরমমান অপেক্ষক :

$f : R \to R$ অপেক্ষকটি যদি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয়

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x, & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

এধরনের অপেক্ষককে মডিউলাস বা পরমমান অপেক্ষক বলা হয়।



$$D_f = R, \ R_f = R^+ \cup \{0\}$$

ধর্মাবলী :

i) কোনো বাস্তব x এর জন্য, $\sqrt{x^2} = |x|$

ii) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

iii) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ অথবা $x \ge a$

iv) $a \le |x| \le b \Leftrightarrow x \in [-b, -a] \cup [a, b]$

v) $a < |x| < b \Leftrightarrow x \in (-b, -a) \cup (a, b)$

vi) বাস্তব সংখ্যা x ও y-এর জন্য, আমরা জানি

$|x \pm y| \le |x| + |y|$

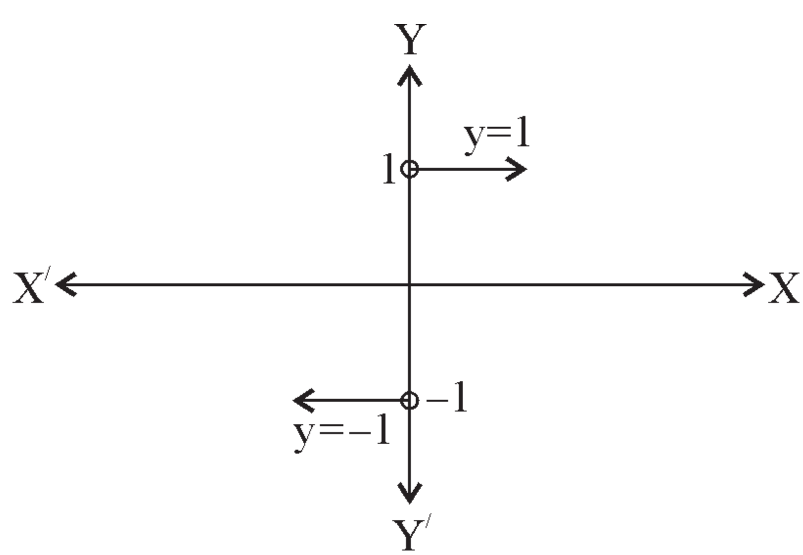
$|x \pm y| \ge \big||x| - |y|\big|$

d) সিগনাম অপেক্ষক :

কোনো অপেক্ষক $f : R \to R$ যদি নিম্নরূপে সংজ্ঞাত হয়

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

তবে এ ধরনের অপেক্ষককে সিগনাম অপেক্ষক বলা হয়।

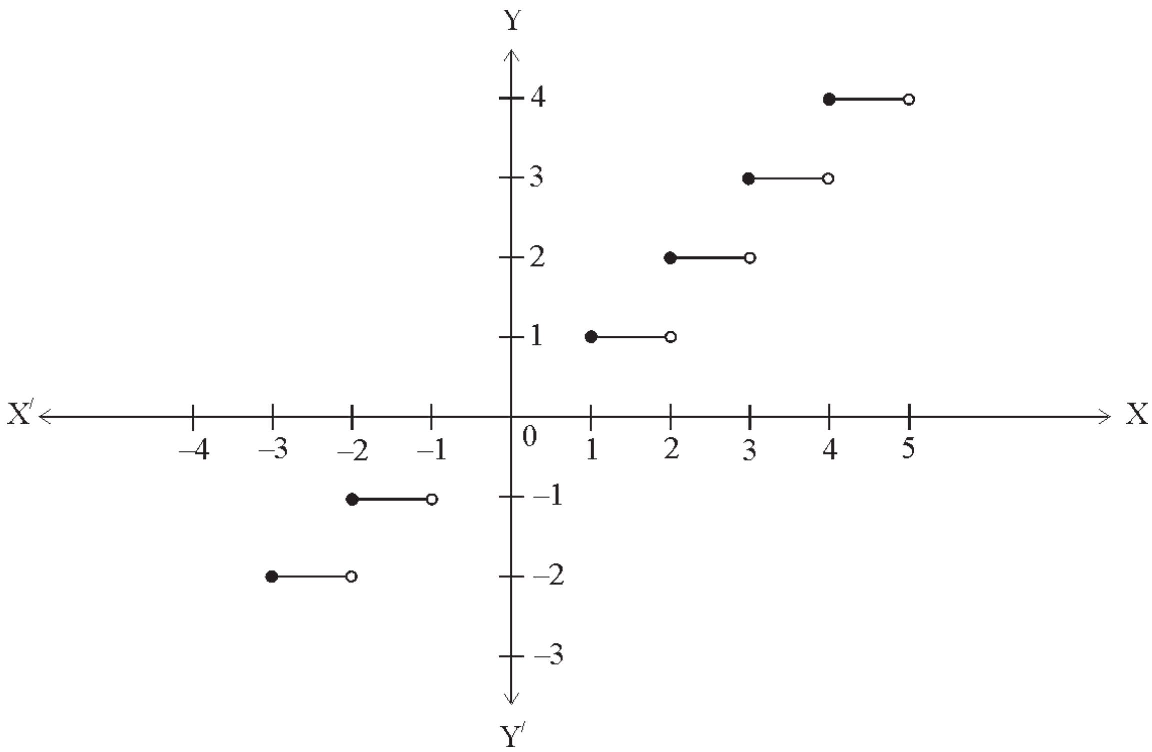


$D_f = R,\ R_f = \{-1, 0, 1\}$

e) বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক :

$f : R \to R$ হল এমন একটি অপেক্ষক যেখানে $f(x) = [x]$ বা $\lfloor x \rfloor$ হল সবথেকে বড় অখণ্ড সংখ্যা যা x-এর থেকে ছোট অথবা সমান। এধরণের অপেক্ষককে বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক বলা হয়।

যেমন : $[2.35] = 2$, $[-1.75] = -2$



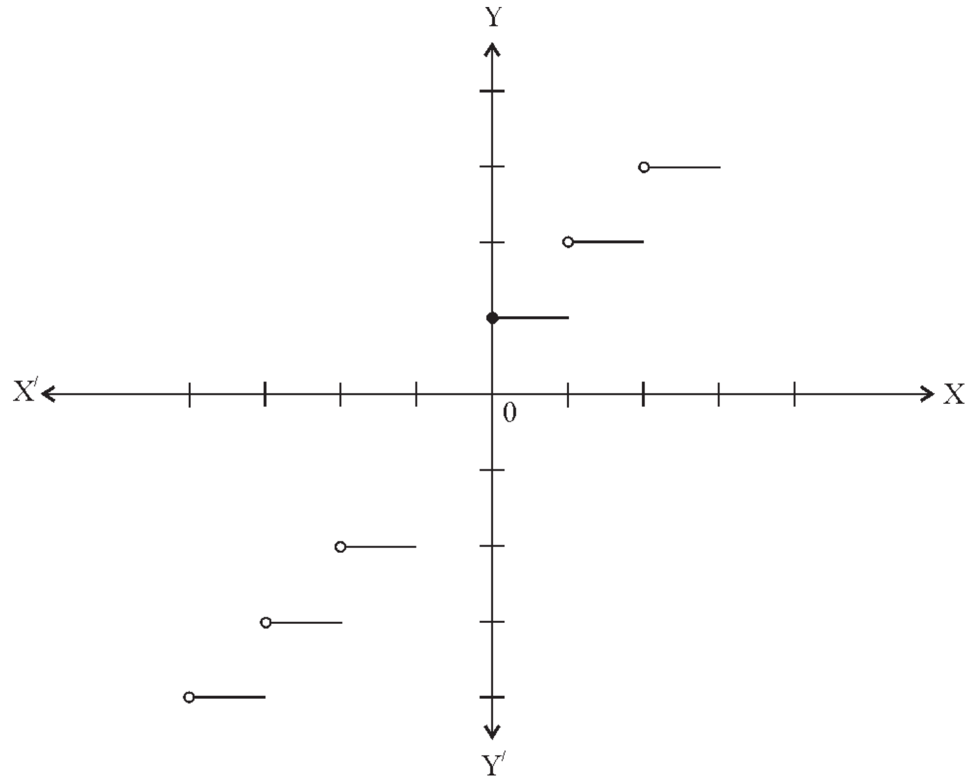
$$
\begin{aligned}
[x] &= -1,\ \text{যখন}\ -1 \le x < 0 \\
&= 0,\ \text{যখন}\ 0 \le x < 1 \\
&= 1,\ \text{যখন}\ 1 \le x < 2\ \text{ইত্যাদি।}
\end{aligned}
$$

$D_f = R,\ R_f = Z$

f) ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক :

$f : R \to R$ একটি অপেক্ষক, যেখানে $f(x) = \lceil x \rceil$ হল সবথেকে ছোট অখণ্ড সংখ্যা যা x-এর থেকে বড় অথবা সমান। এধরণের অপেক্ষককে ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক বলা হয়।

যেমন : $\lceil 4.7 \rceil = 5$, $\lceil -7.2 \rceil = -7$



$D_f = R,\ R_f = Z$

$\lceil x \rceil$ = 1, যখন $0 < x \le 1$

= 2, যখন $1 < x \le 2$

= 0, যখন $-1 < x \le 0$

= -1, যখন $-2 < x \le -1$

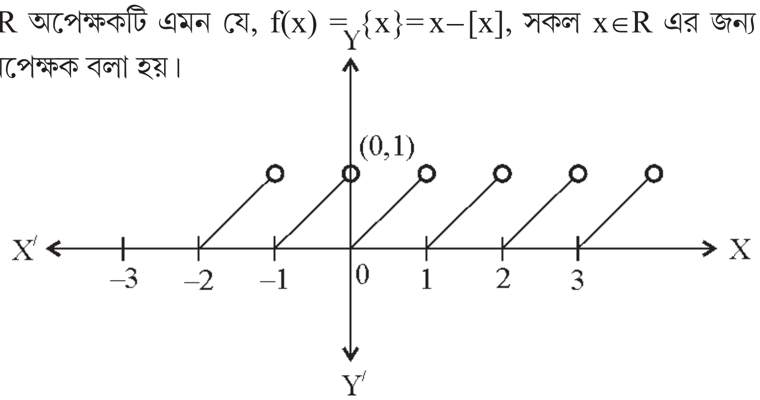
g) মূলদ অপেক্ষক :

একটি অপেক্ষক $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, যেখানে $p(x)$ ও $q(x)$ হল বহুপদী অপেক্ষক এবং $q(x) \neq 0$ । এধরণের অপেক্ষককে মূলদ অপেক্ষক বলা হয়।

$D_f = R - \{x : q(x) = 0\}$

h) ভগ্নাংশ অপেক্ষক :

$f: R \to R$ অপেক্ষকটি এমন যে, $f(x) = \{x\} = x - [x]$, সকল $x \in R$ এর জন্য। এধরণের অপেক্ষককে ভগ্নাংশ অপেক্ষক বলা হয়।



$$D_f = R, \ R_f = [0,1)$$

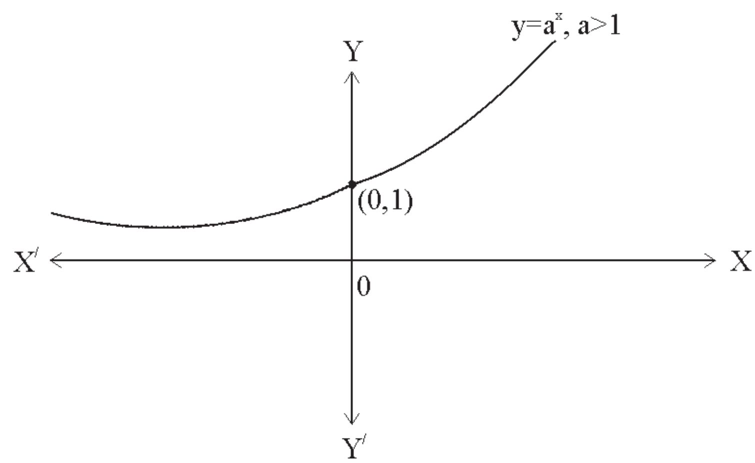
i) সূচকীয় অপেক্ষক :

$f: R \to R$, যেখানে $f(x) = a^x$, $(a>0, \ a \neq 1)$ অপেক্ষকটিকে সূচকীয় অপেক্ষক বলা হয়।

$D_f = R, \quad R_f = (0, \infty)$

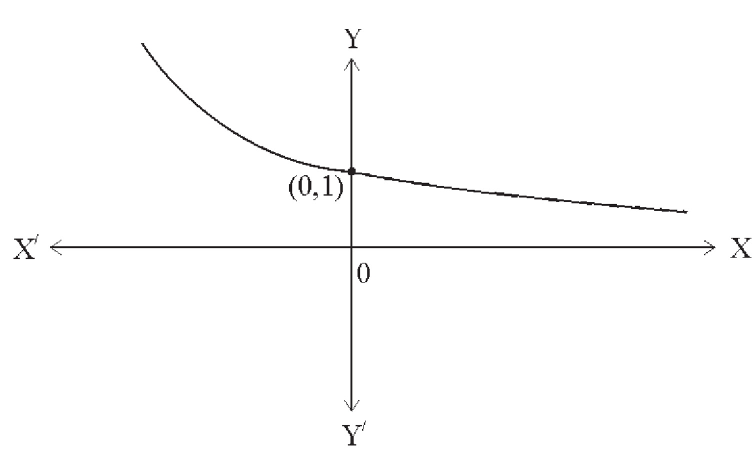
<u>ক্ষেত্র</u>-I: যখন $a>1$

$$f(x) = a^x \begin{cases} <1, & x<0 \\ =1, & x=0 \\ >1, & x>0 \end{cases}$$



<u>ক্ষেত্র</u>-2 : যখন $0<a<1$

$$f(x) = a^x \begin{cases} >1, & x<0 \\ =1, & x=0 \\ <1, & x>0 \end{cases}$$



মন্তব্য : আমরা জানি, $2<e<3$। সুতরাং, $a>1$-এর জন্য $f(x)=e^x$ ও $f(x)=a^x$ -এর লেখচিত্র অভিন্ন এবং $0<a<1$-এর জন্য $f(x)=e^{-x}$ ও $f(x)=a^x$ -এর লেখচিত্র অভিন্ন।

j) লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক :

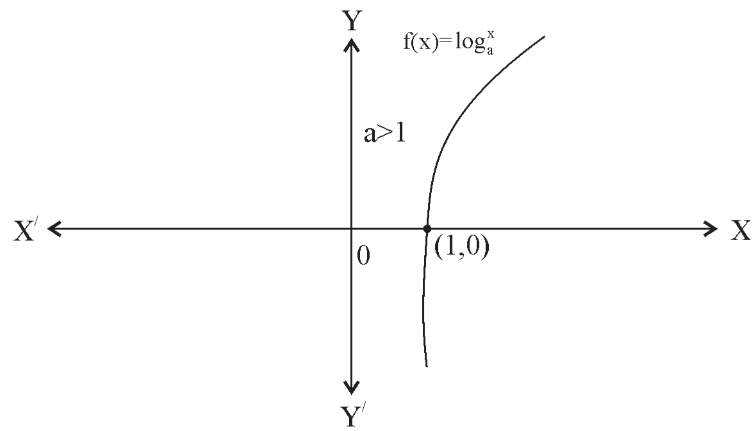
$f: R \to R$, যেখানে $f(x)=\log_a^x$ $(x>0,\ a>0$ ও $a\neq 1)$ অপেক্ষকটিকে লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক বলা হয়।

লগারিদ্‌মিক ও সূচকীয় অপেক্ষক দুটি পরস্পরের বিপরীত অপেক্ষক অর্থাৎ, $\log_a^x = y \Leftrightarrow x = a^y$ ।

$D_f = (0,\infty)$, $R_f=R$

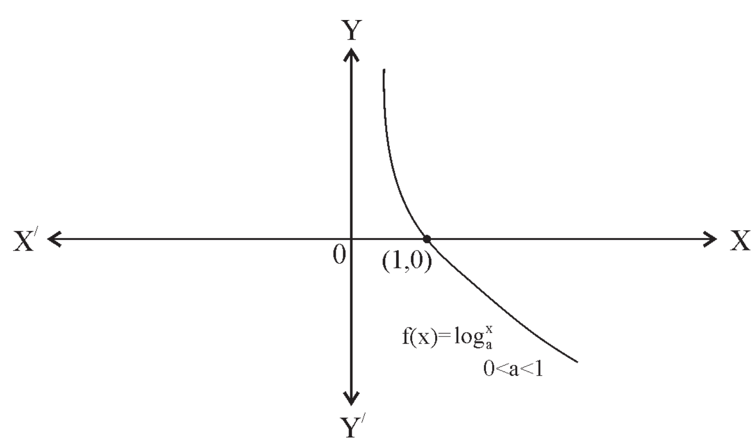
ক্ষেত্র-I: যখন $a>1$,

$$y=\log_a^x \begin{cases} <0\,,\ 0<x<1 \\ =0\,,\ x=1 \\ >0\,,\ x>1 \end{cases}$$



ক্ষেত্র-II : যখন $0<a<1$

$$y=\log_a^x \begin{cases} >0,\ 0<x<1 \\ =0,\ x=1 \\ <0\,,\ x>1 \end{cases}$$



ধর্মাবলী :

i) $\log_a 1=0$, যেখানে $a>0,\ a\neq 1$

ii) $\log_a a=1$, যেখানে $a>0,\ a\neq 1$

iii) $\log_a(xy)=\log_a|x|+\log_a|y|$, যেখানে $a>0,\ a\neq 1$ এবং $xy>0$

iv) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a|x|-\log_a|y|$, যেখানে $a>0,\ a\neq 1$ এবং $\dfrac{x}{y}>0$

v) $\log_a (x)^n = n \log_a |x|$, যেখানে a>0, a≠1 এবং x^n>0

vi) $a^{\log_a^x} = x$

vii) $\log_a^x = \dfrac{1}{\log_x^a}$, a>0, a≠1 এবং x>0, x≠1 এর জন্য

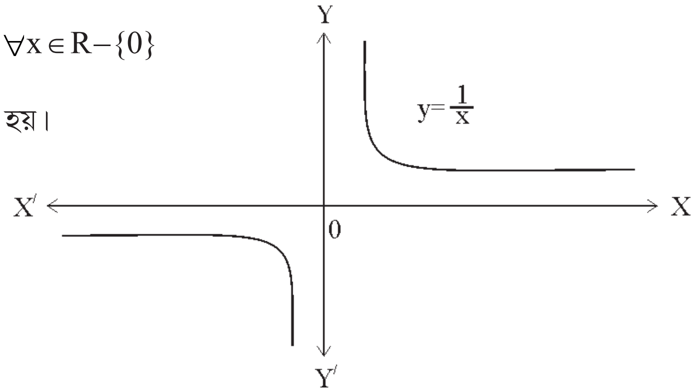
viii) $\log_a^x = \log_b^x \times \log_a^b$

k) অন্যোন্যক অপেক্ষক :

$f : R-\{0\} \to R$, যেখানে $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in R-\{0\}$

অপেক্ষকটিকে অন্যোন্যক অপেক্ষক বলা হয়।

$D_f = R-\{0\}$, $R_f = R-\{0\}$

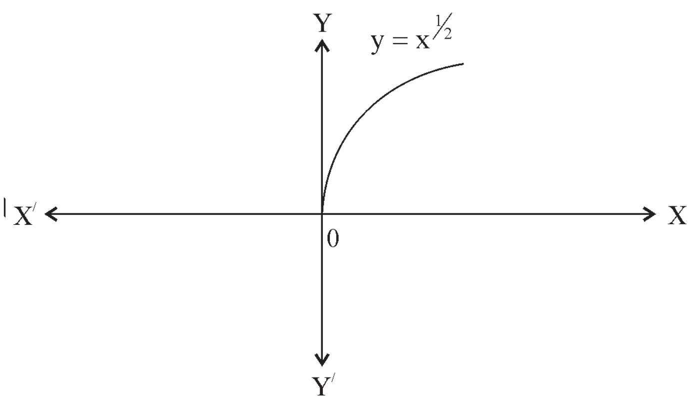


***l*) বর্গমূল অপেক্ষক :**

$f : R^+ \to R$, যেখানে $f(x) = +\sqrt{x}$

অপেক্ষকটিকে বর্গমূল অপেক্ষক বলা হয়।

$D_f = [0,\infty)$, $R=[0,\infty)$

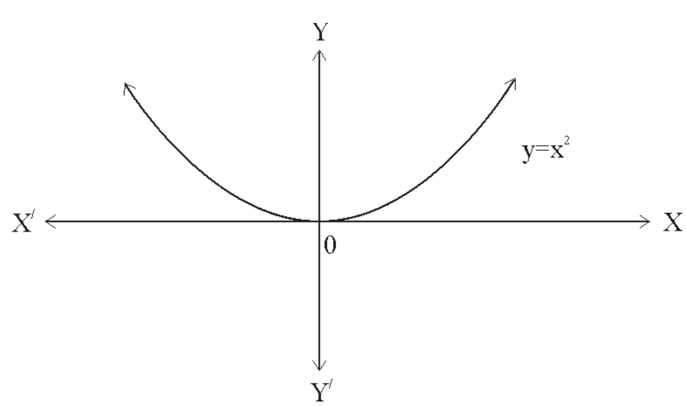


m) বর্গ অপেক্ষক :

$f : R \to R$, যেখানে $f(x) = x^2$

অপেক্ষকটিকে বর্গ অপেক্ষক বলা হয়।

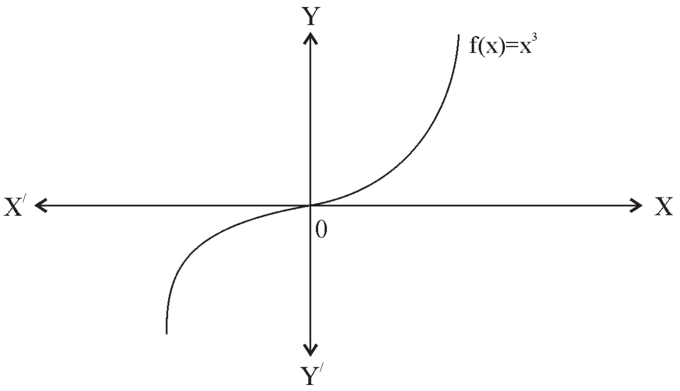
$D_f = R$, $R_f = [0,\infty)$



n) ঘন অপেক্ষক :

$f: R \to R$, যেখানে $f(x) = x^3$

অপেক্ষকটিকে ঘন অপেক্ষক বলা হয়।

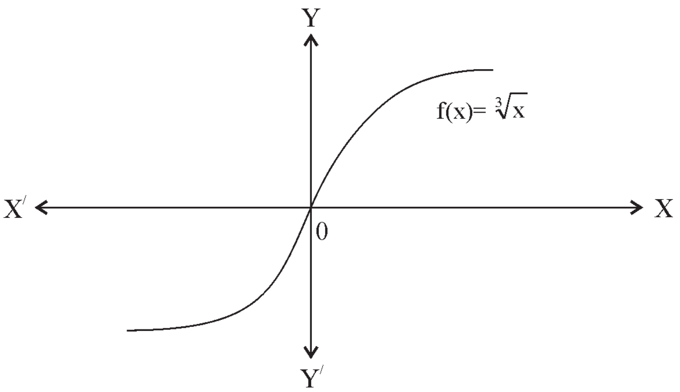


$D_f = R_f = R$

o) ঘনমূল অপেক্ষক :

$f: R \to R$, যেখানে $f(x) = x^{1/3}$

অপেক্ষকটিকে ঘণমূল অপেক্ষক বলা হয়।



$D_f = R_f = R$

p) যুগ্ম অপেক্ষক :

একটি অপেক্ষক ‘f’ কে যুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যদি $f(-x) = f(x)$ হয়। যেমন : x^2, $\cos x$ ইত্যাদি।

q) অযুগ্ম অপেক্ষক :

একটি অপেক্ষক ‘f’ কে যুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যদি $f(-x) = -f(x)$ হয়। যেমন : x^3, $\sin^7 x$ ইত্যাদি।

- **অপেক্ষকের বীজগণিত :**

যদি ‘f’ ও ‘g’ দুটি প্রদত্ত অপেক্ষক যাদের সংজ্ঞার ক্ষেত্র যথাক্রমে D_1 ও D_2 হয়, তবে

i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

ii) $(fg)(x) = f(x).g(x)$

iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ g(x) \neq 0$,

iv) $(cf)(x) = cf(x)$ যেখানে c হল একটি বাস্তব স্কেলার।

এখানে, $f \pm g$, fg এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল $D_1 \cap D_2$ এবং $\dfrac{f}{g}$ এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল $D_1 \cap D_2 -$ {g(x)-এর শূন্য}।

অনুশীলনী - 2

ক - বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহু বিকল্পধর্মী প্রশ্নাবলী :

i). যদি P সেট থেকে Q সেটে সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক R হয়, তবে

a) $R = P\cup Q$ b) $R = P\cap Q$ c) $R\subseteq P\times Q$ d) $R\subseteq Q\times P$

ii) যদি সেট X-এর পদসংখ্যা x, সেট Y-এর পদসংখ্যা y হয়, তবে X×Y এর পদসংখ্যা হবে

a) $x+y$ b) $x+y-1$ c) x^2 d) xy

iii) যদি $R=\{(x,y): x, y\in z,\ x^2+y^2\leq 4\}$ সেট Z-এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক হয়, তবে R-এর সংজ্ঞার ক্ষেত্র হবে —

a) $\{0, 1, 2\}$ b) $\{0, -1, -2\}$ c) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

iv) n-সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটি সসীম সেট A-এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক যদি R হয়, তবে সেট A-তে সম্বন্ধের সংখ্যা হবে —

a) 2^n b) 2^{n^2} c) n^2 d) n^n

v) যদি $A = \{1,2,4\}$, $B = \{2,4,5\}$, $C = \{2,5\}$ হয়, তবে $(A-B)\times(B-C)$ হবে —

a) $\{(1,4), (2,3)\}$ b) $\{(1,4)\}$ c) $\{(1,2), (1,5), (2,5)\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

vi) সেট $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$-এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক যদি R হয়, যেখানে $xRy\Leftrightarrow y=3x$, তবে R =

a) $\{(3,1), (6,2), (8,2), (9,3)\}$ b) $\{(3,1), (6,2), (9,3)\}$

c) $\{(1,3), (2,6), (3,9)\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

vii) ধরা যাক $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5\}$। A থেকে B সেটে সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক যদি R হয় যেখানে $R = \{(1,5), (2,3), (3,3), (2,5)\}$, তবে R^{-1} =

a) $\{(3,3), (3,1), (5,2)\}$ b) $\{(5,1), (3,2), (3,3), (5,2)\}$

c) $\{(1,3), (5,2), (5,1)\}$ d) এদের কোনোটিই নয়

viii) A ও B দুটি সেটে যদি 3টি সাধারণ পদ থাকে এবং যদি $n(A) = 5, n(B)=4$ হয়, তবে $n[(A\times B)\cap(B\times A)]=$

a) 8 b) 12 c) 9 d) এদের কোনোটিই নয়

ix) ধরো R হল ওইসব বিন্দুগুলোর সেট যেগুলো a ও b (a, b>1) বাহুবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে অবস্থিত এবং আয়তক্ষেত্রটির দুটি বাহু ধনাত্মক X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত। তবে –

a) $R=\{(x,y): 0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b\}$ b) $R=\{(x,y): 0\leq x< a,\ 0\leq y\leq b\}$

c) $R=\{(x,y): 0< x< a,\ 0< y< b\}$ d) $R=\{(x,y): 0\leq x\leq a,\ 0< y< b\}$

x) যদি A ও B সেটদ্বয় এরূপে সংজ্ঞায়িত যে

$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=\frac{1}{x}, x\neq 0, x\in R\right\}$,

$B=\{(x,y)\,|\,y=-x, x\in R\}$ হয়, তবে

a) $A\cap B=A$ b) $A\cap B=\phi$ c) $A\cap B=B$ d) $A\cup B=A$

xi) যদি $(x-2, y+5)=\left(2, \frac{1}{2}\right)$ হয়, তবে x ও y -এর মান হবে

a) $x=-4,\ y=\frac{14}{3}$ b) $x=-4,\ y=-\frac{14}{3}$ c) $x=4,\ y=\frac{14}{3}$ d) $x=4,\ y=-\frac{14}{3}$

xii) সম্বন্ধ $R=\{(x,|x|)\,|\,x\in R\}$-এর পাল্লা বা প্রসার হবে —

a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, \infty)$

xii) $f(x)=\frac{1}{1-2\cos x}$ -এর পাল্লা হবে —

a) $\left[\frac{1}{3},1\right]$ b) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ c) $(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$ d) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

xiv) যদি $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ হয়, তবে

a) $f(xy)=f(x).f(y)$ b) $f(xy)\geq f(x).f(y)$ c) $f(xy)=f(x)+f(y)$ d) $f(xy)\leq f(x).f(y)$

xv) $\sqrt{c^2-x^2}$ $(c>0)$ এর সংজ্ঞার অঞ্চল হল —

a) $(-c, c)$ b) $[-c, c]$ c) $[0, c]$ d) $(-c, 0]$

xvi) যদি $f(x)=px+q$ হয়, যেখানে p ও q হল পূর্ণসংখ্যা, $f(-1)=-5$ এবং $f(3)=3$, তবে p ও q এর মান হবে

a) $p=-3, q=-1$ b) $p=2, q=-3$ c) $p=0, q=2$ d) $p=2, q=3$

xvii) যে সংজ্ঞার অঞ্চলে $f(x)=3x^2-1$ এবং $g(x)=3+x$ অপেক্ষক দুটি সমান, সেটি হল —

a) $\left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ b) $\left[-1, \frac{4}{3}\right]$ c) $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$ d) $\left[-1, \frac{4}{3}\right)$

xviii) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হল —

a) $R-\{3,-2\}$ b) $R-\{-3,2\}$ c) $R-[3,-2]$ d) $R-\{-3,-2\}$

xix) f অপেক্ষকটি প্রদত্ত যেখানে $f(x) = 2-|x-5|$ তাহলে f -এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও পাল্লা হবে

a) সংজ্ঞার অঞ্চল = R^+, পাল্লা = $(-\infty, 1]$ b) সংজ্ঞার অঞ্চল=R, পাল্লা = $(-\infty, 2]$

c) সংজ্ঞার অঞ্চল = R, পাল্লা = $(-\infty, 2)$ d) সংজ্ঞার অঞ্চল = R^+, পাল্লা = $(-\infty, 2]$

xx) $f(x)=\sqrt{4-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার অঞ্চল হবে

a) $(-\infty,-1)\cup(1,4]$ b) $(-\infty,-1]\cup(1,4]$ c) $(-\infty,-1)\cup[1,4]$ d) $(-\infty,-1]\cup[1,4)$

xxi) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{5-x}$ অপেক্ষকটির পাল্লা হল

a) {5, –5} b) {2, –2} c) {1, –1} d) এদের কোনোটিই নয়

xxii) নীচের কোন্‌টি অপেক্ষক নয়?

a) $\{(x,y): x, y\in R,\ x^2=y\}$ b) $\{(x,y): x, y\in R,\ y^2=x\}$

c) $\{(x,y): x, y\in R,\ x=y^3\}$ d) $\{(x,y): x, y\in R,\ y=x^3\}$

xxiii) $-\pi/2<x<\pi/2$ এর জন্য $f(x) = \cos[x]$, এর পাল্লা হবে —

a) {–1, 1, 0} b) {cos1, cos2, 1} c) {cos1, –cos1, 1} d) [–1,1]

xxiv) যদি $x\neq1$ এবং $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ একটি অপেক্ষক হয়, তবে $f(f(f(2)))$ হবে

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

xxv) সকল অ-শূন্য x-এর জন্য যদি $3f(x)+5f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-3$ হয়, তবে f(x)=

a) $\dfrac{1}{14}\left(\dfrac{3}{x}+5x-6\right)$ b) $\dfrac{1}{14}\left(-\dfrac{3}{x}+5x-6\right)$ c) $\dfrac{1}{14}\left(-\dfrac{3}{x}+5x+6\right)$ d) এদের কোনোটিই নয়

2. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী :

i) নীচের প্রদত্ত সম্বন্ধগুলো কী অপেক্ষক হবে? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

a) {(4,6), (3,9), (–11,6), (3,11}

b) {(x,x) : x হল একটি বাস্তব সংখ্যা}

c) $\{(n,\frac{1}{n})$: n হল একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}

d) {(x,3) : x হল একটি বাস্তব সংখ্যা}

ii) যদি f ও g দুটি বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক হয়, যেখানে $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2+1$, তবে নিম্নলিখিত গুলো নির্ণয় করো।

a) $f+g$ b) $f-g$ c) fg d) $\frac{f}{g}$

e) $f\left(\frac{1}{2}\right)\times g(14)$ f) $\frac{f(t)-f(5)}{t-5}$, $t \neq 5$ g) $f(3)+g(-5)$

iii) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর সংজ্ঞার অঞ্চল নির্ণয় করো :

a) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ b) $\frac{1}{3x-2}$ c) $4\sin x-3\cos x$ d) $\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$

e) $x|x|$ f) $\frac{1}{\sqrt{x+|x|}}$ g) $\frac{x^3-x+3}{x^2-1}$ h) $[x]+x$

iv) নীচের অপেক্ষকগুলোর প্রসার নির্ণয় করো :

a) $1+3\cos 2x$ b) $\sqrt{16-x^2}$ c) $1-|x-2|$ d) $|x-3|$

e) $\frac{x}{1+x^2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

v) যদি $A=\{-2,2\}$, হয় তবে $A\times A\times A$ নির্ণয় করো।

vi) যদি $A\times B=\{(l,p),(l,q),(m,p),(m,q),(n,p),(n,q)\}$ হয়, তবে A ও B নির্ণয় করো।

vii) যদি $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{f(x).f(x^2)}{1+[f(x)]^2}=\frac{1}{2}$

viii) ধরো A সেটে 3টি পদ ও B সেটে 2টি পদ আছে। সেট A থেকে সেট B-তে কয়টি সম্বন্ধ থাকবে ?

ix) যদি $f(x)=\frac{2x}{1-x^2}$ হয়, তবে $f(\tan\theta)$ নির্ণয় করো।

x) R সম্বন্ধটির ক্ষেত্র ও পাল্লা নির্ণয় করো যেখানে $R=\left\{(x,y): y=x+\frac{6}{x},\ x,y\in N,\ x<6\right\}$

xi) দেখাও যে, $f(x)=x^2+\cos x$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক।

xii) দেখাও যে, $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

xiii) $f(x)=4\sin x-3\cos x$ অপেক্ষকটির পাল্লা নির্ণয় করো।

xiv) যদি $P=\{x: x<3,\ x\in N\}$, $Q=\{x: x\leq 2,\ x\in W\}$ হয়, তবে $(P\cup Q)\times(P\cap Q)$ নির্ণয় করো।

xv) ধরা যাক f ও g হল দুটি বাস্তব অপেক্ষক যেখানে $f(x)=2x+1$ এবং $g(x) = 4x-7$। x-এর কোন্ বাস্তব মানের জন্য $f(x)<g(x)$ হবে ?

xvi) ধরা যাক $n(A) = m, n(B) = n$। তাহলে, A থেকে B-তে সংজ্ঞায়িত মোট অ-শূন্য সম্বন্ধের সংখ্যা নির্ণয় করো।

xvii) $[x]^2-5[x]+6 = 0$ এর সমাধান সেটটি নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্নাবলী : (প্রতিটি প্রশ্নের মান ৩ নম্বর)

i) ধরো $f : R\to R$ যেখানে $f(x) = x^2+3$। তাহলে

a) $\{x : f(x) = 28\}$

b) f-এর সাপেক্ষে 39-এর প্রাক্-প্রতিবিম্ব নির্ণয় করো।

ii) ধরা যাক $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ এবং R হল A সেটের উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্বন্ধ যেখানে $R = \{(a,b) : a,b\in A$, a দ্বারা b বিভাজ্য$\}$

a) R-কে রস্টার আকারে লেখো।

b) R-এর পাল্লা নির্ণয় করো।

iii) ধরো R হল N-এর উপর সংজ্ঞায়িত একটি সম্পর্ক যেখানে $R = \{(x, y)\in N\times N : x + 2y = 39\}$। R-এর সংজ্ঞার অঞ্চল ও পাল্লা নির্ণয় করো।

iv) $g = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ কি একটি অপেক্ষক? যদি এটি $g(x) = \alpha x+\beta$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে α ও β-এর কোন্ মান নির্ধারণ করা উচিত ?

v) প্রদত্ত অপেক্ষক $f : R-\{1\}\to R,\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং অপেক্ষক $g : R\to R,\ g(x) = x+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f ও g অপেক্ষক দুটি সমান কিনা নির্ণয় করো।

vi) ধরা যাক $A = \{1,2,3\}$, $B=\{3,4\}$ এবং $C = \{4,5,6\}$। $A\times(B\cap C)$ ও $(A\times B)\cup(A\times C)$ নির্ণয় করো।

vii) অ-শূন্য x-এর জন্য, $pf(x)+qf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-5$, যেখানে $p\neq q$। তাহলে f(x) নির্ণয় করো।

viii) যদি $f(x)=\dfrac{5x+3}{4x-5},\ \left(x\neq\dfrac{5}{4}\right)$ হয়, তবে দেখাও যে, $f\{f(x)\}$ একটি অভেদ অপেক্ষক।

ix) যদি $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ হয়, তবে দেখাও যে,

a) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ b) $f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{f(x)}$

x) যদি $A\times B\subseteq C\times D$ এবং $A\times B\neq\phi$ হয়, তবে দেখাও যে, $A\subseteq C$ এবং $B\subseteq D$।

xi) ধরো $f : R\rightarrow R$ যেখানে $f(x) = 2^x$। তাহলে a) $\{x : f(x)=1\}$ নির্ণয় করো। b) $f(x+y) = f(x).f(y)$ সম্পর্কটি সত্য কিনা যাচাই করো।

xii) ধরো $f : R\rightarrow R$, $f(x) = x^2+2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। তাহলে a) $f^{-1}(-6)$ b) $f^{-1}(27)$ নির্ণয় করো।

xiii) যদি $f(x)=y=\frac{ax-b}{cx-a}$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $f(y) = x$।

গ- বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) $f(x) = |x-2|+|2+x|,\ -3 \le x \le 3$ অপেক্ষকটিকে নতুনভাবে সংজ্ঞায়িত করো।

ii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্র ও পাল্লা নির্ণয় করো।

iii) যদি $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x$ অপেক্ষকদ্বয় ক্ষেত্র $R^+\cup\{0\}$-এ সংজ্ঞায়িত হয়, তবে

a) $(f+g)(x)$ b) $(f-g)(x)$ c) $(fg)(x)$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ নির্ণয় কর

iv) যদি $A = \{1,2,3,4,5\}$, $S = \{(x,y) : x\in A,\ y\in A\}$ হয়, তাহলে ওই ক্রমযুগুলের সেটগুলি নির্ণয় করো যেগুলি নিম্নের শর্তগুলোকে সিদ্ধ করে —

a) $x+y = 5$ b) $x+y < 5$ c) $x+y > 8$

v) যদি $A = \{x : x\in w,\ x<2\}$, $b = \{x : x\in N,\ 1<x<5\}$ এবং $C = \{3,5\}$ হয়, তবে a) $A\times(B\cap C)$ b) $A\times(B\cup C)$ নির্ণয় করো।

vi) $f(x)$ অপেক্ষকটির ক্ষেত্র ও পাল্লা নির্ণয় করো যা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত —

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ 1, & x=0\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

এবং এর লেখচিত্রটি অঙ্কন করো।

vii) যদি $f : R\rightarrow R$, $f(x) = [x]$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় যেখানে $[x]$ হল বৃহত্তম পূর্ণসংখ্যা অপেক্ষক, তবে f-অপেক্ষকের

ক্ষেত্র, পাল্লা নির্ণয় করো এবং এর লেখচিত্র অঙ্কন করো।

viii) ধরো, $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1,2,3,4,\dots\dots\dots, 26\}$। নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলো নির্ণয় করো এবং প্রতিটি $f : X \rightarrow Y$ এর জন্য ক্ষেত্র ও পাল্লা নির্ণয় করো।

a) $f(x) = 3x+7$ b) $f(x) = x^2+1$

ix) $f(x) = |x-1|+|1+x|, -2 \le x \le 2$ অপেক্ষকটিকে নতুনভাবে সংজ্ঞায়িত করো এবং এর লেখচিত্র অঙ্কন করো।

x) a) সেট A ={সৎ, হিংস্র}, সেট B ={শান্তি, সমৃদ্ধি, ধ্বংস, ঘৃণা} প্রদত্ত।

$A \times B$ সেটি লেখো। $A \times B$ -এর একটি উপাদান নির্বাচন করো যেটি তুমি তোমার জীবনের মূল্যবোধে রাখতে চাও।

b) একজন শিক্ষার্থীর কঠোর পরিশ্রম ও সাফল্য পরস্পর সম্পর্কযুক্ত অর্থাৎ একটি অপরটির অপেক্ষক। কোনো একটি বিশেষ স্কুলের একাদশ শ্রেণির ছাত্রদের নিয়ে একটি সমীক্ষা পরিচালিত হয়। এই সমীক্ষায় দেখা গেল যে তাদের 80% কঠোর পরিশ্রমী ও 70% সফল। যে-সব শিক্ষার্থীরা কঠোর পরিশ্রমী তাদের তুমি কি উপদেশ দিতে চাও?

<u>উত্তরমালা</u>

ক - বিভাগ

1. i) (c) ii) (d) iii) (c) iv) (b) v) (b) vi) (c) vii) (b) viii) (c) ix) (c)
   x) (b) xi) (d) xii) (c) xiii) (c) xiv) (d) xv) (b) xvi) (b) xvii) (a) xviii) (a)
   xix) (b) xx) (a) xxi) (c) xxii) (b) xxiii) (b) xxiv) (c) xxv) (b)

2. i) (a) না (b) হ্যাঁ (c) হ্যাঁ (d) হ্যাঁ

   ii) (a) x^2+2x+2 (b) $x(2-x)$ (c) $2x^3+x^2+2x+1$ (d) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ (e) $\dfrac{1363}{4}$ (f) $t+5$ (g) 6

   iii) (a) $(-3,3)$ (b) $R-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ (c) বাস্তব সংখ্যা (d) $R-\{2n\pi, n\in I\}$ (e) R (f) R^+
   (g) $R-\{1,-1\}$ (h) R

   iv) (a) $[-2, 4]$ (b) $[-4,4]$ (c) $]-\infty, 1]$ (d) $R^+\cup\{0\}$ (e) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]-\{0\}$ (f) $\left[\frac{1}{3},\infty\right)$

   v) $\{(-2,-2,-2), (-2,-2,2), (-2,2,-2), (2,-2,-2), (-2,2,2), (2,-2,2), (2,2,-2), (2,2,2)\}$

   vi) $A=\{l,m,n\}$, $B=\{p,q\}$ viii) 64 ix) $\tan 2\theta$ (x) ক্ষেত্র $=\{1,2,3\}$, পাল্লা $=\{7,5\}$

   xiii) $[-5, 5]$ (xiv) $(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ xv) $x>4$ xvi) $2^{mn}-1$ xvii) $x\in[2,4)$

খ - বিভাগ

3. i) (a) $\{-5, 5\}$ (b) ± 6
   ii) (a) $R=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\}$
   (b) পাল্লা $= \{1,2,3,4,6\}$
   iii) $D_R = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37\}$ $R_R = \{1,2,\ldots,19\}$
   iv) হ্যাঁ, $\alpha = 2$, $\beta = -1$
   v) সমান হবে না।
   vi) $\{(1,4), (2,4), (3,4)\}$
   $\{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$
   vii) $\dfrac{2p-10x(p-q)-2qx^2}{x\left(p^2-q^2\right)}$
   xi) (a) $\{0\}$ (b) সত্য
   xii) (a) অস্তিত্ব নেই (b) $x = \pm 5$

গ - বিভাগ

4. i) $f(x)\begin{cases} -2x, & -3 \le x < -2 \\ 4, & -2 \le x < 2 \\ 2x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

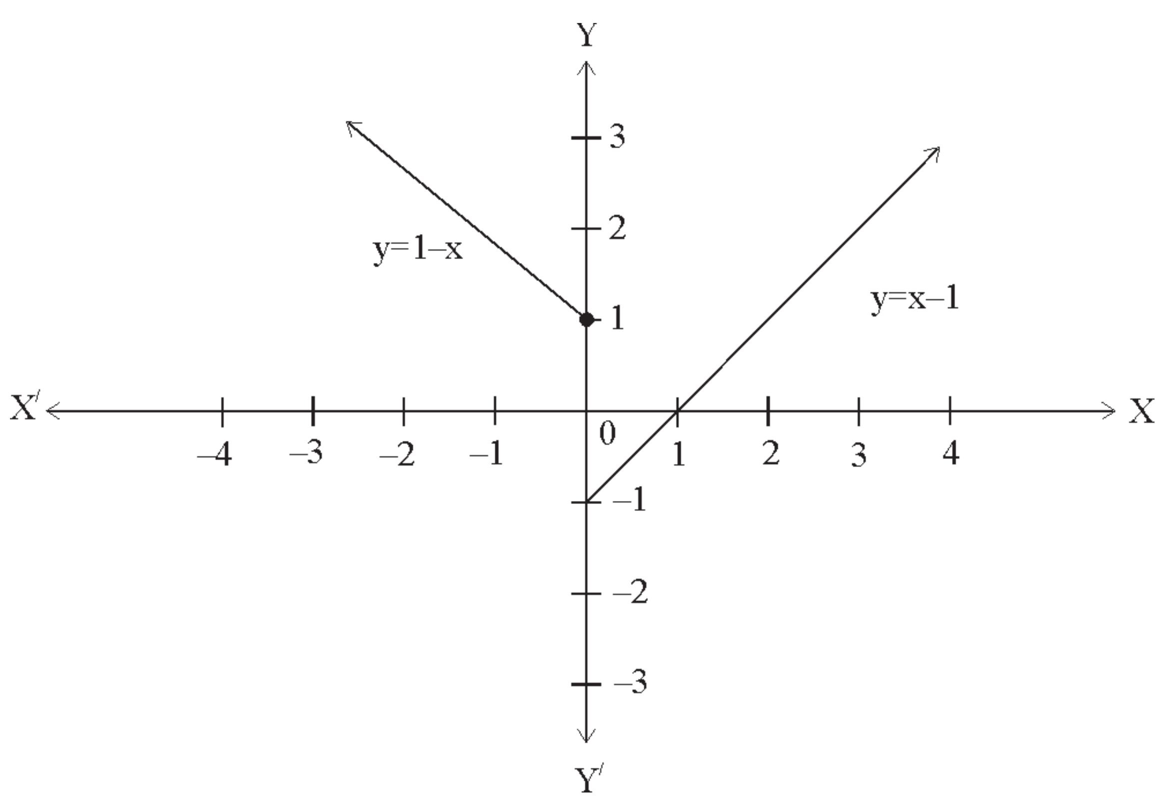
ii) $D_f = (5, \infty)$, $R_f = R^+$

iii) (a) $\sqrt{x} + x$ (b) $\sqrt{x} - x$ (c) $x^{3/2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

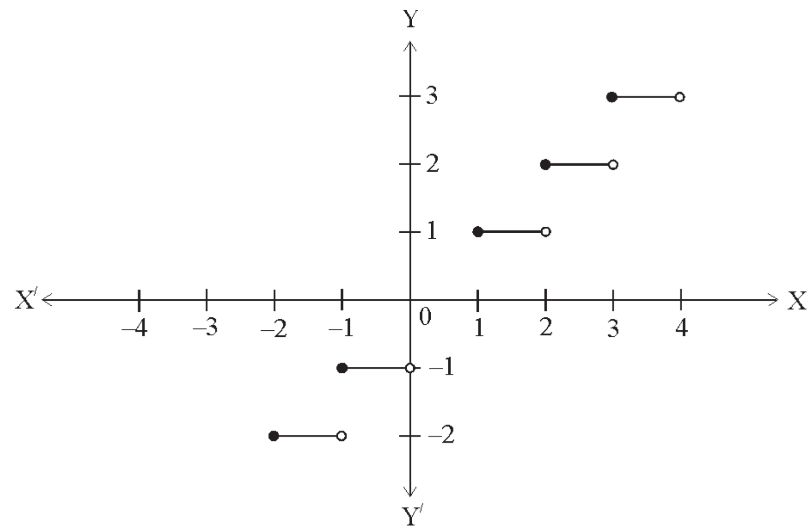
iv) (a) {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)}
(b) {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)}
(c) {(4,5), (5,4), (5,5)}

v) (a) {(0,3), (1,3)} (b) {(0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)}

vi) ক্ষেত্র = R, প্রসার = $\{x \in R : x > -1\}$



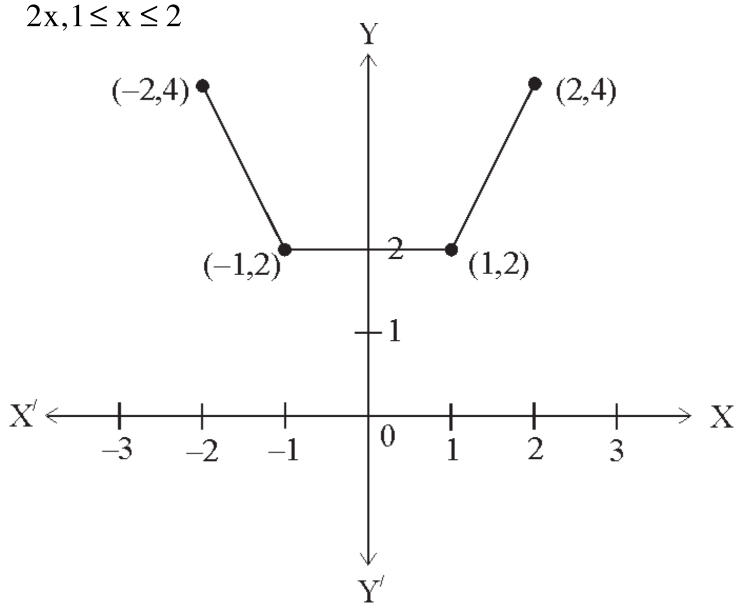
vii) ক্ষেত্র = R, প্রসার = পূর্ণসংখ্যার সেট্



viii) (a) $\{(1,10), (2,13), (3,16), (4,19), (5,22)\}$, ক্ষেত্র = X, প্রসার = $\{10,13,16,19,22\}$

(b) $\{(1,2), (2,5), (3,10), (4,17), (5,26)\}$, ক্ষেত্র = X, প্রসার = $\{2,5,10,17,26\}$

ix) $$f(x)=\begin{cases} -2x, -2 \le x < -1 \\ 2, -1 \le x < 1 \\ 2x, 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



x) (a) A×B = {(সৎ, শান্তি), (সৎ, সমৃদ্ধি), (সৎ, ধ্বংস), (সৎ, ঘৃণা), (হিংস্র, শান্তি), (হিংস্র, সমৃদ্ধি), (হিংস্র, ধ্বংস), (হিংস্র, ঘৃণা)}

(b) কাজের পরিমানের দিকে মনোযোগ না দিয়ে কাজের গুণের দিকে মনোযোগ দেওয়া।

অধ্যায় — 3

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষক (Trigonometric Functions)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু ও ফলাফল :

- **কোণ পরিমাপনের পদ্ধতি সমূহ :**

  ত্রিকোণমিতিতে কোণের পরিমাপ নির্ণয়ে তিনটি পদ্ধতির প্রচলন আছে। যথা —

  i) ষষ্ঠিক পদ্ধতি (Sexagesimal System)

  ii) শতক পদ্ধতি (Centesimal System)

  iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

  i) **ষষ্ঠিক পদ্ধতি :**

  1 সমকোণ = 90 ডিগ্রি (বা 90^0)

  1 ডিগ্রি (1^0) = 60 মিনিট ($60^/$)

  1 মিনিট ($1^/$) = 60 সেকেন্ড ($60^{//}$)

  ii) **শতক পদ্ধতি :**

  1 সমকোণ = 100 গ্রেড বা 100g

  1 grade (1^g) = 100 মিনিট ($100^/$)

  1 মিনিট ($1^/$) = 100 সেকেন্ড ($100^{//}$)

  iii) **বৃত্তীয় পদ্ধতি :**

  1 রেডিয়ান = $\frac{2}{\pi}$ সমকোণ = $57^0 17^/ (44.8)^{//}$ (প্রায়)

- **তিন পদ্ধতির পারস্পরিক সম্বন্ধ :**

  যদি একটি নির্দিষ্ট কোণের ষষ্টিক পরিমাণ, শতক পরিমাণ এবং বৃত্তীয় পরিমাণ যথাক্রমে D^0, G^g এবং R^c হয় তবে

  $$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}.$$

- l দৈর্ঘ্যসম্পন্ন চাপ যদি r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে, তবে $\theta = \frac{l}{r}$ বা $l = r\theta$ হবে।

- **ডিগ্রি এবং রেডিয়ানের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ :**

  রেডিয়ান পরিমাপ = $\frac{\pi}{180} \times$ ডিগ্রি পরিমাপ

  ডিগ্রি পরিমাপ = $\frac{180}{\pi} \times$ রেডিয়ান পরিমাপ

- **ত্রিকোণোমিতিক অপেক্ষক সমূহের সংজ্ঞার অঞ্চল, প্রসার এবং পর্যায় :**

ত্রিকোণোমিতিক অনুপাতসমূহ	সংজ্ঞার অঞ্চল	প্রসার	পর্যায়
$\sin\theta$	R	$[-1, 1]$	2π
$\cos\theta$	R	$[-1, 1]$	2π
$\tan\theta$	$R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in I\right\}$	R i.e. $(-\infty, \infty)$	π
$\operatorname{cosec}\theta$	$R-\{n\pi; n\in I\}$	$R-(-1, 1)$	2π
$\sec\theta$	$R-\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n\in I\right\}$	$R-(-1, 1)$	2π
$\cot\theta$	$R-\{n\pi; n\in I\}$	R i.e. $(-\infty, \infty)$	π

- **ত্রিকোণোমিতিক অভেদ সমূহ :**

i) $\sin\theta=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$

ii) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$

iii) $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$

iv) $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$

v) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

vi) $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$

vii) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

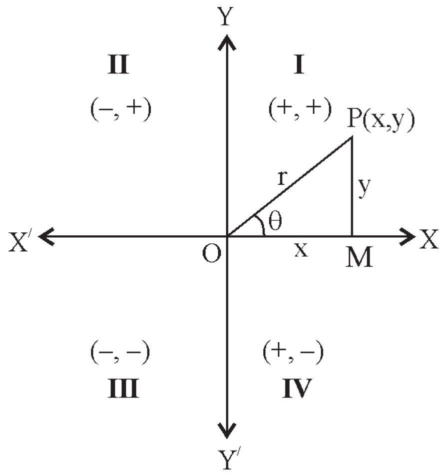
viii) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ix) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

x) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

xi) $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

- **ত্রিকোমোমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন :**



প্রথম পাদে : x>0, y>0 হলে

$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} > 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ এবং $\cot\theta = \frac{x}{y} > 0$

$\therefore$ প্রথম পাদে সব ত্রিকোণোমিতিক অনুপাত ধনাত্মক।

দ্বিতীয় পাদে : x<0, y>0

$\sin\theta = \frac{y}{r} > 0$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} > 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} < 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ এবং $\cot\theta = \frac{x}{y} < 0$

$\therefore$ দ্বিতীয় পাদে কেবল sinθ ও coseθ ধনাত্মক হবে এবং অন্যগুলো ঋনাত্মক।

তৃতীয় পাদে : x<0, y<0

$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} < 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} < 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x} > 0$ এবং $\cot\theta = \frac{x}{y} > 0$

$\therefore$ তৃতীয় পাদে সব ত্রিকোণোমিতিক অনুপাত ঋনাত্মক, tanθ এবং cotθ ছাড়া।

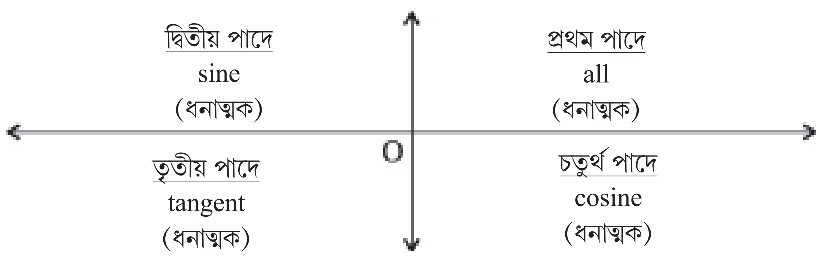
চতুর্থ পাদে : x>0, y<0

$\sin\theta = \frac{y}{r} < 0$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} < 0$

$\cos\theta = \frac{x}{r} > 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{r}{x} > 0$

$\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$ এবং $\cot\theta = \frac{x}{y} < 0$

$\therefore$ চতুর্থ পাদে $\cos\theta$ এবং $\sec\theta$ ছাড়া বাকী ত্রিকোণোমিতিক অনুপাত ঋনাত্মক ।



- **যৌগিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : (দুটি কোণের যোগফল এবং অন্তর)**

i) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

ii) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

iii) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

iv) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

v) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$, যেখানে A, B এবং (A+B), $\frac{\pi}{2}$ -এর বিজোড় গুণিতক নয়।

vi) $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$, যেখানে A, B এবং (A–B), $\frac{\pi}{2}$ -এর বিজোড় গুণিতক নয়।

vii) $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$, যেখানে A, B এবং (A+B), π-এর বিজোড় গুণিতক নয়।

vii) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$, যেখানে A, B এবং (A–B), π-এর বিজোড় গুণিতক নয়।

- **কিছু গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল :**

i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2A - \sin^2B = \cos^2B - \cos^2A$

ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2A - \sin^2B = \cos^2B - \sin^2A$

iii) $\sin(A+B+C) = \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C$

iv) $\cos(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$

v) $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan c - \tan C \tan A}$

- **গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে রূপান্তর :**

i) $2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$

ii) $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

iii) $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$

iv) $2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$

- **যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলে রূপান্তর :**

i) $\sin C+\sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

ii) $\sin C-\sin D = 2\sin\frac{C-D}{2}\cos\frac{C+D}{2}$

iii) $\cos C+\cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

iv) $\cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

$= 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

- **গুণিতক কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ :**

$\angle A$-এর সকল মানের জন্য —

a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

b) $\cos 2A = \cos^2 A-\sin^2 A = 2\cos^2 A-1 = 1-2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

$\Rightarrow 1+\cos 2A = 2\cos^2 A$ and $1-\cos 2A = 2\sin^2 A$

c) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

d) $\cot 2A = \frac{2\cot A}{\cot^2 A-1}$

e) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

f) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

g) $\tan 3A = \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

h) $\cot 3A = \frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$

- **অংশ কোণের ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকসমূহ :**

$\angle A$-এর সকল মানের জন্য —

i) $\cos A = \cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

ii) $\sin A = 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \dfrac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

iii) $\tan A = \dfrac{2\tan\left(\frac{A}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)}$

iv) $\cot A = \dfrac{2\cot\left(\frac{A}{2}\right)}{\cot^2\left(\frac{A}{2}\right)-1}$

v) $\sin A = 3\sin\left(\frac{A}{3}\right) - 4\sin^3\left(\frac{A}{3}\right)$

vi) $\cos A = 4\cos^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{A}{3}\right)$

vii) $\tan A = \dfrac{3\tan\left(\frac{A}{3}\right) - \tan^3\left(\frac{A}{3}\right)}{1-3\tan^2\left(\frac{A}{3}\right)}$

viii) $\cot A = \dfrac{\cot^3\left(\frac{A}{3}\right) - 3\cot\left(\frac{A}{3}\right)}{3\cot^2\left(\frac{A}{3}\right)-1}$

- **ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কিছু প্রয়োজনীয় কোণসমূহ :**

i) $\sin 18^0$ -এর মান $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

ii) $\cos 36^0$ -এর মান $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

iii) $\sin 36^0$-এর মান $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

iv) $\cos 18^0$-এর মান $\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

- **ত্রিকোণোমিতিক সমীকরণসমূহের সমাধান :**

ত্রিকোণোমিতিক সমীকরণের সমাধান দুই ধরণের

i) মূখ্য সমাধান

ii) সাধারণ সমাধান

মূখ্য সমাধান	**সাধারণ সমাধান**
1. i) $\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi,\ n\in Z$, যেখানে Z=যেকোনো অখণ্ড সংখ্যার সেট
ii) $\sin\theta = \sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi+(-1)^n\alpha,\ n\in Z$
iii) $\sin\theta = 1$	$\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in Z$
iv) $\sin\theta = -1$	$\theta = (4n-1)\frac{\pi}{2},\ n\in Z$
2. i) $\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\in Z$
ii) $\cos\theta = \cos\alpha(0\le\alpha\le\pi)$	$\theta = 2n\pi\pm\alpha,\ n\in Z$
iii) $\cos\theta = 1$	$\theta = 2n\pi,\ n\in Z$
iv) $\cos\theta = -1$	$\theta = (2n+1)\pi,\ n\in Z$
3. i) $\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi,\ n\in Z$
ii) $\tan\theta = \tan\alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi+\alpha,\ n\in Z$
4. $\left.\begin{array}{l}\sin^2\theta=\sin^2\alpha\\ \cos^2\theta=\cos^2\alpha\\ \tan^2\theta=\tan^2\alpha\end{array}\right\}$	$\theta = n\pi\pm\alpha,\ n\in Z$

- **$a\sin\theta + b\cos\theta$ -এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান :**

1. $a\sin\theta+b\cos\theta$ -এর সর্বোচ্চ মান হল $= \sqrt{a^2+b^2}$

2. asinθ+bcosθ -এর সর্বনিম্ন মান হল = $-\sqrt{a^2+b^2}$

3. $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$

অনুশীলনী - 3

ক - বিভাগ

A] নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

1. $48^0 37' 30'' =$ কত রেডিয়ান —

a) $\frac{388\pi}{1440}$ রেডিয়ান b) $\frac{752\pi}{1440}$ রেডিয়ান c) $\frac{389\pi}{1440}$ রেডিয়ান d) $\frac{752\pi}{1440}$ রেডিয়ান

2) $\tan 1^0 \tan 2^0 \tan 3^0 \ldots\ldots\ldots\ldots \tan 89^0$ এর মান হবে —

a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) অসংজ্ঞাত

3) যদি $\sin\theta + \text{cosec}\theta = 2$ হয়, তবে $\sin^2\theta + \text{cosec}^2\theta$ হবে —

a) 1 b) 4 c) 2 d) এদের কোনোটিই নয়

4) যদি $\tan\theta = \frac{1}{2}$ এবং $\tan\varphi = \frac{1}{3}$ হয়, তবে $\theta+\phi$ এর মান হবে —

a) $\frac{\pi}{6}$ b) π c) 0 d) $\frac{\pi}{4}$

5) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}$ এর মান হবে —

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) 1

6) যদি $\tan\theta = 3$ এবং θ তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়, তবে $\sin\theta$ এর মান হবে —

a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ c) $\frac{-3}{\sqrt{10}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

7) $\tan 75^0 - \cot 75^0$ এর মান হবে —

a) $2\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$ c) $2-\sqrt{3}$ d) 1

8) $\sin(45^0+\theta) - \cos(45^0-\theta)$ এর মান হবে —

a) $2\cos\theta$ b) $2\sin\theta$ c) 1 d) 0

9) যদি $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ এবং θ তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়, তবে $\cos\frac{\theta}{2}$ এর মান হবে

a) $\frac{1}{5}$ b) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

10) $\cos^2 48^0 - \sin^2 12^0$ এর মান হবে

a) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$ b) $\frac{\sqrt{5}-1}{8}$ c) $\frac{\sqrt{3}+1}{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$

II. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্ন :

1) $125^0 30'$ এর রেডিয়ান পরিমাপ কত?

2) $\frac{\sin 50^0}{\sin 130^0}$ এর মান নির্ণয় করো।

3) যদি $\tan A = \frac{1-\cos B}{\sin B}$ হয়, তবে $\tan 2A$ এর মান কত?

4) $\frac{1-\tan^2 15^0}{1+\tan^2 15^0}$ এর মান নির্ণয় করো।

5) মান নির্ণয় করো : $\sin 50^0 - \sin 70^0 + \sin 10^0$

6) যদি $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ হয়, তবে $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ এর মান নির্ণয় করো।

7) মান নির্ণয় করো : $\sin\frac{\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{5\pi}{18}$

8) যদি $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ এবং $\tan\beta = \frac{1}{3}$ হয়, তবে $\cos 2\alpha$ এর মান নির্ণয় করো।

9) ত্রিকোণোমিতিক সমীকরণ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর মুখ্য সমাধান নির্ণয় করো।

10) ত্রিকোণোমিতিক সমীকরণ $\sec 2\theta = -2$ এর সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

1) যদি $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ এবং θ তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়, তবে $\sin\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় করো।

2) একটি ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 1.8 সেমি দীর্ঘ। 30 মিনিট সময়ে কাঁটাটির প্রান্ত কত সেমি অগ্রসর হবে?

3) ABCD যেকোনো চতুর্ভুজ হলে প্রমাণ করো যে cos(A+B) = cos(C+D)।

4) যদি $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\frac{11}{2}$ হয়, তবে tanθ এর মান নির্ণয় করো।

5) প্রমাণ করো $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

6) $\tan 22^0 30^{\prime}$ এর মান নির্ণয় করো।

7) প্রমাণ করো $\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=0$

8) যদি $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ ।

9) প্রমাণ করো $8\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

10) যদি θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয় তবে $4\cos^2\theta-4\sin\theta=1$ সমীকরণের সমাধান করো।

খ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) যদি $\sin(\theta+\alpha)=a$ এবং $\sin(\theta+\beta)=b$ হয়, তবে প্রমাণ করো
$\cos(\alpha+\beta)-4ab\cos(\alpha-\beta) = 1-2a^2-2b^2$.

2) যদি $\frac{\sin^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{\sin^8\alpha}{a^3}+\frac{\cos^8\alpha}{b^3}=\frac{1}{(a+b)^3}$

3) যদি $\cos(\theta+\varphi)=m\cos(\theta-\varphi)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\tan\theta=\frac{1-m}{1+m}\cot\varphi$

4) $3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\sin^4(3\pi+\alpha)\right]-2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^6(5\pi-\alpha)\right]$ রাশিমালাটির মান নির্ণয় করো।

5) যদি $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$, হয়, তবে দেখাও যে $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ এবং $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$ ।

6) দেখাও যে, $\cot 7\tfrac{1}{2}^0=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$

7) যদি $x = \sec\phi-\tan\phi$ এবং $y = \operatorname{cosec}\phi+\cot\phi$ হয়, তবে দেখাও যে $xy+x-y+1=0$।

8) যদি θ প্রথম পাদে অবস্থিত হয় এবং $\cos\theta=\frac{8}{17}$ হয়, তবে $\cos(30^0+\theta)+\cos(45^0-\theta)+\cos(120^0-\theta)$ এর

মান নির্ণয় করো।

9) $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$ এর মান নির্ণয় করো।

10) $x\sin\theta - y\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং $\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$ সমীকরণ দুটি থেকে θ অপনয়ন করো।

11) যদি $\tan\beta=\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{1-n\sin^2\alpha}$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan(\alpha-\beta)=(1-n)\tan\alpha$.

12) যদি $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $\tan\frac{\theta-\varphi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

13) যদি $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$ এবং α, β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ এবং $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ এর মান নির্ণয় করো।

14) যদি $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$, হয়, তবে $\tan\alpha : \tan\beta$ এর মান নির্ণয় করো।

15) প্রমাণ করো যে $\cos\frac{\pi}{32}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ এবং $\sin\frac{\pi}{32}$ এর মান নির্ণয় করো।

16) $5\cos^2\theta+7\sin^2\theta-6=0$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

17) $\sin x-3\sin 2x+\sin 3x=\cos x-3\cos 2x+\cos 3x$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

18) $(\sqrt{3}-1)\cos\theta+(\sqrt{3}+1)\sin\theta=2$ সমীকরণের সাধারণ সমাধান নির্ণয় করো।

19) সমাধান করো : $2+2\cos 2x\cos 5x=\sin^2 2x$

20) যদি $\cos x+\sin x=\cos\alpha-\sin\alpha$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $x-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

I. 1. (c) $\frac{389\pi}{1440}$ রেডিয়ান 2.(b) 1 3.(c) 2 4.(d) $\theta+\varphi=\frac{\pi}{4}$

5 .(c) $-\frac{1}{4}$ 6.(c) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ 7.(a) $2\sqrt{3}$ 8.(d) 0

9.(c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ 10.(a) $\frac{\sqrt{5}+1}{8}$

II. (1) $\frac{251\pi}{360}$ (2) 1 (3) tanB (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 0 (6) 2 (7) $\sin 70^0+\sin 80^0$ (8) $\sin 4\beta$

(9) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ (10) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$

খ - বিভাগ

(1) $\sin\theta = \frac{-4}{5}$ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ (2) 5.66সেমি (4) $\frac{44}{117}$

(6) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (10) θ=30

গ - বিভাগ

(4) 1 (8) $\frac{23}{17}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (9) $\frac{3}{2}$

(10) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ (14) 3:2 (15) $\sin\frac{\pi}{32}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$

(16) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (17) $x = \frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ (18) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$

(19) x=(2m+1)π, যেখানে m = যে কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

অধ্যায় — 4

গাণিতিক আরোহণ তত্ত্ব (Principle of Mathematical Induction)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- গাণিতিক চিন্তনে একটি মূল ভিত্তি হল অবরোহী যুক্তি (deductive reasoning)। অবরোহীর বিপরীতে, প্রতিক্ষেত্রে আরোহীযুক্তি প্রয়োগ করে পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে আনুমানিক কথনের বিকাশ সাধন করা যায়। অতএব সহজ ভাষায় আমরা বলতে পারি আরোহণ (Induction) শব্দটির অর্থ হল বিশেষ ক্ষেত্র বা বিষয়ের সাধারণীকরণ।

  গাণিতিক আরোহণ নীতি এমন একটি হাতিয়ার যার প্রয়োগে বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক বিবৃতির প্রমাণ করা যায়। যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য গাণিতিক বিবৃতিকে P(n) ধরা হয়। প্রথম n=1 এর ক্ষেত্রে এর সত্যতা যাচাই করা হয়। তারপর ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা K-এর জন্য P(K) সত্য কল্পনা করে P(K+1) সত্য প্রমাণ করা হয়।

  এক বা একাধিক গাণিতিক সম্বন্ধ সমন্বিত কোনো বিবৃতিকে গাণিতিক বিবৃতি বলা হয়।

গাণিতিক আরোহণের প্রথম নীতি (First Principle of Mathematical Induction) :

মনে করো, স্বাভাবিক সংখ্যা n সম্বলিত P(n) একটি প্রদত্ত গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে,

(i) P(1) সত্য অর্থাৎ $n = 1$-এ P(n) সত্য।

(ii) যদি বিবৃতিটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে, $n = m+1$ এর জন্য ও সত্য হয় (যেমন m একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) তাহলে P(n) গাণিতিক বিবৃতিটি n-এর সকল মানে সত্য হবে, যেখানে $n \in N$

কিছু গাণিতিক বিবৃতি :

(i) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি = $\frac{1}{2}n(n+1)$

(ii) $n \geq 1$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে $n < 2^n$।

(iii) (n^2+n+41) একটি মৌলিক সংখ্যা (prime number) যেখানে $n \geq 1$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

(iv) $n \geq 2$ একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হলে $n(n+1)$ সর্বদাই 3 দ্বারা বিভাজ্য।

(v) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি = $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(vi) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(vii) সকল $n \in N$ এর জন্য, (n^2+n) যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা।

(viii) সকল $n \in N$ এর জন্য, $n(n+1)(2n+1)$ সর্বদা 6 দ্বারা বিভাজ্য।

(ix) পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার ঘনের সমষ্টি সর্বদা 9 দ্বারা বিভাজ্য।

(x) n-ধনাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হলে, $a^n - b^n$ সর্বদা $(a+b)$ দ্বারা বিভাজ্য।

(xi) $1+3+5+\cdots\cdots\cdots+(2n-1) = n^2, n \geq 1$

- **আরোহণ নীতিতে প্রমাণে দুটি ধাপ রয়েছে —**

গাণিতিক আরোহণের প্রথম ধাপে প্রমাণ করতে হবে P(1) সত্য। এই ধাপকে ভিত্তিস্তর (basic step) বলা হয়।

পরবর্তী ধাপকে বলা হয় আরোহী স্তর (inductive step)। এখানে আমরা ধরে নেই n=K এর জন্য P(K) সত্য, যেখানে K ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং আমাদের প্রমাণ করতে হবে n=K+1 এর জন্য অর্থাৎ P(K+1) সত্য। তাহলে বিবৃতিটি যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য প্রযোজ্য।

অনুশীলনী - 4

ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

(i) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি —

(a) n (b) $\frac{n(n+1)}{2}$ (c) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (d) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(ii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি —

(a) n^2 (b) $\frac{n(n+1)}{2}$ (c) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (d) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(iii) যদি $10^n+3.4^{n+2}+K$, 9 দ্বারা বিভাজ্য হয়, যখন $n \in N$, তবে K-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান হবে —

(a) 5 (b) 3 (c) 7 (d) 1

(iv) $n \in N$ এর জন্য $3.5^{2n+1}+2^{3n+1}$ বিভাজ্য হবে —

(a) 19 (b) 17 (c) 23 (d) 25

(v) যদি x^n-1 রাশিটি $x-K$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে K-এর ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম মান হবে —

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(vi) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনগুলোর সমষ্টি —

(a) n^3 (b) $\frac{n(n+1)}{2}$ (c) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (d) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(vii) যদি $I_n=5^n+3$ হয়, তবে I_n -এর শেষতম অঙ্কটি হবে —

(a) 5 (b) 8 (c) 3 (d) উপরের কোনটিই নয়

(viii) যদি $n \in N$ এবং $n < \left(\sqrt{2}+1\right)^6$, তবে n এর বৃহত্তম মান হবে —

(a) 199 (b) 197 (c) 195 (d) 198

(ix) যদি $3^{n+1} < 4^n$ সত্য হয়, তবে n এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান হবে —

(a) 1 এর জন্য (b) 2 এর জন্য (c) 3 এর জন্য (d) 4 এর জন্য

(x) $3^{4n+2}+5^{2n+1}, n \in N$ –

(a) 8 দ্বারা বিভাজ্য (b) 14 দ্বারা বিভাজ্য (c) 4 দ্বারা বিভাজ্য (d) উপরের কোনটিই নয়

(xi) $n! > 2^{n-1}$ সত্য হয়, যখন

(a) সকল $n>1, n \in N$ এর জন্য (b) সকল $n>2, n \in N$ এর জন্য

(c) সকল $n \in N$ এর জন্য (d) উপরের কোনটিই নয়

(xii) যদি n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে 4^n-3n-1 হবে –

(a) 5 দ্বারা বিভাজ্য (b) 9 দ্বারা বিভাজ্য (c) 8 দ্বারা বিভাজ্য (d) 27 দ্বারা বিভাজ্য

(xiii) $2^n > n^2$ সত্য, সকল $n \geq K$ পূর্ণসংখ্যার জন্য, তবে K =

(a) 5 (b) 3 (c) 2 (d) উপরের কোনটিই নয়

(xiv) n যখন কোন স্বাভাবিক সংখ্যা, তখন $a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}$ রাশিটি সর্বদা যে রাশিটির দ্বারা বিভাজ্য হবে —

(a) a^2+a+1 (b) $(a+1)^2$ (c) a^2-a+1 (d) a^2+1

2. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

(i) যদি P(n) গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে '$n(n+1)$' যুগ্ম হয়, তবে P(3)-এর মান কত?

(ii) যদি P(n) গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে '$2^n \geq 3n$' এবং যদি P(r) সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো P(r+1) সত্য হবে।

(iii) গাণিতিক বিবৃতি P(n) এর এরূপ একটি উদাহরণ দাও যা সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য হয়।

(iv) যদি x^n-1 রাশিটি (x–K) দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে K-এর সর্বনিম্ন ধনাত্মক অখণ্ড মান কত হবে?

(v) মনে করো P(n) বিবৃতিটি হল, "$n(n+1)(n+2)$ রাশিটি 12 দ্বারা বিভাজ্য" দেখাও যে P(3) এবং P(4) সত্য, কিন্তু P(5) সত্য নয়।

(vi) যদি x এবং y যেকোনো দুটি পৃথক অখণ্ড সংখ্যা হয় এবং P(n) বিবৃতি "x^n-y^n সকল n-এর জন্য x–y দ্বারা বিভাজ্য"। যদি P(r) সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে P(r+1) সত্য হবে।

(vii) সকল $n \in N$ এর জন্য, P(n) বিবৃতি "3^{2n} কে যখন 8 দ্বারা ভাগ করা হয়, তখন ভাগশেষ সর্বদা 1 হয়"। যদি P(r) সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে P(r+1) সত্য হবে।

(viii) প্রমাণ করো $n^2 < 2^n$ অসমতাটি সকল $n \geq 5$ স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য সত্য।

(ix) প্রমাণ করো $2n < (n+2)!$ অসমতাটি সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য সত্য।

(x) সকল $n\in N$, $P(n)$ গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে, "$10^n+3.4^{n+2}+5$ সর্বদা 9 দ্বারা বিভাজ্য"। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

(xi) সকল $n\in N$, $P(n)$ গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে, $(ab)^n=a^n.b^n$। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

(xii) সকল $n\in N$, $P(n)$ গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে, "$x^{2n}-y^{2n}$ রাশি সর্বদা $(x+y)$ দ্বারা বিভাজ্য"। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

(xiii) সকল $n\in N$, $P(n)$ গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ n \text{ সংখ্যক পদ}}}}<2$। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

(xiv) সকল $n\in N$, $P(n)$ গাণিতিক বিবৃতি এরূপ যে, "$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ সর্বদা 9 দ্বারা বিভাজ্য"। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

(xv) সকল $n\in N$, $P(n)$ বিবৃতি এরূপ যে, "$10^{2n-1}+1$ সর্বদা 11 দ্বারা বিভাজ্য"। যদি $P(r)$ সত্য হয়, তবে প্রমাণ করো যে $P(r+1)$ সত্য হবে।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

(i) সকল $n\in N$ এর জন্য $2n+7<(n+3)^2$ হলে দেখাও যে, $2(n+1)+7<(n+4)^2$।

(ii) যদি $1.1!+2.2!+3.3!+.............+n.n! = (n+1)!-1$, হলে দেখাও যে,
$1.1!+2.2!+3.3!+.............+n.n!+(n+1)(n+1)! = (n+2)!-1$

(iii) যদি $n\in N$, $x>-1$ এবং $(1+x)^n\geq 1+nx$ হলে, প্রমাণ করো যে, $(1+x)^{n+1}\geq 1+(n+1)x$।

(iv) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো $\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...........+\frac{1}{\sqrt{n}}$, সকল স্বাভাবিক সংখ্যা $n\geq 2$ এর জন্য।

(v) একটি শ্রেণি $a_1,a_2,a_3.............$ এরূপে সংজ্ঞাত যে, $a_1=3$ এবং $a_k=7a_{k-1}$, সকল স্বাভাবিক সংখ্যা $k\geq 2$, তবে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য দেখাও যে, $a_n=3.7^{n-1}$।

(vi) একটি শ্রেণি b_0, b_1, b_2 .... এরূপে সংজ্ঞাত যে, $b_0=5$ এবং $b_k=4+b_{k-1}$, সকল স্বাভাবিক সংখ্যা k-এর জন্য। তবে গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য দেখাও যে, $b_n=(n-1)\,4+9$।

(vii) যদি $n\geq 3$ এবং $n\in N$ হয় তবে প্রমাণ করো $2^n<n^2$

(viii) যদি $A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, তবে গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো যে, $A^n=\begin{bmatrix}1+2n & -4n\\ n & 1-2n\end{bmatrix}$।

(ix) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো যে, $3^n<n!$, যেখানে $n\geq 7$ এবং n পূর্ণসংখ্যা।

(x) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো, $1.2+2.3+3.4+.....+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$, যেখানে $n\in N$।

(xi) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো, $1^2+2^2+3^2+.............n^2>\frac{n^3}{3}$, $n\in N$।

(xii) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো, $2+3.2+4.2^2+............(n+1).2^{n-1}=n.2^{2n}$, $n\in N$।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

$n\in N$ হলে গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো —

(i) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+............+\frac{1}{1+2+3+........+n}=\frac{2n}{n+1}$

(ii) $1.2+2.2^2+3.2^3+\cdots\cdots\cdots+n.2^n=(n-1).2^{n+1}+2$

(iii) $\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots\cdots+\cos[\alpha+(n-1)\beta]=\frac{\cos\left[\alpha+\frac{n-1}{2}.\beta\right].\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

(iv) $\cos\theta.\cos2\theta.\cos2^2\theta...........\cos2^{n-1}\theta=\frac{\sin2^n\theta}{2^n\sin\theta}$

(v) দেখাও যে $(5^{2n+2}-24n-5)$ সর্বদা 576 দ্বারা বিভাজ্য সেখানে $n\in N$.

(vi) প্রমাণ করো $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

(vii) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)............\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$

(viii) ${}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+...........+{}^nC_n=2^n$

(ix) প্রমাণ করো ঃ (x^n-y^n) রাশিটি সর্বদা $(x-y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

(x) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো $3^{2n+2}-8n-9$ সর্বদা 64 দ্বারা বিভাজ্য, যেখানে $n\in N$।

(xi) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো যে, n-এর সকল ধনাত্মক অখণ্ড মানের জন্য $|\sin nx|\le n|\sin x|$।

(xii) গাণিতিক আরোহণ তত্ত্বের প্রয়োগে প্রমাণ করো যে, n, P ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $P^{n+1}+(P+1)^{2n-1}$ রাশিটি সর্বদা (P^2+P+1) দ্বারা বিভাজ্য হবে।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1.	i) b)	ii) c	iii) a	iv) b
	v) a	vi) d	vii) b	viii) b
	ix) d	x) b	xi) b	xii) b
	xiii) a	xiv) a		

2. i) p(3) : 3 (3+1) হল জোড়া সংখ্যা

   v) k = 1

অধ্যায় — 5

জটিল রাশি ও দ্বিঘাত সমীকরণ

(Complex Numbers and Quadratic Equations)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **জটিল রাশির সংজ্ঞা :**

দুটি বাস্তব রাশি x, y-এর ক্রমযুগল (x,y) যদি x+iy $(i=\sqrt{-1})$ আকারের প্রতীক দিয়ে প্রকাশিত হয়, তবে (x, y) ক্রমযুগলকে জটিল (complex) রাশি বলা হয়। x-কে জটিল রাশির বাস্তব অংশ এবং y-কে তার অবাস্তব অংশ বলা হয়।

একটি জটিল রাশি Z=x+iy কে সম্পূর্ণ বাস্তব বলা হবে যদি y=0 অর্থাৎ imp(Z)=0 হয় এবং সম্পূর্ণ কাল্পনিক বলা হবে যদি x=0 অর্থাৎ Re(Z)=0 হয়।

যদি x, y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$ হয় তবে (x+iy) ও (x–iy) জটিল রাশি দুটির একটিকে অন্যটির প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী (conjugate) জটিল রাশি বলা হয়। Z জটিল রাশির প্রতিযোগী জটিল রাশি $\bar{Z}$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

- **অনুবন্ধী জটিলরাশির ধর্মসূমহ :**

যদি $Z=x+iy$ হয়, তবে সংজ্ঞা থেকে $\bar{Z}=x-iy$

i) $\bar{\bar{Z}}=Z$, যেখানে $\bar{Z}$ হল Z জটিল রাশির অনুবন্ধী জটিল রাশি এবং $\bar{\bar{Z}}$ হল $\bar{Z}$ জটিল রাশির অনুবন্ধী জটিল রাশি।

ii) $Z+\bar{Z}=2x=2\,\mathrm{Re}(Z)$

iii) $Z-\bar{Z}=2iy=2i\ \mathrm{Im}(Z)$

iv) $Z\bar{Z}=x^2+y^2$

v) $\overline{Z_1+Z_2}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2$

vi) $\overline{Z_1-Z_2}=\bar{Z}_1-\bar{Z}_2$

vii) $\overline{Z_1.Z_2}=\bar{Z}_1.\bar{Z}_2$

viii) $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)}=\dfrac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$, এই শর্তে $Z_2, \bar{Z}_2\neq 0$

- দুটি জটিল রাশি $Z_1=x_1+iy_1$ এবং $Z_2=x_2+iy_2$ সমান হয় যদি $x_1=x_2$ এবং $y_1=y_2$ হয়।

- **জটিল রাশির বীজগণিত :**

  মনে করো $Z_1=x_1+iy_1$ এবং $Z_2=x_2+iy_2$ দুটি জটিল রাশি হয় তবে

  i) জটিল রাশি দুটির যোগফল

  $Z_1+Z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$

  ii) জটিল রাশি দুটির বিয়োগফল

  $Z_1-Z_2 = (x_1-x_2) + i(y_1-y_2)$

  iii) জটিল রাশি দুটির গুণফল

  $Z_1Z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = (x_1x_2-y_1y_2) + i(x_1y_2+y_1x_2)$

  iv) জটিল রাশি দুটির ভাগফল

  $$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1Z_2^{-1} = \left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\right) + i\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\right)$$

- যদি $Z=x+iy$ হয় তবে (x^2+y^2) এর ধনাত্মক বর্গমূলকে Z জটিল রাশির মডিউলাস বলা হয় এবং তা mod Z বা $|Z|$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, $Z=x+iy$ হলে $|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ।

- যদি $Z=x+iy$ হয় তবে θ এর অনন্য মানের জন্য $x=|Z|\cos\theta$, $y=|Z|\sin\theta$ এবং $-\pi<\theta\leq\pi$ অসমতা সিদ্ধ করে তাকে আরগুমেন্টের মূখ্যমান (principal value) বলা হয় এবং এই মানকে arg Z অথবা amp Z প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

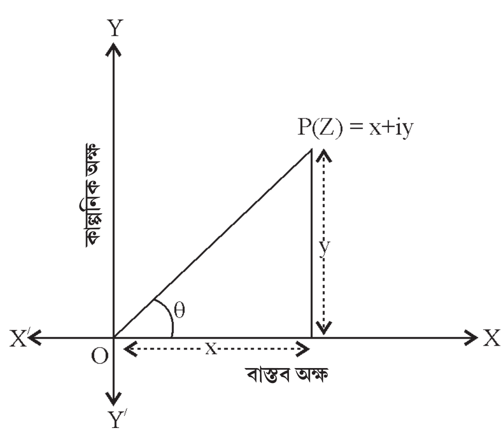
- যদি P(Z) বিন্দুটি argand চিত্রে জটিল রাশি $Z=(x,y)=x+iy$ এবং $\arg Z=\theta$ কে সূচিত করে তবে,

  i) $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, যখন P প্রথম পাদে অবস্থিত হয়।

  ii) $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, যখন P দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হয়।

  iii) $-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}$, যখন P তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয়।

  iv) $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$, যখন P চতুর্থ পাদে অবস্থিত হয়।



- $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারকে Z জটিল রাশির মডিউলাস-অ্যামপ্লিচিউড আকার বলা হয়, এখানে $r=|Z|$ এবং $\theta=\arg Z$ যেখানে $-\pi<\theta\leq\pi$ ।

- $x+iy=0$ হলে $x=0$ ও $y=0$ হবে।
- $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$
  i -এর যে কোনো অখণ্ড ঘাতের মান i অথবা (–i) অথবা 1 অথবা (–1) হবে।
- $|Z_1+Z_2| \le |Z_1|+|Z_2|$
- $|Z_1Z_2|=|Z_1||Z_2|$
- $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$
- i) $\arg(Z_1Z_2)=\arg Z_1+\arg Z_2+m$

  ii) $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\arg Z_1-\arg Z_2+m$

  যেখানে $m=0$, অথবা 2π অথবা (-2π)
- θ-এর যে অনন্য মান $-\pi<\theta\le\pi$ শর্তটিকে সিদ্ধ করে সেটিকে আরগুমেন্টের মুখ্যমান (principal value) বলা হয়।
- 1 এর ঘনমূল তিনটি হল 1, ω, ω^2, যেখানে $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ অথবা $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ এবং ω, ω^2 কে 1-এর কাল্পনিক ঘনমূল বলা হয়।
- 1 এর কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $\omega^3=1$ এবং $1+\omega+\omega^2=0$ হবে।
- **দ্বিঘাত সমীকরণ :**

  $ax^2+bx+c=0$, $a\ne 0$ এই আকারের সমীকরণকে বলা হয় চলরাশি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণ।

  যে কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি এবং কেবলমাত্র দুটি বীজ থাকে।

  a, b এবং c বাস্তব সহগবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নে প্রদত্ত

  $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$
- $ax^2+bx+c=0$, $(a\ne 0)$ সমীকরণে বীজগুলো যদি α ও β হয় তবে $\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং

  $\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, যেখানে (b^2-4ac) কে বলা হয় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের নিরূপক।

- **বীজদ্বয়ের প্রকৃতি :**

i) যদি নিরূপক ধনাত্মক হয় ($b^2-4ac>0$) হয় তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুটি α এবং β বাস্তব ও অসমান হবে।

ii) যদি নিরূপক শূন্য হয় ($b^2-4ac=0$) তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুটি বাস্তব ও সমান হবে।

iii) যদি নিরূপক ঋনাত্মক হয় ($b^2-4ac<0$) তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলো অসমান ও কাল্পনিক হবে।

iv) যদি নিরূপক ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গরাশি হলে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলো বাস্তব, মূলদ এবং অসমান হবে।

আবার যদি নিরূপক ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ রাশি না হয় তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলো বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান হবে।

v) যদি b^2-4ac (নিরূপক) পূর্ণবর্গ কিন্তু a অথবা b এর যেকোনো একটি অমূলদ হয় তবে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলো অমূলদ হবে।

অনুশীলনী -5
ক-বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর]

I. বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

1) যদি $Z=-2-\sqrt{-5}$ হয় তবে $\bar{Z}$ হবে

a) $-2+\sqrt{-5}$ b) $2-\sqrt{-5}$ c) $2+\sqrt{-5}$ d) $-\sqrt{5}+2i$

2) যদি $\bar{Z}=-3+5i$ হয় তবে Z হবে

a) $-3-5i$ b) $3+5i$ c) $5+3i$ d) $5-3i$

3) যেকোনো জটিল রাশি Z-এর জন্য $|Z|+|Z-1|$ -এর ক্ষুদ্রতম মান হবে

a) 0 b) 2 c) -1 d) 1

4) নীচের কোন্‌টি সত্য

a) $2+3i>1+4i$ b) $3+3i>6+2i$ c) $5+9i>5+6i$ d) এদের কোনটিই নয়।

5) জটিল রাশি $(1+\sqrt{-3})$ এর মডিউলাস হবে —

a) 2 b) -2 c) 3 d) -3

6) জটিল রাশি $Z=-2$ -এর amplitude হবে —

a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$

7) জটিল রাশি $Z=3i$ এর argument হবে —

a) π b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{6}$

8) যদি x, y বাস্তব এবং $x+iy=i$ হয়, তবে —

a) $x=0,\ y=1$ b) $x=1,\ y=0$ c) $x=1,\ y=0$ d) $x=0,\ y=0$

9) $(Z+3)(\bar{Z}+3)$ এর সমতুল্য মান হবে —

a) $|Z+3|^2$ b) $|Z-3|$ c) Z^2+3 d) এদের কোনোটিই নয়।

10) যদি $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^x=1$ হয়, তবে —

a) $x=2n+1$ b) $x=4n$ c) $x=2n$ d) $x=4n+1$

যখন $n\in N$

11) $x, y\in R$, $x+iy$ একটি কাল্পনিক জটিল রাশি হবে যদি —

a) $x=0$ b) $y=0$ c) $x\neq 0$ d) $y\neq 0$

12) যদি $a+ib = c+id$ হয়, তবে —

a) $a^2+b^2 = 0$ b) $b^2+c^2 = 0$ c) $a^2+b^2 = c^2+d^2$ d) $b^2+d^2 = 0$

13) $x^2+2 = 0$ এর বীজগুলি হবে

a) $\pm\sqrt{2}i$ b) 2 c) 2i d) এদের কোনোটিই নয়

14) যদি $x^2+x+1=0$ হলে নীচের কোন্‌টি সত্য

a) $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ b) $x=\frac{-i-\sqrt{3}}{2}$ c) $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ d) $x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

15) যদি $x^2-px+8 = 0$ সমীকরণের বীজগুলোর অন্তর 2 হলে P হবে —

a) ± 2 b) ± 6 d) ± 1 d) ± 5

II. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর]

1) সরল করো : $2i^2 + 6i^3 + 3i^{16} - 6i^{19} + 4i^{25}$

2) $(7+5i)(7-5i)$ রাশিটি $a+ib$ আকারে প্রকাশ করো।

3) $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ রাশিটি $a+ib$ আকারে প্রকাশ করো।

4) $\sqrt{-25}\times\sqrt{-9}$ -এর মান নির্ণয় করো।

5) মান নির্ণয় করো : $\dfrac{(1-i)^3}{1-i^3}$

6) $x+i(3x-y) = 3-6i$ হলে x এবং y-এর মান নির্ণয় করো।

7) $-1-i\sqrt{3}$ জটিল রাশির আরগুমেন্টের মূখ্যমান নির্ণয় করো।

8) $|1-i|^n = 2^n$, হলে n-এর মান নির্ণয় করো।

9) $(1+i)Z = (1-i)\bar{Z}$ হলে দেখাও যে $Z = -i\bar{Z}$ ।

10) $5x^2-7x-K=0$ সমীকরণের বীজগুলি একে অপরের অনোন্যক হলে K-এর মান নির্ণয় করো।

11) $x(x-3)=4$ সমীকরণের বীজগুলি যদি α এবং β হয় তবে $\alpha^2+\beta^2$ -এর মান নির্ণয় করো।

12) $x^2+px+q=0$, যেখানে p এবং q বাস্তব, সমীকরণের একটি বীজ যদি $2 + 3i$ হয় তবে p এবং q নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

1) যদি $\dfrac{(1+i)^2}{2-i} = x+iy$, হয় তবে x+y -এর মান নির্ণয় করো।

2) $\left[\left(\sqrt{5}+\dfrac{i}{2}\right)\left(\sqrt{5}-2i\right)\right] \div (6+5i)$, a+ib আকারে প্রকাশ করো।

3) $(1+i)y^2+(6+i) = (2+i)x$ হলে x এবং y-এর বাস্তব মান নির্ণয় করো।

4) x এবং y নির্ণয় করো যদি $(3x-2iy)(2+i)^2=10(1+i)$।

5) $|Z| = 4$ এবং $\arg(Z) = \dfrac{5\pi}{6}$ হলে, জটিল রাশিটি নির্ণয় করো।

6) $\dfrac{2-i}{(1-2i)^2}$ জটিল রাশির অণুবন্ধী জটিল রাশি নির্ণয় করো।

7) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$ এর আরগুমেন্টের মুখ্যমান নির্ণয় করো।

8) $\dfrac{2+3i}{3+2i}$ জটিল রাশির অণুবন্ধী জটিল রাশি এবং মডিউলাস নির্ণয় করো।

9) $Z_1 = \sqrt{2}-3i$ এবং $Z_2 = 5-i\sqrt{2}$ হলে $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ কোন্ পাদে অবস্থিত নির্ণয় করো।

10) $\left(-\sqrt{3}+i\right)$ জটিল রাশির মডিউলাস এবং আরগুমেন্টের মুখ্যমান নির্ণয় করো।

11) $3x^2-7x+3=0$ সমীকরণের বীজগুলোর প্রকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করো।

12) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের যদি বীজগুলো α এবং β হয় তবে $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$ -এর মান নির্ণয় করো।

13) $2x^2-3x+5=0$ সমীকরণের বীজগুলোর প্রকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা করো।

14) যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিতে থাকে তবে প্রমাণ করো যে $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলো সমান।

15) $2x^2-12x+m+2=0$ সমীকরণের বীজগুলোর অন্তর 2 হলে m-এর মান নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) যদি $x=-2-\sqrt{3}i$ হয় তবে $2x^4+5x^3+7x^2-x+41$-এর মান নির্ণয় করো।

2) মান নির্ণয় করো : $2x^3+2x^2-7x+72$, যেখানে $x=\dfrac{3-5i}{2}$ ।

3) x এবং y -এর মানগুলো নির্ণয় করো যদি $\dfrac{(1+i)x-2i}{3+i}+\dfrac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ হয়।

4) x, y এর বাস্তব $(-3+ix^2y)$ এবং (x^2+y+4i) জটিল রাশি দুটি পরস্পর অণুবন্ধী হলে x ও y-এর মান নির্ণয় করো।

5) যদি $|Z+1|=Z+2(1+i)$ হয়, তবে জটিল রাশি Z নির্ণয় করো।

6) দেখাও যে $\left|\dfrac{Z-2}{Z-3}\right|=2$ একটি বৃত্তকে সূচিত করে, এটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

7) Z_1 এবং Z_2 দুটি জটিল রাশি এমন যে $|Z_1|=|Z_2|$ এবং $\arg(Z_1)+\arg(Z_2)=\pi$ হলে দেখাও যে $Z_1=-\bar{Z}_2$ ।

8) Z_1, Z_2 এবং Z_3, Z_4 দুই জোড়া অণুবন্ধী জটিল রাশি হলে $\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_4}\right)+\arg\left(\dfrac{Z_2}{Z_3}\right)$ নির্ণয় করো।

9) দুটি জটিল রাশি Z_1 এবং Z_2, $\arg(Z_1)-\arg(Z_2)=0$, হলে দেখাও যে $|Z_1-Z_2|=|Z_1|\sim|Z_2|$

10) জটিল রাশিটি নির্ণয় করো যা $Z+\sqrt{2}\,|(Z+1)|+i=0$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

11) নির্ণয় করো : $\left|(1+i)\dfrac{(2+i)}{(3+i)}\right|$

12) $f(Z)=\dfrac{7-Z}{1-Z^2}$, যেখানে Z=1+2i, হলে $|f(Z)|$ নির্ণয় করো।

13) $\dfrac{Z-1}{Z+1}$ একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক রাশি হলে |Z| -এর মান নির্ণয় করো।

14) জটিল রাশি $Z=\dfrac{1-i}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$ কে মেরু আকারে লিখ।

15) যদি $z=x+iy$ ও $\arg\left(\dfrac{Z-1}{Z+1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ হয় তবে দেখাও Z এর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (0, 1) বিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2}$ ।

16) জটিল রাশি $-\sqrt{3}-i$ কে মেরু আকারে রূপান্তরিত করো এবং এই জটিল রাশির মডিউলাস এবং আরগুমেন্টের

মুখ্যমান নির্ণয় করো।

17) $a^2+\frac{1}{a^2}-4\left(a+\frac{1}{a}\right)i-2$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

18) কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণায়কের সাধারণ রাশিমালার সাহায্যে $25x^2-30x+11=0$ সমীকরণটির সমাধান করো। অতঃপর দেখাও যে বীজদ্বয় পরস্পর অনুবন্ধী জটিল।

19) যদি $z = x + iy$ এবং $\frac{z-i}{z-i}=ib$ হয় তবে দেখাও যে $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

20) জটিল তল C -তে নিম্নের সমীকরণটির সমাধান করো :
$6x^2-(18+5i)x+18+i=0$

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

(I) 1(a) 2(a) 3(d) 4(d) 5(a) 6(a) 7(b) 8(a) 9(a) 10(b) 11(d) 12(c) 13(a) 14(a) 15(b)

(II) 1) 1+4i 2) 74+0i 3) $\left(-6+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{3}+2\sqrt{6}\right)$ 4) –15 5) –2 6) x=3, y=15 7) $-\frac{2\pi}{3}$
8) n=0, 10) –5, 11) 17 12) p=–4 এবং q = 13

খ - বিভাগ

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{72-15\sqrt{5}}{122}-i\left(\frac{30+9\sqrt{5}}{61}\right)$ 3) (x=5, y=2) or (x=5, y=–2) 4) $x=\frac{14}{15}, y=\frac{1}{5}$

5) $-2\sqrt{3}+2i$ 6) $-\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$ 7) $\frac{2\pi}{3}$ 8) $\bar{Z}=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$ এবং |Z|=1 9) চতুর্থ পাদে 10) 2, $\frac{5\pi}{6}$

11) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান 12) $\frac{3abc-b^3}{c^3}$ 13) অবাস্তব এবং অসমান 15) m=14

গ - বিভাগ

1) 6 2) 4 3) x=3 এবং y=–1 4) (x=1, y=–4) অথবা (x=–1, y=–4) 5) $Z=\frac{1}{2}-2i$

6) কেন্দ্র $=\left(\frac{10}{3},0\right)$, ব্যাসার্ধ $=\frac{2}{3}$ 8) 0, 10) Z=–2–i 11) 1 12) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 13) 1

14) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right]$ 16) |Z|=2 এবং $\arg(Z)=-\frac{5\pi}{6}$, 17) $\pm\left(a+\frac{1}{a}-2i\right)$

18) $\alpha=\bar{\beta}$ এবং $\beta=\bar{\alpha}$ অর্থাৎ বীজদ্বয় পরস্পর জটিল অণুবন্ধী। 20) $\left(2+\frac{3i}{2}\right)$ অথবা $\left(1-\frac{2i}{3}\right)$

অধ্যায় — 6

রৈখিক অসমতা (Linear inequality)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **দুটি বাস্তব সংখ্যা বা দুটি বীজগাণিতিক রাশিমালা (expression) '<', '>' '≤' অথবা '≥' দিয়ে যুক্ত হয়ে একটি (inequality) অসমতা গঠন করে।**

  i) $3 < 5$; $7 > 5$ সংখ্যাসূচক অসমতার (numerical inequalities) উদাহরণ।

  ii) $x < 5$; $y > 2$: $x \geq 3$; $y \leq 4$ হল আক্ষরিক অসমতার (linear inequalities) উদাহরণ।

  iii) $2 < y \leq 4$; $3 \leq x < 5$ দ্বৈত অসমতার (double inequalities) উদাহরণ।

  iv) $ax+b < 0$; $ax+b > 0$; $ax+by < c$; $ax+by > c$; $ax^2+bx+c > 0$; $ax^2+bx+c < 0$; $ax^3+bx^2+cx+d > 0$; $ax^3+bx^2+cx+d < 0$ অসমতাগুলো যথার্থ অসমতা (strict inequalities)।

  v) $ax+b\leq0$; $ax+b\geq0$; $ax+by\geq c$; $ax+by\leq c$; $ax^2+bx+c\geq0$; $ax^3+bx^2+cx+d\geq0$ অসমতাগুলো শিথিল অসমতা (slack inequalities)।

- **অসমতা একচল অথবা দ্বিচলবিশিষ্ট হতে পারে, তাছাড়া, অসমতা রৈখিক অথবা দ্বিঘাত বা ত্রিঘাত বিশিষ্ট হতে পারে।**

  i) এক চলবিশিষ্ট রৈখিক অসমতা :

  মনে করো a একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা এবং x হল চলরাশি। তবে $ax+b < 0$; $ax+b \leq 0$; $ax+b > 0$ এবং $ax+b \geq 0$ অসমতার আকারগুলো হল x চলের সাপেক্ষে একচলবিশিষ্ট রৈখিক অসমতা।

  ii) দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক অসমতা :

  মনে করো a, b হল অশূন্য বাস্তব সংখ্যা এবং x, y হল চলরাশি। তবে $ax+by < c$; $ax+by \leq c$; $ax+by > c$; $ax+by \geq c$ আকারের অসমতাগুলো x এবং y চলরাশি বিশিষ্ট অসমতা।

  iii) দ্বিঘাত অসমতা :

  মনে করো a হল একটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা। তবে $ax^2+bx+c < 0$ অথবা $ax^2+bx+c \leq 0$ অথবা $ax^2+bx+c > 0$ অথবা $ax^2+bx+c \geq 0$ আকারের অসমীকরণগুলো হল দ্বিঘাত অসমতা।

- **একচলবিশিষ্ট রৈখিক/সরল অসমীকরণের বীজগাণিতিক সমাধান এবং তাদের লেখচিত্রে উপস্থাপন**

  (Algebraic solutions of linear ineqations in one variable and their Graphical representation) :

  i) একচলবিশিষ্ট একটি অসমতার যে কোনো সমাধান হল চলরাশিটির এরূপ একটি মান যা অসমতাকে সত্য বিবৃতিতে পরিবর্তিত করে।

  যেমন : $\frac{3-2x}{5} < \frac{x}{3} - 4$

ii) **সমাধান সেট (Solution set) :** চলরাশির যে সমস্ত সম্ভাব্য মানের জন্য অসমতা সত্য হয়, তাদেরকে ঐ অসমতার সমাধান সেট বলা হয়।

যেমন : $30x < 200$ এই অসমতাটির সমাধান সেট হল $\{0,1,2,3,4,5,6\}$।

- **একচলবিশিষ্ট রৈখিক অসমীকরণের সমাধান :**

নিয়ম 1 : কোনো সমীকরণের উভয় দিকে সমান সংখ্যা যোগ (বা বিয়োগ) করা যায়।

নিয়ম 2 : অসমতার উভয়দিকে একই ধনাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ (বা ভাগ) করা যায়। কিন্তু কোন ঋনাত্মক সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে অসমতার চিহ্নটি বিপরীতমুখী হবে।

নিয়ম 3 : অসমতার যেকোনো পদকে চিহ্ন পরিবর্তন করে উভয়দিকে স্থানান্তর করতে পারি, এক্ষেত্রে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তিন করতে হয় না।

- **অসমতার কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য (Some important characteristics of inequation) :**

i) $x > y$ হলে $-x < -y$ এবং $x < y$ হলে $-x > -y$

ii) $x > y$ হলে $x+z > y+z$

iii) $x > y$ হলে $x-z > y-z$

iv) $x > y$ এবং $z > 0$ হলে $x.z > y.z$

v) $x > y$ এবং $z > 0$ হলে $\frac{x}{z} > \frac{y}{z}$

vi) $x > y$ এবং $y > z$ হলে $x > z$

vii) $x > y$ এবং $z < 0$ হলে $xz < yz$

viii) $x < y$ এবং $z < 0$ হলে $xz > yz$

- **মডিউলাস অপেক্ষকের অসমতা এবং সমাধান সেট নির্ণয় (Inequations related to modulus function and Determination of solution set) :**

i) যদি a ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে

a) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ অর্থাৎ, $x \in (-a, a)$

b) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$ অর্থাৎ, $x \in [-a, a]$

ii) যদি a ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে

a) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ অথবা, $x > a$

b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ অথবা, $x \geq a$

iii) মনে করো r একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং a স্থির (fixed) বাস্তব সংখ্যা হলে —

a) $|x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$ অর্থাৎ, $x \in (a-r, a+r)$

b) $|x-a| \leq r \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$ অর্থাৎ, $x \in [a-r,\ a+r]$

c) $|x-a| > r \Leftrightarrow x < a-r$ অথবা, $x > a+r$

d) $|x-a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a-r$ অথবা, $x \geq a+r$

iv) মনে করো a, b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, তবে —

a) $a < |x| < b \Leftrightarrow x \in (-b,-a) \quad (a,b)$

b) $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow x \in [-b,-a] \quad [a,\ b]$

c) $a \leq |x-c| \leq b \Leftrightarrow x \in [-b+c,\ -a+c] \quad [a+c,\ b+c]$

d) $a < |x-c| < b \Leftrightarrow x \in (-b+c,\ -a+c) \quad (a+c,\ b+c)$

- **দ্বিচল বিশিষ্ট রৈখিক অসমতার লৈখিক সমাধান (Graphical solution of linear inequalities in two variables) :**

একটি রেখা কার্তেসীয় তলকে দুটি অংশে বিভক্ত করে। প্রত্যেকটি অংশ অর্ধ-সমতল (half plane) নামে পরিচিত। একটি উলম্বরেখা এই সমতলকে বাম ও ডান অর্ধ-সমতলে বিভক্ত করে এবং একটি তির্যক রেখা এই সমতলকে নিম্ন ও ঊর্ধ্ব অর্ধসমতলে বিভক্ত করে।

i) কোনো অসমতার সমস্ত সমাধান যে অঞ্চল জুড়ে থাকে তাকে সমাধান অঞ্চল বলে।

ii) যে অর্ধসমতলটি অসমতাটি দ্বারা প্রকাশিত হয় তা নির্ণয়ের জন্য একটি বিন্দু (a, b) [রেখাটির উপর নয়] নিয়ে অসমতাটি সিদ্ধ করে কি করে না শুধুমাত্র এইটুকু পরীক্ষা করাই যথেষ্ট। যদি বিন্দুটি অসমতাটিকে সিদ্ধ করে তবে অসমতাটি ওই বিন্দুটি যে অর্ধসমতলে অবস্থিত তাকে প্রকাশ করে এবং ওই অঞ্চলকে ছায়াবৃত্ত করবে। অন্যথায় বিন্দুটি যে অর্ধসমতলে নেই তাকে প্রকাশ করবে। সুবিধার জন্য (0, 0) বিন্দুটিকে পছন্দ করা হয়।

iii) যদি অসমতাটি $ax+by \geq c$ বা $ax+by \leq c$ আকারের হয় তবে $ax+by = c$ রেখার উপরিস্থ বিন্দুগুলিও সমাধান অঞ্চলের অন্তর্গত হবে। সেক্ষেত্রে একটি গাঢ় রেখা অংকন করে সমাধান অঞ্চলটিকে চিহ্নিত করবে।

iv) যদি অসমতাটি $ax+by > c$ বা $ax+by < c$ আকারের হয় তবে $ax+by = c$ রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো সমাধান অঞ্চলের অন্তর্গত হবে না, তাই একটি ডট যুক্ত (dotted line) রেখা দিয়ে সমাধান অঞ্চলটিকে চিহ্নিত করবে।

- $x<a$ (বা $x>a$) কে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন করার জন্য 'a' সংখ্যাটির উপর একটি বৃত্ত অঙ্কন করো এবং 'a' সংখ্যাটির বাঁ (বা ডান) দিকে একটি গাঢ় রেখা অঙ্কন করো।

  $x\leq a$ (বা $x\geq a$) কে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন করার জন্য 'a' সংখ্যাটির উপর একটি গাঢ় বৃত্ত অঙ্কন করো এবং 'a' সংখ্যাটির বাঁ (বা ডান) দিকে একটি গাঢ় রেখা অঙ্কন করো।

- i) যদি কোনো অসমতাতে '$\leq$' বা '$\geq$' চিহ্ন থাকে তবে অসমতার সমাধানে, রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলোও অন্তর্ভুক্ত হবে এবং সমতার গাঢ় রেখা দিয়ে চিহ্নিত রেখাটির বাম (নীচে) বা ডান (উপরে) পাশের যে অঞ্চলের একটি যথেচ্ছ বিন্দু অসমতাটিকে সিদ্ধ করে তাই হবে অসমতার লেখ।

  ii) যদি কোনো অসমতাতে '$<$' বা '$>$' চিহ্ন থাকে তবে অসমতার সমাধানে, রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলো হবে না এবং সমতার ডটযুক্ত রেখা দিয়ে চিহ্নিত রেখাটির বাম (নীচে) বা ডান (উপরে) পাশের যে অঞ্চলের একটি যথেচ্ছ বিন্দু অসমতাটিকে সিদ্ধ করে তাই হবে অসমতার লেখ।

- যদি অসমতাতন্ত্রের সমাধান অঞ্চল এমন একটি অঞ্চল যা প্রদত্ত অসমতাগুলোর প্রত্যেককে একসাথে সিদ্ধ করে।

- লেখচিত্রের সাহায্যে দুই চলরাশি x ও y -এর সরল সহ-অসমীকরণসমূহের সমাধান সেট্ নির্ণয় করার অর্থ হল সেই সমাধান অঞ্চল নির্ণয় করা যেখানে সব (x,y) বিন্দু প্রদত্ত সরল সহ-অসমীকরণসমূহকে সিদ্ধ করে। সরল সহ-অসমীকরণসমূহের সমাধান সেট প্রকাশক সমাধান অঞ্চল একটি শূন্য সেট হতে পারে [যখন সকল সরল সহ-অসমীকরমকে সিদ্ধ করে এরকম কোনো (x,y) বিন্দু পাওয়া যায় না]। আবার, সমাধান সেট্ প্রকাশক সমাধান অঞ্চল প্রদত্ত সরল অসমীরণসমূহের অনুরূপ সরলরেখাসমূহ দ্বারা সীমাবদ্ধ একটি বদ্ধ অঞ্চল অথবা একটি অসীম মুক্ত অঞ্চলও হতে পারে।

অনুশীলনী – 6

ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

i) যদি $\frac{2x+3}{6} < x-1$, তবে x-এর প্রসার হবে —

a) $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$ b) $\left(\frac{9}{4}, \infty\right)$ c) $\left[\frac{9}{4}, \infty\right]$ d) $\left[-\infty, \frac{9}{4}\right)$

ii) $x^2-5x-6 \leq 0$ হলে x এর মানের সীমা হবে —

a) [2, 3] (b) (2, 3) (c) [-1, 6] (d) (6, ∞)

iii) $|y-x| \leq 3$ অসমীকরণটির সমাধান অঞ্চল যে পাদে অবস্থিত তা হল —

a) প্রথম b) দ্বিতীয় c) তৃতীয় d) সবগুলো

iv) যদি x একটি অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে $-x^2+7x-6 > 0$ অসমীকরণটি সমাধান সেট হবে —

a) $\{2, 4\}$ b) $\{3, 5\}$ c) $\{2, 3, 4,5\}$ d) $\{4, 5\}$

v) যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>0$, যেখানে $a > 0$ এবং $b < 0$, তবে সম্পর্কটি হবে —

a) $a+b = 0$ b) $a+b \ \ 0$ c) $a+b < 0$ d) $a+b \leq 0$

vi) $4(x-2) \leq 5(x-4)$, তবে x এর সর্বনিম্ন মান হবে —

a) 12 b) 10 c) –12 d) –10

vii) $p>q>1$, তবে $\frac{1}{p-q}, \frac{1}{\sqrt{p-q}}, \frac{1}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$ এর মধ্যে বৃহত্তম রাশিটি হবে —

a) $\frac{1}{p-q}$ b) $\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$ d) $\sqrt{p}+\sqrt{q}$

viii) যদি x বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$ এর বাস্তব মান থাকবে যদি —

a) $a>c>b$ b) $a>b>c$ c) $a<c<b$ d) $a<b<c$

ix) যদি $|x-1| > 5$, তবে

a) $x\in(-4, 6)$ b) $x\in[-4, 6]$ c) $x\in\{-\infty,-4)\cup(6,\infty)$ d) $x\in[-\infty,-4)\cup[6,\infty)$

x) মনে করো, x এবং b হল বাস্তব সংখ্যা, যদি $b>0$ এবং $|x|>b$, তবে

a) $x\in(-b, \infty)$ b) $x\in[-\infty, b]$ c) $x\in(-b, b)$ d) $x\in(-\infty,-b)\cup(b,\infty)$

2. অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর]

i) $\left|\frac{3x-4}{2}\right| \leq \frac{5}{12}$ অসমীকরণের সমাধান সেট্ নির্ণয় করো।

ii) $2y+1\geq 0$ অসমীকরণটির লেখচিত্রের সাহায্যে xy-সমতলে সমাধান করো।

iii) সমাধান করো : $-8 \leq 4(x+1) \leq 7, x\in R$

iv) $|x+1|\geq 3$ অসমীকরণটির সমাধান করো এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট চিহ্নিত করো।

v) দুটি ক্রমিক অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল 10 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 40 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, এরূপ সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

vi) সমাধান করো : $|x-1| \leq 5, |x| \geq 2$

vii) সমাধান করো : $\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{5}+4\right)\geq\frac{1}{3}(x-6)$

viii) যদি r একটি বাস্তব সংখ্যা এরূপ হয় যে, $|r|<1$ এবং যদি $a=5(1-r)$ হয়, তবে দেখাও যে $0<a<10$।

ix) সমাধান কর : $3 - |x| > 1$

x) যদি $x-y=3$ এবং $x+y\geq 9$ হয়, তবে x-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর)

i) সমাধান কর : $\frac{|x|-5}{|x|-3}>0\ (x\neq\pm 3)$

ii) সমাধান কর : $\left|\frac{2}{x-4}\right|>1,\ x\neq 4,\ x\in N$

iii) লেখচিত্রের সাহায্যে অসমীকরণগুলো সমাধান করে সমাধান অঞ্চল নির্ণয় করো : $x\geq 1$, $y\geq 0$, $x+y\leq 10$

iv) পৃথিবীর উপরিতল থেকে x কিমি গভীরতায় তাপমাত্রা $T\ ^0c$ যেখানে $T=30+25(x-3)$।
যদি উপরিপৃষ্ঠ থেকে গভীরতার মান 9.8 কিমি থেকে 13.8 কিমির মধ্যে হয়, তবে তাপমাত্রার প্রসার নির্ণয় করো।

v) সমাধান কর : $\frac{x-4}{x+3}>0$, যেখানে $x\in R$ এবং $x\neq -3$। বাস্তব সংখ্যা অক্ষের ওপর সমাধান সেট দেখাও।

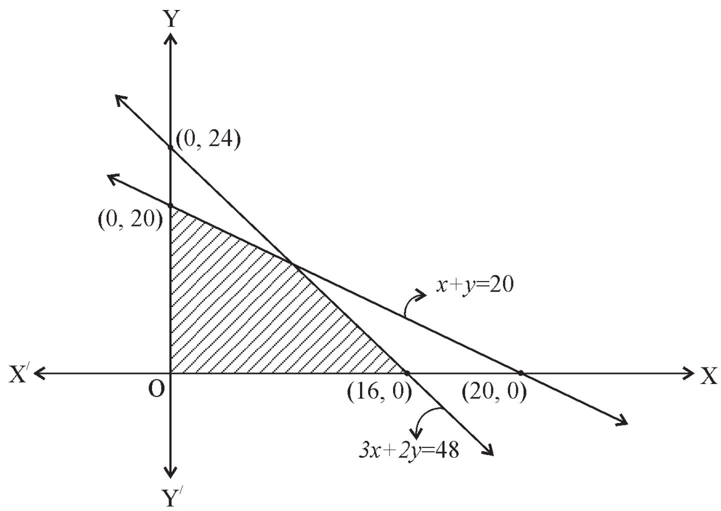
vi) x এবং $(x+2)$ হল পরপর দুটি ধনাত্মক জোড় সংখ্যা এমন যে, $x>12$ এবং অখণ্ড সংখ্যা দুটির যোগফল 39-এর চেয়ে কম। সম্ভাব্য এরকম যত জোড়া সংখ্যা হয় সেগুলি নির্ণয় করো।

vii) $\left|x+\frac{1}{4}\right|>\frac{7}{4}$ অসমতার সমাধান সেট্ নির্ণয় করো এবং সমাধান সেট্‌কে সংখ্যারেখায় চিহ্নিত করো।

viii) $2x+3y=10$ এবং $x-2y\geq 12$ থেকে x-এর সর্বনিম্ন মান ও y-এর সর্বোচ্চমান নির্ণয় করো।

ix) চারটি জামা ও পাঁচটি প্যান্টের মোট ক্রয়মূল্য সর্বোচ্চ 500 টাকা। যদি জামাগুলো 12% লাভে এবং প্যান্টগুলো 10% লাভে বিক্রি করে তবে মোট লাভ হয় 54 টাকা। প্রতি জামার সর্বনিম্ন ক্রয়মূল্য কত?

x) প্রদত্ত লেখচিত্রের সমাধান অঞ্চল থেকে অসমতার সমাধান সেটগুলো লিখ।



গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) সমাধান করো : $\dfrac{|x+1|+2x+3}{x+3} > 2$, যেখানে $x \in R$ ও $x \neq -3$

ii) 500 লিটার একটি অ্যাসিড দ্রবণে 16% অ্যাসিড আছে। এই অ্যাসিড দ্রবণে 35% অ্যাসিড আছে এরূপ একটি দ্রবণ কত লিটার মিশ্রিত করলে চূড়ান্ত মিশ্রনে 25% এর বেশি কিন্তু 30% এর কম অ্যাসিড থাকবে?

iii) যদি a, b, c কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু সূচিত করে, তবে দেখাও যে $\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 3$।

iv) যদি x-এর সকল মানের জন্য $x^2+4ax+2 > 0$ হয়, তবে দেখাও যে $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$।

v) যদি $x^2+2ax+10-3a>0$ হয়, তবে দেখাও যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $-5 < a < 2$ হবে।

vi) একটি বিশেষ প্রকার খাদ্যে কমপক্ষে 400 একক কার্বোহাইড্রেট, 500 একক ফ্যাট এবং 300 একক প্রোটিনের প্রয়োজন। F_1 খাদ্যে 10 একক কার্বোহাইড্রেট, 20 একক ফ্যাট এবং 15 একক প্রোটিন; F_2 খাদ্যে 25 একক কার্বোহাইড্রেট, 10 একক ফ্যাট এবং 20 একক প্রোটিন আছে। অসমীকরণসমূহের আকারে প্রদত্ত তথ্যাবলি প্রকাশ করো এবং লেখের সাহায্যে অসমীকরণগুলোর সমাধান প্রকাশক অঞ্চল দেখাও।

vii) যদি $a, b, c>0$ এবং যদি $abc = 1$ হয়, তবে দেখাও যে $a+b+c+ab+bc+ca > 6$।

viii) যদি $x\in R$ হয়, তবে $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7\left(2^{-x}\right) - 4 < 0$ অসমতার সমাধান সেট নির্ণয় করো।

ix) সমাধান কর : $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 6$, যেখানে $x\in R$।

x) একজন উৎপাদক নাট (nuts) এবং বল্টু (bolts) উৎপাদন করে। এক বাক্স নাট প্রস্তুত করতে A মেশিনের 1 ঘন্টা এবং B মেশিনের 3 ঘন্টা সময় লাগে এবং এক বাক্স বল্টু প্রস্তুত করতে A মেশিনের 3 ঘন্টা এবং B মেশিনের 1 ঘন্টা সময় লাগে। যদি সে সর্বাধিক 12 ঘন্টা মেশিন চালু রাখে তবে অসমীকরণসমুহের আকারে প্রদত্ত তথ্যসমূহ প্রকাশ করো এবং লেখের সাহায্যে অসমীকরণগুলোর সমাধান অঞ্চল দেখাও।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1]. i) b ii) c iii) d iv) c v) c vi) a

vii) c viii) (a, d) ix) c x) d

2]. i) $\left[\frac{19}{18}, \frac{29}{18}\right]$ iii) $\left[-3, \frac{3}{4}\right]$ iv) $(-\infty, -4] \cup [2, \infty)$ v) $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$

vi) (11,13), (17,19) vii) $-\infty < x \leq 120$ ix) (-2, 2)

x) 6

খ - বিভাগ

3]. i) $(-\infty, -5) \cup (-3, 3) \cup (5, \infty)$ ii) 3, 5

iv) 200^0c এবং 300^0c এর মধ্যে v) $x \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$

vi) (14,16), (16,18) এবং (18,20) vii) $(-\infty, -2) \cup (1.5, \infty)$

viii) x এর সর্বনিম্ন মান = 8, y এর সর্বোচ্চ মান = -2

ix) 50 টাকা x) $3x+2y \leq 48$, $x+y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

গ - বিভাগ

i) $(2, \infty) \cup (-4, -3)$

ii) 450 লিটারের বেশি কিন্তু 1400 লিটারের কম।

vi) $10x+25y \geq 400$; $20x+10y \geq 500$; $15x+20y \geq 300$; $x \geq 0$, $y \geq 0$

viii) $-2 < x < \infty$

ix) $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

x) $x+3y \leq 12$, $3x+y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ যেখানে x ও y হল যথাক্রমে নাট ও বল্টুর বাক্সের সংখ্যা।

অধ্যায় — 7

বিন্যাস ও সমবায় (Permutations and Combinations)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **ফ্যাক্টোরিয়েল প্রতীক (Factorial Notation) :**

  প্রথম n স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলকে, অর্থাৎ (1.2.3...........n)-কে গৌণিক n বা ফ্যাকটোরিয়াল n বা n ফ্যাকটোরিয়াল বলা হয় এবং একে $\lfloor n$ বা n! দিয়ে সূচিত করা হয়।

  যখন n ঋনাত্মক বা ভগ্নাংশ হয়; তখন n! সংজ্ঞাত নয়।

  এইভাবে, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots.3.2.1.$

- **'গণনার মৌলিক নীতি' বা গুণন নীতি (Fundamental principle of counting or, simply, the multiplication principle) :**

  ''যদি একটি ঘটনা m সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে অন্য একটি ঘটনা n সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে, তবে ঘটনাদ্বয়ের প্রদত্ত ক্রমে ঘটার মোট সংখ্যা $m\times n$।

- গণনার মৌলিক নীতি যে কোনো সসীম সংখ্যক ঘটনার ক্ষেত্রে সাধারণীকরণ করা যায়। উদাহরণ স্বরূপ তিনটি ঘটনার জন্য নীতিটি নিম্নরূপ :

  ''যদি একটি ঘটনা m সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে অন্য একটি ঘটনা n সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে এবং তাকে অনুসরণ করে তৃতীয় একটি ঘটনা যদি p সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে ঘটে তবে প্রদত্ত ক্রমে ঘটনাগুলো ঘটার মোট সংখ্যা হল $m\times n\times p$।

- **সংযোজনের মূলনীতি (Fundamental Principle of Addition) :**

  যদি দুটি ভিন্ন ভিন্ন কাজের প্রথমটি m প্রকারে এবং দ্বিতীয়টি n প্রকারে সম্পন্ন করা যায়, তবে তাদের যেকেনো একটি (m+n) প্রকারে সম্পন্ন করা যায়।

- **বিন্যাস (Permutations) :**

  কতকগুলি ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর মধ্য থেকে একযোগে কয়েকটি বা সবগুলিকে নিয়ে ক্রম অনুযায়ী যত প্রকারে সাজনো যায় তার প্রত্যেকটিকে বিন্যাস বলা হয়।

- **সবগুলো বিভিন্ন নয় এমন বস্তুসমূহের বিন্যাস :**

  উপপাদ্য-1 : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা, যেখানে $0<r\leq n$ এবং বস্তুসমূহ পুনরাবৃত্ত হবে না, যাকে লেখা হয় ${}^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$।

$$= \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

কিছু বিশেষ ক্ষেত্র ঃ ${}^np_n = n!$; ${}^np_0 = 1$, $0! = 1$, ${}^np_1 = n$, ${}^np_2 = n(n-1)$

উপপাদ্য-2 : যদি একই বস্তুকে বার বার ব্যবহার করা যায় তবে n সংখ্যক বস্তুর r সংখ্যক স্থানে বিন্যাস সংখ্যা n^r

উপপাদ্য-3 : n-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি p সংখ্যক একই প্রকারের এবং বাকিরা ভিন্ন হয়, তবে এই n সংখ্যক বস্তুর সবগুলোকে একত্রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $\frac{n!}{p!}$।

উপপাদ্য-4 : n-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি p_1 সংখ্যক বস্তু প্রথম প্রকারের, p_2 সংখ্যক বস্তু দ্বিতীয় প্রকারের, ... p_k সংখ্যক বস্তু k-তম প্রকারের হয়, এবং বাকিগুলো ভিন্ন প্রকারের হয়, তবে এই n সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p_1!p_2!\cdots\cdots\cdots\cdot p_k!}$।

- **কিছু ফলাফল ঃ**

  (i) ${}^nP_n = {}^nP_{n-1}$

  (ii) ${}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1}$

  (iii) ${}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} = {}^nP_r$

  (iv) ${}^nP_r = n.{}^{n-1}P_{r-1} = (n-r+1).{}^nP_{r-1}$

  (v) $(2n)!=2^n.n!\{1.3.5\cdots\cdots\cdots\cdot(2n-1)\}$

- ধরো n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে m সংখ্যক বস্তু একই প্রকারের এবং বাকি $(n-m)$ সংখ্যক বস্তু অন্য এক প্রকারের হয়, তবে n সংখ্যক বস্তুকে একত্রে নিয়ে পারস্পরিক পার্থক্যসূচক বিন্যাসের মোট সংখ্যাকে লেখা হয় $\frac{n!}{(m!)\times(n-m)!}$।

- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে, সবগুলো একযোগে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা (যেখানে প্রত্যেক বস্তু যেকোনো সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হতে পারে) = n^n।

- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে যদি p সংখ্যক প্রথম প্রকারের এবং q সংখ্যক দ্বিতীয় প্রকারের, তবে একযোগে এই n সংখ্যক বস্তুর পারস্পরিক পার্থক্যসূচক বিন্যাস সংখ্যা $=\frac{n!}{p!q!}$ যেখানে $p+q=n$।

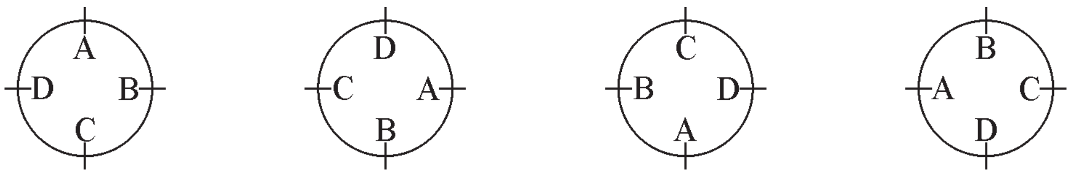
- **বৃত্তাকার বিন্যাস (Circular Permutations) :**

  এখনো পর্যন্ত বস্তুসমূহের বিন্যাস সম্পর্কিত আলোচনায় বস্তুসমূহ একটি রেখা বা সারি বরাবর কত বিভিন্ন রকমে বিন্যস্ত হতে পারে তাই নির্ণীত হয়েছে। বস্তুসমূহের এরূপ বিন্যাসকে রৈখিক বিন্যাস (linear permutations) বলে।

কতকগুলি বস্তুকে যদি একটি বৃত্ত বরাবর সাজানো হয়, তবে বস্তুসমূহের বিন্যাসকে বৃত্তাকার বিন্যাস (circular permutations) বলে।

যদি আমরা একটি রৈখিক বিন্যাস বিবেচনা করি ABCD, BCDA, CDAB এবং DABC স্পষ্টতই এগুলো পৃথক।

এখন, A, B, C, D কে কোনো বৃত্তের পরিধি বরাবর সাজানো হল —



এক্ষেত্রে যদি আমরা একটি বর্ণের সাপেক্ষে অন্য একটি বর্ণের অবস্থান বিবেচনা করি তাহলে উপরের চারটি বৃত্তাকার বিন্যাস কিন্তু পৃথক হবে না।

বৃত্তাকার বিন্যাস দু-প্রকারের —

(i) ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিক বরাবর এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের উল্টোদিক বরাবর দুটি পৃথক বৃত্তাকার বিন্যাস। উদাহরণস্বরূপ - বৃত্তাকার টেবিলের চারপাশে বসা।

(ii) কোনো কোনো বৃত্তাকার বিন্যাসের ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিক বরাবর এবং ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের উল্টোদিক বরাবর - এভাবে দুটি পৃথক বৃত্তাকার বিন্যাস হিসাবে বিবেচনা করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ - মুক্তো দিয়ে মালা গাঁথা।

- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলির একযোগে বৃত্তাকার বিন্যাস = $(n-1)!$
- n সংখ্যক ব্যক্তি কোনো বৃত্তাকার টেবিলে বসতে পারবে $(n-1)!$ প্রকারে।
- n সংখ্যক পুঁতি (beads) থেকে মালা (necklace) গঠন করা যায় $\frac{(n-1)!}{2}$ প্রকারে।
- **সমবায় (Combinations) :**

  কতকগুলি বস্তু থেকে কয়েকটি বস্তু বা সবগুলিকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় বা দল গঠন করা যায়, তাদের প্রত্যেকটিকে এক-একটি সমবায় বলা হয়।

- **প্রতীক (Notations) :**

  n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যাকে ${}^{n}c_{r}$ বা $c(n, r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে n এবং r অখণ্ড সংখ্যা এরূপ যে $n > 0$, $r \geq 0$ এবং $n \geq r$ এবং সংজ্ঞায়িত করা হয়,

$${}^{n}c_{r} = \frac{n!}{(r!)\times(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)............... \text{ r সংখ্যক}}{r!}$$

- **মন্তব্য ঃ**

i) $^{n}c_{n} = 1$; যেহেতু $^{n}c_{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$

ii) $^{n}c_{0} = 1$; যেহেতু $^{n}c_{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ (বাস্তবক্ষেত্রে, $^{n}c_{o}$ এর কোনো অর্থ নেই)

iii) $^{n}c_{1} = n$; যেহেতু $^{n}c_{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

iv) $^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ এবং

$$^{n}c_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{1}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{^{n}p_{r}}{r!}$$

$$\Rightarrow {}^{n}p_{r} = r! \times {}^{n}c_{r}$$

- **শর্ত আরোপিত সমবায় ঃ**

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r সংখ্যক বস্তুর সমবায় সংখ্যা, যাতে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকবে $= {}^{n-p}c_{r-p}$ এবং n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তুর সমবায় সংখ্যা যাতে p সংখ্যক বস্তু কখনই থাকবে না $= {}^{n-p}c_{r}$

- **পূরক সমবায় (Complementary Combinations) :**

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমবায় সংখ্যা এবং n সংখ্যক বস্তু থেকে একযোগে (n–r) সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমবায় সংখ্যা পরস্পর সমান।

- **কিছু ফলাফল**

(i) $^{n}c_{r} = {}^{n}c_{n-r}$

(ii) যদি $^{n}c_{x} = {}^{n}c_{y}$ হয় তবে $x = y$ বা $x + y = n$ হবে।

(iii) $^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$

(iv) $\frac{^{n}c_{r-1}}{^{n-1}c_{r-1}} = \frac{n}{(n-r+1)}$

(v) $\frac{^{n}c_{r}}{^{n-1}c_{r-1}} = \frac{n}{r}$

(vi) $\frac{^{n}c_{r}}{^{n}c_{r+1}} = \frac{r+1}{n-r}$

(vii) $\dfrac{{}^{n}c_{r}}{{}^{n}c_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$

- **শর্তাধীন সমবায় (Restricted combinations) :**
  - (i) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমবায় সংখ্যা = ${}^{n-p}c_{r-p}$, যেখানে নির্বাচিত r সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই থাকবে।
  - (ii) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমবায় সংখ্যা = ${}^{n-p}c_{r}$, যেখানে নির্বাচিত r সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনোই থাকবে না।

- n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে একটি, দুটি, তিনটি ...., সবগুলি নিয়ে প্রাপ্ত সমবায় সংখ্যার সমষ্টি $= {}^{n}c_{1} + {}^{n}c_{2} + {}^{n}c_{3} + \ldots\ldots\ldots {}^{n}c_{n}$

  $\therefore$ n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে যতগুলি ইচ্ছা একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা = $2^{n}-1$

- p সংখ্যক প্রথম ধরণের, q সংখ্যক দ্বিতীয় ধরণের, r সংখ্যক তৃতীয় ধরণের ইত্যাদি অভিন্ন বস্তু থাকলে এই (p + q + r + ...) সংখ্যক বস্তুগুলি থেকে যতগুলি ইচ্ছা একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা = $\{(p+1)(q+1)(r+1)....\} -1$.

- n = যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ${}^{n}c_{r}$ বৃহত্তম হয় যখন $r = {}^{n}\!/_{2}$; আবার n = অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে ${}^{n}c_{r}$ বৃহত্তম হয়, যখন $r = \dfrac{n-1}{2}$ অথবা $r = \dfrac{n+1}{2}$ ।

- n সংখ্যক বিভিন্ন বিন্দু থেকে দুটি বিন্দু একযোগে যুক্ত করে প্রাপ্ত সকল সরলরেখার সংখ্যা হবে = ${}^{n}c_{2} = \dfrac{1}{2}n(n-1)$

অনুশীলনী - 7
ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

(i) 'BHARAT' শব্দটির অক্ষরগুলি দিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যাবে, যেখানে B এবং H কখনো একত্রে বসবে না —

a) 360 b) 240 c) 120 d) উপরের কোনটিই নয়।

(ii) পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট টেলিফোন নম্বরের সংখ্যা হবে যেখানে কমপক্ষে একটি অঙ্ক পুনরাবৃত্ত হবে —

a) 90000 b) 100000 c) 30240 d) 69760

(iii) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু একযোগে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা হবে, যেখানে নির্দিষ্ট 3টি বস্তু যুক্ত থাকবে –

a) ${}^{n-3}p_{r-3}$ b) ${}^{n-3}p_{r}$ c) ${}^{n}p_{r-3}$ d) $r!\ {}^{n-3}c_{r-3}$

(iv) r সংখ্যক ক্রমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার গুণফল সর্বদা বিভাজ্য হবে —

a) r! b) r!+1 c) (r+1)! d) উপরের কোনটিই নয়

(v) যদি ${}^{n}p_{r} = x.{}^{n-1}p_{r-1}$ হয়, তবে নিচের কোনটি x-এর মান হবে?

a) n　　b) n(n–1)　　c) $\dfrac{n-1}{n}$　　d) $\dfrac{n}{n-r}$

(vi) m(m–1)(m–2)..........3.2.1 =

a) m!　　b) (m+1)!　　c) (m–1)!　　d) এদের কোনোটিই নয়

(vii) প্রদত্ত, ${}^{9}p_{5}=x.{}^{9}p_{3}$; তবে নিচের কোনটি x-এর মান হবে —

a) 56　　b) 42　　c) 30　　d) 20

(viii) যদি ${}^{k+5}p_{k+1} = \dfrac{11(k-1)}{2} \cdot {}^{k+3}p_{k}$, তবে নিচের কোনটি k-এর মান হবে —

a) 7 এবং 11　　b) 6 এবং 7　　c) 2 এবং 11　　d) 2 এবং 6

(ix) ${}^{n-1}c_{r}+{}^{n-1}c_{r-1}$ = ?

a) ${}^{n}c_{r+1}$　　b) ${}^{n+1}c_{r}$　　c) ${}^{n}c_{r}$　　d) n!

(x) যদি ${}^{n}p_{r} = x.{}^{n}c_{r}$, তবে x = ?

a) ${}^{n}p_{r-1}$　　b) ${}^{n}c_{r-1}$　　c) n!　　d) r!

(xi) যদি ${}^{n}C_{3} = K.n(n-1)(n-2)$, তবে K = ?

a) 1　　b) $\dfrac{1}{2}$　　c) $\dfrac{1}{3}$　　d) $\dfrac{1}{6}$

(xii) যদি $(n-r+1).{}^{n}C_{r-1} = m\times{}^{n}C_{r}$, তবে m = ?

a) r!　　b) 1　　c) n　　d) r

(xiii) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা হবে, যেখানে নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু সর্বদা থাকবে —

a) ${}^{n-p}C_{r-p}$　　b) ${}^{n-p}p_{r-p}$　　c) pr　　d) (r–p)!

(xiv) n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু একযোগে নিয়ে সমবায় সংখ্যা হবে, যেখানে নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু কখনও একত্রে থাকবে না —

a) ${}^{n-p}C_{r-p}$　　b) ${}^{n-p}C_{r}$　　c) ${}^{n}C_{r}$　　d) $\dfrac{n-p!}{r!}$

(xv) যদি ${}^{16}C_{r} = {}^{16}C_{2r+1}$, তবে নিচের কোনটি r এর মান হবে —

a) 6　　b) 5　　c) 4　　d) 3

(xvi) 3, 4, 5 এবং 6 অঙ্কগুলো একযোগে নিয়ে গঠিত সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কগুলোর সমষ্টি হবে —

a) 432　　b) 108　　c) 36　　d) 18

(xvii) কোনো অঙ্ক পুনরাবৃত্তি না করে 0, 1, 2, 3, 4 এবং 5 অঙ্ক দ্বারা গঠিত 5 অঙ্কের সংখ্যা গঠন করা যায়, যা 3 দ্বারা বিভাজ্য —

a) 216 b) 600 c) 240 d) 3135

(xviii) একটি কক্ষের প্রত্যেকে প্রত্যেকের সঙ্গে করমর্দন করল। যদি করমর্দনের সংখ্যা হয় 66, তবে ঐ কক্ষের মোট লোকসংখ্যা ছিল —

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14

(xix) প্রদত্ত 5টি ভিন্ন সবুজ রঞ্জক, 4টি ভিন্ন নীল রঞ্জক এবং 3টি ভিন্ন লাল রঞ্জক থেকে কমপক্ষে 1টি সবুজ এবং 1টি নীল রঞ্জক নির্বাচিত হওয়ায় সমবায় সংখ্যা হবে —

a) 3600 b) 3720 c) 3800 d) 3600

(xx) 12টি বিন্দুর একটি সেট যেখানে 7টি বিন্দু একতলীয়, বিন্দুগুলি থেকে কতগুলি ত্রিভুজ নির্বাচন করা যাবে—

a) 105 b) 15 c) 175 d) 185

2) অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

(i) যদি $P(9, r) = 3024$, r এর মান নির্ণয় করো।

(ii) যদি $P(n-1, 3) : P(n, 4) = 1 : 9$, n এর মান নির্ণয় করো।

(iii) যদি $P(15, r-1) : P(16, r-2) = 3 : 4$, r এর মান নির্ণয় করো।

(iv) কত বিভিন্ন উপায়ে 5 জন শিশু সারিবদ্ধভাবে দাঁড়াতে পারবে?

(v) কত বিভিন্ন উপায়ে 4টি চিঠি 5টি বাক্সে ফেলা যায়?

(vi) 3টি ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। যেখানে কমপক্ষে একটি ছক্কায় যুগ্ম সংখ্যা উঠবে, তাহলে সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা কত হবে?

(vii) কত বিভিন্ন উপায়ে 7 জন পুরুষ ও 7 জন মহিলা একটি গোল টেবিলে বসতে পারবে, যেখানে দুইজন মহিলা পাশাপাশি বসবে না?

(viii) $1! + 2! + 3! + \ldots\ldots\ldots + 200!$ কে 14 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে লিখ।

(ix) কোনো পাইপ অব্যবহৃত না রেখে, 4 জন মহিলা 4টি প্রদত্ত পাইপ থেকে কত ভিন্ন উপায়ে জল তুলতে পারবে?

(x) পুনরাবৃত্তি না করে 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলোর সবগুলি দ্বারা কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যাবে?

খ - বিভাগ

3) সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) প্রমাণ করো : $\dfrac{(2n+1)!}{n!} = 2^n \{1\cdot 3\cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)(2n+1)\}$

ii) TRIANGLE শব্দের অক্ষরগুলো কত রকমে সাজানো যায়, যাতে স্বরবর্ণ দুটি কখনও একত্রে না থাকে?

iii) যদি কোনো সুষম বহুভুজের কর্ণ সংখ্যা 44 হয়, তবে এটির বাহু সংখ্যা নির্ণয় করো।

iv) যদি $5\,{}^{4}P_{r} = 6\,{}^{5}P_{r-1}$ হয়, তবে r এর মান নির্ণয় করো।

v) যদি ${}^{9}p_{r} + 5\,{}^{9}p_{4} = {}^{10}p_{r}$ হয় তবে r এর মান নির্ণয় করো।

vi) যদি ${}^{(a^2-a)}C_2 = {}^{(a^2-a)}C_4$, তবে a এর মান নির্ণয় করো।

vii) মান নির্ণয় করো :

$$\left({}^{7}C_0 + {}^{7}C_1\right) + \left({}^{7}C_1 + {}^{7}C_2\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \left({}^{7}C_6 + {}^{7}C_7\right)$$

viii) 12 জন মহিলার মধ্যে 8 জন মহিলাকে কত ভিন্ন প্রকারে কোনো একটি অনুষ্ঠানে আমন্ত্রণ করতে পারা যায় যেখানে দুইজন মহিলা একত্রে অনুষ্ঠানটিতে যেতে চায় না।

ix) ‘FAILURE’ শব্দটি থেকে কত উপায়ে 4টি অক্ষর ব্যবহার করে শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যেখানে —

(a) প্রত্যেক শব্দে F যুক্ত থাকবে।

(b) প্রত্যেক শব্দে F যুক্ত থাকবে না।

x) যদি ${}^{n}p_{r}=840$; ${}^{n}C_{r}=35$, তবে r এর মান নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

(i) যদি $\dfrac{{}^{n}P_{r-1}}{a} = \dfrac{{}^{n}P_{r}}{b} = \dfrac{{}^{n}P_{r+1}}{c}$, তবে প্রমাণ করো যে, $b^2=a(b+c)$।

(ii) 4টি চিঠি ও 4টি নির্দিষ্ট ঠিকানাবিশিষ্ট খাম আছে। কত উপায়ে 4টি চিঠির প্রত্যেকটিই ভুল ঠিকানাবিশিষ্ট খামে রাখা যায়?

(iii) কোনো দুটি ‘–’ চিহ্ন পাশাপাশি না রেখে কত রকমে 6টি ‘+’ চিহ্ন এবং 4টি ‘–’ চিহ্নকে এক লাইনে সাজানো যায়?

(iv) 14 জন ছাত্রের মধ্যে থেকে একযোগে কতজন করে নিয়ে নির্বাচন করলে নির্বাচন সংখ্যার মান বৃহত্তম হবে? বৃহত্তম নির্বাচন সংখ্যা নির্ণয় করো। যদি ছাত্রসংখ্যা 15 জন হয়, তবে বৃহত্তম নির্বাচন সংখ্যা কত হবে?

(v) যদি $\dfrac{{}^{n}C_{r-1}}{a} = \dfrac{{}^{n}C_{r}}{b} = \dfrac{{}^{n}C_{r+1}}{c}$ হয়, তবে প্রমাণ করো $n = \dfrac{ab+2ac+bc}{b^2-ac}$ এবং $r = \dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$।

(vi) FORECAST এবং MILKY এই শব্দ দুটির অক্ষরগুলো থেকে 5 অক্ষরবিশিষ্ট কতগুলো বিন্যাস করা যায়, যদি প্রত্যেক বিন্যাসে প্রথম শব্দ থেকে 3টি অক্ষর এবং দ্বিতীয় শব্দ থেকে 2টি অক্ষর নেওয়া হয়।

(vii) a, b, c, d, e অক্ষরগুলির সবগুলোর সঙ্গে '+' ও '–' চিহ্নের সমন্বয়ে কতগুলো বিভিন্ন বীজগাণিতিক রাশি গঠন করা যায়?

(viii) একটি বাক্সে 1, 2, 3, ... 50 নম্বর বিশিষ্ট 50টি টিকিট আছে। বাক্স থেকে 5টি টিকিট তুলে প্রাপ্ত নম্বরের উর্ধ্বক্রমে $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ সাজানো হয়। কতগুলো নির্বাচনের ক্ষেত্রে $x_3=30$ হবে?

(ix) প্রমাণ করো যে, ${}^nC_r+3.{}^nC_{r-1}+3.{}^nC_{r-2}+{}^nC_{r-3}={}^{n+3}C_r$

(x) দেখাও যে, $\dfrac{{}^{4n}C_{2n}}{{}^{2n}C_n}=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(4n-1)}{\{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)\}^2}$

(xi) A, B ও C এর নিকট যথাক্রমে 4টি, 3টি ও 2টি বিভিন্ন পুস্তক আছে। প্রত্যেকের কাছে যতগুলো করে পুস্তক আছে তার সংখ্যা অপরিবর্তিত রেখে তারা নিজেদের মধ্যে কত প্রকারে পুস্তক অদলবদল করতে পারে?

(xii) তিনজন বালিকা এবং নয়জন বালক কত প্রকারে দুটো ভ্যান (VAN) এর সিটে বসতে পারবে, প্রত্যেকের জন্যই সামনের তিনটি এবং পেছনে চারটি আসন চিহ্নিত করা রয়েছে।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1] i) b ii) d iii) d iv) a v) a vi) a
vii) c viii) b ix) c x) d xi) d xii) d
xiii) a xiv) b xv) b xvi) b xvii) a xviii) b
xix) b xx) d

2] i) 4 ii) 9 iii) 14 iv) 120 v) 61 vi) 189
vii) 7! × 6! viii) 5 ix) 4! x) 24

খ - বিভাগ

3]. ii) 14400 iii) n=11 iv) r = 3 v) 5 vi) 3
vii) 2^8-2 viii) ${}^{12}c_8-{}^{10}c_6$ ix) (a) ${}^6c_3$ x $\lfloor 4$ (b) ${}^6c_4$ x $\lfloor 4$ (x) 4

গ - বিভাগ

4]. ii) 9 iii) 35 iv) 6435 vi) 67200 vii) 32
viii) 77140 xi) 1260 xii) 91.(12)!

অধ্যায় — 8

দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- যদি a এবং b বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে

  $(a+b)^n = {}^nc_0a^n+{}^nc_1a^{n-1}b+{}^nc_2a^{n-2}b^2+........+{}^nc_nb^n$, যেখানে ${}^nc_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0\leq r\leq n$ এর জন্য।

- $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদটি হল $(r+1)$তম পদ, যার মান $T_{r+1}={}^nc_ra^{n-r}b^r$।

- $(a+b)^n$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা হল $n+1$।

- $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলো একটি বিশেষ সজ্জায় সাজানো থাকে যা পাস্কাল ত্রিভুজ নামে পরিচিত।

- $(a+b)^n$ বিস্তৃতিতে, যদি n যুগ্ম হয়, তবে মোট পদসংখ্যা হবে $n+1$ (অযুগ্ম)। তাহলে মধ্যপদ হবে একটি, অর্থাৎ, $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ তম পদটি হল মধ্যপদ।

- $(a+b)^n$ বিস্তৃতিতে, যদি n অযুগ্ম হয়, তবে মোট পদসংখ্যা হবে $n+1$ (যুগ্ম)। তাহলে মধ্যপদ হবে দুটি, অর্থাৎ, $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ তম এবং $\left(\dfrac{n+1}{2}+1\right)$তম পদগুলো হল মধ্যপদ।

- $(a+b)^n$ বিস্তৃতির শেষ দিক থেকে p তম পদ হবে প্রথম দিক থেকে $(n-p+2)$ তম পদ।

- $(a+b)^n$ এর দ্বিপদ বিস্তৃতিতে, ${}^nc_0$, ${}^nc_1$, ${}^nc_2$, ... ${}^nc_n$ সহগগুলোকে দ্বিপদ সহগ বলা হয়। যদি $a=b=1$ হয়, তবে এই দ্বিপদ সহগগুলোর সমষ্টি হবে 2^n, অর্থাৎ ${}^nc_0+{}^nc_1+{}^nc_2+........+{}^nc_n=2^n$।

  আবার যদি $a=1$, $b=-1$ হয়, তবে এই বিস্তৃতির বিজোড় স্থানীয় দ্বিপদ সহগসমূহের সমষ্টি, জোড় স্থানীয় দ্বিপদ সহগসূহের সমষ্টির সমান এবং প্রত্যেকের মান হবে 2^{n-1}। অর্থাৎ, ${}^nc_0+{}^nc_2+{}^nc_4+...... = {}^nc_1+{}^nc_3+{}^nc_5+.....=2^{n-1}$।

অনুশীলনী - 8

ক - বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) $\left(2x-\frac{3}{y}\right)^{15}$ বিস্তৃতির পদসংখ্যা হল —

a) 14 b) 15 c) 30 d) 16

ii) $\left\{(2x+5y)^{13}-(2x-5y)^{13}\right\}$ এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা হল —

a) 14 b) 7 c) 12 d) 28

iii) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{10}$ বিস্তৃতির 7-তম পদটি হল —

a) $120xy^2$ b) $210x^3y^4$ c) $210x^2y^3$ d) কোনটিই নয়

iv) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ বিস্তৃতির শেষদিক থেকে 5-তম পদটি হল —

a) $495x^{-4}$ b) $495x^4$ c) $99x^4$ d) $99x^{-4}$

v) যদি $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ -এর বিস্তৃতিতে r-তম পদে x^{-17} পাওয়া যায়, তবে —

a) $r=10$ b) $r=11$ c) $r=12$ d) $r=13$

vi) $\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি হল —

a) 250 b) 252 c) 251 d) কোনটিই নয়

vii) $\left(x-\frac{m}{x}\right)^{11}$ -এর বিস্তৃতির x^{-3} এর সহগ হল —

a) $-924m^7$ b) $-792m^5$ c) $-792m^6$ d) $-330m^7$

viii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ -এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদটি হল —

a) 252 b) 210 c) 756 d) 504

ix) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{11}$ -এর বিস্তৃতির কোন পদটিতে x^7 আছে?

a) 6-তম　　b) 7-তম　　c) 8-তম　　d) 5-তম

x) ${}^nc_0 + {}^nc_2 + {}^nc_4 + {}^nc_6 + \ldots\ldots\ldots\ldots = $ কত?

a) 2^n　　b) 2^{n-1}　　c) 4^{n-1}　　d) 4^n

2. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

i) $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} যুক্ত কোনো পদ আছে কিনা নির্ণয় করো।

ii) $(1+x)^{p+q}$ -এর বিস্তৃতিতে x^p এবং x^q এর সহগগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো।

iii) $(1+x)(1-x)^n$-এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় করো।

iv) $\left(3x + \dfrac{7}{x^3}\right)^{12}$ -এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদটি নির্ণয় করো।

v) $(x^2-y)^6$-এর বিস্তৃতিতে সাধারণ পদটি লেখো।

vi) $(x+y)^n$ -এর বিস্তৃতিতে সহগগুলোর সমষ্টি 4096 হলে n-এর মান নির্ণয় করো।

vii) $(a+b)^n$ -এর বিস্তৃতিতে 4-তম পদ এবং 13-তম পদের সহগ পরস্পর সমান হলে n-এর মান নির্ণয় করো।

viii) $\left(\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{x^3}{6}\right)^7$ -এর বিস্তৃতির শেষ দিক থেকে 4-তম পদটি নির্ণয় করো।

ix) $(a+b+c)^{10}$-এর বিস্তৃতির মোট পদসংখ্যা নির্ণয় করো।

x) $\left(\dfrac{p}{2} + 2\right)^8$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদের মান 1120 হলে, p-এর মান নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(2x-3y)^4$ রাশিমালাকে বিস্তৃত করো।

ii) দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে $(101)^{50} > (100)^{50} + (99)^{50}$।

iii) দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে $(103)^4$ এর মান নির্ণয় করো।

iv) $(1.2)^{4000}$ অথবা 800 এর মধ্যে কোনটি ক্ষুদ্রতর নির্ণয় করো।

v) দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রমাণ করো যে $2^{3n}-7n-1$ সর্বদাই 49 দিয়ে বিভাজ্য, যেখানে $n \in N$।

vi) r -এর মান নির্ণয় করো, যখন $(1+x)^{18}$-এর বিস্তৃতিতে $(2r+4)$-তম এবং $(r-2)$-তম পদের সহগ সমান।

vii) যদি $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ -এর বিস্তৃতির শুরু থেকে এবং শেষদিক থেকে 7-তম পদ সমান হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় করো।

viii) $(1+ax)^4$ এবং $(1-ax)^6$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদগুলোর সহগসমূহ সমান হলে a-এর মান নির্ণয় করো।

ix) $\left(\frac{p}{x}+\frac{x}{p}\right)^9$ -এর বিস্তৃতির মধ্যপদগুলো নির্ণয় করো।

x) $\left(\sqrt{x}+\frac{a}{x^2}\right)^{10}$ -এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদের মান 405 হলে a-এর মান নির্ণয় করো।

xi) $(1+x)^{21}+(1+x)^{22}+\ldots\ldots\ldots+(1+x)^{30}$ -এর বিস্তৃতিতে x^5-এর সহগ নির্ণয় করো।

xii) $(0.999)^3$ -এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) দেখাও যে $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদটি হল $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdots(2n-1)}{n!}(-2)^n$, যেখানে $n\in N$।

ii) $(2+3x)^9$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সাংখ্যমান নির্ণয় করো, যখন $x=\frac{3}{2}$ ।

iii) যদি $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ এর বিস্তৃতিতে x^p যুক্ত পদ আসে, তবে প্রমাণ করো যে এর সহগ হল

$$\frac{(2n)!}{\left\{\left(\frac{4n-p}{3}\right)!\right\}\times\left\{\left(\frac{2n+p}{3}\right)!\right\}}$$

iv) $\left(ax^2+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতির x^7 এবং $\left(ax-\frac{1}{bx}\right)^{11}$ এর বিস্তৃতির x^{-7} এর সহগ নির্ণয় করো এবং a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করো যখন এই সহগগুলো পরস্পর সমান।

v) $(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\ldots\ldots\ldots+x^{1000}$ এর বিস্তৃতির সদৃশ পদগুলো সরল করার পর x^{50} এর সহগ নির্ণয় করো।

vi) যদি $(1-x)^{2n-1}$ এর বিস্তৃতির x^r এর সহগকে a_r দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে প্রমাণ করো যে $a_{r-1}+a_{2n-r}=0$।

vii) যদি $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির পর পর চারটি পদের সহগ a_1, a_2, a_3, a_4 হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$$

viii) $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ এবং পঞ্চম পদের মান যথাক্রমে 84,280 এবং 560 হলে x, a এবং n এর মান নির্ণয় করো।

ix) যদি $(1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদের সহগসমূহ সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে দেখাও যে $2n^2-9n+7=0$।

x) যদি $(x+\alpha)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম এবং ষষ্ঠ পদ যথাক্রমে a, b, c এবং d হলে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{b^2-ac}{c^2-bd}=\dfrac{5a}{3c}$।

xi) যদি $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদ যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হয় তবে a, b এবং n-এর মান নির্ণয় করো।

xii) $\left(\dfrac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\dfrac{x-1}{x-x^{1/2}}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদের সহগ নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1. i) d ii) b iii) c iv) a v) c
   vi) b vii) d viii) a ix) a x) b

2. i) No ii) সমান iii) $(-1)^n(1-n)$ iv) ${}^{12}c_3.3^9.7^3$ v) $(-1)^r\ {}^6c_r x^{12-2r} y^r$
   vi) 12 vii) 15 viii) $\dfrac{35x^6}{48}$ ix) 66 x) ±2

খ - বিভাগ

3. i) $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$ iii) 112550881 iv) 800
   vi) r=6 vii) n=12 viii) $a=-\dfrac{3}{10}$ ix) $\dfrac{126p}{x},\dfrac{126x}{p}$ x) a=±3
   xi) ${}^{31}c_6-{}^{21}c_6$ xii) 0.997

গ - বিভাগ

4. ii) $T_7=\dfrac{7\times3^{13}}{2}$ iv) ${}^{11}c_5a^6b^{-5},\ {}^{11}c_6a^5b^{-6},\ ab=1$ v) ${}^{1001}c_{50}$ viii) x=1, a=2, n=7
   xi) a=3, b=5, n=6 xii) 210

অধ্যায় — 9

অনুক্রম ও শ্রেণি (Sequences and Series)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- একটি অনুক্রম বলতে আমরা বুঝি, কোনো একটি নিয়ম অনুসারে একটি নির্দিষ্টক্রমে সংখ্যার সজ্জা।

  একটি অনুক্রম হল একটি অপেক্ষক যার ক্ষেত্র হল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট অথবা $\{1,2,3,............n\}$ আকারের কিছু উপসেট। যে অনুক্রমের পদসংখ্যা সসীম (finite) তাকে সসীম অনুক্রম বলা হয়।

  যদি অনুক্রমটি সসীম অনুক্রম নয় তাকে অসীম অনুক্রম বলা হয়।

- যদি $a_1, a_2, a_3, ... a_n, ...$ একটি অনুক্রম হয়, তাহলে $a_1+a_2+a_3+.........+a_n+...........$ রাশিমালাকে শ্রেণি বলে।

  একটি শ্রেণিকে সসীম শ্রেণি বলা হয়, যদি এর সসীম সংখ্যক পদ থাকে। অন্যথায়, এটিকে অসীম শ্রেণি বলা হয়।

- ঐ অনুক্রমগুলোকে প্রগতি বলা হবে, যার পদগুলো একটি নির্দিষ্ট নমুনা অনুসরণ করে।

- একটি সমান্তর প্রগতি (A.P) হল একটি অনুক্রম যার পদগুলো একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবকে ক্রমান্বয়ে বাড়তে বা কমতে থাকে। এই ধ্রুবকটিকে সমান্তর প্রগতির সাধারণ অন্তর বলা হয়। সাধারণভাবে, আমরা সমান্তর প্রগতির প্রথম পদকে a, সাধারণ অন্তরকে d এবং শেষ পদকে l দ্বারা প্রকাশ করি। সমান্তর প্রগতির সাধারণ পদ বা n-তম পদটি হল $a_n=a+(n-1)d$।

- যদি একটি সমান্তর প্রগতিতে m-সংখ্যক পদ থাকে, তাহলে শেষ দিক থেকে n-তম পদ হল শুরু থেকে $(m-n+1)$ -তম পদ। শেষদিক থেকে n-তম পদটি হল $a_n=l-(n-1)d$।

- একটি সমান্তর প্রগতির পদগুলো নিম্নলিখিত উপায়ে নির্বাচন করলে খুবই সুবিধাজনক হয় :

পদসংখ্যা	পদ	সাধারণ অন্তর
3	$a-d, a, a+d$	d
4	$a-3d, a-d, a+d, a+3d$	$2d$
5	$a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$	d
6	$a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$	$2d$

- একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হল $S_n=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}(a+l)$, যেখানে প্রগতির শেষপদ $l=a+(n-1)d$ । ইহাকে n-এর দ্বিঘাত আকারেও লেখা যায়। $S_n=An^2+Bn$, যেখানে $A=\frac{d}{2}$, $B=a-\frac{d}{2}$ এবং ইহার সাধারণ পদ বা n-তম পদ হল $a_n=S_n-S_{n-1}$।

- যদি a, A এবং b সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে A-কে a ও b সংখ্যা দুটির সমান্তরীয় মধ্যক বলা হয়, যেখানে $A=\frac{a+b}{2}$ ।

- যদি একটি সমান্তর প্রগতির পদগুলোকে একটি নির্দিষ্ট ধ্রুবক দ্বারা বৃদ্ধি, হ্রাস, গুণ বা ভাগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত প্রগতিটিও সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

  যদি a_1, a_2, a_3.......... সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়, যার সাধারণ অন্তর d, তবে

  i) $a_1 \pm k, a_2 \pm k, a_3 \pm k$, ... সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে, যার সাধারণ অন্তর d।

  ii) a_1k, a_2k, a_3k,................. সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে, যার সাধারণ অন্তর dk।

  iii) $\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}, \cdots\cdots$ সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে, যার সাধারণ অন্তর $\frac{d}{k}$ $(k \neq 0)$।

- যদি a_1, a_2, a_3, ... এবং b_1, b_2, b_3, ... সমান্তর প্রগতি হয়, তবে

  i) $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3$, ... সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

  ii) a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... এবং $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots$ সমান্তর প্রগতিভুক্ত হবে না।

- যদি একটি অনুক্রমের n-তম পদ n-এর একটি রৈখিক রাশিমালা হয়, তবে অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হবে।

- যদি একটি অনুক্রমের n-সংখ্যক পদের সমষ্টি n-এর একটি দ্বিঘাত রাশিমালা হয়, তবে অনুক্রমটি একটি সমান্তর প্রগতি হবে।

- একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম এবং শেষ দিক থেকে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক এবং এটি প্রথম এবং শেষপদের সমষ্টির সমান।

- অশূন্য সংখ্যার একটি অণুক্রমকে গুণোত্তর প্রগতি (G.P.) বলা হবে যদি যেকোনো পদের সঙ্গে তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা একটি ধ্রুবক রাশি হয়। এই ধ্রুবক অনুপাতটিকে গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত বলা হয়। সাধারণভাবে, আমরা গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পদকে a দিয়ে এবং এটির সাধারণ অনুপাতকে r দিয়ে প্রকাশ করি। গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ পদ বা n-তম পদটি হল $a_n = ar^{n-1}$।

- যদি কোনো গুণোত্তর প্রগতিতে m-সংখ্যক পদ থাকে, তাহলে শেষ দিক থেকে n-তম পদ হল প্রথমদিক থেকে $(m-n+1)$-তম পদ। শেষদিক থেকে n-তম পদটি হল $a_n = \frac{l}{r^{n-1}}$ ।

- একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম এবং শেষদিক থেকে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল সর্বদা ধ্রুবক এবং এটি প্রথম এবং শেষপদের গুণফলের সমান।

- একটি গুণোত্তর প্রগতির পদগুলো নিম্নলিখিত উপায়ে নির্বাচন করলে খুবই সুবিধাজনক হয়।

পদসংখ্যা	পদ	সাধারণ অণুপাত
3	$\frac{a}{r}$, a, ar	r
4	$\frac{a}{r^3}$, $\frac{a}{r}$, ar, ar^3	r^2
5	$\frac{a}{r^2}$, $\frac{a}{r}$, a, ar, ar^2	r

- একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম n-সংখ্যক পদের যোগফল S_n হল —

  $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ বা $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ যদি $r \neq 1$ হয়।

  $S_n = na$ যদি $r = 1$ হয়।

  আবার, $S_n = \frac{a - lr}{1-r}$ বা $\frac{lr - a}{r-1}$, যেখানে l হল শেষ পদ।

- যদি a, G এবং b গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে G-কে a এবং b সংখ্যা দুটোর গুণোত্তরীয় মধ্যক বলা হয় এবং তা হল $G = \sqrt{ab}$ ।

- যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রত্যেক পদকে একই অশূন্য ধ্রুবক রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হয়, তবে নতুন শ্রেণিটিও গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

  i) যদি a_1, a_2, a_3........... গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে a_1k, a_2k, a_3k,........ এবং $\frac{a_1}{k}, \frac{a_2}{k}, \frac{a_3}{k}, \cdots\cdots$ গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

  ii) যদি a_1, a_2, a_3, ... গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$,........... গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

  iii) যদি a_1, a_2, a_3,........ এবং b_1, b_2, b_3......... দুটি গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... এবং $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots$ গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

- যদি দুটি ধনাত্মক সংখ্যা a এবং b এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A এবং G হয়, তবে

  i) $A > G$

  ii) a এবং b বীজযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণটি হল $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$

  iii) $a : b = \left(A + \sqrt{A^2 - G^2}\right) : \left(A - \sqrt{A^2 - G^2}\right)$

- **কয়েকটি বিশেষ অনুক্রমের যোগফলের কিছু ফলাফল :**

  i) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

  $$\sum n = 1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

  ii) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি

  $$\sum n^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  iii) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি

  $$\sum n^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

- **অসীম গুণোত্তর প্রগতির যোগফল :**

প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r ($|r|<1$) যুক্ত একটি অসীম গুণোত্তর প্রগতির যোগফল হল $S_n = \frac{a}{1-r}$ ।

যদি $r \geq 1$ হয়, তবে অসীম গুণোত্তর প্রগতির সমষ্টি $S_n \to \infty$।

অনুশীলনী - 9

ক - বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) একটি অনুক্রম সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে একটি

a) অপেক্ষকরূপে যার বিস্তার $\subseteq N$ b) অপেক্ষকরূপে যার ক্ষেত্র $\subseteq N$
c) সম্বন্ধরূপে যার বিস্তার $\subseteq N$ d) বাস্তব মান যুক্ত প্রগতিরূপে

ii) একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর প্রগতিতে থাকলে এর বাহুগুলোর অনুপাত হল —

a) $1:2:3$ b) $2:3:4$ c) $3:4:5$ d) $5:8:3$

iii) যদি 1+6+11+.........+x = 148 হয়, তবে x = ?

a) 36 b) 40 c) 48 d) 54

iv) যদি একটি সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফল $3n^2 - n$ হয়, তবে এটির সাধারণ অন্তর হল —

a) 2 b) 3 c) 4 d) 6

v) একটি সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের যোগফল $3n^2+5n$। এটির কত তম পদ 164 ?

a) 28-তম b) 27-তম c) 26-তম d) 29-তম

vi) যদি একটি সমান্তর প্রগতির p-সংখ্যক পদের যোগফল q এবং q-সংখ্যক পদের যোগফল p হয়, তবে $p+q$ সংখ্যক পদের যোগফল হবে —

a) $p-q$ b) $p+q$ c) pq d) $-(p+q)$

vii) যদি একটি সমান্তর প্রগতিতে $S_n=n^2p$ এবং $S_m=m^2p$, যেখানে S_r হল সমান্তর প্রগতির r-সংখ্যক পদের যোগফল, তবে S_p এর মান হবে —

a) $\frac{1}{2}p^3$ b) mnp c) p^3 d) $(m+n)p^2$

viii) যদি দুটি অসমান সংখ্যা a ও b-এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যক $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ হয়, তবে n-এর মান হল

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

ix) যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির n-তম পদ 2^n হয়, তবে এটির প্রথম 6টি পদের যোগফল হল

a) 124 b) 126 c) 190 d) 254

x) যদি a, b, c গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত এবং $a^{1/x}=b^{1/y}=c^{1/z}$ হয়, তবে xyz হল —

a) সমান্তর প্রগতিভুক্ত b) গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত
c) হরাত্মক প্রগতিভুক্ত d) কোনোটিই নয়

xi) যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির $(m+n)$-তম পদ p এবং $(m-n)$-তম পদ q হয়, তবে এর m-তম পদটি হল —

a) 0 b) pq c) $\sqrt{pq}$ d) $\frac{1}{2}(p+q)$

xii) 3^x+3^{1-x}, $x\in R$ রাশিটির অবম মান হল —

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) 3 d) $2\sqrt{3}$

xiii) যদি দুটি ধনাত্মক সংখ্যার মধ্যে সমান্তরীয় মধ্যক x এবং দুটি গুণোত্তরীয় মধ্যক y, z হয়, তবে $\frac{y^3+z^3}{xyz}$ এর মান হল —

a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) কোনটিই নয়।

xiv) $1^2+3^2+5^2+$............ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত শ্রেণিটির সমষ্টি হল —

a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ b) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
c) $\frac{(n-1)^2(2n+1)}{6}$ d) $\frac{(2n+1)^3}{3}$

xv) যদি $b = a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots\infty$ হয়, তবে a এর মান হবে —

a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{b}{1-b}$ c) $\frac{b}{1+b}$ d) $\frac{1}{b}$

2. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2 নম্বর]**

i) যদি কোনো সমান্তর প্রগতির 9-তম পদের 9 গুণ ঐ প্রগতির 13-তম পদের 13 গুণ হয়, তবে প্রগতির 22-তম পদটি নির্ণয় করো।

ii) যদি x, $2y$, $3z$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে, যেখানে x, y, z সংখ্যাগুলো গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

iii) 3, 10, 17, ... এবং 63, 65, 67, ... সমান্তর প্রগতিগুলোর n-তম পদ সমান হলে, n-এর মান নির্ণয় করো।

iv) যদি $\log_x a$, $a^{x/2}$ এবং $\log_b x$ গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় করো।

v) যদি কোনো সমান্তর প্রগতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং ষষ্ঠ পদ একটি গুণোত্তর প্রগতির পরপর তিনটি পদ হয়, তবে গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

vi) দুটি সংখ্যা a এবং b-এর মধ্যবর্তী n-সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল নির্ণয় করো।

vii) সমান্তরীয় মধ্যক এবং গুণোত্তরীয় মধ্যকের একটি দ্বিঘাত সমীকরণ লিখ যার বীজগুলো যথাক্রমে A এবং G।

viii) প্রথম n-সংখ্যক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফলটি লিখ।

ix) একটি গুণোত্তর প্রগতির তৃতীয় পদ 4 হলে এটির প্রথম পাঁচটি পদের গুণফল নির্ণয় করো।

x) $-\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, -\frac{5}{64}, \cdots\cdots$ গুণোত্তর শ্রেণির অসীম পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]**

i) $20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, 17\frac{3}{4}, \cdots\cdots$ অনুক্রমটির প্রথম ঋনাত্মক পদ কোন্ পদটি?

ii) দুই অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা 7 দ্বারা বিভাজ্য?

iii) 3+7+11+15+......... এবং 1+6+11+16+......... সমান্তরীয় শ্রেণি দুটির মধ্যবর্তী 10-তম সাধারণ পদটি নির্ণয় করো।

iv) 2, 5, 8, ...50-সংখ্যক পর্যন্ত এবং 3, 5, 7, 9,......... 60-সংখ্যক পর্যন্ত সমান্তর প্রগতি দুটোর মধ্যে কতগুলো পদ একই তা নির্ণয় করো।

v) যদি x, y, z সমান্তর প্রগতিভুক্ত এবং A_1 হল x এবং y-এর সমান্তরীয় মধ্যক, আবার A_2 হল y এবং z-এর সমান্তরীয় মধ্যক, তবে প্রমাণ করো যে A_1 এবং A_2 এর সমান্তরীয় মধ্যক y।

vi) যদি ধনাত্মক সংখ্যার একটি গুণোত্তর প্রগতির, যেকোনো একটি পদ এটির পরবর্তী দুটি পদের যোগফলের সমান হয়, তবে গুণোত্তর প্রগতির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করো।

vii) যদি 5, x, y, z, 405 একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম পাঁচটি পদ হয়, তবে x, y, z এর মান নির্ণয় করো।

viii) গুণোত্তর প্রগতির 4-তম পদটি নির্ণয় করো, যার 5-তম পদ 32 এবং 8-তম পদ হল 256।

ix) 3 এবং 48 এর মধ্যে 3টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

x) একটি সমান্তর প্রগতির প্রথম পদ a, দ্বিতীয় পদ b এবং শেষ পদ c। দেখাও যে প্রগতিটির সমষ্টি হল $\dfrac{(b+c-2a)(c+a)}{2(b-a)}$।

xi) যদি $\dfrac{b+c-a}{a}, \dfrac{c+a-b}{b}, \dfrac{a+b-c}{c}$ সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ ও সমান্তর প্রগতিভুক্ত।

xii) যদি b এবং c এর সমান্তরীয় মধ্যক a এবং দুটি গুণোত্তরীয় মধ্যক G_1 ও G_2 হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $G_1^3 + G_2^3 = 2abc$।

xiii) প্রমাণ করো $6^{1/2} \times 6^{1/4} \times 6^{1/8} \times \cdots\cdots\cdots \infty = 6$

গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) যদি কোনো সমান্তর প্রগতিতে $(2n+1)$-সংখ্যক পদ থাকে, তবে প্রমাণ করো যে এর অযুগ্ম স্থানের পদগুলোর সমষ্টি এবং যুগ্ম স্থানের পদগুলোর সমষ্টির অনুপাত $(n+1) : n$।

ii) যদি a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে প্রমাণ করো $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2$ ও গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত।

iii) যদি $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে, যেখানে $a_i > 0$ সকল i এর জন্য, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

iv) দুটি সমান্তর প্রগতির n-সংখ্যক পদের সমষ্টির অনুপাত $(7n+1) : (4n+27)$। তাদের m-তম পদের অনুপাত নির্ণয় করো।

v) যদি $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে প্রমাণ করো $\dfrac{1}{b-c}, \dfrac{1}{c-a}, \dfrac{1}{a-b}$ ও সমান্তর প্রগতিতে আছে।

vi) যদি x, y, z সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে, (x^2+xy+y^2), (z^2+xz+x^2) এবং (y^2+yz+z^2) হল সমান্তর প্রগতির পরপর তিনটি পদ।

vii) সমান্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার গুণফল 224 এবং এর বৃহত্তম সংখ্যা ক্ষুদ্রতম সংখ্যার 7 গুণ। সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো।

viii) একটি গুণোত্তর প্রগতির $(m+n)$-তম এবং $(m-n)$-তম পদ যথাক্রমে p এবং q। দেখাও যে এর m-তম এবং n-তম পদ হল $\sqrt{pq}$ এবং $p.\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{2n}}$।

ix) একটি গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 13 এবং এদের বর্গের সমষ্টি 91 হলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় করো।

x) গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত তিনটি সংখ্যার গুণফল 216। যদি এদের সহিত 2, 8, 6 যোগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত ফলাফলগুলো সমান্তর প্রগতিভুক্ত হয়। সংখ্যাগুলো নির্ণয় করো।

xi) 5+5.5+5.55+5.555+............ শ্রেণিটির n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করো।

xii) যদি একটি গুণোত্তর প্রগতির প্রথম n, $2n$ ও $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে S_1, S_2 ও S_3 হয়, তবে প্রমাণ করো যে $S_1(S_3-S_2) = (S_2-S_1)^2$।

xiii) যদি a, b, c, d গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2+d^2}$ ও গুণোত্তর প্রগতিভুক্ত হবে।

xiv) দুটি ধনাত্মক সংখ্যার অন্তরফল 12 এবং এদের সমান্তরীয় মধ্যক, গুণোত্তরীয় মধ্যক অপেক্ষা 2 বেশী হলে, সংখ্যা দুটো নির্ণয় করো।

xv) নিম্নলিখিত শ্রেণিগুলোর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় করো :

a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots\ldots\ldots$

c) $\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \cdots\cdots\cdots$

d) $1\times2\times4 + 2\times3\times7 + 3\times4\times10 + \ldots\ldots\ldots$

xvi) শ্রেণিটির সমষ্টি নির্ণয় করো, যার n-তম পদটি হল

a) $2n^2 - 3n + 5$

b) $4n^3 + 6n^2 + 2n$

xvii) একটি অসীম গুণোত্তর প্রগতির সমষ্টি হল 57 এবং এদের ঘণের সমষ্টি 9747 হলে গুণোত্তর প্রগতিটি নির্ণয় করো।

xviii) যদি $|x| < 1$ এবং $|y| < 1$ হয়, তবে নিম্নের অসীম শ্রেণিটির সমষ্টি নির্ণয় করো।

$(x + y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots\ldots\ldots$

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1. i) b ii) c iii) a iv) d v) b vi) d vii) c viii) a ix) b
x) a xi) c xii) d xiii) b xiv) b xv) c

2. i) 0 ii) $\frac{1}{3}$ iii) 13 iv) $\log_a\left(\log_b^a\right)$ v) 3 vi) $(ab)^{n/2}$ vii) $x^2-2Ax+G^2=0$
viii) n^2 ix) 4^5 x) -1

খ - বিভাগ

3. i) 28 তম পদ ii) 13 iii) 191 iv) 20 vi) $2\sin 18^0$ vii) 15, 45, 135 or –15, 45, –135
viii) 16 ix) 6, 12, 24

গ - বিভাগ

4. iv) (14m–6) : (8m+23) vii) 2,8,14 ix) 1,3,9 or 9,3,1 x) 18,6,2 or 2, 6, 18
xi) $S=5n+\frac{5}{9}\left\{(n-1)-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n-1}}\right)\right\}$ xiv) 16 এবং 4
xv) a) $n^2(2n^2-1)$ b) $\frac{1}{3}n\left(n^2+3n+5\right)$ c) $\frac{1}{24}n\left(2n^2+9n+13\right)$ d) $\frac{1}{12}n(n+1)\left(3n^2+19n+14\right)$
xvi) a) $\frac{1}{6}n\left(4n^2-3n+23\right)$ b) $n(n+1)^2(n+2)$
xvii) $19, \frac{38}{3}, \frac{76}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ xviii) $\frac{x+y-xy}{(1-x)(1-y)}$

অধ্যায় — 10

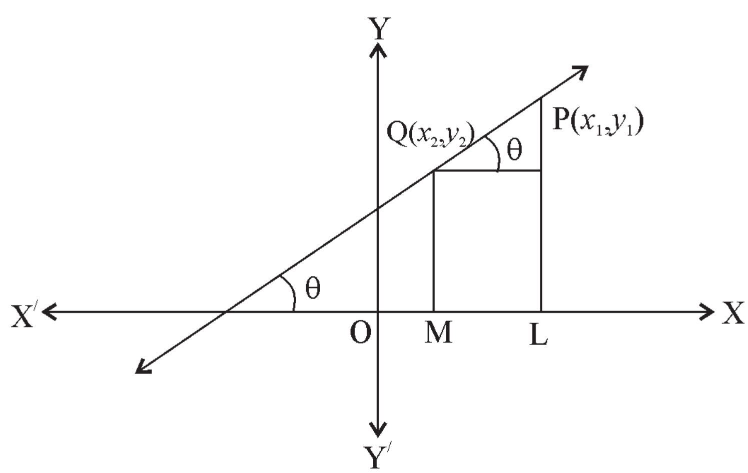
সরলরেখা (Straight Lines)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **সরলরেখার সংজ্ঞা :**
  কোনো বিন্দু দিক পরিবর্তন না করে কোনো সমতলে গতিশীল থাকলে তার সঞ্চারপথকে সরলরেখা এবং সঞ্চরপথের সমীকরণকে সরলরেখার সমীকরণ বলে।

- **প্রবণতা বা নতি (gradient or slope) :** কোনো সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ করলে তার প্রবনতা, $m = \tan\theta$।

- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা m হলে, $m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ।



- x অক্ষের সমীকরণ হয় $y=0$
- y অক্ষের সমীকরণ হয় $x=0$
- মূলবিন্দু থেকে b একক দূরে এবং x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয় $y=b$।
- মূলবিন্দু থেকে a একক দূরে এবং y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ হয় $x=a$.

- **প্রবণতা ছেদিতাংশ আকার (Slope-intercept form) :**
  এই আকারে সরলরেখার সমীকরণ : $y=mx+c$, যেখানে m = সরলরেখার প্রবণতা এবং c = y অক্ষের ছেদিতাংশ।

- **বিন্দু প্রবণতা আকার (Point slope form) :**
  এই আকারে সরলরেখার সমীকরণ : $y-y_1 = m(x-x_1)$, যেখানে m = সরলরেখার প্রবণতা এবং (x_1, y_1) হল রেখার ওপর প্রদত্ত বিন্দু।

- **প্রতিসম আকার (Symmetrical form) :**

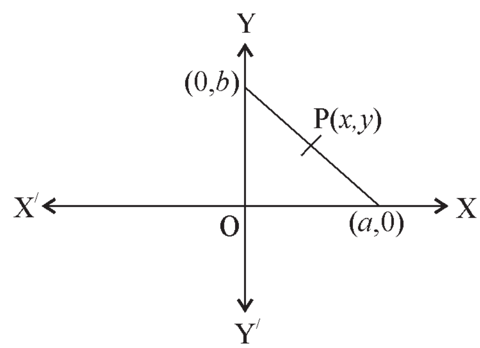
  এই আকারে সরলরেখার সমীকরণ : $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r$, যেখানে θ = রেখার আনতি, (x_1, y_1) হল রেখার ওপর নির্দিষ্ট বিন্দু এবং $r = (x, y)$ ও (x_1, y_1) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব।

- **দুই বিন্দু আকার (Two point form) :**

  এই সরলরেখার সমীকরণ : $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, যেখানে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হল রেখার উপর দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

- **ছেদিতাংশ আকার (Intercept form) :**

  এই সরলরেখার সমীকরণ : $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, যেখানে a ও b যথাক্রমে x ও y অক্ষের ছেদিতাংশ। সমীকরণটি x অক্ষকে $(a, 0)$ বিন্দুতে ও y অক্ষকে $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



- **অভিলম্ব আকার (Normal form) :**

  এই সরলরেখার সমীকরণ : $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, যেখানে p (>0) = মূলবিন্দু থেকে সরলরেখার লম্বদূরত্ব এবং α $(0\le\alpha\le2\pi)$ = সরলরেখার উপর মূলবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের সঙ্গে ধনাত্মক x-অক্ষের আনতি।

- **সাধারণ আকার (General form) :**

  এই সরলরেখার সমীকরণ : $ax+by+c=0$, যেখানে a, b, c বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা (a, b উভয়ে একত্রে শূন্য নয়), সরলরেখাটির নতি $-\dfrac{a}{b}$ ।

- দুটি প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে সমীকরণ দুটি সমাধান করে প্রাপ্ত x ও y এর মান।

- $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ হল $a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$ যেখানে k ($\neq 0$ or ∞) যে কোনো বাস্তব ধ্রুবক সংখ্যা। k-এর মান নির্ণয়ের জন্য অন্য প্রদত্ত শর্ত প্রয়োগ করতে হয়।

- তিনটি প্রদত্ত সরলরেখা সমবিন্দু (concurrent) হবে, যদি যে কোনো দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু দ্বারা তৃতীয় সরলরেখার সমীকরণ সিদ্ধ হয়।

- $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণ θ হলে $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ বা $\tan\theta=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

- দুটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হলে সরলরেখা দুটির প্রবণতার মান সমান হবে অর্থাৎ $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$

সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি $m_1=m_2$ হয়।

- $ax+by+c=0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ হয় $ax+by=k$, যেখানে k একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

- দুটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হবে যদি সরলরেখা দুটির প্রবণতা দুটির গুণফল $=-1$ হয় অর্থাৎ $y=m_1x+c_1$ ও $y=m_2x+c_2$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে, যদি $m_1m_2=-1$ হয়।

- $ax+by+c=0$ সরলরেখার ওপর লম্ব যে কোনো সরলরেখার সমীকরণ হয় $bx-ay=k$, যেখানে k একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

- $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ সমীকরণ দুটি একই সরলরেখার সমীকরণকে প্রকাশ করবে যদি $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ হয়।

- বহিঃস্থ $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $ax+by+c=0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব P হলে $P=\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ বা

  $P=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ।

- $y=mx+c_1$ এবং $y=mx+c_2$ দুটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব d হলে $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ এবং যদি দুটি সমান্তরাল রেখা $ax+by+c_1=0$ এবং $ax+by+c_2=0$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব d হয় তবে $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ।

অনুশীলনী - 10
ক - বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

I. সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

1) (6,10) এবং (–8, –4) বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার আনতি (inclination) হল —

a) 60^0 b) 120^0 c) 45^0 d) 135^0

2) y অক্ষের সমান্তরাল ও (–4, 6) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ হল —

a) $x+2=0$ b) $x+6=0$ c) $x-4=0$ d) $x+4=0$

3) (–1,4) বিন্দুগামী একটি সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 60^0 কোণ করে তবে সরলরেখাটির সমীকরণ হবে —

a) $y+4=\sqrt{3}(x-1)$ b) $y-4=\sqrt{3}(x+1)$

c) $x+4 = \sqrt{3}(y-1)$ d) $x-4 = \sqrt{3}(y+1)$

4) $3x+2y = 8$ রেখার নতি এবং y অক্ষের ওপর ছেদিতাংশ হল —

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)$ এবং 4 একক b) $\left(\frac{3}{2}\right)$ এবং 8 একক

c) $\left(\frac{2}{3}\right)$ এবং 4 একক d) $\left(-\frac{2}{3}\right)$ এবং 8 একক

5) $y = mx+c$ দ্বারা x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা প্রকাশিত হওয়ার জন্য নীচের কোন্ শর্তটি সত্য হবে?

a) $m \neq 0, c \neq 0$ b) $m = 0, c \neq 0$ c) $m \neq 0, c=0$ d) $m = 0, c = 0$

6) $3x+4y+15 = 0$ সরলরেখার মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব নীচের কোন্‌টির সঙ্গে সমান?

a) 4 একক b) 3 একক c) 9 একক d) 18 একক

7) নীচের কোন্ শর্তে $l_1x+m_1y+n_1= 0$ এবং $l_2x+m_2y+n_2=0$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবে

a) $l_1l_2+m_1m_2= 0$ b) $l_1m_1+l_2m_2= 0$ c) $l_1m_2+l_2m_1= 0$ d) $l_1l_2-m_1m_2= 0$

8) $x+\sqrt{3}y+7 = 0$ এবং $\sqrt{3}x-y+8 = 0$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণ হল —

a) 45^0 b) 30^0 c) 90^0 d) 60^0

9) নীচের কোন্‌টি $x = 0$ ও $ax+by+c = 0$ সরলরেখা দুটির মধ্যবর্তী কোণ?

a) $\tan^{-1}\frac{a}{b}$ b) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{a}{b}$ c) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$ d) $\tan^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)$

10) $2x-3y+5 = 0$ ও $Px+2y = 6$ সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হলে নীচের কোন্‌টি P এর মান হবে—

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $-\frac{4}{3}$ d) $-\frac{3}{4}$

11) $5x-9y-12 = 0$ ও $mx+10y = 2$ সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হলে নীচের কোন্‌টি m-এর মান হবে?

a) 18 b) –9 c) 9 d) –18

12) যদি $5x+12y-1 = 0$ এবং $10x+24y+K = 0$ দুটি সরলরেখার মধ্যবর্তী 2 একক হয় তবে K এর মান হবে—

a) 54 b) 50 c) 25 d) 100

II. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

1) x অক্ষের উপর বিন্দুটি নির্ণয় করো যা (7,6) এবং (3,4) বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

2) যদি x অক্ষের ওপর A বিন্দুর ভুজ –5 এবং y অক্ষের ওপর B বিন্দুটির কোটি 8 হয়, তবে AB এর দূরত্ব নির্ণয় করো।

3) $P(-5,11)$ এবং $Q(4,-7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $2:7$ অনুপাতে বিভক্ত করে সেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

4) $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুগামী রেখাটির প্রবণতা নির্ণয় করো।

5) $A(x, 2)$ এবং $B(6, -8)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা $-\frac{5}{4}$ হলে x এর মান নির্ণয় করো।

6) $(3, y)$ এবং $(2, 7)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখা $(-1, 4)$ এবং $(0, 6)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল হলে y-এর মান কত?

7) সরলরেখা দুটির নতি $(2-\sqrt{3})$ এবং $(2+\sqrt{3})$ হলে রেখা দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করো।

8) সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা y অক্ষের সমান্তরাল এবং $(-4, 3)$ বিন্দুগামী।

9) একটি রেখার y অক্ষের ছেদিতাংশ -3 এবং x অক্ষের সহিত উৎপন্ন কোণের প্রবণতা $\frac{3}{5}$ হলে এর সমীকরণ নির্ণয় করো।

10) $(2, 3)$ বিন্দুগামী এবং সরলরেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 30^0 কোণ উৎপন্ন করলে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

11) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখাটি যদি $(2, -3)$ এবং $(4, -5)$ বিন্দুগামী হয় তবে (a, b)-এর মান নির্ণয় করো।

12) একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যা $x=-2$ এবং $x=6$ রেখা দুটি হতে সমদূরবর্তী।

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

1. $(2K, -2)$ এবং $(1, -K)$ বিন্দু দুটির সংযোজক সরলরেখার প্রবণতা -2 হলে K এর মান নির্ণয় করো।
2. $7x-6y=20$ সরলরেখার ওপর এমন একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।
3. x অক্ষ ও y অক্ষ দ্বারা $4x+2y = 8$ সরলরেখার ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নিণয় করো।
4. মূলবিন্দু থেকে $3x+4y+m = 0$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব 2 একক হলে m এর মান নির্ণয় করো।
5. $(3, 2)$ বিন্দুগামী এবং $6x-8y = 12$ সরলরেখার ওপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।
6. প্রমাণ করো যে, $(3, 1)$, $(5, -5)$ এবং $(-1, 13)$ বিন্দুগুলো সমরেখ। বিন্দুগুলো যে সরলরেখার ওপর অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় করো।
7. $x-\sqrt{3}y=3$ এবং $\sqrt{3}x-y+1 = 0$ সরলরেখা দুটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করো।

8. $(-3,4)$ বিন্দুগামী এবং $2x-3y = 5$ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

9. $(-2,3)$ বিন্দু এবং $8y = 9x-12$ সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

10. মূলবিন্দু থেকে $y+mx = 13$ সরলরেখার লম্বদূরত্ব 12 একক হলে m এর মান নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1. $4x+3y+1 = 0$ এবং $5x-y = 13$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যেসব সরলরেখার মূলবিন্দু থেকে লম্বদূরত্ব 3 একক তাদের সমীকরণ নির্ণয় করো।

2. $ab+bc+ca = 0$ হলে দেখাও যে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{c}$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=\frac{1}{a}$ এবং $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=\frac{1}{b}$ সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

3. প্রমাণ করো যে, $y = m_1x+c_1$, $y = m_2x+c_2$ ও $x = 0$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{|m_1-m_2|}$ বর্গ একক হবে।

4. ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর সমীকরণ যথাক্রমে $3x+4y+9 = 0$ এবং $4x-3y+16 = 0$। তৃতীয় বাহুটি D(5, 2) বিন্দুগামী এমন যে BD : DC = 4 : 5 হয় তবে তৃতীয় বাহুর সমীকরণ নির্ণয় করো।

5. ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, 5), (–1, –2) এবং (11, 7); B থেকে AC এর ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

6. (4, 5) বিন্দুগামী যে দুটি সরলরেখা $3x = 4y+7$ ও $5y = 12x+6$ সরলরেখা দুটির সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমীকরণ নির্ণয় করো।

7. যদি (α, β) এবং (γ, δ) বিন্দুগামী সংযোজক সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক $lx+my+n = 0$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে, $\frac{\gamma-\alpha}{l}=\frac{\delta-\beta}{m}=\frac{2(l\gamma+m\delta+n)}{l^2+m^2}$।

8. যে সরলরেখাটি $2x-y+5 = 0$ এবং $5x+3y-4 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী ও $x-3y+21=0$ সরলরেখার ওপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

9. $3x+2y-6 = 0$ এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা $x-2y=0$ এবং $y-2x = 0$ সরলরেখা দুটির সঙ্গে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল 21 হলে, ওই সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

10. দেখাও যে $y = 0, y = 2, y-\sqrt{3}x = 0$ ও $y+\sqrt{3}x = 8\sqrt{3}$ সরলরেখা চারটি একটি বৃত্তস্থ ট্র্যাপিজিয়াম গঠন করে। ট্র্যাপিজিয়ামটির শীর্ষগুলোর স্থানাঙ্ক এবং তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

11. একটি সমবাহু ত্রিভুজের একটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3) এবং তার বিপরীত বাহুর সমীকরণ $x+y = 2$ হলে ত্রিভুজটির

অন্যদুটি বাহুর সমীকরণ নির্ণয় করো।

12. $3x-2y-1 = 0$ সরলরেখার সঙ্গে 45^0 কোণে নত দিকে (5, 3) বিন্দু থেকে প্রদত্ত সরলরেখার দূরত্ব নির্ণয় করো।

13. (-2, 6) বিন্দু থেকে $2x+3y = 1$ সরলরেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো। প্রদত্ত সরলরেখার স্বাপেক্ষে (-2, 6) বিন্দুটির প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

14. একটি আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর সমীকরণ $4x+7y+5 = 0$ এবং দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (-3, 1) ও (1, 1)। আয়তক্ষেত্রটির অপর তিনটি বাহুর সমীকরণ নির্ণয় করো।

15. $3x+4y = 4$ ও $2x+5y+2 = 0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী যে সব রেখার মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব 2 একক তাদের সমীকরণ নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

I. সঠিক উত্তরটি বাছাই করো :

1.(c) 2.(d) 3.(b) 4.(a) 5.(b) 6.(b) 7.(a) 8.(c) 9.(c) 10.(c) 11.(a) 12.(b)

II. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(1) $\left(\frac{15}{2},0\right)$ (2) $\sqrt{89}$ (3) $(-3,7)$ (4) $\frac{2}{t_2+t_1}$ (5) $x=-2$ (6) $y=9$ (7) 60^0 or 120^0

(8) $x=-4$ (9) $5y-3x+15=0$ (10) $x-\sqrt{3}y=2-3\sqrt{3}$ (11) $(a,b)=(-1,-1)$ (12) $x=2$

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(1) $k=\frac{4}{5}$ (2) $(-4,-8)$ (3) $(1,2)$ (4) $m=\pm 10$ (5) $8x+6y=36$ (6) $3x+y=10$ (7) 30^0

(8) $2x-3y+18=0$ (9) $8y-9x-15=0$ (10) $m=\pm\frac{5}{12}$

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন :

(1) $y+3=0$ এবং $12x-5y=39$ (4) $x=5$ (5) $\left(-\frac{11}{5}, \frac{23}{5}\right)$ (6) $7x+9y=73$ এবং $9x-7y=1$

(8) $3x+y=0$

(9) $3x+2y=\pm 28$ (10) $(0,0)$, $(8,0)$, $\left(\frac{8\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}, 2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$ এবং ক্ষেত্রফল $=\frac{4}{3}\left(12-\sqrt{3}\right)$ বর্গ একক

11) $(2+\sqrt{3})x-y=1+2\sqrt{3}$ এবং $(2-\sqrt{3})x-y=1-2\sqrt{3}$

12) $\frac{8\sqrt{26}}{13}$ একক

13) (-4, 3), (-6, 0)

14) $7x-4y+25=0$, $7x-4y=3$ এবং $4x+7y=11$

15) $y+2=0$ ও $4x+3y=10$

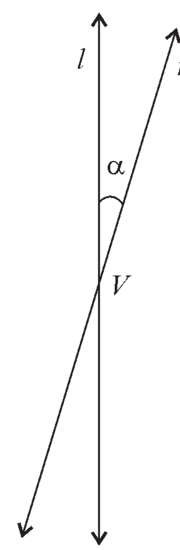
অধ্যায় — 11

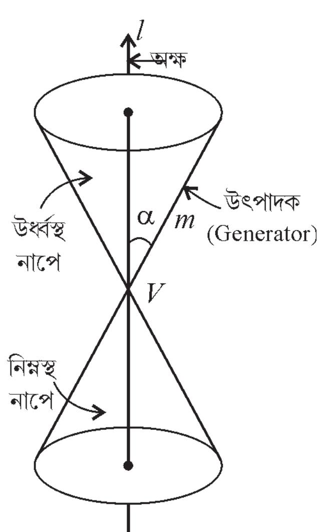
শঙ্কুচ্ছেদ (Conic - Sections)

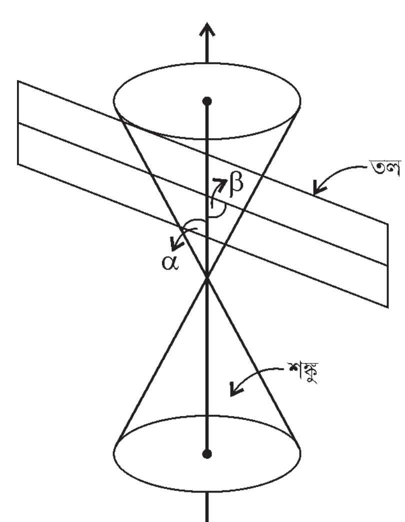
গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **একটি শঙ্কুর ছেদ (Secctions of a Cone) :**

  ধরে নাও, l একট স্থির উলম্বরেখা এবং m হল অপর একটি রেখা যা l কে একটি স্থির বিন্দু V-তে ছেদ করে এবং তার সাথে α কোণে নত।







V বিন্দুটিকে বলা হয় শঙ্কুর শীর্ষ (**vertex**) এবং l কে বলা হয় শঙ্কুর অক্ষ (**axis**)। ঘর্ণায়মান রেখা m কে বলা হয় শঙ্কুর উৎপাদক (**generator**)। শীর্ষ, শঙ্কুটিকে দুটি অংশে ভাগ করে যাদের নাপে (nappes) বলা হয়।

যদি আমরা একটি সমতল একটি শঙ্কুর ছেদ নিই, তবে প্রাপ্ত প্রথমচ্ছেদটিকে বলা হয় **শঙ্কুচ্ছেদ** (conic section)। সতুরাং, **শঙ্কুচ্ছেদ** হল সেইসব বক্র যেগুলো একটি লম্ববৃত্তকার **শঙ্কু** এবং একটি সমতলের প্রস্থচ্ছেদ।

ধরে নাও, প্রস্থচ্ছেদী সমতল শঙ্কুর উলম্ব অক্ষের সাথে β কোণ উৎপন্ন করে।

- **বৃত্ত, উপবৃত্ত, অধিবৃত্ত এবং পরাবৃত্ত (circle, ellipse, parabola, hyperbola) :**

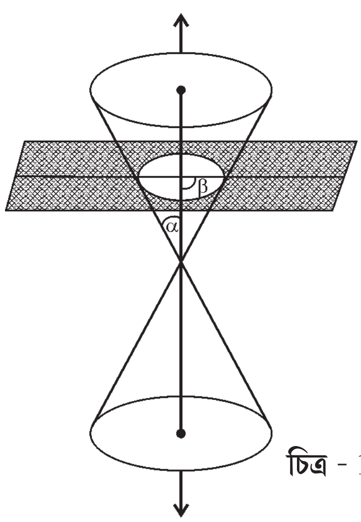
  যখন একটি সমতল একটি শঙ্কুর নাপেকে ছেদ করবে (শীর্ষবিন্দু ছাড়া), আমরা নিম্নলিখিত অবস্থানগুলো পাবো :

  a) যখন $\beta = 90^0$; তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি **বৃত্ত (circle) হবে। (চিত্র - 1)**

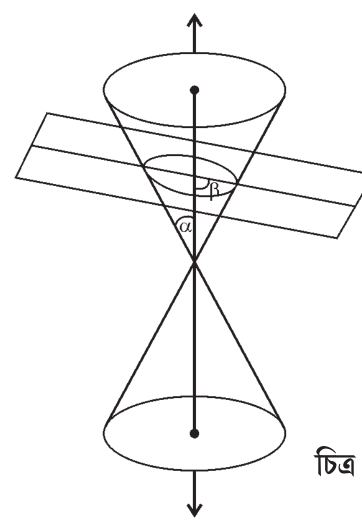
  b) যখন $\alpha<\beta<90^0$; তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি **উপবৃত্ত (ellipse) হবে। (চিত্র - 2)**

  c) যখন$\beta=\alpha$; তখন প্রস্থচ্ছেদ একটি **অধিবৃত্ত (parabola) হবে। (চিত্র - 3)**
  (উপরের তিনটি ক্ষেত্রেই সমতলটি শঙ্কুর একটি নাপেকে সম্পূর্ণভাবে ছেদ করে)

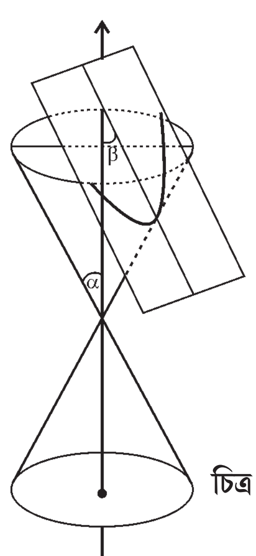
  d) যখন $0\leq\beta<\alpha$; তখন সমতলটি দুটি নাপেকেই ছেদ করে এবং ছেদিত বক্রটি হল একটি **পরাবৃত্ত (hyperbola)। (চিত্র - 4)**



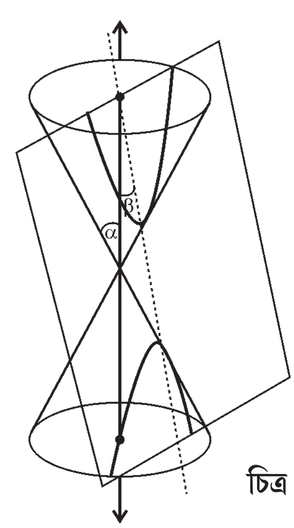
চিত্র - 1



চিত্র - 2



চিত্র - 3



চিত্র - 4

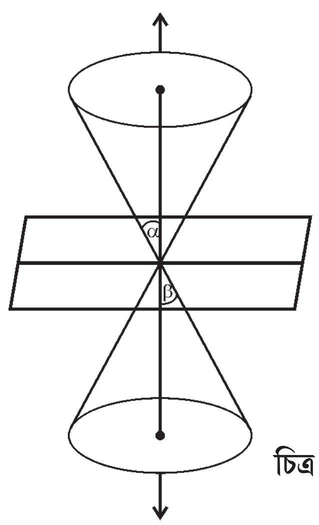
- **অপকৃষ্ট শঙ্কুচ্ছেদ (Degererated conic sections) :**

যখন সমতলটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে শঙ্কুটিকে ছেদ করে তখন আমরা প্রদত্ত বিভিন্ন ক্ষেত্রগুলো পাই :

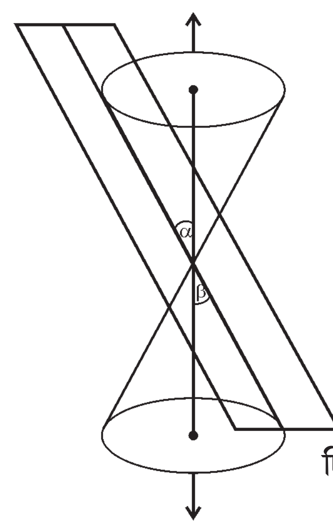
a) যখন $\alpha < \beta \leq 90^0$, তখন প্রস্থচ্ছেদটি একটি বিন্দু হয়। **(চিত্র - 5)**

b) যখন $\beta = \alpha$, তখন সমতলটির উপর শঙ্কুর উৎপাদক (generator) রেখাটি অবস্থিত হয় এবং প্রস্থচ্ছেদটি একটি সরলরেখা (straight line) হয়, এটি হল অধিবৃত্তের অপকৃষ্ট ক্ষেত্র। **(চিত্র - 6)**

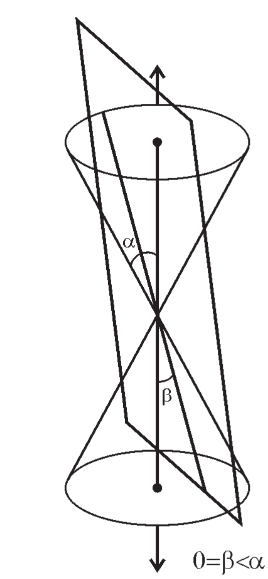
c) যখন $0 \leq \beta < \alpha$, এখানে প্রস্থচ্ছেদটি হল এক জোড়া পরস্পর ছেদি সরলরেখা। এটি হল পরাবৃত্তের অপকৃষ্ট ক্ষেত্র। **(চিত্র 7(a) ও 7(b))**



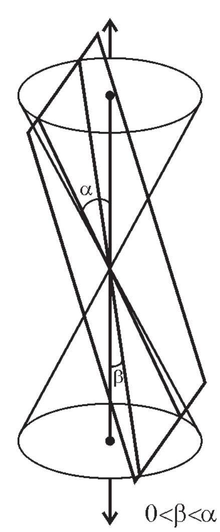
চিত্র - 5



চিত্র - 6



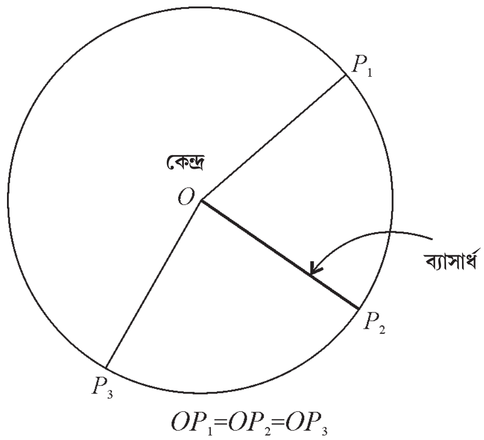
চিত্র - 7(a)

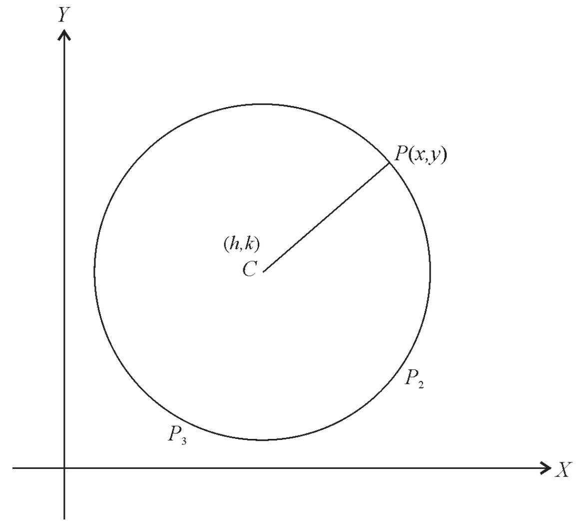


চিত্র - 7(b)

- **বৃত্ত (Circle) :**

একটি বৃত্ত হল একটি সমতলের উপর অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট্ যেগুলো ঐ সমতলের একটি স্থির বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী। স্থির বিন্দুটিকে বলা হয় বৃত্তের কেন্দ্র এবং কেন্দ্র থেকে বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর দূরত্বকে বলা হয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ (radius)।



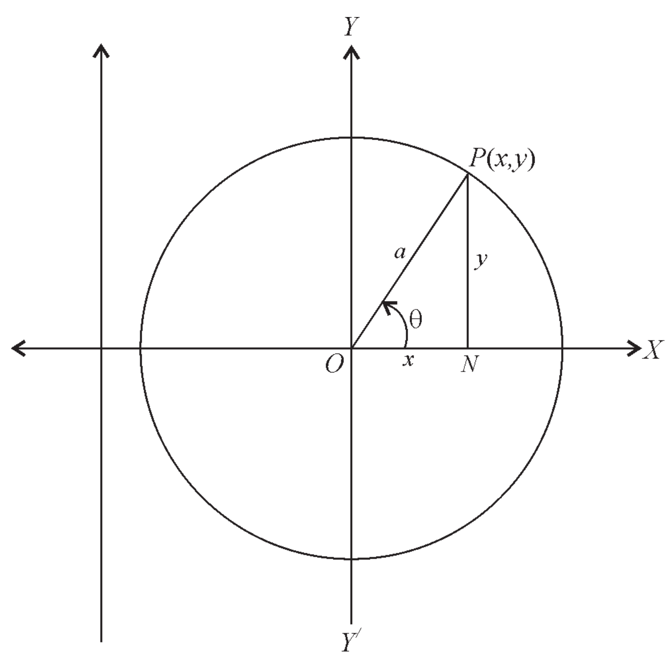


বৃত্তের কেন্দ্র $C\ (h,\ k)$ এবং ব্যাসার্ধ r প্রদত্ত। ধরো, বৃত্তের উপর $P(x,y)$ যে কোনো একটি বিন্দু। সুতরাং, সংজ্ঞানুযায়ী $|CP|=r$। দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রানুযায়ী আমরা পাই,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

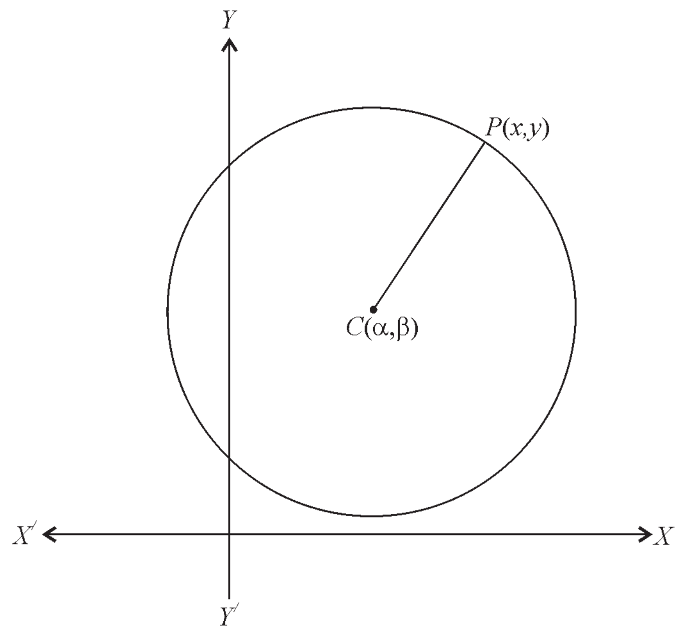
অর্থাৎ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

- কোনো বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে ও ব্যাসার্ধ a হলে তার সমীকরণ হয় $x^2+y^2=a^2$ ।



প্রদত্ত বৃত্তের প্যারাম্যাট্রিক সমীকরণ হয় $x=a\cos\theta,\ y=a\sin\theta$.

- কোনো বৃত্তের কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে ও ব্যাসার্ধ a হলে বৃত্তটির সমীকরণ হয় $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$



- বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ আকার হয় $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$।

  যার কেন্দ্র $(-g, -f)$ বিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{g^2+f^2-c}$ । বৃত্তটি x অক্ষের ওপর $2\sqrt{g^2-c}$ একক এবং y অক্ষের উপর $2\sqrt{f^2-c}$ একক ছেদিতাংশ ছিন্ন করে।

  দ্রষ্টব্য :

  (i) প্রদত্ত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশিত বৃত্তটি বাস্তব হবে, যদি $g^2+f^2>c$ হয়।

  (ii)কিন্তু $g^2+f^2<c$ হলে, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কাল্পনিক হয় বলে প্রদত্ত সমীকরণ কোনো বাস্তব বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয় না।

  (iii)যদি $g^2+f^2=c$ হয়, তবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ শূন্য হবে, এক্ষেত্রে বৃত্তটি একটি বিন্দু $(-g, -f)$-তে রূপান্তরিত হবে। অন্য কথায় বলা যায়, প্রদত্ত সমীকরণ একটি **বিন্দু-বৃত্তকে** প্রকাশ করবে।

- x, y এর সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ; অর্থাৎ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করবে, যদি $a=b\ (\neq 0)$ এবং $h=0$ হয়।

- **কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণ (Equation of circles in some special cases) :**

  i) মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হয়

  $x^2+y^2+2gx+2fy = 0$ ....(1)

  অথবা $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$ .... (2)

  কারণ (1) অথবা (2) উভয় সমীকরণই (0, 0) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়।

  ii) কোনো বৃত্তের কেন্দ্র x অক্ষের ওপর অবস্থিত হলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে (কেন্দ্রের কোটি শূন্য হওয়ায়),

  $x^2+y^2+2gx+c = 0$ ....(1)

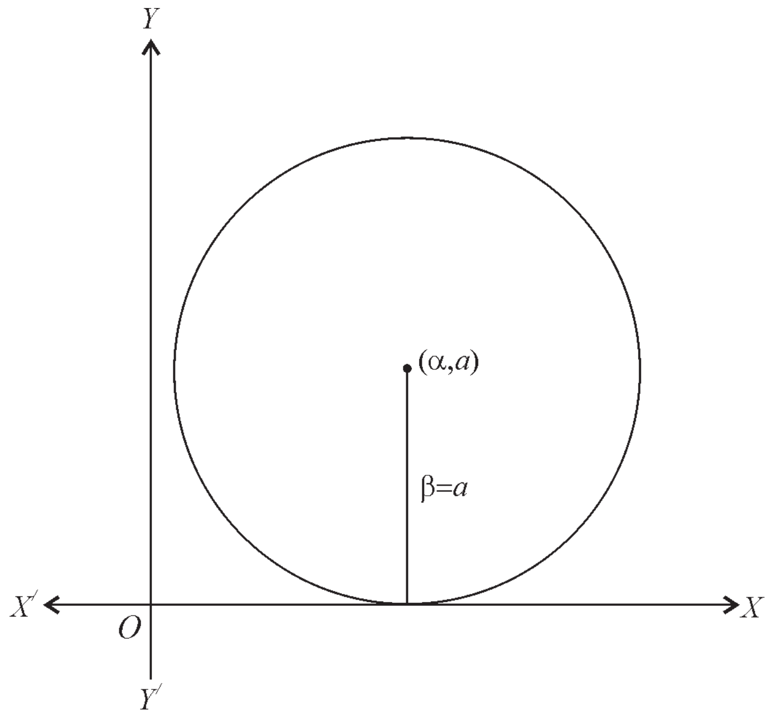
অথবা $(x-\alpha)^2+y^2 = a^2$ .... (2)

অনুরূপে, কোনো বৃত্তের কেন্দ্র y অক্ষের ওপর অবস্থিত হলে বৃত্তের সমীকরণ হবে —

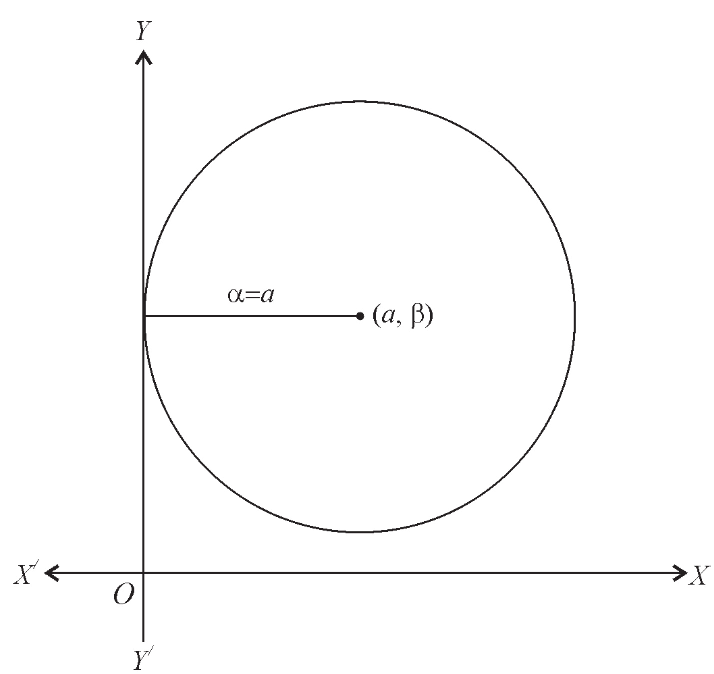
$x^2+y^2+2fy+c = 0$ .... (3)

অথবা $x^2+(y-\beta)^2 = a^2$ .... (4)

iii) কোনো বৃত্ত x অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে — $(x-\alpha)^2 + (y-a)^2 = a^2$ কারণ, বৃত্ত যদি x অক্ষকে স্পর্শ করে, তবে বৃত্তটির কেন্দ্রের কোটি তার ব্যাসার্ধের সমান হবে।



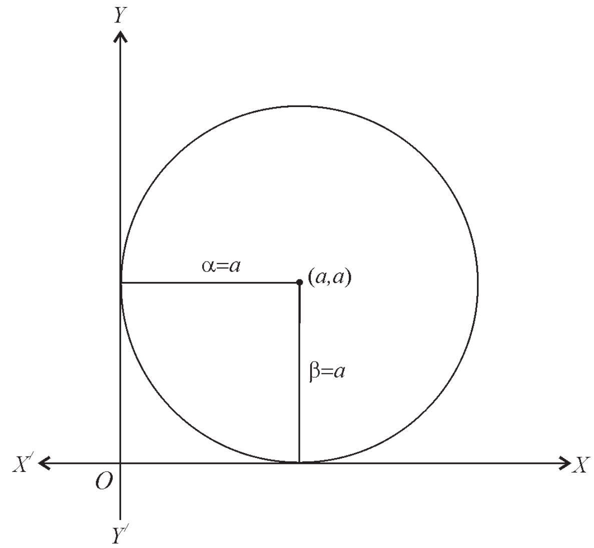
iv) কোনো বৃত্ত y অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে $(x-a)^2 +(y-\beta)^2 = a^2$ কারণ, বৃত্ত যদি y অক্ষকে স্পর্শ করে, তবে বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ তার ব্যাসার্ধের সমান হবে।



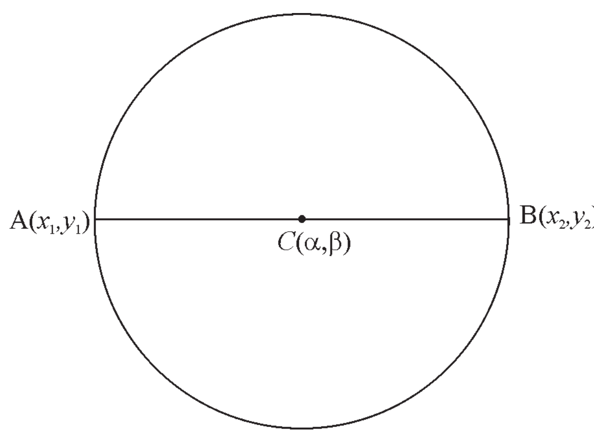
v) কোনো বৃত্ত x ও y উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ হবে

$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

কারণ, এক্ষেত্রে কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয় বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।



- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ হয়
  $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$



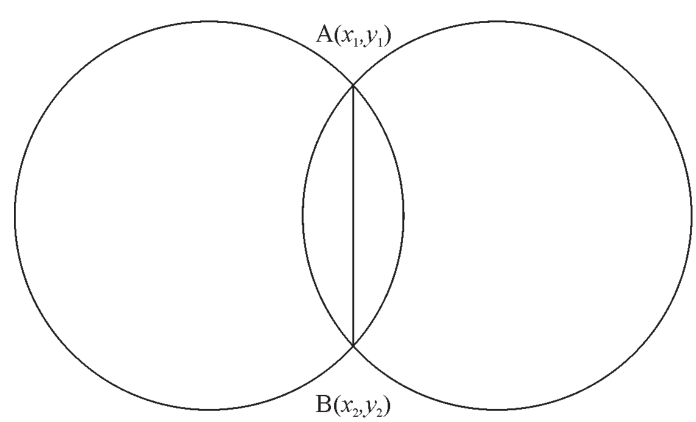
- $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 = 0$ ....(1)
  $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2 = 0$ ....(2)

i) (1) এবং (2) নং বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ হবে —

$$2(g_1-g_2)x + 2(f_1-f_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

ii) (1) ও (2) নং বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হয় —

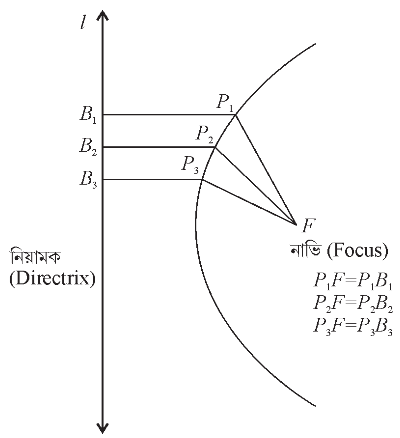
$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1 + K(x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2) = 0 \ [K\neq-1]$$

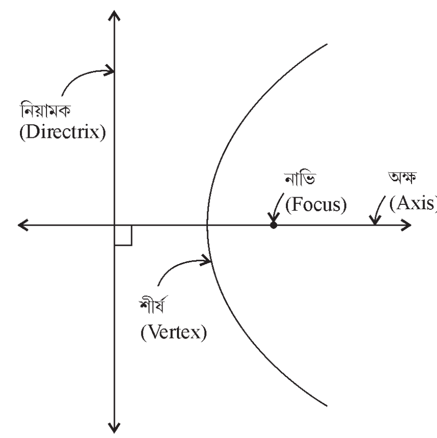


- $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের সঙ্গে এককেন্দ্রীয় বৃত্তের সমীকরণ হল $x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0$।
- (x_1, y_1) বিন্দুটি $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের বাইরে, ওপরে বা ভিতরে অবস্থিত হবে, যদি $x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c >, =$ অথবা < 0।
- **অধিবৃত্ত (Parabola) :**

  একটি অধিবৃত্ত হল কোনো একটি সমতলের উপর অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট যেগুলো ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং একটি স্থির বিন্দু (ঐ সরলরেখার উপর অবস্থিত নয়) থেকে সমদূরবর্তী।

  নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে বলা হয় অধিবৃত্তের নিয়ামক (directrix) এবং স্থির বিন্দু F-কে বলা হয় নাভি (Focus)।

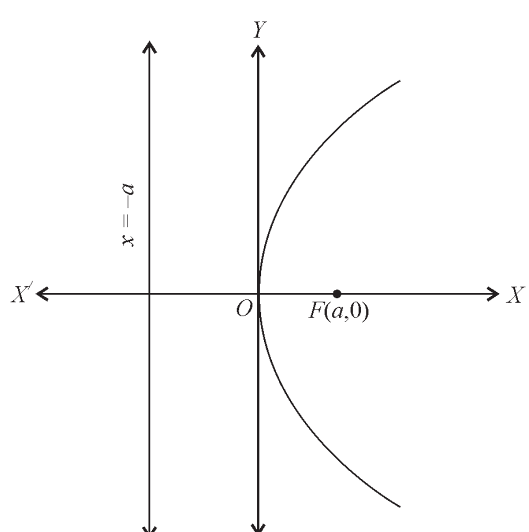




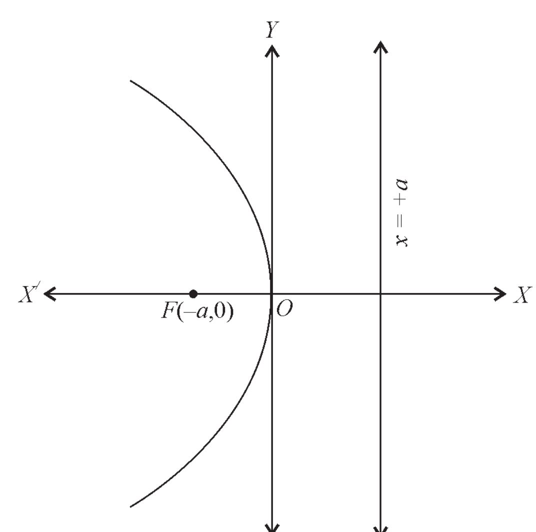
  অধিবৃত্তের নাভিগামী এবং নিয়ামকের উপর লম্ব সরলরেখাকে অধিবৃত্তের অক্ষ বলা হয়। অধিবৃত্ত ও এর অক্ষের ছেদবিন্দুকে বলা হয় অধিবৃত্তের শীর্ষ (vertex)।

- **অধিবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard equations of a Parabola) :**

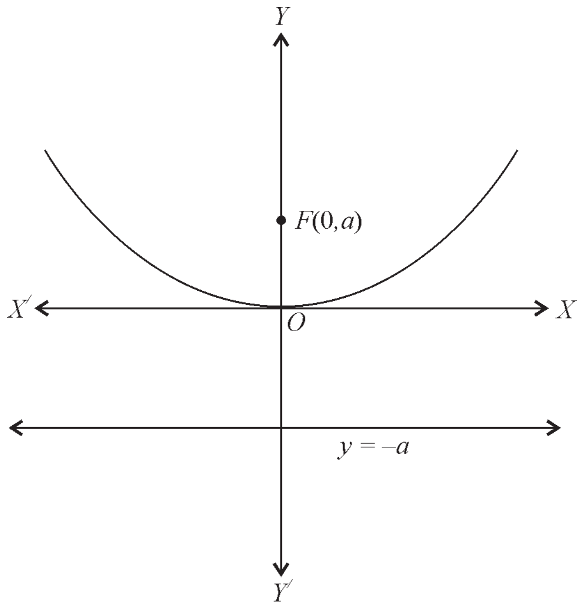
  অধিবৃত্তের সমীকরণ সরলরতম হবে যদি তার শীর্ষ মূল বিন্দুতে হয় এবং তার প্রতিসাম্য অক্ষটি x অক্ষ বা y অক্ষ বরাবর হয়। অধিবৃত্তের এই চারটি দিকে সম্ভাব্য আকার চিত্র নীচে দেখানো হলো।



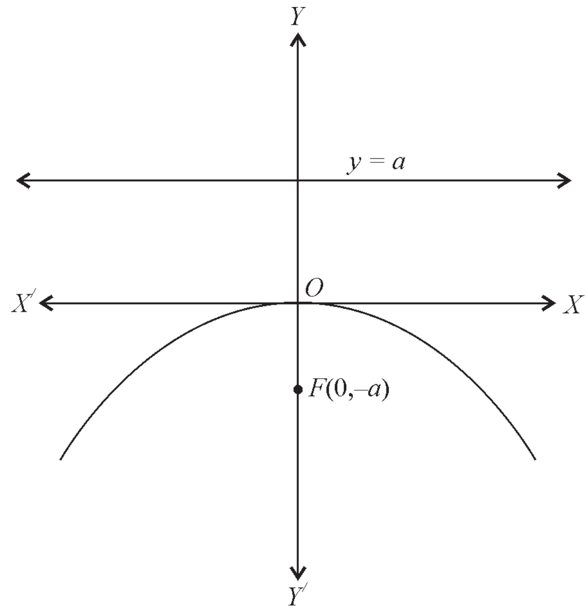
$y^2 = 4ax$



$y^2 = -4ax$

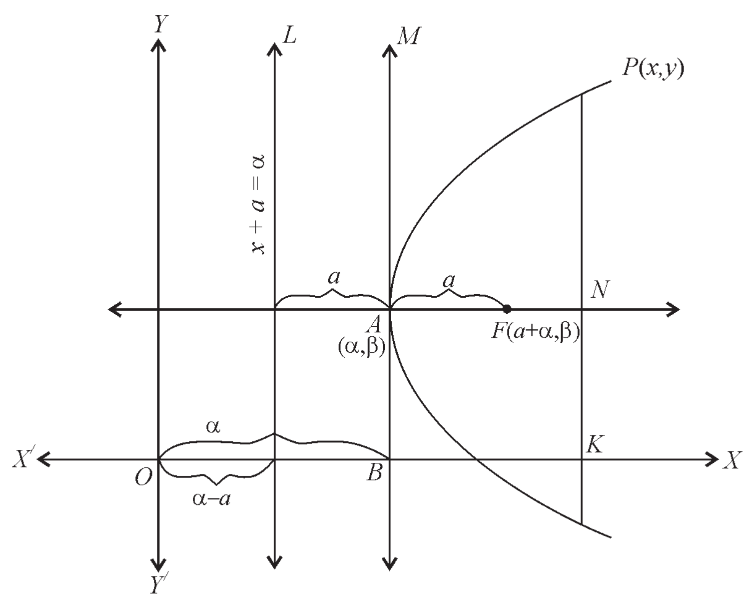


$x^2 = 4ay$



$x^2 = -4ay$

- অধিবৃত্তের অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) হলে তার সমীকরণ হবে $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$।



দ্রষ্টব্য : উপরের সমীকরণটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করে, যার —

i) অক্ষ ধনাত্মক x অক্ষের সমান্তরাল ও অক্ষের সমীকরণ হয় $y=\beta$।

ii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

iii) নাভি স্থানাঙ্ক $(a+\alpha, \beta)$

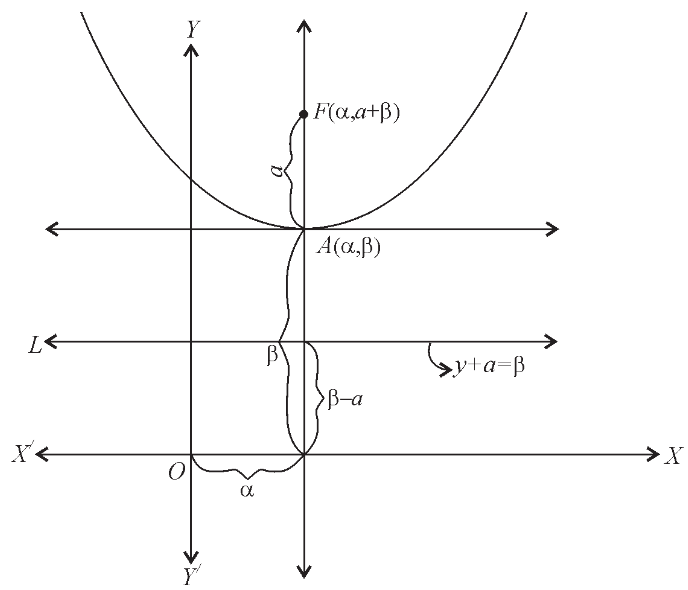
iv) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$ একক

v) নিয়ামকের সমীকরণ হয়, $x+a = \alpha$।

vi) শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হয়, $x = a$।

vii) নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(\alpha+a, \beta+2a)$ এবং $(\alpha+a, \beta-2a)$।

- অধিবৃত্তের অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) হলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় —
  $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ $[a>0]$



উপরের সমীকরণ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করে, যার

i) অক্ষ ধনাত্মক y অক্ষের সমান্তরাল এবং অক্ষের সমীকরণ হয় $x = \lambda$

ii) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β)

iii) নাভির স্থানাঙ্ক $(\lambda, \alpha+\beta)$

iv) নিয়ামকের সমীকরণ হয় $y+a = \beta$।

v) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a$ একক

vi) শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হয়, $y = \beta$।

vii) নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে, $(\alpha+2a, \beta+a)$ এবং $(\alpha-2a, \beta+a)$।

- $x = ay^2+by+c$ $(a\neq 0)$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করে যার অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল।
- $y = px^2+qx+r;$ $(p\neq 0)$ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণকে প্রকাশ করে যার অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল।
- $P(x_1,y_1)$ বিন্দু $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের বাইরে, ওপরে অথবা ভিতরে অবস্থিত হবে যদি $(y_1^2-4ax_1)$ এর মান ধনাত্মক, শূন্য এবং ঋনাত্মক হয়।

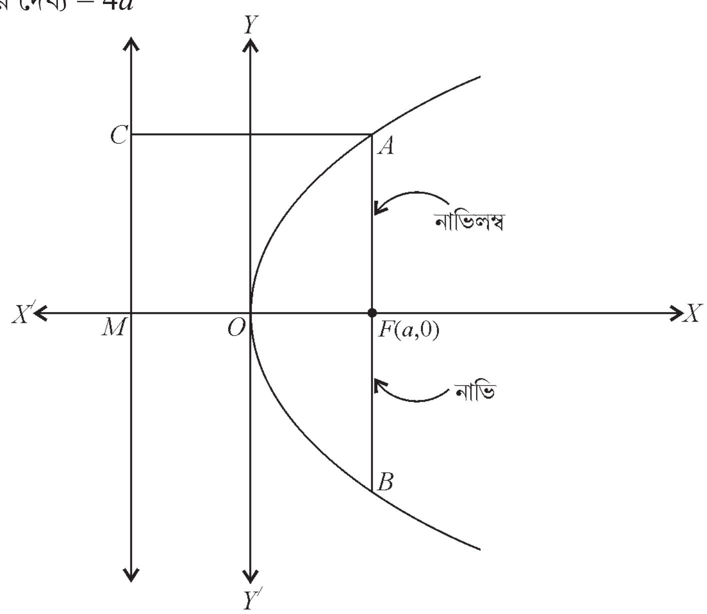
$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের ওপর যেকোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ আকারে লেখা যায় এবং একে P বিন্দুর প্যারামেট্রিক

স্থানাঙ্ক বলা হয়; $x=at^2$ ও $y=2at$ আকারকে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের সমীকরণের প্যারামেট্রিক আকার বলা হয়, যেখানে t-কে প্যারামিটার বলা হয়।

- **নাভিলম্ব (Latus Rectum) :**

অধিবৃত্তের নাভিগামী অক্ষের উপর লম্ব, যে রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, তাকে অধিবৃত্তের নাভিলম্ব (Latus rectum) বলে।

AB = নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = $4a$



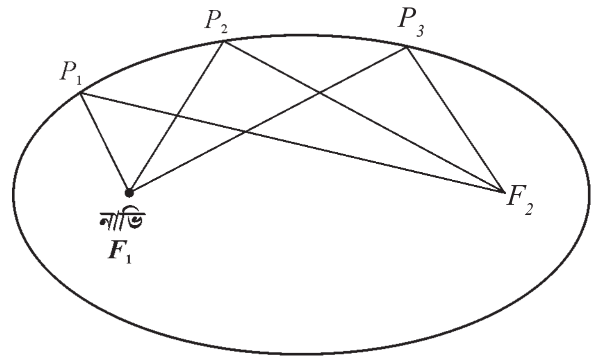
- **নিম্নলিখিত প্রতিক্ষেত্রে a = অধিবৃত্তের শীর্ষ থেকে নাভির দূরত্ব নির্দেশ করে।**

অধিবৃত্তের সমীকরণ	শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক	অক্ষ	নাভির স্থানাঙ্ক	নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য	নিয়ামকের সমীকরণ
i) $y^2=4ax$ $(a>0)$	$(0,0)$	ধনাত্মক x-অক্ষ	$(a, 0)$	$4a$	$x+a=0$
ii) $y^2=-4ax$ $(a>0)$	$(0,0)$	ঋণাত্মক x-অক্ষ	$(-a, 0)$	$4a$	$x-a=0$
iii) $x^2=4ay$ $(a>0)$	$(0,0)$	ধনাত্মক y-অক্ষ	$(0, a)$	$4a$	$y+a=0$
iv) $x^2=-4ay$ $(a>0)$	$(0,0)$	ঋণাত্মক y-অক্ষ	$(0, -a)$	$4a$	$y-a=0$
v) $(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$	(α, β)	x-অক্ষের সমান্তরাল	$(a+\alpha, \beta)$	$4a$	$x+a=\alpha$
vi) $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$	(α, β)	y-অক্ষের সমান্তরাল	$(a, \alpha+\beta)$	$4a$	$y+a=\beta$

- **উপবৃত্ত (Ellipse) :**

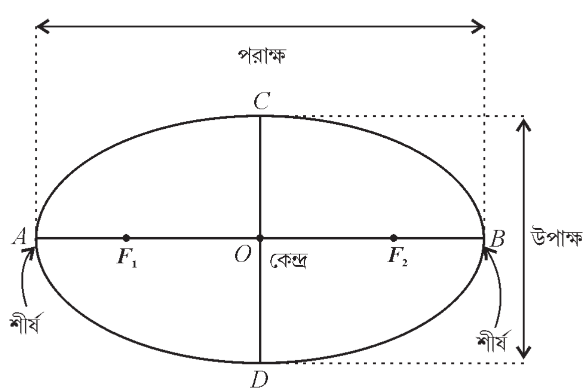
একটি উপবৃত্ত হল একই সমতলে অবস্থিত সেইসব বিন্দুর সেট্ যেগুলো নির্দিষ্ট দুটি বিন্দু থেকে দূরত্বের সমষ্টি একটি ধ্রুবক হয়।

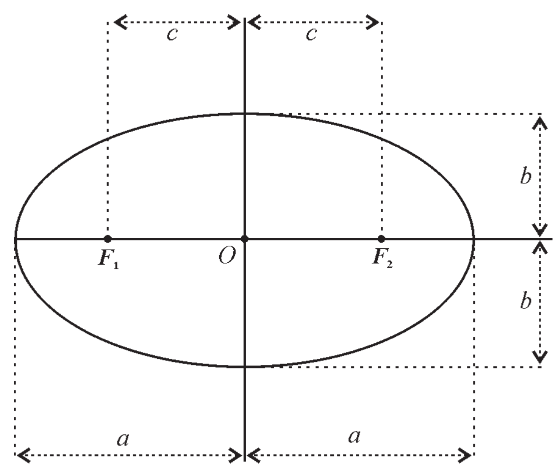
এই দুটি স্থির বিন্দুকে বলা হয় উপবৃত্তের নাভি (Foci)।



$$P_1F_1+P_1F_2 = P_2F_1+P_2F_2 = P_3F_1+P_3F_2$$

- নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুকে বলা হয় উপবৃত্তের কেন্দ্র (centre)। উপবৃত্তের নাভিদ্বয়গামী রেখাংশকে বলা হয় পরাক্ষ (major axis) এবং কেন্দ্রগামী এবং পরাক্ষের উপর লম্বরেখাকে বলা হয় উপাক্ষ (minor axis)। পরাক্ষের প্রান্ত বিন্দুদ্বয়কে বলা হয় উপবৃত্তের শীর্ষ।

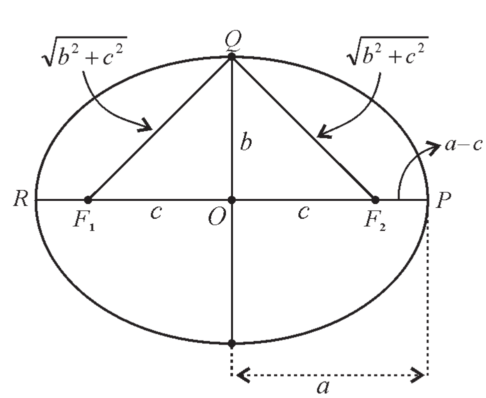




- আমরা, পরাক্ষের দৈর্ঘ্যকে $2a$, উপাক্ষের দৈর্ঘ্যকে $2b$ এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্বকে $2c$ দিয়ে প্রকাশ করি। অতএব, অর্ধ-পরাক্ষের দৈর্ঘ্য a এবং অর্ধ-উপাক্ষের দৈর্ঘ্য হয় b।

- অর্ধ-পরাক্ষ, অর্ধ-উপাক্ষ এবং উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে নাভির দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক হল $a^2 = b^2+c^2$

অর্থাৎ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ।

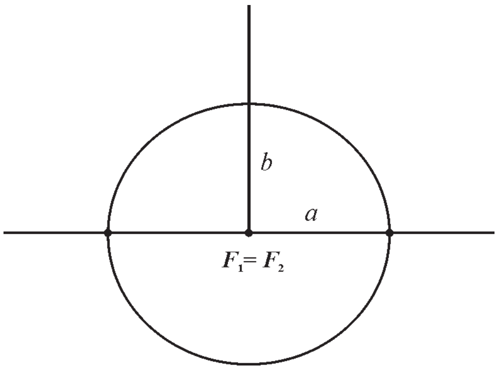


* **একটি উপবৃত্তের বিশেষ ক্ষেত্র (Special cases of an ellipse) :**

উপরোক্ত সমীকরণ $c^2 = a^2 - b^2$ তে যদি আমরা a এর মান স্থির রাখি এবং c -কে 0 থেকে a-তে পরিবর্তিত করা হয় তবে প্রাপ্ত উপবৃত্তটি নিম্নরূপে পরিবর্তিত হবে।

ক্ষেত্র-(i) :

যখন $c=0$ হয়, তখন উপবৃত্তের উভয় নাভি কেন্দ্রে মিলিত হবে এবং $a^2 = b^2$ হবে, অর্থাৎ $a=b$ হবে এবং সুতরাং উপবৃত্তটি একটি বৃত্তে পরিণত হবে। অতএব বৃত্ত হল উপবৃত্তের একটি বিশেষ ক্ষেত্র।



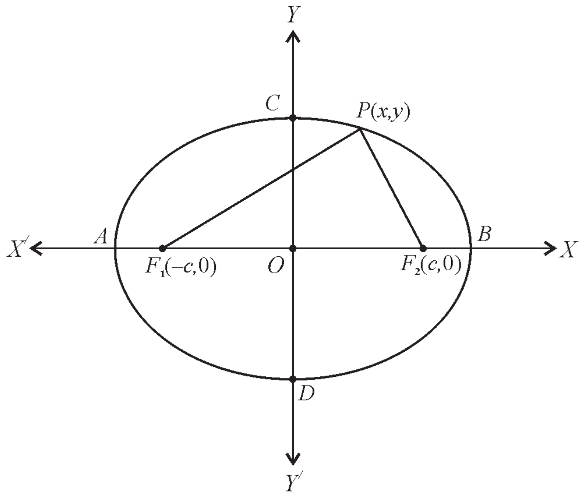
ক্ষেত্র-(ii) : যখন $c=a$, তখন $b=0$ হবে এবং উপবৃত্তটি একটি নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ F_1F_2 পরিণত হবে।

* **উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) :**

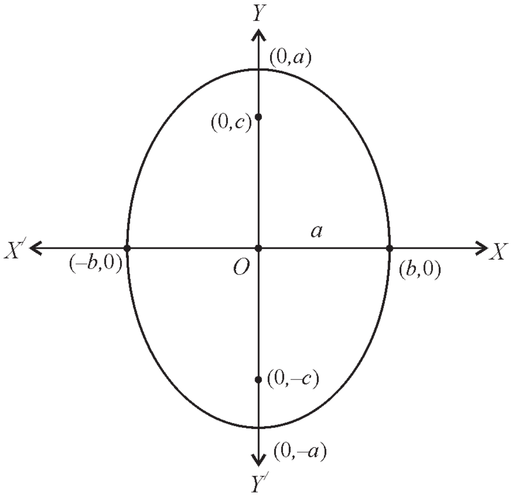
উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হল উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে নাভি এবং কেন্দ্র থেকে শীর্ষের দূরত্বের অনুপাত (উৎকেন্দ্রতাকে e দিয়ে প্রকাশ করা হয়) অর্থাৎ $e = \frac{c}{a}$ ।

* **একটি উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard equations of an ellipse) :**

একটি উপবৃত্তের সমীকরণ সরলতম হয় যখন উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু হয় এবং নাভিদ্বয় x অক্ষ বা y অক্ষের উপর অবস্থিত হয়। নীচে দুটি সম্ভাব্য দিক বিন্যাস দেখানো হল —



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণে কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং পরাক্ষ ও উপাক্ষ হল স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়। যদিও উপবৃত্ত অধ্যয়নে যে উপবৃত্তের কেন্দ্র যে কোনো অন্য বিন্দু এবং কেন্দ্রগামী পরস্পর লম্ব অক্ষদ্বয় যে কোনো সরলরেখা যারা পরাক্ষ ও উপাক্ষ, তা নিয়ে আলোচনার সুযোগ নেই।

- **উপরের আদর্শ সমীকরণ থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পর্যবেক্ষণ করতে পারি :**

  i) উপবৃত্ত, উভয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই যদি (x, y) উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু হয় তবে $(-x, y)$, $(x, -y)$ এবং $(-x, -y)$ বিন্দুগুলোও উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

  ii) নাভিদ্বয় সর্বদা পরাক্ষের উপর অবস্থিত হয়। পরাক্ষ নির্ণয় করা যেতে পারে প্রতিসাম্য অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয়ের মাধ্যমে, অর্থাৎ পরাক্ষ x অক্ষ বরাবর হবে যদি x^2 -এর সহগ বৃহত্তর হর যুক্ত হয় এবং এটি y অক্ষ বরাবর হবে যদি y^2 এর সহগ বৃহত্তর হর যুক্ত হয়।

- **উপবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার (Other forms of the equation of Ellipse) :**

1) কোনো উপবৃত্তের —

   i) কেন্দ্র মূলবিন্দুতে।

   ii) পরাক্ষ y অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x অক্ষ বরাবর।

   iii) পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ $(b<a)$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হবে —

   $$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \left[a^2>b^2\right]$$

2) কোনো উপবৃত্তের —

   i) কেন্দ্র (α, β)।

   ii) পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষের সমান্তরাল।

   iii) পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হবে —

   $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad \left[a^2>b^2\right]$$

3) কোনো উপবৃত্তের —

   i) কেন্দ্র (α, β) ।

   ii) পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে y ও x অক্ষের সমান্তরাল।

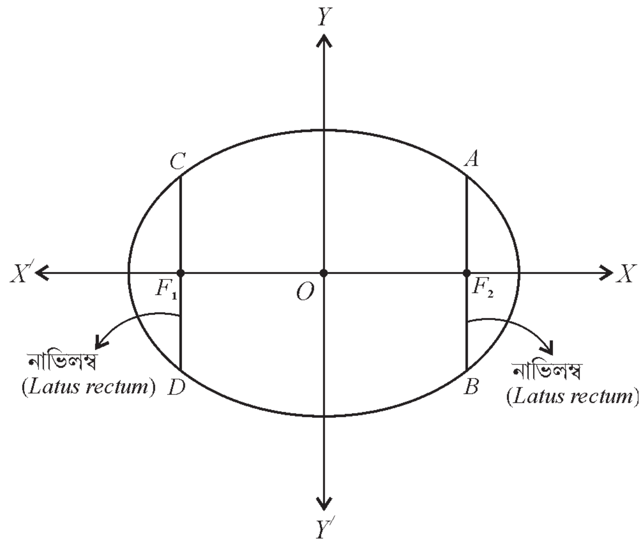
   iii) পরাক্ষ ও উপাক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ ও $2b$ হলে উপবৃত্তটির সমীকরণ হবে —

   $$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}+\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1 \quad \left[a^2>b^2\right]$$

- **নাভিলম্ব (Latus Rectum) :**

পরাক্ষের উপর লম্ব যে কোনো নাভিগামী রেখাংশ, যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় উপবৃত্তের উপর অবস্থিত তাকে উপবৃত্তের নাভিলম্ব বলে।

উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a}$



- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত (auxiliary circle) এর সমীকরণ হয় $x^2+y^2=a^2$।

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$ উপবৃত্তের প্যারামেট্রিক আকারের সমীকরণ হয় $x=a\cos\phi$, $y=b\sin\phi$; যেখানে $\phi=$ উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত $P(x, y)$ বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ।

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$ উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক হয় $(a\cos\phi, b\sin\phi)$।

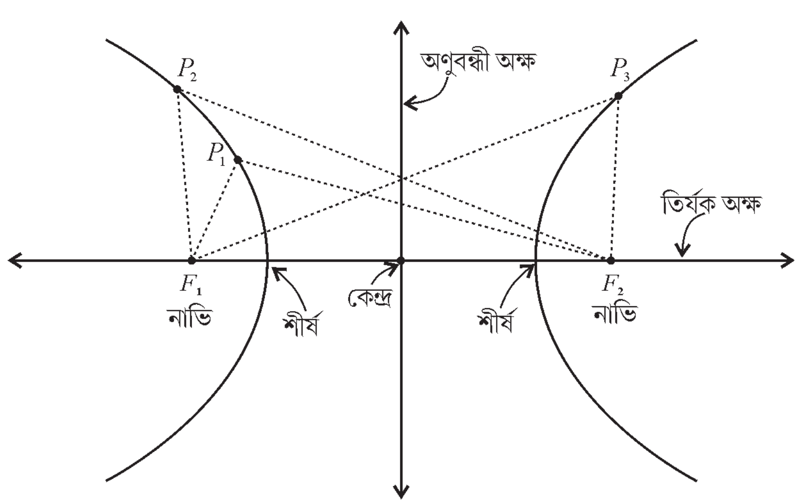
- **উপবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলসমূহ নীচের সারণিতে উল্লেখ করা হল :**

	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $[a^2>b^2]$	$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$ $[a^2>b^2]$
পরাক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষের সমান্তরাল	y-অক্ষের সমান্তরাল
উপাক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষের সমান্তরাল	x-অক্ষের সমান্তরাল
পরাক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y=\beta$	$x=\alpha$
উপাক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x=\alpha$	$y=\beta$
পরাক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক
উপাক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক
কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α,β)

শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$	$(\alpha\pm a, \beta)$	$(a, \beta\pm a)$
উৎকেন্দ্রতা	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$
নাভি দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm ae)$	$(\alpha\pm ae, \beta)$	$(a, \beta\pm ae)$
নাভি দুটির দূরত্ব	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$একক
নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক
নাভিলম্ব দুটির প্রান্তবিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক	$\left(ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ $\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\frac{b^2}{a}, ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, ae\right)$ $\left(\frac{b^2}{a}, -ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, -ae\right)$	$\left(\alpha\pm ae, \beta\pm\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\alpha\pm\frac{b^2}{a}, \beta\pm ae\right)$
নাভিলম্ব দুটির সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm ae$	$x=\alpha\pm ae$	$y=\beta\pm ae$
নিয়ামক দুটির সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{a}{e}$	$x=\alpha\pm\frac{a}{e}$	$y=\beta\pm\frac{a}{e}$
নিয়ামক দুটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক

- **পরাবৃত্ত (Hyperbola) :**

একটি পরাবৃত্ত হল একই সমতলে অবস্থিত সব বিন্দুর সেট, যাদের দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বের অন্তর একটি ধ্রুবক হয়।



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

- দুটি স্থির বিন্দুকে বলা হয় পরাবৃত্তের **নাভি (foci)**।

  নাভিদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের মধ্যবিন্দুকে বলা হয় পরাবৃত্তের কেন্দ্র (**centre** of the hyperbola)।

  নাভিদ্বয়গামী সরলরেখাকে বলা হয় **তির্যক অক্ষ (transverse axis)** এবং কেন্দ্রগামী তির্যক অক্ষের উপর লম্ব সরলরেখাকে বলা হয় **অনুবন্ধী অক্ষ (conjugate axis)**।

  যে দুটি বিন্দুতে পরাবৃত্তটি তির্যক অক্ষকে ছেদ করে তাদেরকে বলা হয় পরাবৃত্তের শীর্ষ।

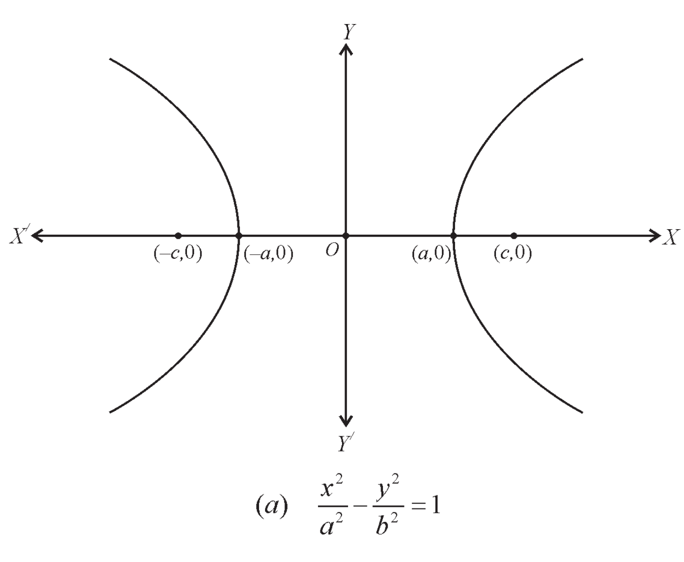
  নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বকে নির্দেশ করা হয় $2c$ দিয়ে। শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের দূরত্বকে (তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য) প্রকাশ করি $2a$ এবং b রাশিকে আমরা সংজ্ঞায়িত করি $b=\sqrt{c^2-a^2}$ রূপে। তাহলে $2b$ হল অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য।

- **উৎকেন্দ্রতা (Eccentricity) :**

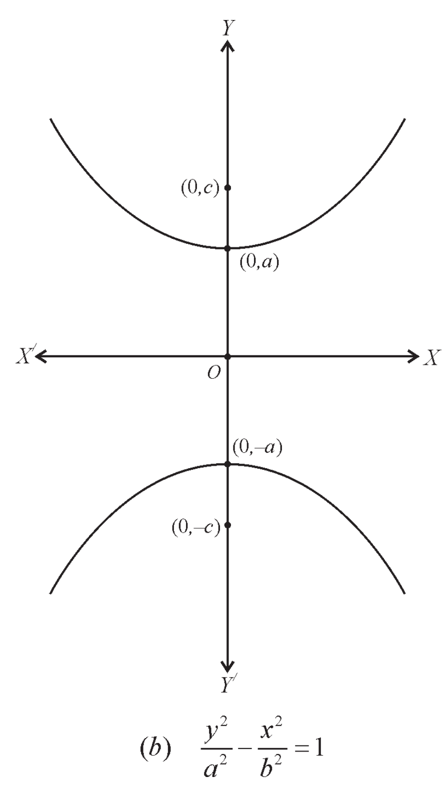
  অনুপাত $e=\dfrac{c}{a}$ কে বলা হয় পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা। যেহেতু $c \geq a$ তাই উৎকেন্দ্রতা কখনোই 1 থেকে ছোটো হবে না।

- **পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard equation of Hyperbola) :**

  একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ সরলতম হয় যখন পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং নাভিদ্বয় x-অক্ষ বা y-অক্ষের উপর অবস্থিত হয়।



(a) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



(b) $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

- একটি পরাবৃত্ত, যার $a=b$ হয় তাকে সমপরাবৃত্ত (Rectangalar hyperbola) বলা হয়।

- **দ্রষ্টব্য :** পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণে তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষদ্বয় হল স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় এবং কেন্দ্র হল মূলবিন্দু। যদিও, এমন পরাবৃত্ত যার তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষ হল যে কোনো দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা।

- পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ থেকে আমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পর্যবেক্ষণ করতে পারি :

  i) পরাবৃত্ত তার দুটি অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম, তাই যদি (x, y) পরাবৃত্তের উপর কোনো বিন্দু হয়, তবে $(-x, y)$, $(x, -y)$ এবং $(-x, -y)$ বিন্দুগুলোও পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।

  ii) নাভিদ্বয় সর্বদা তির্যক অক্ষের উপর অবস্থিত হয়।

- **নাভিলম্ব (Latus rectum) :**

  পরাবৃত্তের যেকোনো নাভিগামী এবং তির্যক অক্ষের উপর লম্ব রেখাংশ যার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত, তাকে পরাবৃত্তের নাভিলম্ব বল।

  পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য হল $\frac{2b^2}{a}$ ।

- **সমাপরাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola) :**

  যে পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য ও অণুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান, তাকে **সমাপরাবৃত্ত** বলে।

  সমপরাবৃত্তের সমীকরণ হল $x^2-y^2=a^2$ ।

- **পরাবৃত্তের সমীকরণের অন্যান্য আকার (Other forms of the Equations of Hyperbola) :**

  1) কোনো পরাবৃত্তের —

     i) কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে

     ii) তির্যক অক্ষ x অক্ষে ও অনুবন্ধী অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল

     iii) তির্যক ও অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ একক এবং $2b$ একক হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ হবে

     $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

  2) কোনো পরাবৃত্তের —

     i) কেন্দ্র (α, β) বিন্দুতে

     ii) তির্যক অক্ষ y অক্ষে ও অণুবন্ধী অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল

iii) তির্যক ও অণুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a$ একক এবং $2b$ একক হলে পরাবৃত্তটির সমীকরণ হবে $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$

- $P(x_1, y_1)$ বিন্দু $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের বাইরে, ওপরে অথবা ভিতরে হবে যদি $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}-1<0,$ অথবা >0 হয়।

- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের ওপর অবস্থিত যে-কোনো বিন্দু P-এর প্যারামেট্রিক স্থানাঙ্ক হয় $(a\sec\phi, b\tan\phi)$ এবং এর প্যারামেট্রিক সমীকরণ হয় $x=a\sec\phi, y=b\tan\phi$ ।

- **পরাবৃত্তের প্রয়োজনীয় ফলসমূহ নীচের সারণিতে উল্লেখ করা হল :**

	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$
তির্যক অক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষের সমান্তরাল	y-অক্ষের সমান্তরাল
অণুবন্ধী অক্ষ	y-অক্ষ	x-অক্ষ	y-অক্ষের সমান্তরাল	x-অক্ষের সমান্তরাল
তির্যক অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y=\beta$	$x=\alpha$
অণুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x=\alpha$	$y=\beta$
তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক	$2a$ একক
অণুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক	$2b$ একক
কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α,β)
শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$	$(\alpha\pm a, \beta)$	$(a,\beta\pm a)$
উৎকেন্দ্রতা	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$	$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$
নাভি দুটির স্থানাঙ্ক	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm ae)$	$(\alpha\pm ae, \beta)$	$(a, \beta\pm ae)$
নাভি দুটির দূরত্ব	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$ একক	$2ae$ একক
নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক	$\frac{2b^2}{a}$ একক

নাভিলম্ব দুটির প্রান্তবিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক	$\left(ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(ae, -\frac{b^2}{a}\right)$ $\left(-ae, \frac{b^2}{a}\right), \left(-ae, -\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\frac{b^2}{a}, ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, ae\right)$ $\left(\frac{b^2}{a}, -ae\right), \left(-\frac{b^2}{a}, -ae\right)$	$\left(\alpha \pm ae, \beta \pm \frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\alpha \pm \frac{b^2}{a}, \beta \pm ae\right)$
নাভিলম্ব দুটির সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm ae$	$x=\alpha\pm ae$	$y=\beta\pm ae$
নিয়ামক দুটির সমীকরণ	$x = \pm \frac{a}{e}$	$y = \pm \frac{a}{e}$	$x = \alpha \pm \frac{a}{e}$	$y = \beta \pm \frac{a}{e}$
নিয়ামক দুটির দূরত্ব	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক	$\frac{2a}{e}$ একক

অনুশীলনী - 11
ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো :

i) নীচের কোন বিন্দুটি $x^2+y^2 = 16$ বৃত্তের ওপর অবস্থিত?

a) (0, 2) b) (0,3) c) (–4, 0) d) (2, 3)

ii) যে সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $x^2+y^2-4x-6y-23 = 0$ বৃত্তের পরিধির ওপর অবস্থিত তার ক্ষেত্রফল (বর্গ এককে) হবে —

a) $27\sqrt{2}$ b) $27\sqrt{3}$ c) $27\sqrt{5}$ d) $25\sqrt{3}$

iii) নীচের কোন বিন্দুটি $(x-2)^2+(y+3)^2 = 25$ বৃত্তের উপর অবস্থিত?

a) (0, 0) b) (–2, 0) c) (1, –4) d) (0, –2)

iv) $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ দ্বারা একটি বিন্দু বৃত্ত সূচিত হয় যখন —

a) g^2+f^2-c b) $g^2-f^2=c$ c) $g^2+f^2=c$ d) $f^2-g^2=c$

v) $\lambda x^2+(2\lambda-3)y^2-4x+6y-1 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক —

a) $\left(\frac{2}{3}, -1\right)$ b) $\left(\frac{4}{3}, -1\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$ d) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

vi) $y^2=4ax$ অধিবৃত্ত এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0$ বৃত্ত দুটির ছেদবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (x_1,y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) হয় তবে —

a) $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$ হবে b) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}=0$ হবে

c) $y_1-y_2+y_3-y_4 = 0$ হবে d) $y_1-y_2-y_3+y_4 = 0$ হবে

vii) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত এবং $x^2+y^2+2bx = 0$ পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে যদি —

a) $a > 0, b > 0$ হয়। b) $a > 0, b = 0$ হয়। c) $a < 0, b > 0$ হয়। d) $a < 0, b < 0$ হয়।

viii) $y^2 = 16x$ অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক হবে —

a) (-4,0) (b) (4,0) (c) (0,4) (d) (0,-4)

ix) $x^2 = \frac{ab}{a+b}\cdot y$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক হল —

a) $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$ b) $\left(\frac{-ab}{4(a+b)}, 0\right)$ c) $\left(0, \frac{ab}{4(a+b)}\right)$ d) $\left(0, \frac{-ab}{4(a+b)}\right)$

x) $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ হয় —

a) $x = 6t^2, y=3t$ b) $x = 3t^2, y=6t$ c) $x = t^2, y=6t$ d) $x = 3t^2, y = t$

xi) $4x^2+25y^2 = 100$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা =

a) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{7}}{5}$ c) $\frac{7\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{23}}{5}$

xii) $9x^2+16y^2 = 144$ উপবৃত্তের $\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ বিন্দুতে উৎকেন্দ্রিক কোণ হয় —

a) 90^0 b) 60^0 c) 30^0 d) 45^0

xiii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 > b^2)$ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ হয় —

a) $x^2+y^2 = 4a^2$ b) $x^2+y^2 = 2a^2$ c) $x^2+y^2 = a^2$ d) এদের কোনটিই নয়।

xiv) $9x^2+25y^2 = 225$ উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য =

a) $\frac{18}{5}$ একক b) $\frac{16}{5}$ একক c) $\frac{9}{5}$ একক d) $\frac{8}{5}$ একক

xv) ধরো P বিন্দু $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} = 1$ উপবৃত্তের ওপর অবস্থিত। উপবৃত্তের কেন্দ্র থেকে P এর দূরত্ব, উপবৃত্তের অর্ধ-পরাক্ষ এবং অর্ধ উপাক্ষের দৈর্ঘ্যের গড়ের সমান। P -এর স্থানাঙ্ক হবে —

a) $\left(\frac{2\sqrt{91}}{7}, \frac{3\sqrt{105}}{14}\right)$ b) $\left(\frac{2\sqrt{91}}{7}, \frac{3\sqrt{105}}{14}\right)$

c) $\left(\frac{-2\sqrt{105}}{7}, \frac{-3\sqrt{91}}{7}\right)$ d) $\left(-\frac{2\sqrt{105}}{7}, \frac{3\sqrt{91}}{14}\right)$

xvi) $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e_1 হলে e_1 = ?

a) $\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}$ b) $\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}$ c) $\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$ d) $\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$

xvii) $9x^2-4y^2=36$ পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য =

a) 2 একক b) 3 একক c) 4 একক d) 5 একক

xviii) $x^2-y^2=4$ পরাবৃত্তের নাভি দুটির স্থানাঙ্ক হয় —

a) $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ b) $(2\sqrt{2}, 0)$ c) $(-2\sqrt{2}, 0)$ d) $(0, \pm 2\sqrt{2})$

xix) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত এবং $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{81}=\dfrac{1}{25}$ পরাবৃত্ত দুটির নাভিদ্বয় একই বিন্দু হলে, b^2 =

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

xx) $9x^2-16y^2=576$ এবং $9x^2-16y^2=144$ পরাবৃত্ত দুটির উৎকেন্দ্রতা যথাক্রমে e_1 এবং e_2 হলে, তবে —

a) $e_1=2e_2$ b) $e_2=2e_1$ c) $2e_1=3e_2$ d) $e_1=e_2$

2. **অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]**

i) মূলবিন্দুগামী এবং $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

ii) $3x-4y+7=0$ সরলরেখা $x^2+y^2+4x+2y+4=0$ বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক। P বিন্দুতে বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

iii) একটি বৃত্তের প্যারামেট্রিক সমীকরণ $x=\dfrac{1}{2}(-3+4\cos\theta)$, $y=\dfrac{1}{2}(1+4\sin\theta)$। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

iv) $y^2=2ax$ অধিবৃত্ত $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ এবং $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

v) $y^2=4ax$ $(a>0)$ অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত যেসব বিন্দু তার শীর্ষ এবং নাভির সঙ্গে $3a^2$ বর্গ একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

vi) a এর মান কত হলে $(8, 4)$ বিন্দুটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু হবে?

vii) $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের নাভি দুটির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

viii) এমন একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো যার নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 8 একক এবং নিয়ামকদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 18 একক।

ix) $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1\left(a_1^2>b_1^2\right)$ এবং $\frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1\left(a_2^2>b_2^2\right)$ উপবৃত্তদ্বয়ের উৎকেন্দ্রতা সমান হলে দেখাও যে, $a_1b_2=a_2b_1$।

x) কোনো পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ, নাভিলম্বের সমান হলে তার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

i) $y^2+4y+4x+2=0$ অধিবৃত্তের নিয়ামকের সমীকরণ $x=\frac{3}{K}$ হলে K এর মান কত হবে?

ii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী একপ্রস্থ জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

iii) $y=2t^2$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তকে বাস্তব বিন্দুতে ছেদ করবে যদি $|t|\le K$ হয়, তবে K এর মান কত হবে?

iv) পরাক্ষ ও উপাক্ষকে যথাক্রমে x ও y অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো — যখন উপবৃত্তটি (1, 3) ও (2, 1) বিন্দুগামী।

v) একটি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$ এবং নাভি ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব 16 ইঞ্চি হলে উপবৃত্তটির অক্ষ দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

vi) $12x^2-4y^2=3$ পরাবৃত্তের ওপর অবস্থিত $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুর প্যারামেট্রিক স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

vii) স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটিকে পরাবৃত্তের দুটি অক্ষ ধরে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করো - যার নাভি দুটির স্থানাঙ্ক $\left(\pm\frac{5}{2}, 0\right)$ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{9}{4}$ একক।

viii) $2x^2+2y^2+ax+by+c=0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, –4) হলে a ও b এর মান নির্ণয় করো।

ix) (–2,2) বিন্দুগামী বৃত্তে দুটি ব্যাসের সমীকরণ যথাক্রমে $3x+y=5$ এবং $x+y+1=0$, বৃত্তটির সমীকরণ ও তার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

x) বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো, যখন $(x-a)^2+(y+b)(y-b)=0$।

গ - বিভাগ

4. **দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন :** [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) যে বৃত্তের ব্যাস, মূলবিন্দু ও $\left(a^3, \frac{1}{a^3}\right)$ বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা, তার সমীকরণ নির্ণয় করো। প্রমাণ করো যে, বৃত্তটি $\left(\frac{1}{a}, a\right)$ বিন্দুগামী।

ii) দেখাও যে, $x^2+y^2+6(x-y)+9=0$ বৃত্ত স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটিকে স্পর্শ করে। এই বৃত্ত এবং $x-y+4=0$ সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

iii) প্রমাণ করো যে, $9x^2+16y^2=144$ উপবৃত্তের উপরিস্থ যে কোনো বিন্দুর নাভিদ্বয় হতে দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক।

iv) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুগামী এবং এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{32\sqrt{2}}{5}$ একক, a ও b এর মান নির্ণয় করো।

v) কোনো উপবৃত্তের শীর্ষ দুটির স্থানাঙ্ক $(9, 2)$ ও $(-1, 2)$ এবং নাভি দুটির দূরত্ব 8 একক, উপবৃত্তটির সমীকরণ ও তার নিয়ামক দুটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

vi) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের ওপর অবস্থিত $\left(at_1^2, 2at_1\right)$ ও $\left(at_2^2, 2at_2\right)$ বিন্দু দুটির সংযোজক জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করো, যদি জ্যা-টি অধিবৃত্তটির নাভি দিয়ে যায়, তবে দেখাও যে, $t_1t_2=-1$।

vii) প্রমাণ করো, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী জ্যা, যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণে নত তার দৈর্ঘ্য $4a\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$।

viii) যে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 3)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $2x+3y+8=0$, তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

ix) একটি গতিশীল বিন্দুর $4x-3y+11=0$ এবং $4x+3y+5=0$ সরলরেখা দুটি থেকে দূরত্ব দুটির গুণফলের সাংখ্যমান $\frac{144}{25}$। গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

x) $P(a\sec\phi, a\tan\phi)$, $x^2-y^2=a^2$ পরাবৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু এবং $A(2a, 0)$ একটি স্থির বিন্দু। দেখাও যে, $\overline{AP}$ রেখাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ আর একটি সমপরাবৃত্ত।

xi) দেখাও যে, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত দ্বারা $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ সরলরেখা থেকে ছেদিত জ্যা-কে ব্যাস করে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ হয় $x^2+y^2-a^2-2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0$।

xii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যেসব জ্যা তার শীর্ষবিন্দুতে 90^0 সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, দেখাও যে, অধিবৃত্তটির $\overline{PQ}$ জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $y^2=2a(x-4a)$।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1]. i) c   ii) b   iii) b   iv) c   v) a   vi) a
vii) a   viii) a   ix) c   x) b   xi) a   xii) b
xiii) c   xiv) a   xv) d   xvi) a   xvii) c   xviii) a
xix) b   xx) b

2]. i) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ একক   ii) $4x+3y+11=0$ iii) $2x^2+2y^2+6x-2y-3=0$

iv) $\left(\frac{3}{10}, 0\right)$ v) $(9a, 6a), (9a, -6a)$ vi) $a > \frac{1}{2}$

vii) 2 একক   viii) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ x) $\sqrt{2}$

খ - বিভাগ

3]. i) 2   ii) $y^2 = 2ax$ iii) 1

iv) $8x^2+3y^2=35$ v) 30 এবং 24   vi) $\left(\frac{1}{2}\sec 30^0, \frac{\sqrt{3}}{2}\tan 30^0\right)$

vii) $9x^2-16y^2=36$ viii) $a=-12, b=16$ ix) $x^2+y^2-6x+8y-36=0$, $\sqrt{61}$ একক

x) $(a, 0)$ এবং b একক

গ - বিভাগ

B. i) সমীকরণ হল $x^2+y^2-a^3x-\frac{y}{a^3}=0$ ii) $4(x^2+y^2)+15(x-y)=0$

iv) $a=5\sqrt{2},\ b=4\sqrt{2}$ v) $9x^2+25y^2-72x-100y+19=0$; $4x=16\pm 25$

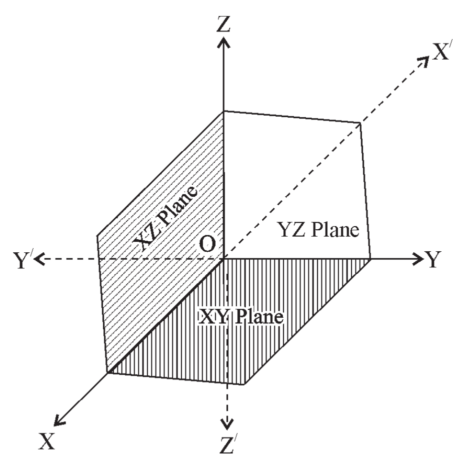
viii) $13\left[x^2+(y-6)^2\right]=(2x+3y+8)^2$ ix) $16(x+2)^2-9(y-1)^2=144$

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
(Three Dimensional Coordinate Geometry)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **ত্রিমাত্রিক দেশে লম্ব কার্তেসিয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি :**

$\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এবং $\overrightarrow{OZ}$ কে অক্ষ তিনটির ধনাত্মক দিক এবং $\overrightarrow{OX'}$, $\overrightarrow{OY'}$ এবং OZ’ কে তাদের ঋনাত্মক দিক্ ধরা হয়। $\overleftrightarrow{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$ অক্ষ দুটির অন্তগর্ত তল হল $\overleftrightarrow{XOY}$; $\overleftrightarrow{YOY'}$ ও $\overleftrightarrow{ZOZ'}$ অক্ষ দুটির অন্তর্গত তল হল $\overleftrightarrow{YOZ}$ এবং $\overleftrightarrow{ZOZ'}$ ও $\overleftrightarrow{XOX'}$ অক্ষ দুটির অন্তর্গত তল হল $\overleftrightarrow{ZOX}$। এই তিনটি সমতল পরস্পর পরস্পরের ওপর লম্ব এবং এদের স্থানাঙ্ক তল (coordinate planes) বলা হয় ও সাধারণত যথাক্রমে XY সমতল, YZ সমতল ও ZX সমতল বলা হয়।



XOX', YOY' এবং ZOZ' তিনটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা দ্বারা ত্রিমাত্রিক দেশ আটটি অংশে বিভক্ত হয় যাদের প্রত্যেকটি অষ্টমাংশ (octant) নামে পরিচিত।

ত্রিমাত্রিক দেশে বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কের চিহ্ন কোন্ অষ্টমাংশে কি হবে নীচের ছকে দেখানো হল —

অষ্টমাংশে / স্থানাঙ্ক	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	OXYZ	OX'YZ	OX'Y'Z	OXY'Z	OXYZ'	OX'YZ'	OX'Y'Z'	OXY'Z'
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

- YZ সমতলের সমীকরণ হয় $x = 0$
- ZX সমতলের সমীকরণ হয় $y = 0$
- XY সমতলের সমীকরণ হয় $z = 0$
- XY সমতলের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(x, y, 0)$
- YZ সমতলের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(0, y, z)$

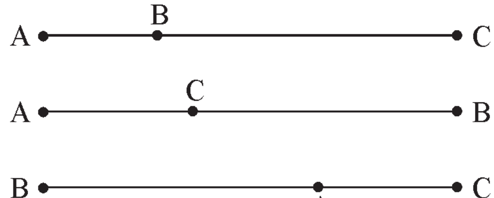
- ZX সমতলের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(x, 0, z)$
- x অক্ষের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(x, 0, 0)$
- y অক্ষের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(0, y, 0)$
- z অক্ষের ওপর যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় $(0, 0, z)$
- $y=0,\ z=0$ দ্বারা x অক্ষের সমীকরণ সূচিত হয়।
- $z=0, x=0$ দ্বারা y অক্ষের সমীকরণ সূচিত হয়।
- $x=0, y=0$ দ্বারা z অক্ষের সমীকরণ সূচিত হয়।
- YZ সমতলের সমান্তরাল যে কোনো সমতলের সমীকরণ হয় $x=a$।
- ZX সমতলের সমান্তরাল যে কোনো সমতলের সমীকরণ হয় $y=b$।
- XY সমতলের সমান্তরাল যে কোনো সমতলের সমীকরণ হয় $z=c$।
- $y=b$ এবং $z=c$, x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।
- $z=c$ এবং $x=a$, y অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।
- $x=a$ এবং $y=b$, z অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।
- মূলবিন্দু 0 থেকে $P(x,y,z)$ বিন্দুর দূরত্ব হয় $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ।
- **দুটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব :**

  $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব হয়

  $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

- **সমরেখ হওয়ার শর্ত :**

  $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ এবং $C(x_3, y_3, z_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ হয়, অথবা $\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB}$ হয় অথবা $\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$ হয়



- **বিভাজন সূত্রাবলি (Section Formulae) :**

  মনে করো, ত্রিমাত্রিক দেশে $P(x_1, y_1, z_1)$ এবং $Q(x_2, y_2, z_2)$ দুটি প্রদত্ত বিন্দু।

- R বিন্দু $\overline{PQ}$ রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে অন্তঃবিভক্ত করলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

- R বিন্দু $\overline{PQ}$ রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে বহিবিভক্ত করলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

- **মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক :**

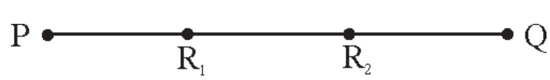
  R বিন্দু $\overline{PQ}$ রেখাংশের মধ্যবিন্দু অর্থাৎ $m:n$=1:1 হলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- R বিন্দু $\overline{PQ}$ রেখাংশকে K:1 অনুপাতে বিভক্ত করলে R বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে —

$$\left(\frac{Kx_2+x_1}{K+1}, \frac{Ky_2+y_1}{K+1}, \frac{Kz_2+z_1}{K+1}\right)$$

- যদি R_1 এবং R_2 বিন্দুতে $\overline{PQ}$ রেখাংশ সমত্রিখণ্ডিত হয় তবে $PR_1=R_1R_2=R_2Q$.



সুতরাং R_1 এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করার জন্য 1:2 অনুপাত নিতে হবে এবং R_2 এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করার জন্য 2:1 অনুপাতে নিতে হবে।

- **ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক :**

  $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ এবং $C(x_3, y_3, z_3)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে —

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য :

- বিষমবাহু ত্রিভুজ : ত্রিভুজের তিনটি বাহুই অসমান।
- সমকোণী ত্রিভুজ : ত্রিভুজের যে কোনো দুইটি বাহুর বর্গের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর বর্গের সমান।
- সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ : ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহু সমান।
- সমবাহু ত্রিভুজ : ত্রিভুজের তিনটি বাহুই সমান।

চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য :

- আয়তক্ষেত্র : বিপরীত বাহুগুলো সমান এবং কর্ণদ্বয় সমান।
- সামন্তরিক : বিপরীত বাহুগুলো সমান এবং কর্ণদ্বয় অসমান ও কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
- রম্বস : চারটি বাহুই সমান এবং কর্ণদ্বয় অসমান।
- বর্গক্ষেত্র : চারটি বাহুই সমান এবং কর্ণদ্বয়ও সমান।

অনুশীলনী - 12
ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন : (সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো)

1) YZ সমতলের উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার হবে —

a) $(x, 0, z)$ b) $(x, y, 0)$ c) $(0, y, z)$ d) এদের কোনোটিই নয়

2) $x=b$ এবং $z=c$ দ্বারা কোন্ অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখার সমীকরণ সূচিত হবে —

a) x-অক্ষের b) y-অক্ষের c) z-অক্ষের d) এদের কোনোটিই নয়

3) কোন্ অক্ষের উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার হবে $(0, a, 0)$

a) x-অক্ষ b) y-অক্ষ c) z-অক্ষ d) এদের কোনোটিই নয়

4) $(5, 2, 4)$, $(6, -1, 2)$ এবং $(8, -7, k)$ বিন্দুগুলো সমরেখ হবে যদি k হয় —

a) 3 b) –3 c) 2 d) –2

5) যদি $(-1, 1, c)$ এবং $(2, 1, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 3 হয় তবে c এর মান হবে —

a) 3 b) 2 c) 1 d) –1

6) xy সমতলের সমীকরণ হবে —

a) $x=0$ b) $y=0$ c) $z=0$ d) এদের কোনোটিই নয়

7) $(2, -3, 4)$ ও $(3, 4, -1)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ zx সমতল দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা হল

a) 3 : 4 b) 4 : 3 c) –2 : 3 d) 1 : 4

8) কোনো বর্গক্ষেত্রের একটি কর্ণের প্রান্তবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক (4, 4, 7) এবং (0, 6, 3) হলে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত একক হবে ?

a) 3 একক b) 4 একক c) $3\sqrt{2}$ একক d) $2\sqrt{6}$ একক

9) ত্রিমাত্রিক দেশে z অক্ষের সমীকরণ হয় —

a) $y=0, z=0$ b) $x=0, y=0$ c) $x=0, z=0$ d) এদের কোনোটিই নয়

10) (3, –2, –4) ও (2, 4, –3) বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশকে YOZ সমতল যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা হল—

a) 1 : 2 b) –4 : 3 c) –2 : 3 d) –3 : 2

11) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (4, 6, 0), (0, –3, 7) এবং (–4, 0, –1) হলে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হবে —

a) (0, 1, 2) b) (–1, 1, 2) c) (0, 2, 1) d) এদের কোনোটিই নয়

12) YZ সমতলের সমীকরণ হয় —

a) $y+z = 0$ b) $yz = 0$ c) $y+yz = 0$ d) $x = 0$

অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

1) A(2,3,1) এবং B(1,–2,0) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।

2) (x, –8, 4) এবং (3, –5, 4) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব 5 একক হলে x এর মান নির্ণয় করো।

3) (–2, –3, 5) বিন্দুটি কোন্ অষ্টমাংশে (octant) আছে?

4) (3, 0, –4) বিন্দু কোথায় অবস্থিত বলো।

5) (–1, –3, c) এবং (2, 1, –2) বিন্দু দুটির মধ্যে দূরত্ব $5\sqrt{2}$ একক হলে, c এর মান নির্ণয় করো।

6) প্রমাণ করো যে (2, 3, 4), (3, 4, 2) এবং (4, 2, 3) বিন্দু তিনটির সংযোগে একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

7) প্রমাণ করো যে (4, 7, –6), (2, 5, –4) এবং (1, 4, –3) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

8) প্রমান করো যে (1, –3, 1), (0, 1, 2) এবং (2, –1, 3) একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

9) xy সমতলের ওপর সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যেটি A(0, 0, 1), B(2, 0, 3) এবং C(0, 3, 2) বিন্দু তিনটি থেকে সমদূরবর্তী।

10) y অক্ষের ওপর সেইসব বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো যাদের (3, 2, –4) বিন্দু থেকে দূরত্ব $\sqrt{41}$ একক।

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

1) একটি সামান্তরিক ABCD এর পরপর তিনটি শীর্ষবিন্দু হল : A(6,–2,4), B(2,4,–8) এবং C(–2,2,4); সামান্তরিকটির চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

2) ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষবিন্দু নির্ণয় করো যার ভরকেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 4, 6) এবং (0, –2, 5)।

3) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হয় A(a,1,3), B(–2,b,–5) এবং C(4,7,c); যদি ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক মূলবিন্দু হয়, তবে a, b, ও c এর মান নির্ণয় করো।

4) বিভাজন সূত্র (section formula)'র সাহায্যে দেখাও যে A(–2, 3, 5), B(1, 2, 3) এবং C(7, 0, –1) বিন্দু তিনটি সমরেখ।

5) ZX সমতলে (3, 2, –4) বিন্দুর প্রতিবিম্ব বিন্দু নির্ণয় করো।

6) একটি গতিশীল বিন্দু (3, 4, –5) এবং (–2, 1, 4) বিন্দু দুটি থেকে সর্বদা সমদূরবর্তী হলে গতিশীল বিন্দুর সঞ্চরপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

7) প্রমাণ করো যে (–4, 9, 6), (0, 7, 10), (–1, 6, 6) বিন্দু তিনটির সংযোগে একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়।

8) যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক (0, 1, 2), (2, 0, 4) এবং (–4, –2, 7) তার পরিসীমা নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরভিত্তিক প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4/6 নম্বর]

1) (2,1,2), (–1,1,3), (0,5,6) এবং (3,2,2) বিন্দু চারটি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

2) দেখাও যে, O(0,0,0), P(a,a,0), Q(a,0,a) এবং R(0,a,a) বিন্দু চারটি দ্বারা একটি লম্ব চতুস্তলক উৎপন্ন হয়।

3) প্রমাণ করো যে (–1,–3,4), (1,–6,10), (7,–4,7) এবং (5,–1,1) বিন্দু চারটি একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

4) একটি সামান্তরিকের দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,5,–3) এবং (3,7,–5); যদি সামন্তরিকটির কর্ণ দুটির ছেদবিন্দু (4,3,3) হয়, তবে অন্য শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

5) একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক (2,3,4), (1,5,–1) এবং (0,4,–2) হলে ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

6) দেখাও যে (0,0,0), (–2,0,0), (0,2,0) এবং (0,0,4) বিন্দুগুলো একটি গোলকের ওপর আছে যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (–1,1,2)।

7) $(2,1,-3)$ এর নিকটবর্তী যে বিন্দু দ্বারা $(2,1,-3)$ এবং $(5,-8,3)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ সমত্রিখণ্ডিত হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

8) একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $D(1,2,-3)$, $E(3,0,1)$ এবং $F(-1,1,-4)$; ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

9) $A(2,1,-3)$ এবং $B(5,-8,3)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ যে বিন্দুগুলোতে সমত্রিখণ্ডিত হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

10) $(2,1,3)$ ও $(1,-3,-4)$ বিন্দু দুটির সংযোজক রেখাংশ $3x-2y-3z=3$ সমতল দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় করো। যে বিন্দুতে সমতলটি রেখাংশকে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

I. 1.(c) 2.(b) 3.(b) 4.(d) 5.(c) 6.(c) 7.(a) 8.(c) 9.(b) 10.(d) 11.(a) 12.(d)

II. 1) $3\sqrt{3}$ একক 2) 7 বা (–1) 3) $OX'Y'Z$ 4) ZX সমতল 5) 3 or –7 9) (3,2,0) 10) (0,–2,0) বা (0,6,0)

খ - বিভাগ

1) (2,–4,16) 2) (–2, –2, –1) 3) $a=-2$, $b=-8$ এবং $c=2$ 5) (3, –2, –4)

6) $10x+6y-18z=29$ 8) $\left(10+5\sqrt{2}\right)$ একক

গ - বিভাগ

1) (1,3,4) 4) (6,1,9) এবং (5,–1,11) 5) (–1,6,–7), (1,2,3) এবং (3,4,5) এবং $\left(1,4,\frac{1}{3}\right)$

7) (3,–2,1) 8) (1,1,–2) 9) (3,–2,–1) এবং (4,–5,1)

10) 4 : 9 এবং $\left(\frac{22}{13},\frac{-3}{13},\frac{11}{13}\right)$

অধ্যায় — 13

সীমা এবং অন্তরকলজ (Limits and Derivatives)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **অপেক্ষকের সীমা :**
- মনে করি একটি ক্ষেত্রের মধ্যে f একটি অপেক্ষক সংজ্ঞাত যাকে আমরা I অন্তরাল হিসাবে ধরি। এখন আমরা I অন্তরালের একটি বিন্দু a-তে f অপেক্ষকের সীমার ধারণা অধ্যয়ন করব।
- আমরা বলতে পারি $x=a$-তে f-এর প্রত্যাশিত মান হল $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ যা a-এর বাঁদিকে x-এর নিকটবর্তী মানের জন্য f-এর প্রদত্ত মান। এই মানকে a-তে f-এর বামপক্ষের সীমাস্থ মান বলা হয়।
- আমরা বলতে পারি $x=a$-তে f-এর প্রত্যাশিত মান হল $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ যা a-এর ডানদিকে x-এর নিকটবর্তী মানের জন্য f-এর প্রদত্ত মান। এই মানকে a-তে f-এর ডানপক্ষের সীমাস্থ মান বলা হয়।
- যদি ডানদিকের এবং বাঁদিকের সীমাস্থ মান সমাপতিত হয় তবে এই সাধারণ মানকে $x=a$-তে $f(x)$-এর সীমা বলা হয় এবং এটিকে $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।
- **সীমার কিছু ধর্ম :**
- মনে করি f এবং g দুটি অপেক্ষক এমন যে, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে। তাহলে

  i) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)$

  ii) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)$

  iii) α এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x)=\alpha \lim\limits_{x\to a} f(x)$

  iv) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

  v) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, যেখানে $g(x)\neq 0$

- একটি বাস্তব সংখ্যা a এবং একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর জন্য $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ সমান নাও হতে পারে।

  অর্থাৎ —

  i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব আছে কিন্তু $f(a)$ ($x=a$ তে $f(x)$এর মান) এর অস্তিত্ব নেই।

ii) $f(a)$ এর মানের অস্তিত্ব আছে কিন্তু $\lim_{x\to a} f(x)$ এর অস্তিত্ব নেই।

iii) $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে কিন্তু অসমান।

iii) $\lim_{x\to a} f(x)$ এবং $f(a)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে এবং সমান।

- **নিম্নলিখিতগুলো হল কিছু আদর্শ সীমা :**

i) $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$ ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

v) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e^a,\ a \neq 0,\ a > 1$ vi) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- **অন্তরকলজ :**

- ধরো f একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক এবং এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রে a যেকোনো একটি বিন্দু। a বিন্দুতে f এর অন্তরকলজ $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ রূপে সংজ্ঞাত, এই শর্তে যে, ওই বিন্দুতে সীমার অস্তিত্ব আছে। a বিন্দুতে $f(x)$ এর অন্তরকলজকে $f'(a)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

- জ্যামিতিক ভাবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরকলজ হল $y=f(x)$ বক্রের উপর $(a, f(a))$ বিন্দুতে স্পর্শকের প্রবণতা।

- **অপেক্ষকের অন্তরকলজ-এর বীজগণিত :**

ধরা যাক, f এবং g এরূপ দুটি অপেক্ষক যাদের অন্তরকলজ একটি সাধারণ অঞ্চলে সংজ্ঞাত। তাহলে —

i) দুটি অপেক্ষকের যোগফলের অন্তরকলজ হল অপেক্ষকদুটির অন্তরকলজের যোগফল।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

ii) দুটি অপেক্ষকের অন্তরফলের অন্তরকলজ, অপেক্ষকদুটির অন্তরকলজের অন্তরফলের সমান।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

iii) দুটি অপেক্ষকের গুণফলের অন্তরকলজ নীচে গুণের নিয়মে দেওয়া হল।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x).g(x)\right] = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right).g(x) + f(x).\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$$

iv) দুটি অপেক্ষকের ভাগফলের অন্তরকলজ নীচে ভাগের নিয়মে দেওয়া হল (যখন হর শূন্য নয়)।

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right).g(x)-f(x).\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{(g(x))^2}$$

- একটি ধ্রুবক অপেক্ষকের অবকলন হল শূন্য। অর্থাৎ $\frac{d}{dx}(c)=0$ ।

- ধরো *f(x)* অবকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং *c* একটি ধ্রুবক। তাহলে *cf(x)* ও অবকলনযোগ্য হবে এবং $\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{d}{dx}f(x)$ ।

- ধরো *f(x), g(x), h(x)* হল তিনটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক। তবে

$$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x).h(x)\}=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right).g(x).h(x)+f(x).\left(\frac{d}{dx}g(x)\right).h(x)+f(x).g(x).\left(\frac{d}{dx}h(x)\right)$$

- **একটি অপেক্ষকের অপেক্ষক-এর অন্তরকলজ :**

শৃঙ্খল নিয়ম : যদি *y=f(t)* এবং *t=g(x)* হয়, তবে

$$\frac{dy}{dt}=f'(t),\quad \frac{dt}{dx}=g'(x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=f'(t)\times g'(x)$$

- **নিম্নলিখিতগুলো হল কিছু আদর্শ অন্তরকলজ :**

i) $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

ii) $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_e^a,\ a>0,\ a\neq 1$

iii) $\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$

iv) $\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$

v) $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

vi) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

vii) $\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$

viii) $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\cos ec^2 x$

ix) $\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\ \tan x$

x) $\frac{d}{dx}(\cos ecx)=-\cos ecx\ \cot x$

অনুশীলনী - 13

ক - বিভাগ

নৈব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ এর মান হল —

a) 1 b) $\dfrac{m}{n}$ c) 0 d) $-\dfrac{m}{n}$

ii) $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{(1+y)^m-1}{y}$ এর মান হল —

a) m b) $-m$ c) 1 d) 0

iii) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ এর মান হল —

a) 1 b) 2 c) –1 d) –2

iv) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\pi x}{x-1}$ এর মান হল —

a) $-\dfrac{1}{\pi}$ b) $\dfrac{1}{\pi}$ c) π d) $-\pi$

v) যদি $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ,x\neq0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$, হয়, তবে $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ এর মান হল —

a) 1 b) 0 c) –1 d) কোনটিই নয়

vi) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\sin x|}{x}$ এর মান হল —

a) 1 b) –1 c) অস্তিত্ব নেই d) কোনটিই নয়

vii) যদি $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin[x]}{[x]} & ,[x]\neq0 \\ 0 & ,[x]=0 \end{cases}$, যেখানে $[\cdot]$ হল বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষক হয়, তবে $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ এর মান হল —

a) 1 b) 0 c) –1 d) কোনটিই নয়

viii) ধরো $f(x)=x-[x], x\in R$, তবে $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ হল —

a) 1 b) –1 c) 0 d) $\dfrac{3}{2}$

ix) যদি $f(x) = x\sin x$ হয়, তবে $f'\left(\pi/2\right)=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

x) যদি $f(x)=\dfrac{x-4}{2\sqrt{x}}$, হয়, তবে $f'(1)$ এর মান হল

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{4}{5}$ c) 1 d) 0

xi) যদি $f(x)=\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$ হয়, তবে $f'(a)$ হল

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) অস্তিত্ব নেই

xii) $\lim\limits_{x\to 2}[x-2]$, যেখানে $[\cdot]$ হল বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষক, এর মান হল —

a) 1 b) 2 c) 0 d) অস্তিত্ব নেই

2. অতি সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1/2 নম্বর]

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^0}{x}$ এর মান নির্ণয় করো।

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+..........+n}{n^2}$ এর মান নির্ণয় করো।

iii) যদি $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^n-2^n}{x-2}=80$, $n\in N$ হয়, তবে n এর মান কত?

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x(1+\cos x)}$ এর মান নির্ণয় করো।

v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\sin x}-1}{\sin x}$ এর মান নির্ণয় করো।

vi) $x = -3$ বিন্দুতে $f(x) = 3|2+x|$ এর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

vii) যদি $y = \log_5 x$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় করো।

viii) $\dfrac{d}{dx}(x|x|)$ এর মান নির্ণয় করো।

ix) যদি $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\infty\right)$ হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx}=y$ ।

খ - বিভাগ

3. **সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]**

(i) হতে (xviii) পর্যন্ত সীমাগুলোর মান নির্ণয় করো —

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x+4}{x^2+3x+2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} \left\{\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-2x}\right\}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

iv) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x+2)^{\frac{3}{2}}-(a+2)^{\frac{3}{2}}}{x-a}$

v) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

vi) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2-1}$

viii) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$

ix) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x}$

x) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2mx}{1-\cos 2nx}$

xi) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x-\tan x)$

xii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x-2x}{3x-\sin^2 x}$

xiii) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos^3 x}{\sin^2 x}$

xiv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$

xv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x+3^{-x}-2}{x^2}$

xvi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3^x-1}$

xvii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

xviii) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\log x-\log 5}{x-5}$

xix) হতে (xxx) পর্যন্ত প্রত্যেকটি অপেক্ষকের x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় করো :

xix) $\dfrac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}$

xx) $log_3 x$

xxi) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

xxii) $x^3.e^x$

xxiii) $\dfrac{x+e^x}{1+\log x}$

xxiv) $\dfrac{10^x}{\sin x}$

xxv) $\dfrac{1+\log x}{1-\log x}$

xxvi) $x^5e^x+x^6 log x$

xxvii) $e^{\sqrt{\cot x}}$

xxviii) $cos^2 x^3$

xxix) $\sqrt{x\sin x}$ xxx) $\cos(x+a)$

গ - বিভাগ

4. দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) যদি $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ হয়, তবে দেখাও যে $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর অস্তিত্ব নেই।

ii) ধরো, $f(x)$ একটি অপেক্ষক এরূপে সংজ্ঞাত যে

$$f(x)=\begin{cases}4x-5, & x\leq 2\\ x-\lambda, & x>2\end{cases}.$$

যদি $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে λ এর মান নির্ণয় করো।

iii) যদি f একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হয় এবং $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে, তবে প্রমাণ করো এর সীমা মান হবে শূন্য।

iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ এর মান নির্ণয় করো (যদি অস্তিত্ব থাকে), যেখানে $f(x)=\begin{cases}x-[x], & x<2\\ 4, & x=2\\ 3x-5, & x>2\end{cases}$

v) ধরো, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{K\cos x}{\pi-2x}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases},$

এবং যদি $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ হয়, তবে K এর মান নির্ণয় করো।

নিম্নলিখিত সীমাগুলোর মান নির্ণয় করো **(vi হতে xix)** :

vi) $\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$

vii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right)$

viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+b^x-c^x-d^x}{x}$

x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(5+x)-\log(5-x)}{x}$

xi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

xii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 6x}{\sin 5x-\sin 3x}$

xiii) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(x+y)\text{sex}(x+y)-x\sec x}{y}$

xiv) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

xv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

xvi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1}$

xvii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

xviii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x - \cos x}{(\pi - 2x)^3}$

xix) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cot x - \cos x}{(\pi - 2x)^3}$

xx) যদি $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ হয়, তবে a এর সম্ভাব্য মানগুলো নির্ণয় করো।

xxi) প্রাথমিক তত্ত্ব হতে নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

a) $\sqrt{ax+b}$ b) ax^2+bx+c c) x^n

d) $\dfrac{2x+3}{3x+2}$ e) sin^2x f) $sinx^2$

g) xe^x h) $\tan\sqrt{x}$ i) $\sqrt{\cot x}$

j) $log\, sinx$ k) $e^{\sqrt{\tan x}}$ l) $e^{\sqrt{2x}}$

xxii) নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলোর x এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ নির্ণয় কর :

a) $(xsinx+cosx)\,(xcosx-sinx)$

b) $e^x \log\sqrt{x}\tan x$

c) $\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$

d) $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$

xxiii) যদি $y = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{a}{x}}$ হয়, তবে প্রমাণ করো $2xy\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{x}\right)$

xxiv) যদি $y = \dfrac{2 - 3\cos x}{\sin x}$ হয়, তবে $x = \dfrac{\pi}{4}$ বিন্দুতে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো।

xxv) যদি $y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0$

xxvi) যদি $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ হয়, তবে প্রমাণ করো $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

xxvii) যদি $f(x) = \lambda x^2 + \mu x + 12$, $f'(4) = 15$ এবং $f'(2) = 11$ হয়, তবে λ এবং μ এর মান নির্ণয় করো।

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1. i) b　ii) a　iii) c　iv) d　v) b　vi) c
vii) d　viii) a　ix) b　x) a　xi) d　xii) d

2. i) $\frac{\pi}{180}$　ii) $\frac{1}{2}$　iii) 5　iv) $\frac{1}{2}$　v) $\log a$　vi) -3
vii) $\frac{1}{x}\log_5 e$　viii) $2x$, যখন $x>0$; $-2x$, যখন $x<0$.

খ - বিভাগ

3. i) 2　ii) 2　iii) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　iv) $\frac{3}{2}(a+2)^{\frac{1}{2}}$　v) 6　vi) 3
vii) $\frac{1}{4}$　viii) 0　ix) 0　x) $\frac{m^2}{n^2}$　xi) 0　xii) $\frac{1}{3}$
xiii) $\frac{3}{2}$　xiv) $\log\frac{a}{b}$　xv) $(\log 3)^2$　xvi) $\frac{3}{\log 3}$　xvii) 1　xviii) $\frac{1}{5}$
xix) $\frac{3a}{2}\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{x}}-\frac{c}{2x\sqrt{x}}$　xx) $\frac{1}{x\log 3}$　xxi) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{-5}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{3}{2}x^{\frac{-3}{2}}$
xxii) $x^2e^x(3+x)$　xxiii) $\frac{x\log x(1+e^x)-e^x(1-x)}{x(1+\log x)^2}$
xxiv) $10^x\operatorname{cosec}x(\log 10-\cot x)$　xxv) $\frac{2}{x(1-\log x)^2}$　xxvi) $x^4(5e^x+xe^x+x+6x\log x)$
xxvii) $\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}e^{\sqrt{\cot x}}$　xxviii) $-3x^2\sin(2x^3)$　xxix) $\frac{x\cos x+\sin x}{2\sqrt{x\sin x}}$
xxx) $-\sin(x+a)$

গ - বিভাগ

4. ii) $\lambda=-1$　iv) 1　v) $K=6$　vi) $\frac{-1}{2x^{3/2}}$　vii) $-\frac{1}{3}$　viii) 1
ix) $\log\frac{ab}{cd}$　x) $\frac{2}{5}$　xi) $\frac{1}{2}$　xii) 4　xiii) $\sec x(x\tan x+1)$

xiv) $\sqrt{2}$ xv) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ xvi) $\frac{1}{2}$ xvii) $2\sqrt{a}\cos a$ xviii) $\frac{1}{16}$ xix) -4

xx) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

xxi) a) $\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ b) $2ax+b$ c) nx^{n-1} d) $-\frac{5}{(3x+2)^2}$ e) $\sin 2x$

f) $2x\cos x^2$ g) $(x+1)e^x$ h) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sec^2\sqrt{x}$ i) $-\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}$ j) $\cot x$

k) $e^{\sqrt{\tan x}}.\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$ l) $\frac{1}{\sqrt{2x}}e^{\sqrt{2x}}$

xxii) a) $x\{x\cos 2x - \sin 2x\}$ b) $\frac{1}{2}e^x\left\{\log x.\tan x + \frac{\tan x}{x} + \log x.\sec^2 x\right\}$

c) $\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ d) $\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$

xxiv) $6-2\sqrt{2}$ xxvii) $\lambda=1$, $\mu=7$

অধ্যায় — 14

গাণিতিক যুক্তি (Mathematical Reasoning)

মূল বিষয়বস্তু এবং ফলাফল :

গাণিতিক ভাষায়, যুক্তি দুই ধরণের হয় — আরোহী এবং অবরোহী।

- **উক্তি :**

  উক্তি হল একটি বাক্য যা হয় সত্য বা মিথ্যা, কিন্তু একই সাথে সত্য বা মিথ্যা উভয়ই নয়।

  দ্রষ্টব্য : একটি বাক্যকে উক্তি বলা যাবে না, যদি বাক্যটি একটি

  i) বিস্ময়সূচক হয়।

  ii) নির্দেশাত্মক বা অনুজ্ঞাবাচক হয়।

  iii) প্রশ্নসূচক হয়।

  iv) পরিবর্তনশীল সময় যুক্ত হয়, যেমন আজ, আগামীকাল, গতকাল ইত্যাদি যুক্ত হয়।

  v) পরিবর্তনশীল স্থান যুক্ত হয়, যেমন এখানে, সেখানে, সর্বত্র ইত্যাদি যুক্ত হয়।

  vi) সর্বনাম যুক্ত হয়, যেমন সে/তিনি, তারা ইত্যাদি যুক্ত হয়।

  সাধারণ উক্তি :

  একটি উক্তিকে সরল উক্তি বলা হবে, যদি এটিকে দুই বা ততোধিক উক্তিতে ভাঙ্গা না যায়।

  যৌগিক উক্তি :

  একটি যৌগিক উক্তি হল এমন একটি উক্তি যা দুই বা ততোধিক সরল উক্তি দিয়ে তৈরি হয়। এই সরল উক্তিগুলোকে উপাংশ উক্তি বলা হয়।

  একটি উক্তির না-ক্রিয়া :

  কোনো একটি উক্তির অস্বীকার করাকে উক্তিটির না-ক্রিয়া বলা হয়।

  যদি P একটি উক্তি হয়, তবে P এর না-ক্রিয়াও একটি উক্তি এবং এটিকে $\sim P$ দিয়ে চিহ্নিত করা হয় এবং পড়া হয় ‘P নয়’।

- **সংযোজক সমূহ (Connectives) :**

  সরল উক্তিগুলোকে সংযুক্ত করে নতুন ধরনের উক্তি গঠন করার অনেক কৌশল আছে। যে শব্দগুলো নতুন উক্তি বা যৌগিক উক্তি গঠনের জন্য সাধারণ উক্তিগুলোকে একত্রিত করে বা পরিবর্তন করে তাদের সংযোজক বলা হয়। সংযোজনগুলোর মধ্যে অন্তঃসংযোগ (conjunction) এর ক্ষেত্রে ‘এবং’ শব্দটি ব্যবহৃত হয় এবং বিকল্প বা বিয়োজন (disjunction)-এর ক্ষেত্রে ‘অথবা’ শব্দটি ব্যবহৃত হয়। এ অধ্যায়ে আমরা অন্তঃসংযোগ এর জন্য ‘$\wedge$’ চিহ্ন এবং বিকল্প বা বিয়োজনের জন্য ‘$\vee$’ চিহ্ন ব্যবহার করব।

অন্তঃসংযোগ :

যদি দুটি সরল উক্তি p এবং q কে 'এবং' শব্দ দ্বারা যুক্ত করা হয়, তবে উৎপন্ন যৌগিক উক্তি 'p এবং q' কে p ও q-এর কনজাংশন বলা হয় এবং '$p \wedge q$' সাংকেতিক রূপে লেখা হয়।

$p \wedge q$-এর সত্যতা মান সারণী :

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

বিকল্প বা বিয়োজন :

যদি দুটি সরল উক্তি p এবং q কে 'অথবা' শব্দ দ্বারা যুক্ত করা হয়, তবে উৎপন্ন যৌগিক উক্তি 'p অথবা q' কে p এবং q-এর ডিস্‌জাংশন বলা হয় এবং '$p \vee q$' সাংকেতিক রূপে লেখা হয়।

$p \vee q$-এর সত্যতা মান সারণী :

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

অন্তঃসংযোগ এর না-ক্রিয়া : $p \wedge q$ কনজাংশন এর না-ক্রিয়া হল p এর না-ক্রিয়া এবং q এর না-ক্রিয়ার ডিস্‌জাংশন। সমতুল্যভাবে, আমরা লিখি $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$।

বিকল্প বা বিয়োজন এর না-ক্রিয়া : $p \vee q$ ডিস্‌জাংশন এর না-ক্রিয়া হল p এর না-ক্রিয়া এবং q এর না-ক্রিয়ার কনজাংশন। সমতুল্যভাবে, আমরা লিখি $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$।

না-ক্রিয়া এর না-ক্রিয়া : একটি উক্তির না-ক্রিয়া এর না-ক্রিয়া হল উক্তিটি নিজেই। সমতুল্যভাবে, আমরা লিখি $\sim(\sim p) = p$।

শর্তাধীন উক্তি :

যদি p এবং q যে কোনো দুটি উক্তি হয়, তবে p এবং q 'যদি-তখন' সংযোজক দ্বারা যুক্ত হয়ে গঠিত 'যদি p তখন q' যৌগিক উক্তিটিকে শর্তাধীন উক্তি বা অনুসৃতি বলা হয় এবং এটিকে $p \rightarrow q$ বা $p \Rightarrow q$ সাংকেতিক রূপে লেখা হয়।

$p \Rightarrow q$ এর সত্যতা মান সারণী :

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$p \Rightarrow q$ শর্তাধীন উক্তিকে বিভিন্ন উপায়ে প্রকাশ করা যেতে পারে। এগুলো হল —

i) p ফলস্বরূপ (implies) q

ii) p কেবলমাত্র যদি q

iii) q হল p এর প্রয়োজনীয় শর্ত

iv) p হল q এর যথেষ্ট শর্ত

v) $\sim q$ ফলস্বরূপ $\sim p$

একটি শর্তাধীন উক্তির বিপরীত এবং বিরুদ্ধে ধনাত্মক :

'$q \rightarrow p$' শর্তাধীন উক্তিকে বলা হয় '$p \rightarrow q$'। শর্তাধীন উক্তির বিপরীত উক্তি। '$(\sim q) \rightarrow (\sim p)$' উক্তিকে বলা হয় '$p \rightarrow q$' উক্তির বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তি।

দ্বিশর্তাধীন উক্তি :

যদি দুটি উক্তি p এবং q 'যদি এবং কেবলমাত্র যদি' সংযোজক দ্বারা যুক্ত হয়, তবে লব্ধ 'p যদি এবং কেবলমাত্র যদি q' যৌগিক উক্তিকে p এবং q এর দ্বিশর্তাধীন উক্তি বলা হয় এবং এটিকে $p \leftrightarrow q$ বা $p \Leftrightarrow q$ সাংকেতিকরূপে লেখা হয়।
$p \Leftrightarrow q$ এর সত্যতা মান সারণী :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

পরিমান নির্দেশক :

পরিমান নির্দেশক হল এক বিশেষ শব্দগোষ্ঠী যেমন, 'এখানে অস্তিত্ব আছে' এবং 'সকলের জন্য'। 'সকলের জন্য' কে '$\forall$' চিহ্ন এবং 'এখানে অস্তিত্ব আছে' কে '$\exists$' সূচিত করা হয়।

'সকলের জন্য'-কে বলা হয় সার্বজনীন পরিমান নির্দেশক (universal quantifiers)।

'এখানে অস্তিত্ব আছে' -কে বলা হয় অস্তিত্বসম্বন্ধীয় পরিমান নির্দেশক (existential quantifiers)।

- **উক্তির বৈধকরণ :**

একটি উক্তির বৈধকরণ হল কখন উক্তিটি সত্য এবং কখন উক্তিটি সত্য নয় তা যাচাই করা। তা নির্ভর করে উক্তিটিতে কি ধরণের সংযোজক, পরিমান নির্দেশক এবং অনুসৃতি ব্যবহার করা হয়েছে।

নিয়ম-1 : 'এবং' যুক্ত উক্তি

যদি p এবং q গাণিতিক উক্তি হয়, তবে উক্তি 'p এবং q' সত্য দেখানোর জন্য নীচের ধাপগুলো অনুসরণ করতে হবে।

ধাপ-1 : দেখাও যে p উক্তিটি সত্য।

ধাপ-2 : দেখাও যে q উক্তিটি সত্য।

নিয়ম-2 : 'অথবা' যুক্ত উক্তি

যদি p এবং q গাণিতিক উক্তি হয়, তবে উক্তি 'p অথবা q' সত্য দেখানোর জন্য নিম্নলিখত ক্ষেত্রগুলোর মধ্যে যে-কোনো একটিকে বিবেচনা করতে হবে।

ক্ষেত্র-1 : p-কে মিথ্যা অনুমান করে, দেখাও যে q অবশ্যই সত্য।

ক্ষেত্র-2 : q-কে মিথ্যা অনুমান করে, দেখাও যে p অবশ্যই সত্য।

নিয়ম-3 : 'যদি-তখন' যুক্ত উক্তি

'যদি p তখন q' উক্তিটির সত্যতা প্রমাণের জন্য, আমাদেরকে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলোর মধ্যে যেকোনো একটিকে সত্য দেখাতে হবে।

ক্ষেত্র-1 : p-কে সত্য অনুমান করে, প্রমাণ করো q অবশ্যই সত্য। (প্রত্যক্ষ পদ্ধতি)

ক্ষেত্র-2 : q-কে মিথ্যা অনুমান করে, প্রমাণ করো p অবশ্যই মিথ্যা। (বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি)

ক্ষেত্র-3 : p-সত্য এবং q-মিথ্যা অনুমান করে, পূর্বানুমানকে বিরোধিতা স্থাপন করব। (পরস্পর বিরোধী পদ্ধতি)

নিয়ম-4 : 'যদি এবং কেবলমাত্র যদি' যুক্ত উক্তি

'p যদি এবং কেবলমাত্র যদি q' উক্তিটির সত্যতা প্রমাণের জন্য আমাদের দেখাতে হবে

i) যদি p সত্য হয়, তবে q সত্য এবং

ii) যদি q সত্য হয়, তবে p সত্য।

- **পাল্টা বা বিপরীত (Counter) উদাহরণের সাহায্যে কোন উক্তির অসত্যতা প্রমাণ :**

একটি উক্তি মিথ্যা দেখানোর জন্য, আমরা পরিস্থিতির বিচারে একটি উদাহরণ নেব যেখানে উক্তিটি বৈধ নয়। এই ধরণের উদাহরণকে বলা হয় পাল্টা উদাহরণ।

অনুশীলনী - 14

ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহুমুখী নির্বাচনধর্মী প্রশ্ন :

i) নিম্নলিখিতগুলোর মধ্যে কোনটি একটি উক্তি?

a) y হল একটি বাস্তব সংখ্যা। b) পাখাটি বন্ধ করো।

b) 2 হল একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। c) আমাকে যেতে দাও।

ii) নিম্নলিখিতগুলোর মধ্যে কোনটি একটি উক্তি নয়?

a) ধূমপান স্বাস্থ্যের জন্য ক্ষতিকর। b) $2+3=5$

c) 2 হল একমাত্র যুগ্ম মৌলিক সংখ্যা d) এখানে এসো।

iii) $3+4 > 7$ অথবা $3+4 < 7$ উক্তিটির সংযোজকটি হল

a) এবং b) অথবা c) $<$ d) $>$

iv) ''একটি বৃত্ত হল একটি উপবৃত্ত'' উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

a) একটি বৃত্ত একটি উপবৃত্ত নয়। b) একটি উপবৃত্ত একটি বৃত্ত।

c) একটি বৃত্ত একটি উপবৃত্ত। d) একটি উপবৃত্ত একটি বৃত্ত নয়।

v) '5, 9 অপেক্ষা বড়ো' উক্তিটির না-ক্রিয়া হল

a) 5, 9 অপেক্ষা কম। b) 5, 9 অপেক্ষা বড়ো নয়।

c) 9, 5 অপেক্ষা কম। d) 5, 9 এর সমান।

vi) ''যদি 7, 5 অপেক্ষা বড়ো হয়, তবে 8, 6 অপেক্ষা বড়ো'' উক্তিটির বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তিটি হল —

a) যদি 8, 6 অপেক্ষা বড়ো হয়, তবে 7, 5 অপেক্ষা বড়ো নয়।

b) যদি 8, 6 অপেক্ষা বড়ো না হয়, তবে 7, 5 অপেক্ষা বড়ো হয়।

c) যদি 8, 6 অপেক্ষা বড়ো না হয়, তবে 7, 5 অপেক্ষা বড়ো নয়।

d) যদি 8, 6 অপেক্ষা বড়ো হয়, তবে 7, 5 অপেক্ষা বড়ো হয়।

vii) ''যদি $x > y$ হয়, তবে $x+b > y+b$'' উক্তিটির বিপরীত উক্তিটি হল —

a) যদি $x < y$ হয়, তবে $x+b < y+b$ b) যদি $x+b < y+b$ হয়, তবে $x > y$

c) যদি $x < y$ হয়, তবে $x+b > y+b$ d) যদি $x > y$ হয়, তবে $x+b < y+b$

viii) নীচের কোনটি $p \rightarrow q$ শর্তাধীন উক্তি ?

a) p কেবলমাত্র যদি q।
b) যদি q, তখন p।
c) q হল p এর যথেষ্ট শর্ত।
d) p হল q এর প্রয়োজনীয় শর্ত।

ix) নীচের কোন উক্তিটি কনজাংশন?

a) অমল এবং কমল হল বন্ধু।
b) অমল এবং কমল উভয়ই বন্ধু।
c) অমল এবং কমল উভয়ই শত্রু।
d) কোনটিই নয়।

x) নীচের কোনটি "একটি স্বাভাবিক সংখ্যা শূন্য অপেক্ষা বড়ো" উক্তিটির না-ক্রিয়া নয়।

a) একটি স্বাভাবিক সংখ্যা শূন্য অপেক্ষা বড়ো নয়।
b) এটি মিথ্যা যে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা শূন্য অপেক্ষা বড়ো।
c) এটি মিথ্যা যে একটি স্বাভাবিক সংখ্যা শূন্য অপেক্ষা বড়ো নয়।
d) কোনটিই নয়।

অতিসংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন :

2. নীচের কোন বাক্যগুলো একটি উক্তি? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

i) মৌলিক অখণ্ড সংখ্যাসমূহের সেট হল অসীম।
ii) একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু আছে।
iii) তোমার ক্লাশে যাও।
iv) সব সম্বন্ধ হল একটি অপেক্ষক।
v) তোমার থলে কোথায়?
vi) সকল রম্বসই একটি বর্গক্ষেত্র।
vii) $y + 6 = 5$
viii) ভগবান তোমার মঙ্গল করুক।
ix) x সংখ্যাটি একটি যুগ্ম সংখ্যা।
x) $x^2 + 5|x| + 6 = 0$ সমীকরণটির কোন বাস্তব বীজ নেই।
xi) $\left(2+\sqrt{3}\right)$ একটি জটিল সংখ্যা।

3. নিম্নলিখিত যৌগিক উক্তিগুলোর উপাংশ উক্তিগুলো নির্ণয় করো :

i) 5 সংখ্যাটি হল মৌলিক অথবা অযুগ্ম।
ii) $\sqrt{11}$ হল একটি অমূলদ সংখ্যা অথবা একটি মূলদ সংখ্যা।
iii) 60 সংখ্যাটি 3, 9 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য।
iv) $(1+i)$ হল একটি বাস্তব অথবা একটি জটিল সংখ্যা।
v) একটি সমতলে দুটি সরলরেখা হয় একটি বিন্দুতে ছেদ করে অথবা এরা সমান্তরাল।
vi) একটি বর্গক্ষেত্র হল একটি চতুর্ভুজ অথবা একটি 5-বাহু বিশিষ্ট বহুভুজ।

vii) 0 প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং প্রত্যেক ঋনাত্মক অখণ্ড সংখ্যার চেয়ে ছোটো।

viii) চন্ডীগড় হল হরিয়ানা এবং বিহারের রাজধানী।

4. নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লিখ।

   i) মুম্বাই হল একটি শহর।

   ii) সকল গণিতজ্ঞরা হল মানুষ।

   iii) 7 সংখ্যাটি 5 অপেক্ষা বড়ো।

   iv) সমস্ত বিড়াল আঁচড় দেয়।

   v) $3+6 = 8$

   vi) একটি অধিবর্ষে 366 দিন আছে।

   vii) 2 একটি মৌলিক সংখ্যা নয়।

খ - বিভাগ

সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

5. নিম্নলিখিত যৌগিক উক্তিগুলোর উপাংশ উক্তি নির্ণয় করো এবং এগুলো সত্য বা মিথ্যা কিনা যাচাই করো।

   i) 50 সংখ্যাটি 2 এবং 5 এর গুণিতক।

   ii) বিদ্যালয় বন্ধ, যদি এই দিন ছুটির দিন অথবা রবিবার হয়।

   iii) একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক।

   iv) $3x^2-x-10 = 0$ সমীকরণের বীজগুলো হল $x = 5$ এবং $x = 2$।

6. নিম্নলিখিত উক্তিগুলোকে সাংকেতিক আকারে রূপান্তর করো।

   i) রুমা গণিত এবং বিজ্ঞান বিষয়ে পাশ করেছে।

   ii) x এবং y হল অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

   iii) হয় x অথবা x+1 একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

   iv) যদি $x = 5$ এবং $y = 3$ হয়, তবে $x+y = 8$।

   v) ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি এর প্রতিটি অন্তঃস্থ কোণ 60^0 হয়।

   vi) যদি আজ বৃষ্টি হয়, তবে $3+4>6$।

7. নিম্নলিখিত যৌগিক উক্তিগুলোর না-ক্রিয়া লিখ।

   i) রমেশ আসামে বসবাস করে অথবা সে ত্রিপুরায় বসবাস করে।

   ii) রৌদ্রের মধ্যে বালি তাড়াতাড়ি গরম হয় এবং রাত্রিতে তাড়াতাড়ি ঠান্ডা হয় না।

   iii) $x+y = y+x$ এবং 30 একটি যুগ্ম সংখ্যা।

   iv) একটি ত্রিভুজের হয় 3টি বাহু অথবা 4টি বাহু।

   v) $|x|$ এর সমান হয় x অথবা $-x$।

8. নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর পরিমাণ নির্দেশক সনাক্ত করো এবং এগুলোর না-ক্রিয়া লিখ।

   i) সকল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা x এর জন্য, x^2 ও যুগ্ম।

   ii) একটি সংখ্যার অস্তিত্ব আছে, যা 6 এবং 9 এর গুণিতক।

   iii) সব জীবিত ব্যক্তির বয়স 120 বছর নয়।

   iv) সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা x এর জন্য, আমরা পাই $x+3>7$।

9. নিম্নলিখিত উক্তিগুলোর বিপরীত এবং বিরুদ্ধ ধনাত্মক উক্তিটি লিখ।

   i) যদি ABC ত্রিভুজের B বিন্দুতে সমকোণ হয়, তবে $AB^2+BC^2=AC^2$।

   ii) যদি ΔABC এবং ΔDEF সর্বসম হয়, তবে তারা সমকৌণিক।

   iii) যদি সে কাজ করে, তবে সে অর্থ উপার্জন করবে।

   iv) যদি x এর উপসেট A এবং B এমন যে $A\subseteq B$, তবে $(X-B)\subseteq(X-A)$।

   v) যদি দুটি রেখা সমান্তরাল হয়, তবে এরা একই সমতলে ছেদ করবে না।

   vi) যদি $p(3)=0$ হয়, তবে $p(x)$ রাশিমালাটি $(x-3)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

   vii) যদি একটি চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে এটি একটি সামান্তরিক।

   viii) যদি $x : y = 3 : 2$ হয়, তবে $2x = 3y$।

10. নীচের প্রতিটি উক্তিকে 'যদি-তখন' আকারে লিখ।

   i) একটি রম্বস একটি বর্গক্ষেত্র হবে একমাত্র যদি এর প্রতিটি কোণের মান 90^0 হয়।

   ii) যখন একটি সংখ্যা 9-এর গুণিতক হয়, এর প্রয়োজনীয় শর্ত এটি 3-এর গুণিতক হবে।

   iii) খেলাটি বাতিল হবে একমাত্র যদি বৃষ্টি হয়।

11. নীচের উক্তিগুলোকে "যদি এবং কেবলমাত্র যদি" আকারে লিখ।

   i) p : আজ 14-ই আগস্ট।

      q : আগামীকাল স্বাধীনতা দিবস।

   ii) p : ΔABC-এ $\angle B = \angle C$.

      q : ΔABC-এ $AC = AB$

   iii) p : A এবং B দুটি সেট এমন যে $A\subseteq B$ এবং $B\subseteq A$।

      q : $A = B$

   iv) p : যদি $f(a) = 0$ হয়, তবে $(x - a)$ হল $f(x)$ রাশিমালার উৎপাদক।

      q : যদি $(x - a)$, $f(x)$ রাশিমালার উৎপাদক হয়, তবে $f(a) = 0$।

গ - বিভাগ

4. **দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্ন : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]**

12. নীচের উক্তিটিকে পাঁচটি বিভিন্ন উপায়ে লিখ যাতে একই অর্থ বহন করে।
যদি প্রদত্ত সংখ্যাটি 6-এর গুণিতক হয়, তবে এটি 3-এর গুণিতক হবে।

13. দেখাও যে নীচের উক্তিটি সত্য।
যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x, y এর জন্য, যদি $x=y$ হয়, তবে $2x+a = 2y+a$ যেখানে $a \in Z$।

14. প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে প্রমাণ করো যে, যেকোনো অখণ্ড সংখ্যা n-এর জন্য $n^3 - n$ সর্বদাই যুগ্ম।

15. নীচের উক্তিগুলোর বৈধতা যাচাই করো।
   i) p : 125 সংখ্যাটি 5 এবং 7 দ্বারা বিভাজ্য।
   ii) q : 100 সংখ্যাটি 4 এবং 5 এর গুণিতক।

16. নীচের পদ্ধতিগুলো দ্বারা দেখাও যে —
P : যদি একটি বাস্তব সংখ্যা x এরূপ যে $x^3+x=0$, হয় তবে $x=0$ উক্তিটি সত্য।
i) প্রত্যক্ষ পদ্ধতি   ii) বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি   iii) পরস্পর বিরোধী নীতি।

17. পাল্টা উদাহরণ প্রয়োগে, দেখাও যে নীচের উক্তিগুলো সত্য নয়।
   i) যদি n একটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে n মৌলিক।
   ii) যেকোনো বাস্তব সংখ্যা a এবং b এর জন্য, $a^2 = b^2$ ফলস্বরূপ $a=b$।

18. বিরুদ্ধ ধনাত্মক পদ্ধতি প্রয়োগে প্রমান করো যে —
p : $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা, উক্তিটি সত্য।

<u>উত্তরমালা</u>

ক - বিভাগ

1. i) c   ii) d   iii) b   iv) a   v) b   vi) c   vii) b   viii) a   ix) d   x)c

2. i) উক্তি   ii) উক্তি   iii) উক্তি নয়   iv) উক্তি   v) উক্তি নয়   vi) উক্তি   vii) উক্তি নয়   viii) উক্তি নয়
ix) উক্তি নয়   x) উক্তি   xi) উক্তি

3. i) p : 5 সংখ্যাটি হল মৌলিক।
q : 5 সংখ্যাটি হল অযুগ্ম।

ii) p : $\sqrt{11}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

q : $\sqrt{11}$ একটি মূলদ সংখ্যা।

iii) p : 60 সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য।
q : 60 সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য।
r : 60 সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য।

iv) p : (1+i) একটি বাস্তব সংখ্যা।
q : (1+i) একটি জটিল সংখ্যা।

v) p : একটি সমতলে দুটি রেখা একটি বিন্দুতে ছেদ করে।
q : একটি সমতলে দুটি রেখা সমান্তরাল।

vi) p : একটি বর্গক্ষেত্র হল একটি চতুর্ভুজ।
q : একটি বর্গক্ষেত্র হল 5-বাহুবিশিষ্ট বহুভুজ।

vii) p : 0 প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষা ছোটো।
q : 0 প্রত্যেক ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অপেক্ষা ছোটো।

viii) p : চন্ডীগড় হল হরিয়ানার রাজধানী।
q : চন্ডীগড় হল বিহারের রাজধানী।

4. i) মুম্বাই একটি শহর নয়।

ii) কিছু গণিতজ্ঞ মানুষ নয়।

iii) 7 সংখ্যাটি 5 অপেক্ষা বড়ো নয়।

iv) কিছু বিড়াল আঁচড় দেয় না।

v) $3+6 \neq 8$

vi) একটি অধিবর্ষে 366 দিন থাকে না।

vii) 2 একটি মৌলিক সংখ্যা।

খ - বিভাগ

5. i) P : 50 সংখ্যাটি হল 2 এর গুণিতক।
q : 50 সংখ্যাটি হল 5 এর গুণিতক। সত্য।

ii) p : বিদ্যালয় বন্ধ যদি ওইদিন ছুটির দিন হয়।
q : বিদ্যালয় বন্ধ যদি ওইদিন রবিবার হয়। সত্য।

iii) p : একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ হল ধনাত্মক।
q : একটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গ হল ঋণাত্মক। মিথ্যা।

iv) p : $3x^2-x-10=0$ সমীকরণের বীজ হল x=5।
q : $3x^2-x-10=0$ সমীকরণের বীজ হল x=2। মিথ্যা।

6. i) p : রুমা গণিতে পাশ করেছে।
q : রুমা বিজ্ঞানে পাশ করেছে। } সংকেতিক আকার : $p \wedge q$

ii) p : x হল অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।
q : y হল অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। } সংকেতিক আকার : $p \wedge q$

iii) p : x একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।
q : x+1 একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। } সংকেতিক আকার : $p \vee q$

iv) p : $x=5$ এবং $y=3$
q : $x+y=8$ } সংকেতিক আকার : $p \Rightarrow q$

v) p : ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।
q : ইহার প্রতিটি অন্তঃস্থ কোণের মান 60^0। } সংকেতিক আকার : $p \Leftrightarrow q$

vi) p : আজ বৃষ্টি হয়েছে।
q : $3+4>6$। } সংকেতিক আকার : $p \Rightarrow q$

7. i) রমেশ আসামে বসবাস করে না এবং সে ত্রিপুরায় বসবাস করে না।

ii) হয় রৌদ্রের মধ্যে বালি তাড়াতাড়ি গরম হয় না অথবা রাত্রিতে ইহা তাড়াতাড়ি ঠান্ডা হয়।

iii) $x+y \neq y+x$ অথবা 30 একটি যুগ্ম সংখ্যা নয়।

iv) একটি ত্রিভুজের নয় 3টি বাহু নতুবা 4টি বাহু।

vi) $|x|$, x এর সমান নয় এবং ইহা $-x$ এর সমান নয়।

8. i) পরিমান নির্দেশক ঃ সকলের জন্য। একটি যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা x এর অস্তিত্ব আছে এরূপ যে x^2 যুগ্ম নয়।

ii) পরিমান নির্দেশক ঃ অস্তিত্ব আছে। এখানে এমন কোনো সংখ্যার অস্তিত্ব নেই, যা 6 এবং 9 উভয় সংখ্যার গুণিতক।

iii) পরিমান নির্দেশক ঃ প্রত্যেকের জন্য। এখানে একজন জীবিত ব্যক্তির অস্তিত্ব আছে, যার বয়স 120 বৎসর।

iv) পরিমান নির্দেশক ঃ সকলের জন্য। একটি ধনাত্মক সংখ্যা x এর অস্তিত্ব আছে এমন যে $x+2 \leq 8$।

9. i) বিপরীত : ΔABC এ, যদি $AB^2+BC^2=AC^2$ হয়, তবে ইহা B বিন্দুতে সমকোণ।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : ΔABC এ, যদি $AB^2+BC^2 \neq AC^2$ হয়, তবে ইহা B বিন্দুতে সমকোণ নয়।

ii) বিপরীত : যদি ΔABC এবং ΔDEF সমকৌণিক হয়, তবে এরা সর্বসম।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি ΔABC এবং ΔDEF সমকৌণিক না হয়, তবে এরা সর্বসম নয়।

iii) বিপরীত : যদি সে অর্থ উপার্জন করে, তবে সে কাজ করে।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি সে অর্থ উপার্জন না করে, তবে সে কাজ করে না।

iv) বিপরীত : যদি X এর উপসেট A এবং B এমন যে $(X-B) \subseteq (X-A)$, তবে $A \subseteq B$।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি X এর উপসেট A এবং B এমন যে $(X-B)$ সেট $(X-A)$ সেটের উপসেট নয়, তবে A সেট B সেটের উপসেট নয়।

v) বিপরীত : যদি দুটি রেখা একই সমতলে ছেদ না করে, তবে এরা সমান্তরাল।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি দুটি রেখা একই সমতলে ছেদ করে, তবে এরা সমান্তরাল নয়।

vi) বিপরীত : যদি $p(x)$ রাশি $(x-3)$ দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে $p(3)=0$।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি $p(x)$ রাশি $(x-3)$ দ্বারা বিভাজ্য না হয়, তবে $p(3)\neq 0$।

vii) বিপরীত : যদি একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক হয়, তবে এর কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি একটি চতুর্ভুজ সামান্তরিক না হয়, তবে এর কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করবে না।

viii) বিপরীত : যদি $2x=3y$ হয়, তবে $x:y=3:2$।
বিরুদ্ধ ধনাত্মক : যদি $2x\neq 3y$ হয়, তবে $x:y\neq 3:2$।

10. i) যদি একটি রম্বসের প্রতিটি কোণের পরিমাপ 90^0 হয়, তবে এটি একটি বর্গক্ষেত্র।
ii) যদি একটি সংখ্যা 9 এর গুণিতক হয়, তবে সংখ্যাটি 3 এর গুণিতক।
iii) যদি বৃষ্টি হয়, তবে খেলাটি বাতিল হবে।

11. i) ‘‘আজ 14-ই আগস্ট হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি আগামীকাল স্বাধীনতা দিবস হয়।’’
ii) ΔABC এ, $\angle B=\angle C \Leftrightarrow AC=AB$.
iii) দুটি সেট A এবং B এর জন্য, $A=B \Leftrightarrow (A\subseteq B$ এবং $B\subseteq A)$
iv) $(x-a)$ হল $f(x)$ রাশিমালার একটি উৎপাদক, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $f(a)=0$ হয়।

অধ্যায় — 15

রাশিবিজ্ঞান (Statistics)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **রাশিতথ্য এবং এর প্রকারভেদ :**

  একটি তথ্য সমষ্টি যা কোনো চলক বা চলক সেটের গুণগত বা পরিমাণগত বৈশিষ্ট্যকে উপস্থাপন করে তাকে রাশিতথ্য বলে।

  রাশিতথ্য দুই প্রকার। এগুলো হল —

  i) অশোধিত রাশিতথ্য :

  এতে রাশিতথ্যগুলোকে একটি ক্রমানুসারে তালিকাবদ্ধ করা হয়। যেমন, 2,4,6,..........ইত্যাদি।

  ii) শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্য : শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্য দুই প্রকার

  a) বিচ্ছিন্ন রাশিতথ্য :
  এতে রাশিতথ্যগুলোকে এমনভাবে উপস্থাপন করা হয় যাতে তাদের সঠিক পরিমাপ স্পষ্টভাবে বোঝা যায়।

  b) অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত রাশিতথ্য :
  এতে রাশিতথ্যগুলোকে কোনো দল বা শ্রেণিতে সাজানো হয় কিন্তু এরা সঠিকভাবে পরিমাপযোগ্য নয়। তারা একটি সন্তত অনুক্রমে বিন্যস্ত থাকে।

- **কেন্দ্রীয় প্রবনতার পরিমাপ :**

  একটি নির্দিষ্ট মান যা সমগ্র রাশিতথ্যকে উপস্থাপন করে এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলো নির্দেশ করে তাকে কেন্দ্রীয় প্রবনতার পরিমাপ বলা হয়। কেন্দ্রীয় প্রবনতার পরিমাপ হল - মধ্যক (যৌগিক গড়), মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান।

মধ্যক :

অশোধিত বা কাঁচা রাশিতথ্যের জন্য :

n সংখ্যক পর্যবেক্ষন $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ এর মধ্যক $\bar{x}$ হলে,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

বিচ্ছিন্ন রাশিতথ্যের জন্য :

ধরা যাক, n সংখ্যক পর্যবেক্ষন $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$ এর অনুরূপ পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, f_n$। তাদের

যৌগিক গড় $(\bar{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum f_i}$

মধ্যমা :

(i) কাঁচা রাশিতথ্যের জন্য :

ধরা যাক n সংখ্যক পর্যবেক্ষণ প্রদত্ত। প্রথমে প্রদত্ত রাশিসমূহকে তাদের মানের ক্রমানুসারে (ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে) সাজাতে হবে।

ক্ষেত্র-I : যখন n অযুগ্ম,

$$\text{মধ্যমা} = \left(\frac{n+1}{2}\right)\text{তম রাশি}$$

ক্ষেত্র-II : যখন n যুগ্ম,

$$\text{মধ্যমা} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\text{তম রাশি} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{তম রাশি}}{2}$$

(ii) যদি রাশিতথ্য বিচ্ছিন্ন হয়, তবে প্রথমে রাশিগুলোকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সাজাতে হবে এবং প্রত্যেকটি রাশির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $\frac{N}{2}$ নির্ণয় করো যেখানে, $N=\sum f_i$ = মোট পরিসংখ্যা

যদি $\sum f_i = N$ যুগ্ম হয়, তখন

$$\text{মধ্যমা} = \frac{\text{রাশির } \left(\frac{N}{2}\right)\text{তম মান} + \text{রাশির } \left(\frac{N}{2}+1\right)\text{তম মান}}{2}$$

যদি $\sum f_i = N$ অযুগ্ম হয়, তখন

$$\text{মধ্যমা} = \text{রাশির } \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{তম মান}$$

অবিচ্ছিন্ন রাশিতথ্যের জন্য ঃ

অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত রাশিতথ্যের জন্য, প্রথমে শ্রেণিগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃ ক্রমে সাজিয়ে প্রতিটি শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করতে হবে এবং $\frac{N}{2}$ গণনা করতে হবে, যেখানে $N = \sum f_i$ । এরপর ওই শ্রেণিটি খুঁজে বের করতে হবে যার ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{N}{2}$ এর চেয়ে ঠিক বড় বা সমান এবং এই শ্রেণিটিকে মধ্যমা শ্রেণি বলা হয়।

অতএব, মধ্যমা $= l + \dfrac{\left(\frac{N}{2} - c_f\right)}{f_m} \times h$

যেখানে, l = মধ্যমা শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা

c_f = মধ্যমা শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)

f_m = মধ্যমা শ্রেণির পরিসংখ্যা

N = মোট পরিসংখ্যা

h = মধ্যমা শ্রেণির দৈর্ঘ্য

সংখ্যাগুরু মান :

কাঁচা রাশিতথ্যের জন্য : যে রাশির পরিসংখ্যা সর্বাধিক সেটিকে সংখ্যাগুরু মান বলা হয়।

শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের জন্য : প্রথমে সর্বাধিক পরিসংখ্যা বিশিষ্ট শ্রেণিটি চিহ্নিত করতে হবে। এটিকে সংখ্যাগুরু মান বিশিষ্ট শ্রেণি বলা হয়। এরপর, নিম্নের প্রদত্ত সূত্রটি প্রয়োগ করে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা হয়।

সংখ্যাগুরু মান $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h$

যেখানে, l = সংখ্যাগুরু মানবিশিষ্ট শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি সীমানা

f_1 = সংখ্যাগুরু মানবিশিষ্ট শ্রেণির পরিসংখ্যা

f_0 = সংখ্যাগুরু মানবিশিষ্ট শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

f_2 = সংখ্যাগুরু মানবিশিষ্ট শ্রেণির পরবর্তী শ্রেণির পরিসংখ্যা

h = শ্রেণিগুলোর সাধারণ শ্রেণি-দৈর্ঘ্য।

বিঃদ্রঃ যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের সম্পর্কটি হল —

সংখ্যাগুরু মান = 3 মধ্যমা – 2 যৌগিক গড়

বিস্তৃতি ঃ বিস্তৃতি বলতে বোঝায় কেন্দ্রীয় মানের কাছাকাছি বিক্ষপ্ততা।

- বিস্তৃতির চার ধরণের পরিমাপক হল —
  - i) প্রসার
  - ii) চতুর্থক বিচ্যুতি
  - iii) গড় বিচ্যুতি
  - iv) সমক বিচ্যুতি (বা পার্থক্য)

কোনো চলকের বৃহত্তর মান ও ক্ষুদ্রতম মানের পার্থক্যকে বলা হয় **প্রসার।**

চতুর্থক বিচ্যুতি : যদি কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রথম চতুর্থক (Q_1) ও তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) হয় তবে এই প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক-কে ভিত্তি করে নিম্নের সূত্রের সাহায্যে চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়।

চতুর্থক বিচ্যুতি $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

যেখানে, $Q_1 = l_1 + \dfrac{\frac{N}{4} - F_1}{f_1} \times h_1$

l_1 = Q_1 শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা

F_1 = Q_1 শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)

f_1 = Q_1 শ্রেণির পরিসংখ্যা

h_1 = Q_1 শ্রেণির দৈর্ঘ্য

অনুরূপভাবে, $Q_3 = l_3 + \left(\dfrac{\frac{3N}{4} - F_3}{f_3} \right) \times h_3$

যেখানে, l_3 = Q_3 শ্রেণির নিম্ন শ্রেণি-সীমানা

F_3 = Q_3 শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)

f_3 = Q_3 শ্রেণির পরিসংখ্যা

h_3 = Q_3 শ্রেণির দৈর্ঘ্য

গড় বিচ্যুতি :

গড় বিচ্যুতি হল কোনো একটি চলকের মানসমূহের কোনো একটি গড় (মধ্যক, মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) থেকে তাদের মানগুলির বিস্তৃতির একটি পরম পরিমাপ এবং এটির মান, গড় থেকে চলকের মানসমূহের ধনাত্মক পার্থক্যসূহের যৌগিক গড়ের সমান।

a) পৃথক পর্যবেক্ষণের জন্য, আমরা জানি

গড় বিচ্যুতি $= \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$, যেখানে a = মধ্যক, মধ্যমা, সংখ্যাগুরু মান

এছাড়া, গড় বিচ্যুতি $= a + h\left\{ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |u_i| \right\}$, যেখানে $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

b) বিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে, আমরা জানি,

গড় বিচ্যুতি $= \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - a|$, যেখানে a = মধ্যক, মধ্যমা, সংখ্যাগুরু মান

এছাড়া, গড় বিচ্যুতি $= a + h\left\{ \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i \right\}$, যেখানে $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$

গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক :

দুটি বা এর অধিক শ্রেণির পরিবর্তনশীলতার তুলনা করার জন্য, আপেক্ষিক পরিমাপক হিসেবে গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক গণনা করা হয়।

$$\text{গড় পার্থক্য গুণাঙ্ক} = \frac{\text{গড় পার্থক্য}}{\text{মধ্যক বা মধ্যমা}} \times 100\%$$

ভেদমান :

কোনো রাশিতথ্যমালায় চলক রাশিগুলির যৌগিক গড় থেকে ওই রাশিগুলির বিচ্যুতিগুলির বর্গসমূহের যৌগিক গড়কে ভেদমান বলে এবং এটিকে σ^2 প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

n সংখ্যা পর্যবেক্ষণ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ এর ভেদমান নিম্নে প্রদত্ত :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

বিচ্যুতির তাৎপর্য :

i) যদি বিচ্যুতি শূন্য হয়, তবে সমস্ত পর্যবেক্ষণগুলির মান গড়মানের সমান হবে।

ii) যদি বিচ্যুতি ক্ষুদ্র হয় তবে এটি এই ইঙ্গিত দেয় যে পর্যবেক্ষণগুলির মান গড়মানের কাছাকাছি হবে।

iii) যদি বিচ্যুতি বৃহৎ হয়, তবে গড়মান থেকে পর্যবেক্ষণগুলির বিস্তৃতির পরিমাপ বেশি হবে।

সমক বিচ্যুতি (বা পার্থক্য) :

ভেদমানের ধনাত্মক বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ -কে সমক পার্থক্য বা সমক বিচ্যুতি বলে। সংক্ষেপে, মধ্যক থেকে মূল-গড়-বর্গ পার্থক্যই সমক পার্থক্য।

কাঁচা রাশিতথ্যের ভেদমান ও সমক পার্থক্য :

n সংখ্যক পর্যবেক্ষণ $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots, x_n$ এর ভেদমান ও সমক পার্থক্য নিম্নে প্রদত্ত

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

এবং $$(\sigma) = \sqrt{\text{ভেদমান}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

এছাড়া, ভেদমান $= h^2\left[\frac{1}{n}\sum u_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum u_i\right)^2\right]$, যেখানে $u_i=\frac{x_i-a}{h}$

শ্রেণিবদ্ধ রাশিতথ্যের ভেদমান ও সমক পার্থক্য :

i) **অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য :**

মনে করি অবিচ্ছিন্ন পরিসংখ্যা বিভাজনটি হল $x_1, x_2,.........,x_n$ এবং $f_1, f_2,.........,f_n$। তাহলে, প্রত্যক্ষ পদ্ধতি অনুযায়ী

$$\text{ভেদমান } (\sigma^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i x_i^2-\left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2$$

এবং সমক পার্থক্য $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum f_i d_i^2-\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2$$ *

এবং, $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i d_i^2-\left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$$

যেখানে, $d_i = x_i - a$, a = কল্পিত গড়

ii) সন্তত পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য :

ধাপ পার্থক্য পদ্ধতির সাহায্যে —

$$\text{ভেদমান } (\sigma^2) = h^2\left[\frac{1}{N}\sum f_i u_i^2-\left(\frac{\sum f_i u_i}{N}\right)^2\right]$$

$$\text{এবং সমক পার্থক্য } (\sigma) = h\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_i^2-\left(\frac{\sum f_i u_i}{N}\right)^2}$$

যেখানে, $u_i = \frac{x_i-a}{h}$, a = কল্পিত গড়, h = শ্রেণি দৈর্ঘ্য

দ্রষ্টব্য ঃ

i) সমক পার্থক্য (σ) ও যৌগিক গড় ( ) এর অনুপাতকে সমক পার্থক্য গুণাঙ্ক $\left(\dfrac{\sigma}{\bar{x}}\right)$ বলা হয়।

ii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমক পার্থক্য নিম্নের সূত্রের সাহায্যে গণনা করা হয় —

$$\text{সমক পার্থক্য} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

iii) কোনো রাশিতথ্যের প্রত্যেকটি পর্যবেক্ষণের সঙ্গে যদি একটি ধ্রুবক রাশি 'K' গুণ করা হয়, তবে পর্যবেক্ষণগুলির নতুন ভেদমান হবে পর্যবেক্ষণগুলির পূর্বের ভেদমানের K^2 গুণের সমান।

iv) কোনো চলকের মানসমূহের প্রত্যেকটির সঙ্গে যদি একটি ধ্রুবক রাশি যোগ কিংবা প্রত্যেকটি থেকে একটি ধ্রুবক রাশি বিয়োগ করা হয়, তবে চলকের সমক পার্থক্যের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

v) দুই বা এর অধিক পরিসংখ্যা বিভাজনের তুলনা করার জন্য আমরা তাদের ভেদাঙ্ক তুলনা করব। কোনো বিভাজনের ভেদাঙ্ক নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত।

$$\text{ভেদাঙ্ক} = \frac{\text{সমক পার্থক্য } (\sigma)}{\text{মধ্যক } (\bar{x})} \times 100$$

vi) বেশি ভেদাঙ্ক বিশিষ্ট বিভাজনের পরিবর্তনশীলতা কম ভেদাঙ্ক বিশিষ্ট বিভাজনের পরিবর্তনশীলতার চেয়ে বেশি হবে।

$\bar{x}$

অনুশীলনী - 15
ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : **[প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]**

1) বহু বিকল্পধর্মী প্রশ্ন :

i) 3, 10, 10, 4, 7, 10, 5 — এই রাশিগুলোর যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য হবে —

a) 2 b) 2.57 c) 3 d) 3.75

ii) একটি গণিত পরীক্ষায় 9 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর নীচে দেওয়া হল :

50, 69, 20, 33, 53, 39, 40, 65, 59

এই প্রদত্ত নম্বরগুলোর মধ্যমার সাপেক্ষে গড় পার্থক্য হবে —

a) 9 b) 10.5 c) 12.67 d) 14.76

iii) 6, 5, 9, 13, 12, 8 ও 10 — এই সংখ্যাগুলোর সমক পার্থক্য হল

a) $\dfrac{52}{7}$ b) $\sqrt{\dfrac{52}{7}}$ c) $\sqrt{6}$ d) 6

iv) পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে যে সূত্রটি প্রয়োগ করে সমক পার্থক্য গণনা করা হয় সেটি হল —

a) $\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$ b) $\sigma=\sqrt{\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2-\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

c) $\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\frac{\sum fd}{\sum f}}$ d) $\sigma=\sqrt{\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2-\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

v) যদি ভেদমান V এবং সমক পার্থক্য σ হয় তবে —

a) $V=\sigma^2$ b) $V=\frac{1}{\sigma^2}$ c) $V^2=\sigma$ d) $V=\frac{1}{\sigma}$

vi) যদি $n=10$, $\bar{X}=12$ এবং $\sum x_i^2=1530$ হয়, তবে ভেদাঙ্ক হবে —

a) 36% b) 41% c) 25% d) এদের কোনোটিই নয়

vii) *a, a+d, a+2d, ..., a+2nd* শ্রেণিটির যৌগিক গড় থেকে গড় পার্থক্য হল —

a) $\frac{(n+1)d}{2n+1}$ b) $\frac{nd}{2n+1}$ c) $\frac{n(n+1)d}{2n+1}$ d) এদের কোনোটিই নয়

viii) 10 টি পর্যবেক্ষণের যৌগিক গড় 50 থেকে তাদের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি 250 হলে, ভেদাঙ্ক হবে —

a) 10% b) 40% c) 50% d) এদের কোনোটিই নয়

ix) 10টি সংখ্যার সমষ্টি 12 এবং তাদের বর্গের সমষ্টি হল 18, তাদের সমক পার্থক্য হবে —

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

x) 20টি পর্যবেক্ষণের 30 এর সাপেক্ষে বিচ্যুতির বীজগাণিতিক যোগফল 2 হলে, পর্যবেক্ষণগুলির যৌগিক গড় হবে —

a) 30 b) 30.1 c) 30.2 d) 30.3

xi) নিম্নের যে সূত্রের সাহায্যে ভেদাঙ্ক নির্ণয় করা হয় তা হল —

a) $\frac{\text{সমক পার্থক্য}}{\text{যৌগিক গড়}}\times 100$ b) $\frac{\text{সমক পার্থক্য}}{\text{যৌগিক গড়}}$

c) $\frac{\text{যৌগিক গড়}}{\text{সমক পার্থক্য}}\times 100$ d) $\frac{\text{যৌগিক গড়}}{\text{সমক পার্থক্য}}$

xii) কোনো শ্রেণির সংখ্যাগুরু মান যদি শ্রেণিটির যৌগিক গড়-এর চেয়ে 12 বেশি হয়, তবে শ্রেণির সংখ্যাগুরু মান এর মধ্যমান থেকে যত বেশি হবে তা হল

a) 4 b) 8 c) 6 d) 12

xiii) কোনো বিভাজনের মধ্যমা ও সমক পার্থক্য যথাক্রমে 20 ও 4। যদি প্রতিটি সংখ্যার সাথে 2 যোগ করা হয়, তবে নতুন মধ্যমা ও সমক পার্থক্য হবে —

a) 20, 4 b) 22, 6 c) 22, 4 d) 20, 6

xiv) 13, 17, 21, 37, 8, 10 13, 26 — এই রাশিগুলোর প্রসার হল

a) 19 b) 39 c) 29 d) এদের কোনোটিই নয়

xv) যদি কোনো বিভাজনে যৌগিক গড় = মধ্যমা = সংখ্যাগুরু মান হয়, তবে বিভাজনটি হবে —

a) প্রতিসম বিভাজন

b) অপ্রতিসম বিভাজন

c) প্রতিসম বিভাজন ও অপ্রতিসম উভয় বিভাজন

d) এদের কোনোটিই নয়

xvi) যদি প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যৌগিক গড় $\frac{5n}{9}$ হয়, তবে $n =$

a) 5 b) 4 c) 9 d) 10

xvii) কোন্‌টি বিস্তৃতি পরিমাপ পদ্ধতি?

a) প্রসার b) চতুর্থক পার্থক্য c) গড় পার্থক্য c) উপরের সবগুলো

xviii) নীচের কোন্‌টি পরিবর্তনে ভেদমান অপরিবর্তি থাকে?

a) শুধুমাত্র মূলবিন্দুর অবস্থান b) শুধুমাত্র স্কেল

c) মূলবিন্দুর অবস্থান ও স্কেল উভয়ই d) এদের কোনোটিই নয়

xix) ধরা যাক, চলক X-এর $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ মান আছে এবং চলক Y-এর $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ মান আছে যেখানে $y_i = ax_i + b_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots., n$। তাহলে —

a) $\mathrm{Var}(Y) = a^2\mathrm{Var}(X)$ b) $\mathrm{Var}(X) = a^2\mathrm{Var}(Y)$

c) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X) + b$ d) এদের কোনোটিই নয়

xx) যদি চলরাশি X এর সমক পার্থক্য σ হয়, তবে চলরাশি $\frac{aX+b}{c}$ এর সমক পার্থক্য হবে —

a) $a\sigma$ b) $\frac{a}{c}\sigma$ c) $\left|\frac{a}{c}\right|\sigma$ d) $\frac{a\sigma+b}{c}$

xxi) যদি X ও Y চলরাশি দুটি $Y = \frac{aX+b}{c}$ সম্পর্ক দ্বারা সংযুক্ত হয়, যেখানে a, b, c হল ধ্রুবক রাশি এবং $ac<0$, তাহলে —

a) $\sigma_Y = \frac{a}{c}\sigma_X$ b) $\sigma_Y = -\frac{a}{c}\sigma_X$ c) $\sigma_Y = \frac{a}{c}\sigma_X + b$ d) এদের কোনোটিই নয়

xxii) প্রথম 10টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমক পার্থক্য হল —

a) 5.5 b) 3.87 c) 2.97 d) 2.87

xxiii) 60টি পর্যবেক্ষণের সমষ্টি এবং তাদের বর্গের সমষ্টি নিম্নে দেওয়া হল :

$\sum x^2 = 18000$ এবং $\sum x = 960$

তাহলে, পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান হবে —

a) 6.63 b) 16 c) 22 d) 44

xxiv) দুটি বিভাজনের ভেদাঙ্ক যথাক্রমে 50 ও 60 এবং এদের যৌগিক গড় যথাক্রমে 30 ও 25 হলে, এদের সমক বিচ্যুতির পার্থক্য হবে —

a) 0 b) 1 c) 1.5 d) 2.5

xxv) সেলসিয়াস তাপমাত্রায় কিছু রাশিতথ্যের সমক পার্থক্য হল 5। যদি এই তথ্যগুলোকে ফারেনহাইটে রূপান্তরিত করা হয়, তবে তাদের ভেদমান হবে —

a) 81 b) 57 c) 36 d) 25

xxvi) প্রথম10টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করা হল। যদি প্রতিটি সংখ্যার সাথে প্রথমে –1 গুণ এবং তারপর প্রতির্টি সংখ্যার সাথে 1 যোগ করা হয়, প্রাপ্ত সংখ্যাগুলোর ভেদমান হবে —

a) 8.25 b) 6.5 c) 3.87 d) 2.87

2. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্ন :

i) রাশিবিজ্ঞানের সংজ্ঞা দাও।

ii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের যৌগিক গড় নির্ণয় করো।

iii) কোনো সেটে অন্তর্ভুক্ত সংখ্যাগুলোর গড়মান হল $\overline{x}$ । যদি প্রতিটি সংখ্যা থেকে 4 বিয়োগ করা হয়, তবে নতুন প্রাপ্ত সংখ্যাগুলোর গড়মান নির্ণয় করো।

iv) n সংখ্যক পর্যবেক্ষণ $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এর যৌগিক গড় যদি হয়, তবে $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)$ এর মান নির্ণয় করো।

v) যদি কোনো চলকের মানগুলি $0,1,2,\ldots\ldots.,n$ এবং এদের অনুরূপ পরিসংখ্যাগুলো ${}^nc_0, {}^nc_1, \ldots\ldots\ldots.{}^nc_n$ হয়, তবে $x=0$-এর সাপেক্ষে রাশিতথ্যগুলোর গড়-বর্গ-বিচ্যুতি কত হবে?

vi) $(1+x)^{30}$ বিস্তৃতির সহগসমূহের যৌগিক গড় নির্ণয় করো।

vii) কোনো বিদ্যালয়ের একাদশ শ্রেণির, A-বিভাগের 25 জন শিক্ষার্থীর গড় নম্বর 47, B-বিভাগের 35 জন শিক্ষার্থীর গড় নম্বর 51 এবং C-বিভাগের 30 জন শিক্ষার্থীর গড় নম্বর 53। তাহলে, তিনটি বিভাগের মোট শিক্ষার্থীর গড় নম্বর নির্ণয় করো।

viii) প্রথম $(n+1)$ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

ix) যদি x_1, x_2, x_3, x_4 ও x_5 পর্যবেক্ষণগুলোর যৌগিক গড় m এবং সমক পার্থক্য s হয় তবে, Kx_1, Kx_2, Kx_3, Kx_4 ও Kx_5 পর্যবেক্ষণগুলোর সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

x) যদি 2α, 3, 2, 11 এর ভেদমান 12.25 হয় তবে α -এর মান নির্ণয় করো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) 200টি পর্যবেক্ষণের যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য হল যথাক্রমে 48 ও 3। এই পর্যবেক্ষণগুলোর যোগফল এবং এদের বর্গের যোগফল নির্ণয় করো।

ii) একজন শিক্ষার্থী 100টি পর্যবেক্ষণের গড় ও সমক পার্থক্যের মান পেয়েছিল যথাক্রমে 40 ও 5.1; কিন্তু পরে দেখা গেল, সে একটি পর্যবেক্ষণের মান ভুলক্রমে 40 এর পরিবর্তে 50 নিয়েছে। সঠিক গড় ও সঠিক সমক পার্থক্যের মান নির্ণয় করো।

iii) নিম্নলিখিত রাশিগুলোর গড় সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

6.5, 5, 5.25, 5.25, 5.5, 4.75, 4.5, 6.25, 3, 5, 4, 9, 3, 3.75, 4, 3, 4, 5

iv) নিম্নলিখিত সংখ্যাশ্রেণিগুলোর মধ্যমা থেকে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

34, 66, 30, 38, 44, 50, 40, 60, 42, 52

v) নিম্নে প্রদত্ত রাশিগুলোর ভেদাঙ্ক নির্ণয় করো :

12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5

vi) 10টি পর্যবেক্ষণের ভেদমান হল 4। যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণের সাথে 3 গুণ করা হয় তবে প্রাপ্ত নতুন পর্যবেক্ষণগুলোর ভেদমান নির্ণয় করো।

vii) কোনো পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য যদি আমরা ভেদাঙ্ক = 26.73%, যৌগিক গড় = 39.5 পাই, তবে সমক পার্থক্য (σ) নির্ণয় করো।

viii) যদি একটি বিভাজনে $\sum(x-5)=3$, $\sum(x-5)^2=43$ এবং মোট পর্যবেক্ষণ সংখ্যা = 18 হয়, তবে যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

ix) n সংখ্যক পর্যবেক্ষণের ভেদমান হল σ^2। যদি প্রতিটি পর্যবেক্ষণকে a দ্বারা গুণ করা হয়, তবে দেখাও যে নতুন পর্যবেক্ষণ সেটের ভেদমান $a^2\sigma^2$ হবে।

x) দুটি সেটের প্রত্যেকটিতে 20টি করে পর্যবেক্ষণ আছে এবং তাদের একই সমক পার্থক্য 5। প্রথম সেটটির গড় মান 17 এবং দ্বিতীয় সেটটির গড়মান 22। প্রদত্ত দুটি সেটকে একত্রিত করে প্রাপ্ত সেটটির সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) নিম্নে প্রদত্ত বিভাজনের যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো :

আকার (মিমি)	20	21	22	23	24
পরিসংখ্যা	6	4	5	1	4

ii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় পার্থক্য নির্ণয় করো।

iii) নিম্নের প্রদত্ত রাশিতথ্যের মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করো :

শ্রেণিবিভাগ	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30
পরিসংখ্যা	4	5	3	6	2

iv) নিম্নে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনটির ভেদমান হল 160, যেখানে A হল ধ্বনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। A-এর মান নির্ণয় করো :

x	A	2A	3A	4A	5A	6A
f	2	1	1	1	1	1

v) নিম্নে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য সমক পার্থক্য নির্ণয় করো :

x	2	3	4	5	6	7
f	4	9	16	14	11	6

vi) নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনটির গড়মান এবং ভেদমান নির্ণয় করো :

x	$1\leq x<3$	$3\leq x<5$	$5\leq x<7$	$7\leq x<10$
f	6	4	5	1

vii) নিম্নের সারণিতে 70টি জারে কফির ওজন দেখানো হয়েছে :

ওজন (গ্রামে)	200-201	201-202	202-203	203-204	204-205	205-206
পরিসংখ্যা	13	27	18	10	1	1

উপরের বিভাজনটির ভেদমান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

viii) কোনো সমান্তর প্রগতি, যার প্রথম পদ a ও সাধারণ অন্তর d, এর প্রথম n সংখ্যক পদের যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

ix) দুই জন শিক্ষার্থী, রবি ও হাসিনার 20টি পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর (100 এর মধ্যে) এর তালিকা নিম্নে দেওয়া হল :

রবি	হাসিনা
25	10
50	70
45	50
30	20
70	95
42	55
36	42
48	60
35	48
60	80

তাদের দুই জনের মধ্যে কে বেশি বুদ্ধিমান ও কে বেশি ধারাবাহিক?

x) একটি গ্রুপে 100টি পর্যবেক্ষণের যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্যের মান পাওয়া গেছে যথাক্রমে 20 ও 3। কিন্তু পরে দেখা গেল যে তিনটি পর্যবেক্ষণের মান ভুলক্রমে 21, 21 ও 18 নেওয়া হয়েছে। যদি ভুল পর্যবেক্ষণগুলো বাদ দেওয়া হয়, তবে অবশিষ্ট পর্যবেক্ষণগুলোর গড় মান ও সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

xi) একটি গ্রুপে 200 জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বরের যৌগিক গড় ও সমক পার্থক্যের মান পাওয়া গেছে যথাক্রমে 40 ও 15। পরে দেখা গেল যে একটি নম্বর ভুলবশতঃ 43 এর পরিবর্তে 34 পড়া হয়েছে। তাহলে সঠিক গড় ও সঠিক সমক পার্থক্য নির্ণয় করো।

<u>উত্তরমালা</u>

ক - বিভাগ

1. i) b ii) c iii) b iv) a v) a vi) c
vii) c viii) a ix) c x) b xi) a xii) b
xiii) c xiv) c xv) a xvi) c xvii) d xviii) a
xix) a xx) c xxi) b xxii) d xxiii) d xxiv) a
xxv) a xxvi) a

2. i) রাশিবিজ্ঞান বলতে বোঝায় সেই সকল পদ্ধতি যার সাহায্যে পরিমাণগত রাশিতথ্য সংগ্রহ, উপস্থাপনা, শ্রেণিবিন্যাস, বিশ্লেষণ এবং ব্যাখ্যা করা।

ii) $\frac{n\ (n+1)^2}{4}$ ii) $\overline{x}-4$ iv) 0 v) $\frac{n(n+1)}{4}$ vi) $\frac{2^{30}}{31}$ vii) 153.4

viii) $\sqrt{\frac{n(n+2)}{12}}$ ix) Ks x) 3, $\frac{7}{3}$

খ - বিভাগ

3. i) 9600; 4,62,600 ii) গড় = 39.9, σ=5 ii) 1.041 iv) 8.7 v) 51.26%
vi) 36 vii) 10.56 viii) গড় = 5.16, σ= 1.53 x) 5.59

গ - বিভাগ

4. i) –1.25 ii) iii) 7 iv) 7 v) 1.38 vi) 4.043

vii) 1.1655, 1.08 viii) গড় $= a + \frac{(n-1)}{2} d$, সমক পার্থক্য $= d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

ix) হাসিনা বেশি ধারাবাহিক ও বেশি বুদ্ধিমান x) গড় =39.9, সমক পার্থক্য =5

xi) 40.045, 14.995

অধ্যায় — 16

সম্ভাবনা (Probability)

গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ও ফলাফল :

- **পরীক্ষা :**

  একটি অনুসন্ধান যা কিছু সুসংজ্ঞাত ফলাফল তৈরি করতে পারে তা পরীক্ষা হিসাবে পরিচিত হয়। পরীক্ষা সাধারণত দুই প্রকারের যথা —

  i) পরিণামবাদী বা নির্ধারক পরীক্ষা এবং

  ii) সমসম্ভব পরীক্ষা

- **সমসম্ভব পরীক্ষা :**

  যে সব পরীক্ষা কোনো অভিন্ন শর্তে বারবার পরিচালিত করা হয়, তাদের সমসম্ভব পরীক্ষা বলে। যেমন, একটি মুদ্রা উৎক্ষেপনের পরীক্ষা, একটি ছক্কা গড়ানোর পরীক্ষা, তাসের প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস টানার পরীক্ষা ইত্যাদি।

- **ফলাফল :**

  কোনো সমসম্ভব পরীক্ষা সম্পাদনের পর উদ্ভুত ফলকে পরীক্ষাটির ফলাফল বলা হয়।

- **নমুনাদেশ :**

  কোনো একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সম্ভাব্য সব ফলাফলের সেট্‌কে নমুনাদেশ বলা হয় এবং একে S দ্বারা সূচিত করা হয়। নমুনাদেশ-এর প্রত্যেক উপাদানকে এক একটি নমুনা বিন্দু বা ঘটনা বিন্দু বলা হয়।

  উদাহরণস্বরূপ : কোনো একটি ছক্কা গড়ানোর পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফলগুলি হল 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6।

  তাহলে, নমুনাদেশ, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- **ঘটনা :**

  একটি সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত নমুনাদেশের প্রত্যেকটি উপসেট্‌কে এক একটি ঘটনা বলা হয় এবং একে সাধারণত ‘E’ দিয়ে সূচিত করা হয়।

  যেমন : যদি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়, তবে নমুনাদেশটি হবে $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$।
  অতএব $E=\{2, 3, 5\}$ হল একটি ঘটনা।

- **বিভিন্ন প্রকারের ঘটনা :**

  কোনো ঘটনার উপদানের উপর ভিত্তি করে ঘটনাগুলোকে নিম্নলিখিতভাবে শ্রেণিবদ্ধ করা হয়।

i) **মৌলিক ঘটনা :**

কোনো ঘটনায় যদি নমুনা দেশের কেবলমাত্র একটি নমুনা বিন্দু বা উপাদান থাকে তবে তাকে মৌলিক ঘটনা বলা হয়।

উদাহরণস্বরূপ : ধরা যাক দুটি মুদ্রাকে নিক্ষেপ করা হল। এক্ষেত্রে, নমুনাদেশটি হবে —

S = {HH, HT, TH, TT}

তাহলে, A={HH}, B={TT} এর প্রত্যেকটি এক একটি মৌলিক ঘটনা।

ii) **যৌগিক ঘটনা :**

কোনো ঘটনায় যদি নমুনাদেশের একটির অধিক উপাদান থাকে, তবে তাকে যৌগিক ঘটনা বলা হয়।

উদাহরণ : একটি ছক্কা নিক্ষেপে আমরা যে নমুনাদেশটি পাই, তা হল S={1, 2, 3, 4, 5, 6}। তাহলে, E={2, 4, 6}, F={1, 3, 5}-এর প্রত্যেকটি এক একটি যৌগিক ঘটনা।

iii) **নিশ্চিত ঘটনা :**

যে ঘটনাটি অবশ্যই ঘটবে তাকে নিশ্চিত ঘটনা বলা হয়। যেহেতু নমুনাদেশ নিজেই নিজের একটি উপসেট তাই নমুনাদেশ 'S' হল একটি নিশ্চিত ঘটনা।

উদাহরণ : কোনো একটি ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষায়, 7 থেকে ছোটো স্বাভাবিক সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা হল একটি নিশ্চিত ঘটনা।

iv) **অসম্ভব বা শূন্য ঘটনা :**

যে ঘটনায় কোনো উপাদান নেই তাকে অসম্ভব বা শূন্য ঘটনা বলা হয়। শূন্য সেট 'ϕ' হল একটি অসম্ভব ঘটনা।

যেমন : কোনো একটি ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষায়, 1 অপেক্ষা ছোটো সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা হল একটি অসম্ভব ঘটনা।

v) **সমসম্ভব ঘটনা :**

কিছু ঘটনাকে সমসম্ভব ঘটনা বলা হবে যদি এদের প্রত্যেকটি ঘটার সমান সুযোগ থাকে অর্থাৎ, প্রত্যেকটি ঘটনাই সমানভাবে প্রাধান্য পাবে।

vi) **পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা :**

দুটি ঘটনাকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলা হবে যদি এদের যে-কোনো একটি ঘটনা ঘটা, অন্য ঘটনাটি ঘটবে না এটি নিশ্চিত করে।

অর্থাৎ, দুটি ঘটনা E_1 ও E_2 -কে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলা হবে যদি $E_1 \cap E_2 = \phi$ হয়।

উদাহরণস্বরূপ : কোনো ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষায়, আমরা যে নমুনাদেশটি পাই তা হল

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ধরা যাক, $E_1 = \{2, 4, 6\}$, $E_2 = \{1, 3, 5\}$.

তাহলে, $E_1 \cap E_2 = \phi$.

সুতরাং E_1 ও E_2 ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

সাধারণভাবে, E_1, E_2,..........., E_n ঘটনাসমূহকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন বলা হবে, যদি তারা জোড়ায় জোড়ায় বিচ্ছিন্ন হয় অর্থাৎ, যদি $E_i \cap E_j = \phi, \forall\ i \neq j$ হয়।

vii) **সম্পূর্ণ বা সমগ্র ঘটনা :**

কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুই বা ততোধিক ঘটনাকে একত্রে পরিপূর্ণ বা সমগ্র ঘটনা বলা হবে যদি তাদের সংযোগে যে সেট উৎপন্ন হয় তা নমুনাদেশের সমান হয় অর্থাৎ, কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার অন্তর্গত E_1, E_2, ..., E_n ঘটনাগুলো সমগ্র ঘটনা হবে যদি $E_1 \cup E_2 4 ....Z_n = S$ হয়, যেখানে S হল নমুনাদেশ।

উদাহরণ : একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে, আমরা নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো বিবেচনা করতে পারি —

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 = \{1, 2\},\ E_2 = \{1, 3, 5\},\ E_3 = \{4, 5, 6\}$

$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$

সুতরাং, E_1, E_2, E_3 ঘটনাগুলো একত্রে সমগ্র ঘটনা।

viii) পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনাতন্ত্র :

মনে করি, কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত নমুনাদেশটি হল S। E_1, E_2,......,E_n ঘটনাসমূহের সেটকে একটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনাতন্ত্র বলা হবে যদি

a) $E_1 \cup E_2 \cup ....\cup E_n = S$

b) $E_i \cap E_j = \phi$, সকল $i \neq j$ এর জন্য।

উদাহরণ : চল আমরা 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস টানার পরীক্ষাটি বিবেচনা করি। এরজন্য নিম্নলিখিত ঘটনাগুলো বিবেচনা করি।

E_1 = টানা তাসটি হল ইস্কাবন

E_2 = টানা তাসটি হল চিড়িতন

E_3 = টানা তাসটি হল হরতন

E_4 = টানা তাসটি হল রুইতন

এখানে, E_1, E_2, E_3 ও E_4 ঘটনাসমূহ একটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনাতন্ত্র গঠন করেছে।

ix) **কোনো ঘটনার অনুকূলে মৌলিক ঘটনা :**

ধরা যাক S হল কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত নমুনাদেশ এবং E হল ওই পরীক্ষার সাথে সম্পর্কিত একটি ঘটনা। তাহলে, E এর অন্তর্গত মৌলিক ঘটনাগুলো E এর অনুকূলে প্রাথমিক ঘটনা হিসাবে পরিচিত।

অর্থাৎ, কোনো একটি মৌলিক ঘটনা A, ঘটনা E-এর অনুকূলে থাকবে যদি A ঘটনাটি সংগঠিত হলে, E ঘটনাটিও সংগঠিত হবে তা নিশ্চিত করে।

- **ঘটনার বীজগণিত**

ধরি নমুনাদেশ S এর সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা হল E ও F।

i) **পূরক ঘটনা :**

প্রতিটি ঘটনা E এর জন্য, অনুরূপ আরেকটি ঘটনা E' বা $\bar{E}$ যুক্ত থাকে যাকে E এর পূরক ঘটনা বলে, যা E এর অন্তর্গত নয় এমন ফলাফলগুলো নিয়ে গঠিত।

উদাহরণ : তিনটি মুদ্রা একযোগে নিক্ষেপের পরীক্ষায়, নমুনাদেশটি হবে

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.

ধরি, $E = \{THT, TTH, HTT\}$ = কেবলমাত্র একটি হেড পাওয়ার ঘটনা

তাহলে, $E' = \{HHT, HTH, THH, TTT, HHH\} = S - E$

ii) **ঘটনা E অথবা F :**

ঘটনা E অথবা F-কে $E \cup F$ দিয়ে সূচিত করা হয়, যার উপাদানগুলো E অথবা F বা উভয় সেটেই রয়েছে। অর্থাৎ, E অথবা F = $E \cup F = \{x : x \in E$ অথবা $X \in F\}$

iii) **ঘটনা E এবং F :**

ঘটনা E এবং F-কে $E \cap F$ দিয়ে সূচিত করা হয়, যার উপাদানগুলি E ও F উভয় সেটেই রয়েছে। অর্থাৎ, E এবং F = $E \cap F = \{x : x \in E$ এবং $x \in F\}$

iv) **ঘটনা E কিন্তু F নয় :**

E কিন্তু F নয় ঘটনাটিকে E–F অথবা $E \cap F'$ দিয়ে সূচিত করা হয়, যার উপাদানগুলো E-তে আছে কিন্তু F সেটে নেই।

সুতরাং, E কিন্তু F নয় = $E - F = \{x : x \in E$ এবং $x \notin F\}$

- **কিছু ঘটনা এবং তাদের সমতুল্য সেট :**

	ঘটনা	সমতুল্য সেট
i)	E নয়	$\bar{E}$
ii)	E বা F এর কোনোটিই নয়	$\bar{E} \cap \bar{F}$
iii)	E এবং F এর মধ্যে ঠিক একটি	$(E \cap \bar{F}) \cup (\bar{E} \cap F)$
iv)	E, F ও G এর অন্তত পক্ষে একটি	$E \cup F \cup G$
v)	E, F এবং G এর তিনটিই	$E \cap F \cap G$
vi)	E, F এবং G এর মধ্যে ঠিক দুটি	$(E \cap F \cap \bar{G}) \cup (E \cap \bar{F} \cap G) \cup (\bar{E} \cap F \cap G)$

- **দ্রষ্টব্য :**

  i) A এবং $\bar{A}$ ঘটনা দুটি সর্বদা পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়।

  ii) একটি নমুনাদেশ S-কে বিচ্ছিন্ন নমুনাদেশ বলা হবে যদি S একটি সসীম সেট হয়।

  iii) যদি $n(S)=p$ হয়, তবে নমুনাদেশ S-এ ঘটনার সংখ্যা হবে 2^p টি।

  iv) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত মৌলিক ঘটনাসমূহ অবিভাজ্য ঘটনা নামে পরিচিত।

  v) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত মৌলিক ঘটনা ও অসম্ভব ঘটনা ব্যতীত অন্যান্য সকল ঘটনাসমূহকে যৌগিক ঘটনা বলা হয়।

  vi) একটি নমুনাদেশ S -এর সাথে যুক্ত যে-কোনো একটি ঘটনা E এর জন্য,
  $E' = E$ নয় $= S - E = \{\omega : \omega \in S$ এবং $\omega \notin E\}$

  vii) কোনো নমুনাদেশের সাথে যুক্ত সরল ঘটনাসমূহ সর্বদা পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়।

- **কোনও ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা :**

  যখন আমরা একটি পরীক্ষা করি, তখন একটি সংখ্যাসূচক মান যা কোনো ঘটনা ঘটার সুযোগ বহন করে তাকে ওই ঘটনাটির সম্ভাবনা বলা হয়।

  সম্ভাবনা নির্ণয়ের বিভিন্ন পন্থা নিম্নরূপ :

  i) **সম্ভাবনা সম্পর্কিত পরিসংখ্যানগত পন্থা :**

  পরিসংখ্যানগত পন্থায়, কোনো ঘটনা E-এর সম্ভাবনা হল নিরীক্ষিত পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যার অনুপাত।

  অর্থাৎ, $$P(E) = \frac{\text{নিরীক্ষিত পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$$

  ii) **সম্ভাবনা সম্পর্কিত পুরাতনী পন্থা :**

  সম্ভাবনা সম্পর্কিত পুরাতনী পন্থা অনুযায়ী,

  $$P(E) = \frac{\text{ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য ফলাফলের মোট সংখ্যা}}$$

  iii) **সম্ভাবনার স্বতঃ সিদ্ধ পদ্ধতি :**

  ধরা যাক S হল একটি নমুনাদেশ। তাহলে, কোনও সম্ভাবনা P-কে একটি বাস্তব মানবিশিষ্ট অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যেতে পারে যার সংজ্ঞার ক্ষেত্র হল S এর সূচক সেট এবং পাল্লা হল অন্তরাল [0, 1] এবং এটি নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলো সিদ্ধ করে।

  A_1 : যেকোনো ঘটনা E-এর জন্য, $P(E) \geq 0$

  A_2 : $P(S) = 1$

A_3 : যদি E ও F ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তবে $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

ধরা যাক নমুনাদেশ S এর অন্তর্গত ঘটনাসমূহ হল $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$। তাহলে, সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ পদ্ধতি অনুযায়ী, আমরা পাই

i) $0 \le P(E_i) \le 1, \quad E_i \subseteq S$

ii) $P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots + P(E_n) = 1$, যদি $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$ এবং $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = S$ হয়।

- **সমসম্ভব ফলাফলের সম্ভাবনা :**

কোনও পরীক্ষার অন্তর্গত ফলাফলগুলো সমসম্ভব হবে, যদি প্রতিটি ফলাফল ঘটার সুযোগ একই থাকে।

ধরি, $S = \{s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, s_n\}$। এছাড়া, ধরা যাক, সমস্ত ফলাফলগুলো সমানভাবে ঘটতে পারে, অর্থাৎ $P(s_i) = p$, $s_i \in S, 0 \le p \le 1$।

সম্ভাবনার স্বতঃসিদ্ধ পদ্ধতি অনুযায়ী,

$$\sum_{i=1}^{n} P(s_i) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P + P + \ldots\ldots\ldots\ldots + P}{n\text{- সংখ্যকবার}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad np = 1$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad P(s_i) = \frac{1}{n}, \; i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

- **সম্ভাবনার যোগজ নিয়ম :**

কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা যদি A ও B হয়, তবে

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

বা, $P(A \text{ বা } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ এবং } B)$

যখন A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তখন $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

যখন A ও B পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা এবং সম্পূর্ণ ঘটনা হয়, তখন $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$

তিনটি ঘটনা A, B ও C এর জন্য,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

- **পরিপূরক ঘটনার সম্ভাবনা :**

ধরা যাক E হল একটি ঘটনা এবং $\bar{E}$ হল এর পরিপূরক ঘটনা। তাহলে, $P(\bar{E}) = 1 - P(E) \Rightarrow P(E) + P(\bar{E}) = 1$

- **ঘটনার সম্ভাবনা সম্পর্কিত কিছু ফলাফল :**

i) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

ii) যে-কোনো ঘটনা A এর জন্য, $0 \leq P(A) \leq 1$

iii) যদি A ও B যে কোনো দুটি ঘটনা হয়, তবে

$P(A \cap B) \leq P(A),\ P(B) \leq P(A \cup B) \leq P(A)+P(B),\ P(A \cap B) \leq P(B)$

iv) যদি $P(A) > P(B)$ হয়, তবে ঘটনা B-এর চেয়ে ঘটনা A ঘটার সুযোগ বেশি রয়েছে।

v) যদি $P(A) = P(B)$ হয়, তবে A ও B ঘটনাদ্বয় সমানভাবে ঘটবে।

vi) যে কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

vii) অসম্ভব বা শূন্য ঘটনার সম্ভাবনা হল 0 এবং নিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা হল 1।

viii) সমসম্ভব ফলাফলগুলোর ক্ষেত্রে, সম্ভাবনার স্বতঃ সিদ্ধ পদ্ধতি, পুরাতনী পদ্ধতির সাথে মিলে যায়।

ix) যদি A, B ও C ঘটনাগুলো পরস্পর বিচ্ছিন্ন, অর্থাৎ $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C = \phi$ হয়, তবে $P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$

x) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য

P(A অথবা B এর কোনোটিই নয়) $= P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

xi) যদি কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুটি ঘটনা A ও B হয়, তবে

$$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] = P(A)+(B)-2P(A \cap B)$$

xii) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

xiii) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

xiv) যদি A ঘটনাটি ঘটার পক্ষে সুযোগ $p : q$ হয়, তবে $P(A) = \frac{p}{p+q}$ এবং $P(\bar{A}) = \frac{q}{p+q}$

xv) যদি A ঘটনাটি ঘটার বিপক্ষে সুযোগ $p : q$ হয়, তবে $P(A) = \frac{q}{p+q}$ এবং $P(\bar{A}) = \frac{p}{p+q}$

অনুশীলনী - 16

ক - বিভাগ

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 অথবা 2 নম্বর]

1) বহু বিকল্পভিত্তিক প্রশ্ন :

i) কোনো সাধারণ বছর (non-leap year)-এ 53টি রবিবার অথবা 53টি সোমবার থাকার সম্ভাবনা হল—

a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) এদের কোনোটিই নয়

ii) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত তাসটি রাজা (King) অথবা ইস্কাবন (Spade) হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{26}$ b) $\frac{3}{26}$ c) $\frac{4}{13}$ d) $\frac{3}{13}$

iii) যদি M ও N যে কোনো দুটি ঘটনা হয়, তবে তাদের কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা হল —

a) $P(M) + P(N) - 2P(M \cap N)$ b) $P(M) + P(N) - P(M \cap N)$

b) $P(M) + P(N) + 2P(M \cap N)$ d) $P(M) + P(N) + P(M \cap N)$

iv) A ও B ঘটনাদ্বয়ের কমপক্ষে একটি ঘটার সম্ভাবনা হল 0.6। যদি A ও B ঘটনাদ্বয়ের একসাথে ঘটনার সম্ভাবনা 0.2 হয়, তবে $P(\bar{A})+P(\bar{B}) =$

a) 0.4 b) 0.8 c) 1.2 d) 1.6

v) 1 থেকে 20 পর্যন্ত সংখ্যাগুলো থেকে যথেচ্ছভাবে তিনটি সংখ্যা পছন্দ করা হল। পছন্দকৃত সংখ্যা তিনটি ক্রমিক নয় এর সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{186}{190}$ b) $\frac{187}{190}$ c) $\frac{188}{190}$ d) $\frac{18}{{}^{20}c_3}$

vi) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে তাস অদলবদল করার সময় দুর্ঘটনাক্রমে 2টি তাস বাদ পড়েছে। হারিয়ে যাওয়া তাস দুটি ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{29}{52}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{26}{51}$ d) $\frac{27}{51}$

vii) যদি সাতজন লোক এক সারিতে বসে, তবে দুজন বিশেষ ব্যক্তি একে অপরের পাশে বসার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{1}{2}$

viii) সংখ্যার পুনরাবৃত্তি না করে, 0, 2, 3 এবং 5 সংখ্যাগুলিকে নিয়ে চার অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা গঠন করা হলে, এই সংখ্যাগুলি 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{30}$ d) $\frac{5}{9}$

ix) যদি A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর বিচ্ছিন্ন হয়, তবে —

a) $P(A) \le P(\bar{B})$ b) $P(A) \ge P(\bar{B})$ c) $P(A) < P(\bar{B})$ d) এদের কোনোটিই নয়

x) যেকোনো দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য যদি $P(A \cup B) = P(A \cap B)$ হয়, তবে

a) $P(A)=P(B)$ b) $P(A)>P(B)$ c) $P(A)<P(B)$ d) এদের কোনোটিই নয়

xi) যদি 6 জন বালক ও 6 জন বালিকা যথেচ্ছভাবে একই সারিতে বসে থাকে, তবে সব বালিকারা একসাথে বসার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{432}$ b) $\frac{12}{431}$ c) $\frac{1}{132}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xii) 'PROBABILITY' শব্দ থেকে যথেচ্ছভাবে একটিমাত্র অক্ষর নির্বাচন করা হলে, নির্বাচিত অক্ষরটি স্বরবর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{3}{11}$

xiii) কোনো একটি পরীক্ষায় A-এর ফেল হওয়ার সম্ভাবনা 0.2 এবং B এর ফেল হওয়ার সম্ভাবনা হল 0·3, তাহলে A অথবা B এর ফেল হওয়ার সম্ভাবনা হবে —

a) >0.5 b) 0.5 c) ≤ 0.5 d) 0

xiv) S হল একটি নমুনাদেশ A ও B দুটি পরস্পর পৃথক ঘটনা, যেখানে $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ এবং $S=A \cup B$, তাহলে

$P(A) =$

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{8}$

xv) একটি ব্যাগে 9টি বল আছে যাদের মধ্যে 2টি লাল, 3টি নীল এবং 4টি হলুদ। ব্যাগটি থেকে ইচ্ছামতো 3টি বল তোলা হলে এই বলগুলি একই রঙের হওয়ার সম্ভাবনা হবে —

a) $\frac{5}{84}$ b) $\frac{3}{9}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{7}{17}$

xvi) 30টি ক্রমিক সংখ্যা থেকে যথেচ্ছভাবে 2টি সংখ্যা নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত সংখ্যা দুটির যোগফল অযুগ্ম হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{14}{29}$ b) $\frac{16}{29}$ c) $\frac{15}{29}$ d) $\frac{10}{29}$

xvii) একজন ব্যক্তি 4টি চিঠি, 4টি নির্দিষ্ট ঠিকানাবিশিষ্ট খামে রাখার জন্য লিখেছে। যদি চিঠিগুলো ইচ্ছামত খামগুলোতে রাখা হয়, তবে 4টি চিঠির প্রত্যেকটি ভুল ঠিকানাবিশিষ্ট খামে রাখার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{11}{24}$ c) $\frac{15}{24}$ d) $\frac{23}{24}$

xviii) দুটি ঘটনার মধ্যে যে-কোনো একটি ঘটনা অবশ্যই ঘটবে এই শর্তে, যদি একটি ঘটার সুযোগ অপরটির $\frac{2}{3}$ গুণ হয়, তবে অপরটির পক্ষে সুযোগ হবে —

a) 1:3 b) 3:1 c) 2:3 d) 3:2

xix) যদি তিনটি পাশা একসাথে নিক্ষেপ করা হয় তবে পাশা তিনটির উপরিতলে যে তিনটি সংখ্যা উঠে তাদের সমষ্টি 5 হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $^{5}/_{216}$ b) $^{1}/_{6}$ c) $^{1}/_{36}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xx) কার্ডের একটি প্যাকেটে 4টি টেক্কা, 4টি রাজা, 4টি রানী এবং 4টি গোলাম আছে। প্যাকেট থেকে দুটি কার্ড যথেচ্ছভাবে তোলা হল। তাদের মধ্যে অন্তত একটি টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{9}$

xxi) তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন এবং সম্পূর্ণ ঘটনার সম্ভাবনা $\frac{(1-3p)}{2}$, $\frac{(1+4p)}{3}$, $\frac{(1+p)}{6}$ হলে, p এর সমস্ত সম্ভাব্য মানের সেট হবে —

a) (0, 1) b) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ c) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ d) $(0, \infty)$

xxii) তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা A, B ও C এর সম্ভাবনা হল যথাক্রমে $^{2}/_{3}$, $^{1}/_{4}$ এবং $^{1}/_{6}$। বিবৃতিটি —

a) সত্য b) মিথ্যা
c) কিছুই বলা যায় না d) এদের যে-কোনো একটি হতে পারে।

xxiii) দুটি পাশা একযোগে নিক্ষেপ করা হল। পাশা দুটির উপরিতলে যে সংখ্যা ওঠে, সেগুলি অভিন্ন সংখ্যা দেখায় অথবা তাদের সমষ্টি 9, এদের কোনোটিই না ঘটার সম্ভাবনা হল —

a) $^{13}/_{15}$ b) $^{13}/_{18}$ c) $^{1}/_{9}$ d) $^{8}/_{9}$

xxiv) 3 জন পুরুষ, 2 জন মহিলা এবং 3 জন শিশুর মধ্যে যথেচ্ছভাবে চারজনকে যথেচ্ছভাবে বাছাই করা হয়েছে। এই চারজনের মধ্যে ঠিক 2 জন শিশু হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $^{11}/_{21}$ b) $^{9}/_{21}$ c) $^{10}/_{21}$ d) এদের কোনোটিই নয়

xxv) দুটি ছক্কা একসাথে নিক্ষেপ করা হল। ছক্কা দুটির উপরিতলে যে দুটি সংখ্যা উঠেছে, তাদের অন্তত একটি 3 থেকে বড় হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{8}$

xxvi) (2n+1) সংখ্যক টিকিটকে 1 থেকে (2n+1) পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। এদের থেকে তিনটি টিকিট যথেচ্ছভাবে নির্বাচন করা হলে, নির্বাচিত টিকিট তিনটিতে চিহ্নিত সংখ্যাগুলো সমান্তর প্রগতিতে থাকার সম্ভাবনা হবে —

a) $\frac{3n}{4n^2-1}$ b) $\frac{2n}{4n^2-1}$ c) $\frac{n}{4n^2-1}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xxvii) 1 থেকে 40 পর্যন্ত সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত 40টি কার্ডের একটি সেট থেকে যথেচ্ছভাবে 5টি কার্ড নির্বাচন করে তাদেরকে মানের উর্দ্ধক্রমানুসারে অর্থাৎ $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$ আকারে সাজানো হয়েছে। $x_3=24$ হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{{}^{16}c_2}{{}^{40}c_5}$ b) $\frac{{}^{23}c_2}{{}^{40}c_5}$ c) $\frac{{}^{16}c_2 \times {}^{23}c_2}{{}^{40}c_5}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xxviii) 'FAVOURABLE' শব্দের অক্ষরগুলো ইচ্ছামতো সাজানো হলে এতে দুটি 'A' কখনও একসাথে থাকবে না এর সম্ভাবনা হবে —

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{4}{5}$

xxix) একটি ছক্কা তিনবার চালা হলে, প্রতিবার পূর্ববর্তী সংখ্যার চেয়ে আরও বড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা হবে—

a) $\frac{15}{216}$ b) $\frac{5}{108}$ c) $\frac{13}{216}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

xxx) দাবা (Chess) খেলার বোর্ড থেকে যথেচ্ছভাবে দুটি স্কোয়ার নির্বাচন করা হল। নির্বাচিত স্কোয়ার দুটি ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা হল —

a) $\frac{15}{216}$ b) $\frac{32}{63}$ c) $\frac{23}{64}$ d) এদের কোনোটিই নয়।

2. অতি সংক্ষিপ্তধর্মী প্রশ্ন : (প্রতিটি প্রশ্নের মান 1 বা 2)

i) একটি লুডোর ছক্কার দুটি তলের প্রতিটিতে '1', তিনটি তলের প্রতিটিতে '2' এবং একটি তলে '3' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। যদি ছক্কাটি একবার চালা হয় তবে নিম্নলিখিতগুলো নির্ণয় করো —

a) P (1 অথবা 3) b) P (3 নয়)

ii) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস টানা হল। টানা তাসটি ইস্কাবনের টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iii) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে 2টি তাস তোলা হল। তাদের উভয়ই ফেস কার্ড হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iv) কোনো অধিবর্ষে 53টি বুধবার থাকার সম্ভাবনা কত?

v) একটি মুদ্রা দুইবার টস্ করা হলে, এতে অন্ততপক্ষে একটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

vi) দুটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে, ছক্কা দুটির উপরিতলে যে সংখ্যা দুটি ওঠে তাদের সমষ্টি 8 হওয়ার সম্ভাবনা কত?

vii) 'EQUATIONS' শব্দের অক্ষরগুলো থেকে যথেচ্ছভাবে একটি অক্ষর নির্বাচন করা হলে, নির্বাচিত অক্ষরটি ব্যঞ্জনবর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

viii) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে ইচ্ছামত একটি কার্ড নির্বাচন করা হলে, নির্বাচিত কার্ডটি রাজা অথবা রানী হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ix) E ও F ঘটনাদ্বয় এমন যে $P(E) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{1}{2}$ এবং P(E এবং F) $= \frac{1}{8}$, তাহলে P(E অথবা F) নির্ণয় করো।

x) A ও B ঘটনাদ্বয় এরূপ যে $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ এবং $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$ । $P(A \cap B)$ ও $P(A \cap B^C)$ এর মান নির্ণয় করো।

xi) কোনো সমসম্ভব পরীক্ষার সাথে যুক্ত তিনটি পরস্পর বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনা হল A, B ও C। যদি $P(B) = \frac{3}{2}P(A)$ এবং $2P(C) = P(B)$ হয়, তবে P(A)-এর মান নির্ণয় করো।

xii) A ও B হল কোনো পরীক্ষার সাথে যুক্ত দুটি সম্পূর্ণ ঘটনা। যদি $P(\bar{A}) = 0.25$, $P(A \cap B) = 0.65$ এবং $P(B) = x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।

xiii) কোনো ঘটনার পক্ষে সুযোগ 5:13 হলে ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

xiv) 'VALUES' শব্দের অক্ষরগুলি থেকে যথেচ্ছভাবে দুটি অক্ষর নির্বাচন করা হলে, নির্বাচিত অক্ষর দুটি স্বরবর্ণ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

xv) প্রথমবারের মতো হেড না আসা পর্যন্ত একটি মুদ্রা বার বার নিক্ষেপ করা হয়। এই পরীক্ষার নমুনাদেশটি লেখো।

xvi) একটি মুদ্রা দুবার টস্ করা হল। যদি দ্বিতীয় ফলাফলে হেড্ আসে তবে একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয়। এই পরীক্ষার নমুনাদেশটি লেখো।

খ - বিভাগ

3. সংক্ষিপ্ত উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 3 নম্বর]

i) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে যথেচ্ছভাবে একটি তাস টানা হলে, টানা তাসটি রাজা অথবা হরতন অথবা লাল রঙের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

ii) 52টি তাসের একটি প্যাকেট থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে 7টি তাস তোলা হলে, এতে — a) সবগুলো রাজা b) তিনটি রাজা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iii) একটি মুদ্রা 5বার টস্ করা হয়েছে যার একপৃষ্ঠে 3 ও অপরপৃষ্ঠে 4 চিহ্নিত করা আছে। 5 বার টসে প্রাপ্ত ফলাফলগুলোর যোগফল 24 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

iv) 150টি স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি সংখ্যা x নির্বাচন করা হয়েছে। তাহলে $\frac{x^2-70x+1200}{x-35}<0$ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

v) কোনো সুষম ষড়ভুজের ছয়টি শীর্ষবিন্দু থেকে যথেচ্ছভাবে তিনটি শীর্ষবিন্দু নির্বাচন করা হয়েছে। এই শীর্ষবিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ সমবাহু হওয়ার সম্ভাবনা কত?

vi) একটি ব্যাগে 21টি বল আছে এবং বলগুলিকে 1, 2, 3,........, 21 সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। 2টি বল পুনঃস্থাপন করে একটির পর একটি তোলা হল। তোলা বল দুটির প্রথমটি অযুগ্ম ও দ্বিতীয়টি যুগ্ম হওয়ার সম্ভাবনা কত?

vii) 7 জন বালক ও 3 জন বালিকা উদ্দেশ্যহীনভাবে একটি সারিতে বসেছে। কোনও ছেলেই দুজন মেয়ের মাঝখানে বসবে না, এর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

viii) দুটি ঘটনা A ও B এর জন্য যদি $P(A\ 3\ B)=\frac{1}{2}$ এবং $P(A\cup B)=\frac{2}{5}$ হয়, তবে $P(A^C)+P(B^C)$ এর মান নির্ণয় কর।

ix) A, B ও C ঘটনাগুলি হল সমগ্র ঘটনা। A ঘটনার বিপক্ষে সুযোগ হল 8:3 এবং B ঘটনার পক্ষে সুযোগ হল 2:5। তাহলে C ঘটনার বিপক্ষে সুযোগ কত হবে তা নির্ণয় করো।

x) প্রথম 200টি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা থেকে যথেচ্ছভাবে একটি অখণ্ড সংখ্যা নির্বাচন করা হয়েছে। নির্বাচিত সংখ্যাটি 6 অথবা 8 দ্বারা বিভাজ্য হবে এর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

গ - বিভাগ

দীর্ঘ উত্তরধর্মী প্রশ্নাবলী : [প্রতিটি প্রশ্নের মান 4 অথবা 6 নম্বর]

i) দুজন শিক্ষার্থী অঙ্কুর ও আদভিক কোনো একটি পরীক্ষায় অংশ নিয়েছিল। অঙ্কুর পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে এর সম্ভাবনা হল 0.05 এবং আদভিক পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে এর সম্ভাবনা হল 0.10। উভয়ই পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে এর সম্ভাবনা হল 0.02। তাহলে নিম্নলিখিত ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

a) অঙ্কুর ও আদভিক উভয়ই পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে না।

b) তাদের মধ্যে অন্ততপক্ষে একজন পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে না।

c) তাদের মধ্যে কেবলমাত্র একজন পরীক্ষায় যোগ্যতা অর্জন করবে।

ii) দুটি লুডোর ছক্কা গড়িয়ে দেওয়া হল। A, B, C, D, E ও F ঘটনাগুলি হল নিম্নরূপ :

A : প্রথম ছক্কার উপরিতলে যুগ্ম সংখ্যা উঠেছে।

B : প্রথম ছক্কার উপরিতলে অযুগ্ম সংখ্যা উঠেছে।

C : দুটি ছক্কার উপরিতলে উঠা সংখ্যার সমষ্টি ≤ 5।

D : দুটি ছক্কার উপরিতলে উঠা সংখ্যার সমষ্টি 10 এর কম এবং 5 এর বেশি।

E : দুটি ছক্কার উপরিতলে উঠা সংখ্যার সমষ্টি ≤ 10।

F : যে-কোনো একটি ছক্কার উপরিতলে অযুগ্ম সংখ্যা উঠেছে।

নিম্নের ঘটনাগুলো বর্ণনা করো :

a) b) A এবং B c) B অথবা C d) A এবং E
e) A অথবা F f) A এবং F

iii) একজন শিক্ষার্থী A-গ্রেড, B-গ্রেড, C-গ্রেড ও D-গ্রেড পাওয়ার সম্ভাবনা হল যথাক্রমে 0.40, 0.35, 0.15 এবং 0.10। নিম্নের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

a) শিক্ষার্থী A-গ্রেড পাবে না।
b) শিক্ষার্থী B অথবা C-গ্রেড পাবে।
c) শিক্ষার্থী সর্বাধিক C-গ্রেড পাবে।

iv) 1, 2, 3, 4, 5 — এই অঙ্কগুলো পুনরাবৃত্তি না করে পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা গঠন করা হয়েছে। গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য এর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

v) একটি ব্যাগে 8টি লাল ও 5টি সাদা বল আছে। উদ্দেশ্যহীনভাবে ব্যাগ থেকে তিনটি বল তোলা হয়েছে। নিম্নের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

a) তিনটি বল সাদা।
b) তিনটি বল লাল।
c) একটি বল লাল এবং দুটি বল সাদা।

vi) চারজন প্রার্থী A, B, C ও D একটি স্কুলের ক্রিকেট টীমের কোচ নিয়োগের জন্য আবেদন করেছিল। যদি B-এর চেয়ে A-এর নির্বাচিত হওয়ার সুযোগ দ্বিগুণ, B ও C নির্বাচিত হওয়ার একই সুযোগ, D-এর চেয়ে C-এর নির্বাচিত হওয়ার সুযোগ দ্বিগুণ হয় তবে,

a) C-এর নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে?
b) A-এর নির্বাচিত না হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে?

vii) মেডিকেল ছাত্রছাত্রীদের একটি দল ইন্টার্নশিপ করেছেন এমন সময় তাদের সিটি হাসপাতালে অস্ত্রপ্রচারে ওই হাসপাতালে সহায়তা করতে হবে। ওই হাসপাতালে খুব জটিল, জটিল, প্রচলিত, সরল অথবা খুব সরল অস্ত্রপ্রচার হওয়ার সম্ভাবনা হল যথাক্রমে 0.15, 0.20, 0.31, 0.26 এবং 0.80। নিম্নের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

a) অস্ত্রপ্রচার জটিল অথবা খুব জটিল হবে।
b) অস্ত্রপ্রচার জটিল অথবা খুব জটিল এদের কোনোটিই হবে না।
c) অস্ত্রপ্রচার সরল অথবা জটিল হবে।
d) অস্ত্রপ্রচার প্রচলিত অথবা সরল হবে।

viii) 1 থেকে 1000 পর্যন্ত অখণ্ড সংখ্যা হতে একটি অখণ্ড সংখ্যা ইচ্ছামত পছন্দ করলে, তবে পছন্দকৃত সংখ্যাটি 2 এর গুণিতক অথবা 9 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

ix) যদি 'ALGORITHM' শব্দের অক্ষরগুলি একটি সারিতে এলোমেলোভাবে সাজানো হয়, তাহলে 'GOR' অক্ষরগুলি অবশ্যই একসাথে থাকবে এর সম্ভাবনা কত?

x) 'ASSASSINATION' শব্দের অক্ষরগুলো উদ্দেশ্যহীনভাবে সাজানো হয়েছে। তাহলে নিম্নলিখিত

ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো :

a) শব্দটিতে 4টি ‘S’ পরপর আসবে।

b) শব্দটিতে 2টি ‘I’ এবং 2টি ‘N’ একসাথে থাকবে।

c) শব্দটিতে সব ‘A’ একসাথে থাকবে না।

d) শব্দটিতে কোনো 2টি ‘A’ একসাথে থাকবে না।

xii) যতক্ষণ পর্যন্ত না 2 ওঠে ততক্ষণ লুডোর ছক্কা নিক্ষেপের একটি পরীক্ষা বিবেচনা করো।

a) নমুনাদেশটির কয়টি উপাদান ছক্কাটির K-তম নিক্ষেপে 2 ওঠে এই ঘটনার সাথে যুক্ত?

b) নমুনাদেশটির কয়টি উপাদান ছক্কাটির K-তম নিক্ষেপের পরে 2 ওঠে না এই ঘটনার সাথে যুক্ত?

উত্তরমালা

ক - বিভাগ

1] i) b ii) c iii) b iv) c v) b vi) c
vii) c viii) d ix) a x) a xi) c xii) b
xiii) c xiv) a xv) a xvi) c xvii) d xviii) d
xix) c xx) c xxi) b xxii) b xxiii) b xxiv) c
xxv) b xxvi) a xxvii) c xxviii) d xxix) d xxx) b

2] i) a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{6}$ ii) $\frac{1}{52}$ iii) $\frac{11}{221}$ iv) $\frac{2}{7}$ v) $\frac{3}{4}$ vi) $\frac{5}{36}$

vii) $\frac{4}{9}$ viii) $\frac{2}{13}$ ix) $\frac{5}{8}$ x) $\frac{3}{20}, \frac{1}{10}$ xi) $\frac{4}{13}$ xii) 0.9

xiii) $\frac{5}{18}$ xiv) $\frac{1}{5}$ xv) S = {H, TH, TTH, TTTH, ...}

xvi) {TT, HT, (TH,1), (TH,2), (TH,3), (TH,4), (TH,5), (TH,6), (HH,1), (HH,2), (HH,3), (HH,4) (HH,5), (HH,6)}

খ - বিভাগ

3] i) $\frac{7}{13}$ ii) a) $\frac{1}{7735}$ b) $\frac{9}{1547}$ iii) 0 iv) $\frac{11}{50}$ v) $\frac{1}{10}$

vi) $\frac{110}{441}$ vii) $\frac{1}{15}$ viii) $\frac{11}{10}$ ix) 34:43 x) $\frac{1}{4}$

গ - বিভাগ

4. i) a) 0.87 b) 0.98 c) 0.11

ii) a) প্রথম ছক্কায় প্রাপ্ত বিজোড় সংখ্যা

b) শূন্য সেট।

c) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5, 5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3), (4,1)}

d) {(1,2), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2) (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4)}

e) {(4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4) (5,5), (5,6)}

f) {(2,1), (2,3), (2,5), (4,1), (4,3), (4,5), (6,1), (6,3) (6,5)}

iii) a) 0.6 b) 0.5 c) 0.25

iv) $\frac{1}{5}$

v) a) $\frac{5}{143}$ b) $\frac{28}{143}$ c) $\frac{40}{143}$

vi) a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{5}{9}$

vii) a) 0.35 b) 0.77 c) 0.51 d) 0.57

viii) 0.556

ix) $\frac{1}{72}$

x) a) $\frac{2}{143}$ b) $\frac{2}{143}$ c) $\frac{25}{26}$ d) $\frac{11!}{3!\,8!}$

xi) a) 5^{K-1} b) $\frac{5^K-1}{4}$

Note

Note