सत्यमेव जयते

ভারতের সংবিধান

প্রস্তাবনা

"আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্ররূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক, ন্যায়বিচার, চিন্তা, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম এবং উপাসনার স্বাধীনতা, সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা এবং তাদের সকলের মধ্যে ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব গড়ে ওঠে তার জন্য সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে, আমাদের গণপরিষদে আজ, ১৯৪৯ সালের ২৬ নভেম্বর, এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।"

Constitution of India

Part IV A (Article 51 A)

Fundamental Duties

It shall be the duty of every citizen of India —

(a) to abide by the Constitution and respect its ideals and institutions, the National Flag and the National Anthem;

(b) to cherish and follow the noble ideals which inspired our national struggle for freedom;

(c) to uphold and protect the sovereignty, unity and integrity of India;

(d) to defend the country and render national service when called upon to do so;

(e) to promote harmony and the spirit of common brotherhood amongst all the people of India transcending religious, linguistic and regional or sectional diversities; to renounce practices derogatory to the dignity of women;

(f) to value and preserve the rich heritage of our composite culture;

(g) to protect and improve the natural environment including forests, lakes, rivers, wildlife and to have compassion for living creatures;

(h) to develop the scientific temper, humanism and the spirit of inquiry and reform;

(i) to safeguard public property and to abjure violence;

(j) to strive towards excellence in all spheres of individual and collective activity so that the nation constantly rises to higher levels of endeavour and achievement;

*(k) who is a parent or guardian, to provide opportunities for education to his child or, as the case may be, ward between the age of six and fourteen years.

Note: The Article 51A containing Fundamental Duties was inserted by the Constitution (42nd Amendment) Act, 1976 (with effect from 3 January 1977).

*(k) was inserted by the Constitution (86th Amendment) Act, 2002 (with effect from 1 April 2010).

গণিত

নবম শ্রেণির পাঠ্যবই

প্রস্তুতকরণ

জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ, নতুন দিল্লি

অনুবাদ ও অভিযোজন

রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ

ত্রিপুরা সরকার

এন সি ই আর টি
অনুমোদিত
প্রথম বাংলা সংস্করণ

প্রথম প্রকাশ :
ডিসেম্বর, ২০১৮
পুনর্মুদ্রণ :
মার্চ, ২০২০

প্রচ্ছদ : প্রসাদ স্বরূপ রায়

মূল্য : ১৫৫ টাকা

মুদ্রণ
সত্যযুগ এমপ্লয়িজ
কো-অপারেটিভ ইন্ডাস্ট্রিয়াল
সোসাইটি লিমিটেড, ১৩ প্রফুল্ল
সরকার স্ট্রিট, কলকাতা-৭২

গণিত
নবম শ্রেণির পাঠ্যবই

(এন সি ই আর টি-র গণিত
পাঠ্যবইয়ের ২০১৭ সালের অনূদিত সংস্করণ)

প্রকাশক : রাজ্য শিক্ষা গবেষণা
ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা।

অক্ষর বিন্যাস
পীযূষ পাল
প্রসাদ স্বরূপ রায়
লক্ষণ দেবনাথ

ভূমিকা

২০০৬ সাল থেকে রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ প্রথম থেকে অষ্টম শ্রেণি পর্যন্ত প্রাথমিক ও উচ্চপ্রাথমিক স্তরের পাঠ্যপুস্তকের মুদ্রণ ও প্রকাশের দায়িত্ব পালন করে আসছে।

রাজ্যের বিদ্যালয়স্তরে উন্নত ও সমৃদ্ধতর পাঠ্যক্রম চালু করার লক্ষ্যে ত্রিপুরা রাজ্য শিক্ষা দপ্তরের প্রচেষ্টায় প্রথম থেকে অষ্টম, নবম ও একাদশ শ্রেণির জন্য ২০১৯ শিক্ষাবর্ষ থেকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের (এন সি ই আর টি) পাঠ্যপুস্তকসমূহ গ্রহণ করার সিদ্ধান্ত নেওয়া হয়।

বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০১৯ সালে প্রথম প্রকাশ করা হয় এবং এ বছর ওইসব পুস্তকগুলোর পুনর্মুদ্রণ করা হল। পাশাপাশি দশম ও দ্বাদশ শ্রেণির বাংলা বিষয় ছাড়া অন্যান্য বিষয়গুলোর জন্য জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদের প্রকাশিত পুস্তকগুলোর অনূদিত ও অভিযোজিত সংস্করণ ২০২০ শিক্ষাবর্ষে প্রথম প্রকাশ করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, বাংলা বিষয়ে পাঠ্যপুস্তক প্রকাশনার দায়িত্বও রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ পালন করে আসছে।

বিশাল এই কর্মকাণ্ডে যেসব শিক্ষক-শিক্ষিকা, অধ্যাপক-অধ্যাপিকা, শিক্ষাবিদ, অনুবাদক, অনুলেখক, মুদ্রণকর্মী ও শিল্পীরা আমাদের সঙ্গে থেকে নিরলসভাবে অক্লান্ত পরিশ্রমে এই উদ্যোগ বাস্তবায়িত করেছেন তাদের সবাইকে সকৃতজ্ঞ ধন্যবাদ জানাচ্ছি।

প্রকাশিত এই পাঠ্যপুস্তকটির উৎকর্ষ ও সৌন্দর্য বৃদ্ধির জন্য শিক্ষানুরাগী ও গুণীজনের মতামত ও পরামর্শ বিবেচিত হবে।

উত্তম কুমার চাকমা
অধিকর্তা
রাজ্য শিক্ষা গবেষণা ও প্রশিক্ষণ পর্ষদ
ত্রিপুরা।

আগরতলা
মার্চ, ২০২০

উপদেষ্টা

ড. অর্ণব সেন, সহ অধ্যাপক, এন ই আর আই ই, শিলং
ড. অরূপ কুমার সাহা, সহ অধ্যাপক, আর আই ই, ভুবনেশ্বর

অনুবাদক

শ্রী মৃণাল কান্তি বৈদ্য, শিক্ষক
শ্রী জয়দীপ চৌধুরী, শিক্ষক
শ্রী মৃণাল কান্তি রায়, শিক্ষক
শ্রী দেবাশীষ তলাপাত্র, শিক্ষক
শ্রীমতি মধুমিতা চৌধুরী, শিক্ষিকা
শ্রী অরূপ চৌধুরী, শিক্ষক
শ্রী অমিতাভ মজুমদার, শিক্ষক
শ্রী অর্ণব কুমার রায়, শিক্ষক

ভাষা পরিমার্জনা

শ্রী নিধীর রায়, সহপ্রধান শিক্ষক
শ্রী অশোক দেব, শিক্ষক

প্রাক্‌কথন

জাতীয় পাঠ্যক্রমের রূপরেখা (NCF), 2005 সুপারিশ করে যে, শিশুদের স্কুল জীবনের সঙ্গে তাদের স্কুলের বাইরের জীবনের মধ্যে অবশ্যই সংযোগ থাকা প্রয়োজন। পরম্পরাগতভাবে চলে আসা পুথিগত শিক্ষা ব্যবস্থায় বিদ্যালয়, বাড়ি এবং সমাজের মধ্যে যে দূরত্ব তৈরি হয় তা থেকে বেরিয়ে আসতে এই নীতি উল্লেখ করে। মূলত এই ভাবনাকে বাস্তবে রূপদান করার লক্ষ্যে জাতীয় পাঠ্যক্রমের রূপরেখার উপর ভিত্তি করে পাঠ্যক্রম ও পাঠ্য বইয়ের উন্নতিসাধন করা হয়েছে। শিশুরা যাতে মুখস্থ না করে এবং বিভিন্ন বিষয়ের গণ্ডিতে আবদ্ধ না থাকে তারও উদ্যোগ নেওয়া হয়। আমরা আশা করি এই উদ্যোগ আমাদেরকে জাতীয় শিক্ষানীতি (১৯৮৬) রূপরেখায় উল্লিখিত শিশুকেন্দ্রিক শিক্ষার দিকে যথাযথভাবে নিয়ে যাবে।

তবে এই প্রচেষ্টার সাফল্য নির্ভর করে বিদ্যালয় প্রধান এবং অন্যান্য শিক্ষক/শিক্ষিকাদের উপর, যারা শিশুদের নিজস্ব কল্পনাগুলোকে প্রয়োগ করতে এবং প্রশ্ন করতে উৎসাহিত করবেন। আমাদের উপলব্ধি করতে হবে, শিশুদেরকে যদি স্থান, সময় ও স্বাধীনতা দেওয়া হয় তবে তারা বড়োদের থেকে প্রাপ্ত তথ্যের ভিত্তিতে নূতন জ্ঞানার্জন করতে পারবে। একমাত্র পাঠ্যবই হল পরীক্ষার মূল ভিত্তি — এই ধারণাই শিক্ষার অন্যান্য দিক্‌গুলো উপেক্ষিত হওয়ার অন্যতম একটি কারণ। শিশুদের মধ্যে সৃজনশীলতার বিকাশ এবং উদ্যোগ সম্ভবপর হবে যদি আমরা উপলব্ধি করি এবং ভাবি যে, শিশুরা শিখন প্রক্রিয়ায় শুধু জ্ঞানের গ্রহীতাই নয়, অংশীদারও।

এই লক্ষ্য পূরণ করতে গেলে বিদ্যালয়ের দৈনন্দিন ক্রিয়াকলাপ এবং ব্যবস্থাপনাকে পরিবর্তন করতে হবে। বিদ্যালয়ে দৈনন্দিন সময়সূচি যেমন নমনীয় হওয়া উচিত তেমনি বার্ষিক কর্মসূচিও এমনভাবে হওয়া উচিত যাতে প্রকৃত শিক্ষাদানের নির্ধারিত দিনগুলো শিক্ষাদানের কাজেই ব্যয়িত হয়। এই পাঠ্যক্রম চাপ ও একঘেয়েমির বদলে শিশুদের স্কুল জীবনকে কতটা আনন্দদায়ক করে তুলবে তা শিক্ষাদান পদ্ধতি ও মূল্যায়ন পদ্ধতির উপরও নির্ভর করবে। শিক্ষাদানের প্রদত্ত সময় ও শিশুদের মানসিক বিকাশের কথা মাথায় রেখে প্রতিটি স্তরের পাঠ্যবইয়ের অন্তর্গত শিক্ষার বিষয়গুলোর এক নূতন দৃষ্টিভঙ্গি

নিয়ে রূপান্তর যা পাঠ্যক্রমের বোঝার কথা মাথায় রেখে পাঠ্যক্রম পুনর্গঠন করেন। শিশুদের চিন্তাভাবনার সুযোগ সৃষ্টি করতে, ছোটো ছোটো দলে বিভক্ত হয়ে আলোচনার সুযোগ তৈরি করতে এবং হাতে কলমে শিক্ষার উপর অধিক গুরুত্ব দিতে পাঠ্যবই ভূমিকা নিতে পারে।

পাঠ্যবই উন্নয়নকল্পে দায়িত্বপ্রাপ্ত কমিটির সদস্যদেরকে তাদের কঠোর পরিশ্রমের জন্য জাতীয় শিক্ষা প্রশিক্ষণ পর্যদ (NCERT) প্রশংসা করছে। এই কমিটির কার্যকলাপকে সঠিক পথে চলতে নির্দেশ দানের জন্য বিজ্ঞান ও গণিতের উপদেষ্টা কমিটির চেয়ারপার্সন অধ্যাপক জে ভি নারলিকার এবং এই পাঠ্যবইয়ের মূখ্য উপদেষ্টা অধ্যাপক পি সিনকলেয়ার, IGNOU, নিউদিল্লিকে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি। যে সকল শিক্ষক/শিক্ষিকা এই বইয়ের উন্নতিকল্পে সাহায্য করেছেন এবং তাদের বিদ্যালয় প্রধান - যাদের সাহায্যে কাজটি বাস্তবায়িত হয়েছে তাদের সকলের কাছে আমরা কৃতজ্ঞ। এই পাঠ্যবই তৈরির ক্ষেত্রে যেসকল প্রতিষ্ঠান এবং সংগঠন তাদের সম্পদ, উপাদান এবং লোকবল দিয়ে উদারহস্তে সাহায্য করেছেন তাদের কাছেও আমার ঋণী। মানব সম্পদ উন্নয়ন মন্ত্রকের চেয়ারপার্সন অধ্যাপক মৃণাল মিরি এবং অধ্যাপক জে পি দেশপান্ডের তত্ত্বাবধানে মাধ্যমিক ও উচ্চ-মাধ্যমিক শিক্ষা বিভাগ দ্বারা নিযুক্ত 'জাতীয় পর্যবেক্ষণ সমিতির সদস্যদের বহুমূল্য সময় প্রদান ও তাঁদের অবদানের জন্য আমরা বিশেষভাবে কৃতজ্ঞ। নিজেদের প্রকাশনা এবং গুণগত মান উন্নয়নের কাজে নিয়োজিত NCERT কর্তৃপক্ষ সর্বদা পাঠকদের মতামত ও পরামর্শকে স্বাগত জানায় যাতে ভবিষ্যতে পাঠ্যবই সংশোধনী প্রক্রিয়াগুলো সফলভাবে সম্পাদন হতে পারে।

অধিকর্তা
জাতীয় শিক্ষা গবেষণা ও
প্রশিক্ষণ পর্যদ।

নিউ দিল্লি
২০ ডিসেম্বর, ২০০৫

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisor

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

Chief Coordinator

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

Members

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT*, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

Member-Coordinator

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

কৃতজ্ঞতা স্বীকার

পাঠ্যবই উন্নয়ন কমিটির সদস্যদের মধ্যে নবম শ্রেণির গণিতের পাঠ্যবই উন্নয়নকল্পে নিম্নোক্ত যারা অবদান রেখেছেন তাদেরকে জাতীয় শিক্ষা গবেষণা এবং প্রশিক্ষণ পরিষদ (NCERT) কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছে। পাঠ্যবইটির অন্তিম রূপদানের জন্য পর্যালোচনা কর্মশালায় অংশগ্রহণকারী সদস্য/সদস্যাদেরও পরিষদ কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছে। সদস্যরা হলেন : এ.কে. সাক্সেনা, অধ্যাপক (অবসরপ্রাপ্ত), লক্ষ্ণৌ বিশ্ববিদ্যালয়, লক্ষ্ণৌ, DESM, NCERT; বন্দিতা কালরা, লেকচারার, সর্বোদয় কন্যা বিদ্যালয়, বিকাশপুরী, ডিস্ট্রিক্ট সেন্টার, নতুন দিল্লি, জগদীশ সিং, পিজিটি, সৈনিক স্কুল, টিজিডি, কাপুরতলা; পি.কে.বগ্গা, টিডিটি, এস.বি.ভি. সুভাষনগর, নিউদিল্লি; আর.সি.মহান, টিজিটি, জেএনভি, দুধনোই, গোলপারা; এস.এস.চট্টোপাধ্যায়, সহকারী শিক্ষক, বিধাননগর সহকারী উচ্চ বিদ্যালয়, কোলকাতা; ভি.এ.সুজাতা, টিজিটি, কে.ভি.ভাস্কো-1 নম্বর, গোয়া; অকিলা সহদেবন, টিজিটি, কে.ভি., মীনাবক্কম, চেন্নাই; এস.সি.রাউতু, টিজিটি, কেন্দ্রিয় বিদ্যালয় (তিব্বতীয়দের), মৌসৌরী; সুনীল পি.জেভিয়ার, টিজিটি, জে এন ভি, ন্যার্যমঙ্গালম্, চেন্নাই, এরনাকুলম; অমিত বাজাজ, টিজিটি, সি আর পি এফ পাবলিক স্কুল, রোহিনী, দিল্লি; আর. কে. পান্ডে, টিজিটি, ডি.এম. স্কুল, আর আই ই, ভোপাল; ভি.মাধবী, টিজিটি, সংস্কৃতি স্কুল, চাণক্যপুরী, নিউ দিল্লি; জি.শ্রীহরিবাবু, টিজিটি, জে এন ভি, শিরপুর কাগজনগর, আদিলবদ; এবং আর.কে.মিশ্র, টিজিটি, এ.ই.সি. স্কুল, নারোরা।

পাঠ্যপুস্তক উন্নতি সাহায্য করার জন্য এম.চন্দ্র. অধ্যাপক এবং প্রধান (অবসরপ্রাপ্ত), DESM, NCERT-এর প্রতি পরিষদ বিশেষ ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছে।

পরিষদ কম্পিউটার ইনচার্জ-দীপক কাপুর; ডিটিপি অপারেটর-নরেশ কুমার, কপি এডিটর-প্রগতি ভরদ্বাজ এবং প্রুফ রিডার-যোগীতা শর্মা সবাইকে তাদের নিজস্ব ক্ষেত্রে অবদানের কৃতজ্ঞতা স্বীকার করছে।

এপিসি-অফিস, এডমিনিস্ট্রেশন অফ DESM, পাবলিকেশন ডিপার্টমেন্ট এবং সেক্রেটারিয়েট NCERT-এদের ও অবদানের জন্য কৃতজ্ঞতা স্বীকার করছে।

সূচিপত্র

শ্রীনিবাস রামানুজন
(1887-1920)

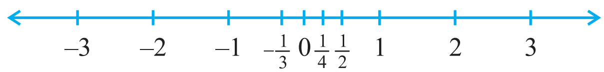
রামানুজন মাদ্রাজ (চেন্নাই) থেকে প্রায় ৪০০ কিমি দক্ষিণ-পশ্চিমে অবস্থিত এরোদে (Erode) নামে একটি ছোটো গ্রামে জন্মগ্রহণ করেছিলেন। তিনি ছিলেন প্রতিভাবান ভারতীয় গণিতজ্ঞদের মধ্যে একজন। তাঁর একটি অভেদ ব্যবহার করে গণিতবিদ্‌রা π-এর মান নিযুত দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধভাবে গণনা করতে সক্ষম হয়েছিলেন।

অধ্যায়-1

সংখ্যা পদ্ধতি (NUMBER SYSTEMS)

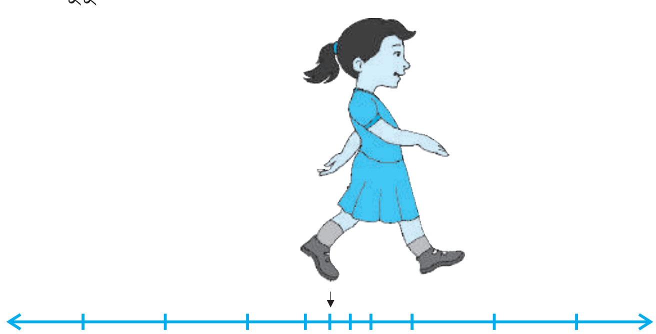
1.1 ভূমিকা

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা সংখ্যারেখা সম্পর্কে শিখেছ এবং কিভাবে বিভিন্ন ধরনের সংখ্যাগুলোকে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করতে হয় তা জেনেছ (চিত্র 1.1দেখো)।



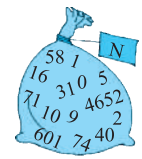
চিত্র 1.1 : সংখ্যা রেখা

তোমরা কল্পনা করো, শূন্য থেকে শুরু করে সংখ্যা রেখার ধনাত্মক দিকে হেঁটে যাচ্ছ। যতদূর তোমাদের দৃষ্টি যাবে শুধু দেখবে সংখ্যা আর সংখ্যা।



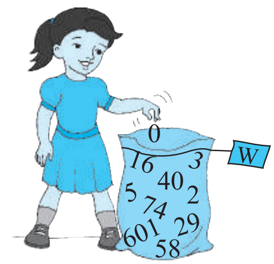
চিত্র 1.2

এখন তোমরা মনে করো সংখ্যা রেখা বরাবর হেঁটে যাচ্ছ এবং কিছু সংখ্যা সংগ্রহ করছ। একটি ব্যাগ প্রস্তুত রাখো এগুলো সঞ্চিত করে রাখার জন্য।



তোমরা হয়তো শুধুমাত্র কিছু সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যা, যেমন 1, 2, 3, ইত্যাদি সংগ্রহ করেছ। তোমরা জান যে, এই তালিকা চলতেই থাকবে (কেন এটা সত্য ?) সুতরাং, এখন তোমাদের ব্যাগে অসংখ্য স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number) রয়েছে। মনে রেখো এই সংগ্রহগুলোকে আমরা **N** প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করছি।

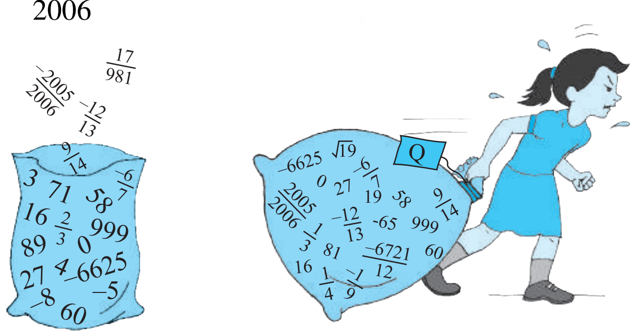
এখন পেছন ফিরে হেঁটে শূন্যকে তুলে ব্যাগে রাখো। এখন তোমাদের সংগ্রহে আছে সমগ্র সংখ্যা (Whole number) যা **W** প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।



এখন তোমাদের সামনে অনেক ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ছড়িয়ে আছে। সকল ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাগুলোকে তোমাদের ব্যাগে রাখো। তোমাদের নতুন সংগ্রহটি কী? মনে রেখো, এগুলো হল সমস্ত অখণ্ড সংখ্যার (integers) সংগ্রহ এবং এদের **Z** প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করা হয়।

এখনো কি সংখ্যারেখার, কিছু সংখ্যা বাকি রয়ে গেছে? অবশ্যই! কিছু সংখ্যা আছে যেমন $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

অথবা এমনকি $\frac{-2005}{2006}$।



এ ধরনের সংখ্যাগুলোকেও যদি ব্যাগে রাখো তবে সেটা হবে মূলদ সংখ্যার (Rational Number) সংগ্রহ। মূলদ সংখ্যার সংগ্রহ Q প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা হয়। Rational (মূলদ) কথাটি এসেছে Ratio (অনুপাত) শব্দ থেকে এবং Q এসেছে Quotient (ভাগফল) শব্দ থেকে।

তোমরা মূলদ সংখ্যার সংজ্ঞাটি স্মরণ করো :

একটি সংখ্যা 'r' কে মূলদ সংখ্যা বলা হবে, যদি এটাকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ (কেন আমরা $q \neq 0$ ধরব?)

লক্ষ করো, তোমরা ব্যাগের মধ্যে সব সংখ্যাগুলোকে $\frac{p}{q}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে p ও q হল অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$।

উদাহরণস্বরূপ, –25 কে লেখা যায় $\frac{-25}{1}$; আকারে যেখনে $p = -25$ এবং $q = 1$ ।

সুতরাং, স্বাভাবিক সংখ্যা, সমগ্র সংখ্যা এবং অখণ্ড সংখ্যাগুলো মূলদ সংখ্যার অন্তর্গত।

তোমরা এটাও জানো যে, $\frac{p}{q}$ আকারে মূলদ সংখ্যার প্রকাশ অনন্য (unique) নয়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ । উদাহরণস্বরূপ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ ইত্যাদি।

এগুলো হল সমতুল্য মূলদ সংখ্যা (অথবা ভগ্নাংশ) যখন আমরা $\frac{p}{q}$ কে মূলদ সংখ্যা বলি অথবা $\frac{p}{q}$ কে সংখ্যারেখায় প্রকাশ করি, তখন ধরি $q \neq 0$ এবং p ও q এর মধ্যে 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই (অর্থাৎ p ও q পরস্পর মৌলিক)। সুতরাং, সংখ্যারেখায় $\frac{1}{2}$ এর সমতুল্য অসংখ্য ভগ্নাংশ আছে। আমরা তাদের সবগুলোকে $\frac{1}{2}$ দিয়ে নির্দেশ করব।

এখন আমরা কিছু সংখ্যা সংক্রান্ত উদাহরণের সমাধান করব যা তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে পড়েছ।

উদাহরণ 1 : নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সত্য না মিথ্যা? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(i) প্রতিটি সমগ্র সংখ্যা একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

(ii) প্রতিটি অখণ্ড সংখ্যা একটি মূলদ সংখ্যা।

(iii) প্রতিটি মূলদ সংখ্যা একটি অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : (i) মিথ্যা, কারণ শূন্য একটি সমগ্র সংখ্যা কিন্তু স্বাভাবিক সংখ্যা নয়।

(ii) সত্য, কারণ প্রতিটি অখণ্ড সংখ্যা m কে $\frac{m}{1}$ আকারে প্রকাশ করা যায় এবং তাই এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

(iii) মিথ্যা, কারণ $\frac{3}{5}$ অখণ্ড সংখ্যা নয়।

উদাহরণ 2 : 1 এবং 2 এর মধ্যবর্তী পাঁচটি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করো।

আমরা এ সমস্যাটির সমাধান কমপক্ষে দুভাবে উপস্থাপন করতে পারি।

সমাধান 1 : মনে করো যে, দুটি সংখ্যা r ও s এর মধ্যবর্তী কোনো মূলদ সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য তোমরা r ও s এর সমষ্টিকে 2 দিয়ে ভাগ করো অর্থাৎ $\frac{r+s}{2}$ সংখ্যাটি r ও s এর মধ্যবর্তী। অতএব $\frac{3}{2}$ হলো 1 ও 2 এর মধ্যবর্তী সংখ্যা। এভাবে এগিয়ে গেলে 1 এবং 2 এর মধ্যবর্তী আরোও চারটি মূলদ সংখ্যা পাওয়া যাবে। এ চারটি সংখ্যা হল $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ এবং $\frac{7}{4}$ ।

সমাধান 2 : অন্য পদ্ধতিতে একটি ধাপেই পাঁচটি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। যেহেতু, আমরা পাঁচটি সংখ্যা চাই, তাই 1 ও 2 কে মূলদ সংখ্যা আকারে লিখব যার হর হবে 5 + 1, অর্থাৎ, $1 = \frac{6}{6}$ এবং $2 = \frac{12}{6}$ । তারপর তোমরা পরীক্ষা করে দেখো $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ এবং $\frac{11}{6}$ এরা প্রত্যেকেই 1 ও 2 এর মধ্যবর্তী মূলদ সংখ্যা। তাহলে পাঁচটি সংখ্যা হল, $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ এবং $\frac{11}{6}$ ।

মন্তব্য :- লক্ষ করো যে, 2 নং উদাহরণে তোমাকে 1 ও 2 এর মধ্যবর্তী 5 টি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করতে বলা হয়েছিল। কিন্তু তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছ যে, প্রকৃতপক্ষে 1 ও 2 এর মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা রয়েছে। সাধারণভাবে **দুটি প্রদত্ত মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা থাকে।**

আমরা আরোও একবার সংখ্যারেখার দিকে লক্ষ করি। তোমরা কি সব সংখ্যা সংগ্রহ করেছ? না, এখনও নয়। প্রকৃতপক্ষে সংখ্যারেখায় আরো অসংখ্য সংখ্যা রয়ে গেছে। তোমরা যে সংখ্যাগুলো সংগ্রহ করেছ তার মধ্যে সংখ্যার অবস্থানের ফাঁক রয়েছে। একটি বা দুটি নয়, অসংখ্য ফাঁক। মজার বিষয় হল, যে কোনো দুটি ফাঁকের মধ্যেও অসংখ্য সংখ্যা রয়েছে।

তাই আমরা নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোর সম্মুখীন হচ্ছি—

1. সংখ্যারেখার অবশিষ্ট সংখ্যাগুলোকে কী বলা হয়?
2. আমরা এদের কীভাবে সনাক্ত করব? অর্থাৎ, আমরা এদের কীভাবে মূলদ সংখ্যা হতে পৃথক করব?

এই প্রশ্নগুলো পরবর্তী পর্যায়ে উত্তর দেওয়া হবে।

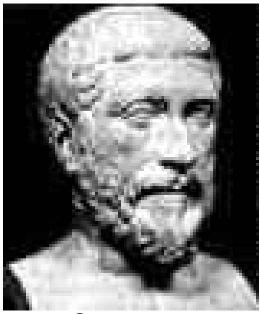
অনুশীলনী—1.1

1. 0 (শূন্য) কি একটি মূলদ সংখ্যা ? এটিকে কি $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p ও q হল অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$?
2. 3 এবং 4 এর মধ্যবর্তী 6 টি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করো।
3. $\frac{3}{5}$ ও $\frac{4}{5}$ এর মধ্যবর্তী 5 টি মূলদ সংখ্যা নির্ণয় করো।
4. নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সত্য না মিথ্যা বলো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।
   (i) প্রত্যেকটি স্বাভাবিক সংখ্যাই হল একটি সমগ্র সংখ্যা।
   (ii) প্রত্যেকটি অখণ্ড সংখ্যাই হল একটি সমগ্র সংখ্যা।
   (iii) প্রত্যেকটি মূলদ সংখ্যাই হল একটি সমগ্র সংখ্যা।

1.2 অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers) :

আমরা পূর্বের অনুচ্ছেদে দেখেছি যে, সংখ্যারেখায় মূলদ সংখ্যা ছাড়াও আরো সংখ্যা রয়েছে। এই অনুচ্ছেদে আমরা এই সংখ্যাগুলোর অনুসন্ধান করব। এতক্ষণ পর্যন্ত যে সমস্ত সংখ্যার সংস্পর্শে তোমরা এসেছ তারা সবাই $\frac{p}{q}$ আকারের, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$, তাই তোমরা জিজ্ঞেস করতে পারো এরূপ আকার হয় না, এমন কোনো সংখ্যা আছে কি? প্রকৃতপক্ষে এ ধরনের সংখ্যা আছে।

বিখ্যাত গণিতবিদ্ এবং দার্শনিক পিথাগোরাসের অনুগামীরা 400 খ্রিস্ট পূর্বাব্দে সর্বপ্রথম আবিষ্কার করেছিলেন, এমন সংখ্যা আছে যারা মূলদ নয়। এ সংখ্যাগুলোকে বলা হয় অমূলদ সংখ্যা, কারণ এ সংখ্যাগুলোকে দুটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত আকারে লেখা যায় না। পিথাগোরাসের একজন অনুগামী ক্রটনের অধিবাসী হিপ্পাকাস কর্তৃক অমূলদ সংখ্যার আবিষ্কার সম্পর্কে নানা উপকথা প্রচলিত আছে। এইসব উপকথার মধ্যে পিথাগোরাসপন্থী ছাড়া সর্বপ্রথম হিপ্পাকাস জনসাধারণের কাছে $\sqrt{2}$ এর যে গোপন তথ্যটি পরিবেশন করেছিলেন বা $\sqrt{2}$ যে অমূলদ সংখ্যা তা আবিষ্কার করায় তাঁর দুর্ভাগ্যজনক পরিণতি হয়েছিল।



পিথাগোরাস
(খ্রিস্টপূর্ব **569 – 479**)
চিত্র : **1.3**

প্রচলিত প্রথা অনুযায়ী, এ সংখ্যাগুলোর সংজ্ঞা দেওয়া যাক।

একটি সংখ্যা 's' কে অমূলদ বলা হবে, যদি s কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা না যায়, যেখনে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

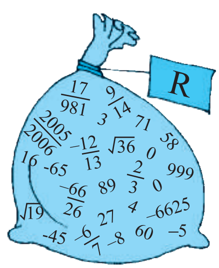
তোমরা ইতিমধ্যে জেনেছ যে, অসংখ্য মূলদ সংখ্যা রয়েছে। এটা হতে বুঝা যায় যে, অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও রয়েছে। উদাহরণস্বরূপ : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi$, 0.10110111011110...

মন্তব্য : মনে রাখবে যখন আমরা '$\sqrt{\ }$' চিহ্নটি ব্যবহার করি, আমরা ধরে নিই এটা সংখ্যার ধনাত্বক বর্গমূল। সুতরাং $\sqrt{4} = 2$, যদিও 2 এবং -2, 4 এর বর্গমূল।

উপরে উল্লেখিত কিছু অমূলদ সংখ্যা তোমাদের খুব পরিচিত। উদাহরণস্বরূপ, ইতিমধ্যে তোমরা উপরে উল্লেখিত অনেক সংখ্যার বর্গমূল পেয়েছ এবং π সম্পর্কে জেনেছ।

পিথাগোরিয়ানরা প্রমাণ করেছিলেন $\sqrt{2}$ অমূলদ। পরবর্তী সময়ে প্রায় 425 খ্রি. পূর্বাব্দে সাইরেনির (Cyrene) থিওডরাস (Theodorus) প্রমাণ করেছিলেন $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ এবং $\sqrt{17}$ অমূলদ সংখ্যা। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলি যে অমূলদ তা দশম শ্রেণিতে আলোচনা করা হবে । π এর ক্ষেত্রে হাজার হাজার বছর ধরে বিভিন্ন ধরনের অনুশীলনের পর 1700 খ্রিস্টাব্দের শেষভাগে একমাত্র ল্যামবার্ট (Lambert) এবং লিজেন্ডার প্রমাণ করেছিলেন π একটি অমূলদ সংখ্যা। পরবর্তী পর্যায়ে, আমরা আলোচনা করব কেন 0.10110111011110... এবং π অমূলদ সংখ্যা।

পূর্ববর্তী পর্যায়ের শেষের দিকে উত্থাপিত প্রশ্নে ফিরে আসা যাক।



মূলদ সংখ্যার ব্যাগটির কথা মনে করো। যদি আমরা সব অমূলদ সংখ্যাগুলোকে ব্যাগে রাখি তবে কি কোনো সংখ্যা, সংখ্যারেখায় উদ্বৃত্ত থাকবে? উত্তরটি হবে, না। এটা হতে বুঝা যায় যে, সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যার সংগ্রহ একত্রে হল বাস্তব সংখ্যার (*real numbers*) সংগ্রহ, যা **R** দিয়ে সূচিত করা হয়। সুতরাং, একটি বাস্তব সংখ্যা হয় মূলদ অথবা অমূলদ। তাই, আমরা বলতে পারি যে, **প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাকে সংখ্যা রেখার উপর অনন্য বিন্দু দিয়ে উপস্থাপন করা যায়। আরো বলা যায়, সংখ্যা রেখার উপর প্রতিটি বিন্দুই একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা।** এজন্য সংখ্যা রেখাকে আমরা বাস্তব সংখ্যা রেখা বলি।

R. Dedekind (1831-1916)
আর. ডেডিকাইন্ড
চিত্র 1.4

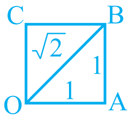
1870 খ্রিস্টাব্দে দুজন জার্মান গণিতজ্ঞ ক্যান্টর (Cantor) এবং ডেডিকাইন্ড (Dedekind) প্রমাণ করেছিলেন : প্রতিটি বাস্তব সংখ্যার জন্য বাস্তব সংখ্যা রেখার উপর একটি বিন্দু আছে এবং এই সংখ্যা রেখার উপর প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য একটি করে স্বতন্ত্র বাস্তব সংখ্যা আছে।

G. Cantor (1845-1918)
জি. ক্যান্টর
চিত্র 1.5

চল, আমরা দেখি অমূলদ সংখ্যাগুলোকে কিভাবে সংখ্যা রেখায় চিহ্নিত করা যায়।

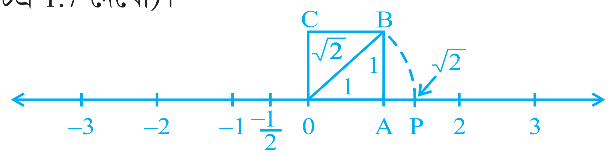
উদাহরণ 3 : সংখ্যা রেখায় $\sqrt{2}$ এর অবস্থান উপস্থাপন করো।

সমাধান : এটি দেখানো সহজ যে $\sqrt{2}$ কে গ্রিকরা কিভাবে আবিষ্কার করেছিল। OABC একটি বর্গক্ষেত্র বিবেচনা করো, যার প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক (চিত্র 1.6 দেখো)। তাহলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে তোমরা দেখতে পাবে OB = $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ । আমরা কীভাবে $\sqrt{2}$ কে সংখ্যা রেখার উপর প্রদর্শন করব?



চিত্র **1.6**

এটি সহজ। চিত্র 1.6 কে সংখ্যা রেখার উপর এমনভাবে বসাই যাতে শীর্ষবিন্দু O শূন্যের সাথে সমাপতিত হয়। (চিত্র 1.7 দেখো)।

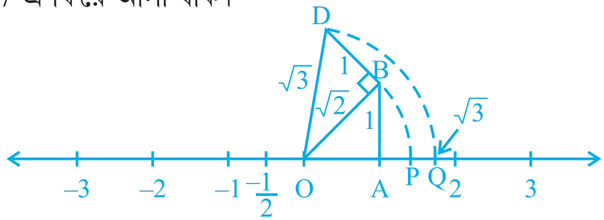


চিত্র **1.7**

আমরা দেখলাম যে OB = $\sqrt{2}$ । O কে কেন্দ্র করে OB ব্যাসার্ধ নিয়ে কম্পাসের সাহায্যে একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল যা সংখ্যা রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব P বিন্দুটি সংখ্যা রেখার উপর $\sqrt{2}$ এর অনুরূপ বিন্দু।

উদাহরণ 4 : সংখ্যা রেখার উপর $\sqrt{3}$ এর অবস্থান প্রদর্শন করো।

সমাধান : চিত্র 1.7 এ ফিরে আসা যাক।



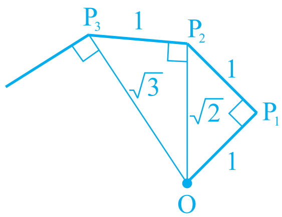
চিত্র **1.8**

OB এর উপর একক দৈর্ঘ্যের BD লম্ব অঙ্কন করি (চিত্র 1.8 এর মত)। পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে, আমরা দেখি OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$, ‘ O’কে কেন্দ্র করে OD ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকা হল যা সংখ্যারেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। Q হল $\sqrt{3}$ এর অনুরূপ বিন্দু।

এইভাবে একটি ধনাত্বক অখণ্ড সংখ্যা n এর জন্য $\sqrt{n-1}$ কে নির্দেশ করে, তোমরা $\sqrt{n}$ কে নির্দেশ করতে পারবে।

অনুশীলনী -1.2

1. নিম্নলিখিত উক্তিগুলো সত্য না মিথ্যা বলো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও :
   (i) প্রতিটি অমূলদ সংখ্যা একটি বাস্তব সংখ্যা।
   (ii) সংখ্যারেখার উপর প্রতিটি বিন্দুই $\sqrt{m}$ জাতীয় সংখ্যাকে সূচিত করে, যেখানে m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।
   (iii) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা একটি অমূলদ সংখ্যা।
2. সব ধনাত্বক অখণ্ড সংখ্যার বর্গমূল কি অমূলদ সংখ্যা? যদি না হয় তবে একটি এমন সংখ্যার উদাহরণ দাও যার বর্গমূল একটি মূলদ সংখ্যা।
3. কীভাবে $\sqrt{5}$ কে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করা যায় দেখাও।
4. **শ্রেণিকক্ষের কার্যকলাপ (সর্পিল (spiral) আকৃতির বর্গমূল অঙ্কন) :** একটি বড় কাগজের টুকরো নাও এবং নিম্নরূপে 'সর্পিল বর্গমূল' অঙ্কন করো। O বিন্দু থেকে শুরু করো একক দৈর্ঘ্যের OP_1 রেখাংশ অঙ্কন করো। OP_1 এর উপর একক দৈর্ঘ্যের আরেকটি লম্ব P_1P_2 রেখাংশ অঙ্কন করে (চিত্র 1.9 দেখো)। এখন OP_2 এর উপর পুনরায় এক একক বিশিষ্ট লম্ব P_2P_3 রেখাংশ অঙ্কন করো। আবার OP_3 এর উপর এক একক বিশিষ্ট আরও একটি লম্ব P_3P_4 রেখাংশ অঙ্কন করো। এরূপে অগ্রসর হলে, তোমরা একক দৈর্ঘ্যের $P_{n-1}P_n$ রেখাংশ অঙ্কন করতে পারবে যা OP_{n-1} এর উপর লম্ব। এরূপে তোমরা P_2, P_3,...., P_n,... বিন্দুগুলো তৈরি করে এবং তাদের যুক্ত করে একটি সুন্দর সর্পিল আকৃতি পাবে যেটি $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ ...কে চিহ্নিত করে।



চিত্র 1.9 : 'সর্পিল বর্গমূল' অঙ্কন

1.3 বাস্তব সংখ্যা এবং তাদের দশমিক বিস্তার :

এ বিভাগে আমরা মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যাকে অন্যভাবে আলোচনা করব। আমরা মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার দেখব এবং এই বিস্তার মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা পার্থক্য নিরূপণ করতে ব্যবহার করব। আমরা আরো আলোচনা করব কিভাবে দশমিক বিস্তার ব্যবহার করে বাস্তব সংখ্যাকে সংখ্যারেখার উপর দৃষ্টিগোচর করা যায়। যেহেতু মূলদ সংখ্যা আমাদের কাছে বেশি পরিচিত, তাই চলো তাদের দিয়ে শুরু করি। তিনটি উদাহরণ নেওয়া যাক : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$

ভাগশেষের প্রতি বিশেষ মনোযোগ দাও এবং দেখো কোনো নমুনা খুঁজে পাও কি না।

উদাহরণ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}$ এবং $\frac{1}{7}$ এর দশমিক বিস্তার নির্ণয় করো ।

সমাধান 5 :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333\ldots \\ \hline 3 & 10 \\ & \ \ 9 \\ \hline & \ \ 10 \\ & \ \ \ \ 9 \\ \hline & \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ 9 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 9 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & \ \ 60 \\ & \ \ 56 \\ \hline & \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ 40 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857\ldots \\ \hline 7 & 1.0 \\ & \ \ 7 \\ \hline & \ \ 30 \\ & \ \ 28 \\ \hline & \ \ \ \ 20 \\ & \ \ \ \ 14 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ 60 \\ & \ \ \ \ \ \ 56 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ 40 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ 35 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 \\ & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 49 \\ \hline & \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 1 \end{array}$$

ভাগশেষগুলো : 1, 1, 1, 1, 1...
ভাজক : 3

ভাগশেষগুলো : 6, 4, 0
ভাজক : 8

ভাগশেষগুলো: 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1,...
ভাজক : 7

তোমরা কি লক্ষ করলে ? তোমরা অবশ্যই অন্তত তিনটি বিষয় লক্ষ করেছ :

i) একটি নির্দিষ্ট স্তরের পর ভাগশেষ শূন্য হবে বা তাদের পুনরাবৃত্তি শুরু হবে।

ii) ভাগশেষে বারবার আবির্ভাব হওয়া অঙ্কের সংখ্যা ভাজক থেকে ছোট ($\frac{10}{3}$ তে একটি সংখ্যা বারবার আসে এবং ভাজক হল 3, $\frac{1}{7}$ তে ভাগশেষে 6 টি অঙ্ক 326451 বারবার ভাগফলে পেয়ে থাকি এবং ভাজক হবে 7)।

iii) যদি ভাগশেষের পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে আমরা একই সংখ্যা বারবার পেয়ে থাকি। (যেমন $\frac{10}{3}$ এ ভাগফলে 3 এর পুনরাবৃত্তি ঘটে এবং $\frac{1}{7}$ এর ক্ষেত্রে ভাগফলে 142857 বারবার পেয়ে থাকি।)

যদিও আমরা উপরের উদাহরণগুলো থেকে এই নমুনাটি লক্ষ করলাম তবুও এটি $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ আকারের সকল মূলদ সংখ্যার ক্ষেত্রে সত্য। p কে q দিয়ে ভাগ করে দুটি বিষয় হতে পারে— হয় ভাগশেষ শূন্য হবে অথবা ভাগশেষ কখনো শূন্য নয় এবং আমরা একটি ভাগশেষের শ্রেণি পাব যা পুনরাবৃত্তি হয়। প্রত্যেকটি বিষয় পৃথকভাবে লক্ষ করা যাক।

ক্ষেত্র 1 : ভাগশেষ শূন্য (0) হলে

উদাহরণ $\frac{7}{8}$, এ কয়েকধাপ পর ভাগশেষ শূন্য হয় এবং $\frac{7}{8}$ এর দশমিক বিস্তার 0.875। অন্য উদাহরণগুলো হল $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$। এ সবগুলো ক্ষেত্রে দশমিক বিস্তারের অবসান ঘটে অথবা সসীম সংখ্যক ধাপের পর সমাপ্তি ঘটে। এই সকল দশমিক বিস্তারের সংখ্যাগুলোকে আমরা সসীম দশমিক বলব।

ক্ষেত্র 2 : ভাগশেষ কখনও শূন্য (0) না হলে—

$\frac{10}{3}$ এবং $\frac{1}{7}$ এর উদাহরণের ক্ষেত্রে আমরা লক্ষ করি যে একটি নির্দিষ্ট ধাপের পর ভাগশেষগুলো পুনরাবৃত্ত হওয়ায় দশমিক বিস্তার অসীমভাবে চলতে থাকে। অন্যভাবে বলতে হলে ভাগফলে একই অঙ্কগুলোর সারি আবৃত্ত হয়। এ ধরনের বিস্তৃতিকে আমরা বলতে পারি অসীম আবৃত্ত দশমিক।

উদাহরণস্বরূপ, $\frac{10}{3} = 3.3333...$ এবং $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$। $\frac{10}{3}$ এর ভাগফলের ক্ষেত্রে 3 এর পুনরাবৃত্তি ঘটাকে সাধারণভাবে $3.\bar{3}$ লিখা হয়। অনুরূপে $\frac{1}{7}$ এর ভাগফলের ক্ষেত্রে আবৃত্ত অঙ্কগুলোর সারি হল 142857। $\frac{1}{7}$ কে আমরা লিখতে পারি $0.\overline{142857}$, এখানে অঙ্কগুলোর উপরে একটি রেখা দেওয়ার (বার) অর্থ হল এই অঙ্ক সারিটি আবৃত্ত। এভাবে 3.57272... কে লেখা যায় $3.5\overline{72}$। সুতরাং, সমস্ত উদাহরণগুলো আমাদের অসীম আবৃত্ত দশমিক বিস্তারের ধারণা দেখ। তাহলে আমরা দেখতে পাই যে মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তারকে দুইভাবে প্রকাশ করা যায় : হয় সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত।

এখন অন্যভাবে বললে, ধরে নাও, তুমি সংখ্যারেখার উপর দিয়ে হাঁটার সময় একটি সংখ্যা 3.142678 পাবে, যার দশমিক বিস্তার সসীম অথবা অপর একটি সংখ্যা 1.272727... বা $1.\overline{27}$ পাবে, যার দশমিক বিস্তার অসীম আবৃত্ত, তুমি কি সিদ্ধান্ত নিতে পার যে, এটি কি একটি মূলদ সংখ্যা? উত্তর হল হ্যাঁ।

আমরা এটি প্রমাণ করব না, কিন্তু কিছু উদাহরণের সাহায্যে এই বিষয়টির বর্ণনা করব। সসীম দশমিক ক্ষেত্রগুলো সহজ।

উদাহরণ 6 : দেখাও যে, 3.142678 একটি মূলদ সংখ্যা, অন্যভাবে 3.142678 কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।

সমাধান : আমাদের আছে $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$, এবং তাই এটি একটি মূলদ সংখ্যা।

এখন অসীম আবৃত্ত দশমিক বিস্তার নেওয়া যাক।

উদাহরণ 7 : দেখাও যে, $0.3333... = 0.\bar{3}$ কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$।

সমাধান : যেহেতু $0.\bar{3}$ কি আমরা জানি না তাই চলো এটাকে 'x' ধরি এবং তাই $x = 0.3333...$ এখন এখানে কি কৌশল ব্যবহার করা যায় দেখো,

$$10x = 10 \times (0.333...) = 3.333...$$

এখন , $3.3333... = 3 + x$, যেহেতু $x = 0.3333.$

সুতরাং, $10x = 3 + x$

x এর জন্য সমাধান করে আমরা পাই

$$9x = 3, \text{ অর্থাৎ }, x = \frac{1}{3}$$

উদাহরণ 8 : দেখাও যে, $1.272727... = 1.\overline{27}$ কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$।

সমাধান : ধরি $x = 1.272727...$ যেহেতু দুটি অঙ্ক আবৃত্ত , আমরা x কে 100 দ্বারা গুণ করে পাই

$$100x = 127.2727...$$

বা, $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

বা, $100x - x = 126,$

বা, $99x = 126$

বা, $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

বিপরীতভাবে তোমরা যাচাই করো যে, $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

উদাহরণ 9 : দেখাও যে, $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$।

সমাধান : ধরি $x = 0.2\overline{35}$। এখানে লক্ষ করো 2 অনাবৃত্ত, কিন্তু সারি 35 আবৃত্ত। যেহেতু দুটি অঙ্ক আবৃত্ত, আমরা x কে 100 দ্বারা গুণ করে পাই,

$$100x = 23.53535...$$

বা, $$100x = 23.3 + 0.23535...$$

$$= 23.3 + x$$

বা, $$99x = 23.3$$

বা, $$99x = \frac{233}{10} \quad \text{সুতরাং,} \quad x = \frac{233}{990}$$

বিপরীতভাবে তোমরা যাচাই করো যে $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

সুতরাং, প্রতিটি অসীম আবৃত্ত দশমিক বিস্তারের সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় $(q \neq 0)$, যেখানে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা। চলো প্রাপ্ত ফলাফলগুলোকে সংক্ষিপ্ত আকারে নিম্নরূপে প্রকাশ করি :

মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার হয় সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত। অধিকন্তু যে সংখ্যার দশমিক বিস্তার সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত তারা মূলদ।

সুতরাং, আমরা এখন জানি মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার কিরূপ হতে পারে? উপরোক্ত ধর্মের জন্য, আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, তাদের দশমিক বিস্তার হবে অসীম অনাবৃত্ত। সুতরাং, অমূলদ সংখ্যার ধর্ম হবে, উপরে আলোচিত মূলদ সংখ্যার ধর্মের অনুরূপ।

অমূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার হবে অসীম অনাবৃত্ত। তদুপরি যে সংখ্যার দশমিক বিস্তার অসীম অনাবৃত্ত সেই সংখ্যা অমূলদ।

পূর্ববর্তী অংশ হতে মনে করো $s = 0.10110111011110...$ লক্ষ করো এটা অসীম এবং অনাবৃত্ত। সুতরাং, উপরিউক্ত ধর্ম হতে বোঝা যায়, এটা অমূলদ। অধিকন্তু, s এর অনুরূপ তোমরা অসংখ্য অমূলদ সংখ্যা তৈরি করতে পারো। পরিচিত অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}$ এবং π এর ক্ষেত্রে কী হবে? এখানে তাদের দশমিক বিস্তার একটি নির্দিষ্ট অবস্থা পর্যন্ত দেওয়া হল।

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420 96...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

(বিশেষ দ্রষ্টব্য, আমরা প্রায়ই π এর আসন্ন মান $\frac{22}{7}$ ধরি, কিন্তু $\pi \neq \frac{22}{7}$)

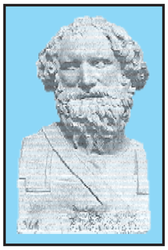
বহু বছর ধরে গণিতবিদরা বিভিন্ন কৌশল ব্যবহার করে অমূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তারে অনেক অনেক অঙ্ক পর্যন্ত (digits) প্রসার করেছেন।

উদাহরণস্বরূপ তুমি হয়তো ভাগ পদ্ধতিতে $\sqrt{2}$ এর দশমিক বিস্তারের অঙ্কগুলো বের করতে শিখেছ। চিত্তাকর্ষক ভাবে, সল্বসূত্রের (Sulbasutras) মধ্যে (জ্যার নিয়ম) যা বৈদিক যুগের (800 খ্রি. পূ.– 500 খ্রি. পূ.) গণিতের একটি নিবন্ধে তোমরা দেখতে পাবে $\sqrt{2}$ এর আসন্ন মান নিম্নরূপ :

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=1.4142156$$

লক্ষ করো এটা উপরোক্ত $\sqrt{2}$ -এর মানের প্রথম পাঁচ দশমিক স্থানের সমান। π এর দশমিক বিস্তারের অঙ্ক সম্পর্কিত হান্টের ইতিহাস খুব মজাদার।

গ্রিকের পণ্ডিত আর্কিমিডিস (Archimedes) সর্বপ্রথম π এর দশমিক বিস্তারে অঙ্কগুলো গণনা করেন। তিনি দেখিয়েছিলেন $3.140845 < \pi < 3.142857$। বিখ্যাত ভারতীয় গণিতজ্ঞ ও জ্যোতির্বিদ আর্যভট্ট (খ্রিস্টাব্দ 476 – 550), π এর সঠিক মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত (3.1416) বের করেছিলেন। দ্রুতগতি কম্পিউটার এবং উন্নত অ্যালগোরিদম (algorithms) ব্যবহার করে π এর মান 1.24 ট্রিলিয়ন দশমিক স্থান পর্যন্ত পাওয়া গেছে।



আর্কিমিডিস (**খ্রি: পূর্ব 287 – 212)**

চিত্র **1.10**

এখন চলো দেখি কী করে অমূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়।

উদাহরণ 10 : $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{2}{7}$ এর মধ্যবর্তী একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করো।

সমাধান : আমরা দেখেছি, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$। সুতরাং, তোমরা সহজেই হিসাব করতে পারো $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$। $\frac{1}{7}$ এবং $\frac{2}{7}$ এর মধ্যবর্তী একটি অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করার জন্য, এদের মধ্যবর্তী একটি সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে যা অসীম অনাবৃত্ত।

অবশ্যই তুমি এরূপ অসংখ্য সংখ্যা নির্ণয় করতে পার।
এমন একটি সংখ্যার উদাহরণ হল– 0.15015001500015000...

অনুশীলনী-1.3

1) নিম্নলিখিত অঙ্কগুলোকে দশমিকে প্রকাশ করো এবং প্রত্যেকটি কী ধরনের দশমিক বিস্তার লেখো :

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

(iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2) তোমরা জান, $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ প্রকৃত দীর্ঘ ভাগ প্রক্রিয়া না করে তুমি কি $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ এর দশমিক বিস্তার হিসাব করতে পারো? যদি পারো তবে কীভাবে ?

[**সংকেত :** $\frac{1}{7}$ এর মান বের করার সময় ভাগশেষগুলো লক্ষ করো]

3) নিম্নলিখিত অঙ্কগুলোকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো। যেখানে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$.

(i) $0.\bar{6}$ (ii) $0.4\bar{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4) 0.99999 ... কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো। তোমার প্রাপ্ত উত্তরে কি বিস্মিত? তোমার শিক্ষক এবং সহপাঠীদের সঙ্গে আলোচনা করো এরূপ উত্তর কেন হল?

5) $\frac{1}{17}$ এর দশমিক বিস্তারে আবৃত্ত অঙ্গগুলোর সারিতে সর্বোচ্চ অঙ্ক সংখ্যা কত হতে পারে? ভাগ প্রক্রিয়া ব্যবহার করে তোমরা উত্তরটি যাচাই করো।

6) $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ আকারের বিভিন্ন মূলদ সংখ্যা লক্ষ করো। যেখানে, p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং তাদের মধ্যে 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই এবং এরা সসীম দশমিক সংখ্যা। q কী ধরনের ধর্ম সিদ্ধ করবে তা কি তোমরা অনুমান করতে পারো?

7) তিনটি সংখ্যা লেখো যার দশমিক বিস্তার অসীম অনাবৃত্ত।

8) $\frac{5}{7}$ এবং $\frac{9}{11}$ এর মধ্যবর্তী তিনটি ভিন্ন অমূলদ সংখ্যা নির্ণয় করো।

9) নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলো মূলদ না অমূলদ তা শ্রেণি বিভাগ করো :

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

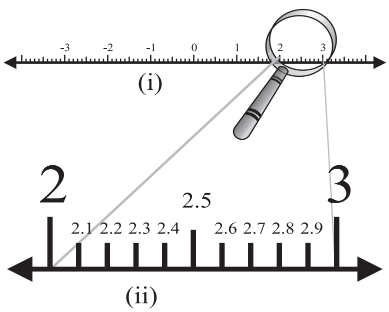
(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 সংখ্যা রেখায় বাস্তব সংখ্যার উপস্থাপন :

পূর্ববর্তী বিভাগে, তোমরা দেখেছ, যে কোনো বাস্তব সংখ্যার দশমিক বিস্তার আছে।

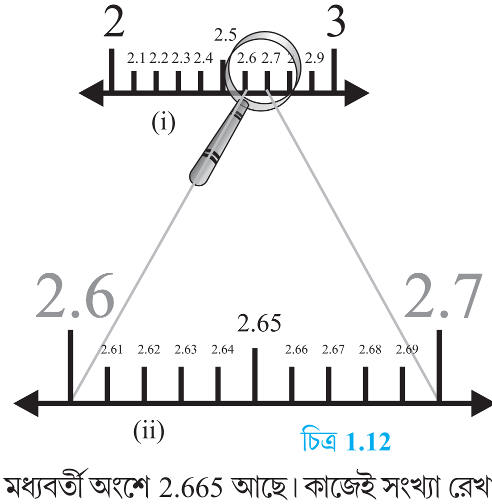
এটি আমাদের সাহায্য করে মূলদ সংখ্যাকে সংখ্যা রেখায় স্থাপন করতে। চলো দেখি কীভাবে।

ধরো 2.665 কে আমরা সংখ্যা রেখায় দেখাতে চাই। আমরা জানি, এটি 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী।



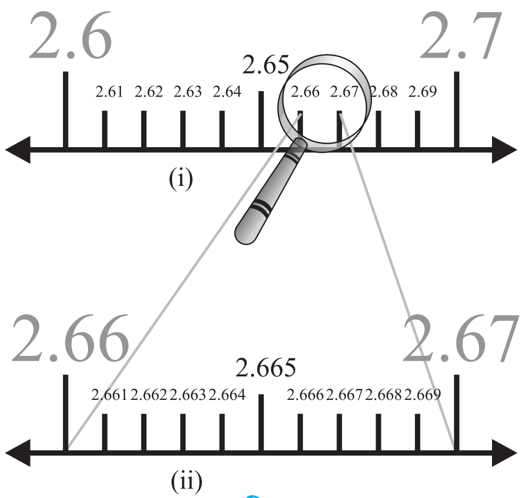
চিত্র **1.11**

কাজেই, সংখ্যা রেখায় 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী অংশের দিকে আমরা লক্ষ করব। ধরো, এই অংশকে 10 টি সমান অংশে ভাগ করা হল এবং 1.11 (i) নং চিত্রের প্রত্যেক ভাগকে চিহ্নিত করা হল। তাহলে 2 এর ডানদিকে প্রথম চিহ্নিত স্থান নির্দেশ করে 2.1, দ্বিতীয় স্থান নির্দেশ করে 2.2 ইত্যাদি। 1.11 (i) নং চিত্রে তোমাদের হয়তো 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী চিহ্নিত এই বিন্দুগুলোকে পর্যবেক্ষণ করতে অসুবিধা হবে। 2 এবং 3 এর মধ্যবর্তী অংশটি লক্ষ করো এবং স্পষ্টভাবে দেখার জন্য বিবর্ধক কাচ ব্যবহার করতে পারো। এটি 1.11 (i) নং চিত্রের মতো দেখা যাবে। এখন 2.6 এবং 2.7 এর মধ্যবর্তী হল 2.665। সুতরাং, 2.6 এবং 2.7 এর মধ্যবর্তী অংশে বিবর্ধক কাচটি কেন্দ্রীভূত করব। আমরা কাল্পনিকভাবে এই অংশটিকে আবার সমান দশটি অংশে ভাগ করে নেই। প্রথম চিহ্নিত স্থান 2.61 পরবর্তী 2.62 ইত্যাদি। এটি স্পষ্টভাবে দেখার জন্য আমরা 2.6 এবং 2.7 এর মধ্যবর্তী অঞ্চল আরো বিবর্ধন করব [চিত্র1.11 (i)]



চিত্র **1.12**

আবার , 2.66 এবং 2.67 এর মধ্যবর্তী অংশে 2.665 আছে। কাজেই সংখ্যা রেখায় এই অংশটি আরো বড় করে দেখাব (চিত্র 1.13 (i) দেখো) এবং এটিকে কাল্পনিকভাবে পুনরায় দশটি সমান অংশে ভাগ করব। স্পষ্টভাবে দেখার জন্য আমরা এই অংশটিকে আরো বিবর্ধন করব (চিত্র 1.13 (ii))। প্রথম অংশ নির্দেশ করবে 2.661, পরবর্তী অংশ 2.662 ইত্যাদি। এইভাবে পঞ্চম চিহ্নিত ভাগ হচ্ছে 2.665।



চিত্র **1.13**

সংখ্যা রেখায়, **বিবর্ধক কাচের সাহায্যে** এইভাবে সংখ্যার প্রতিরূপ দর্শন করার পদ্ধতিকে আমরা বলি ক্রমবিবর্ধন পদ্ধতি।

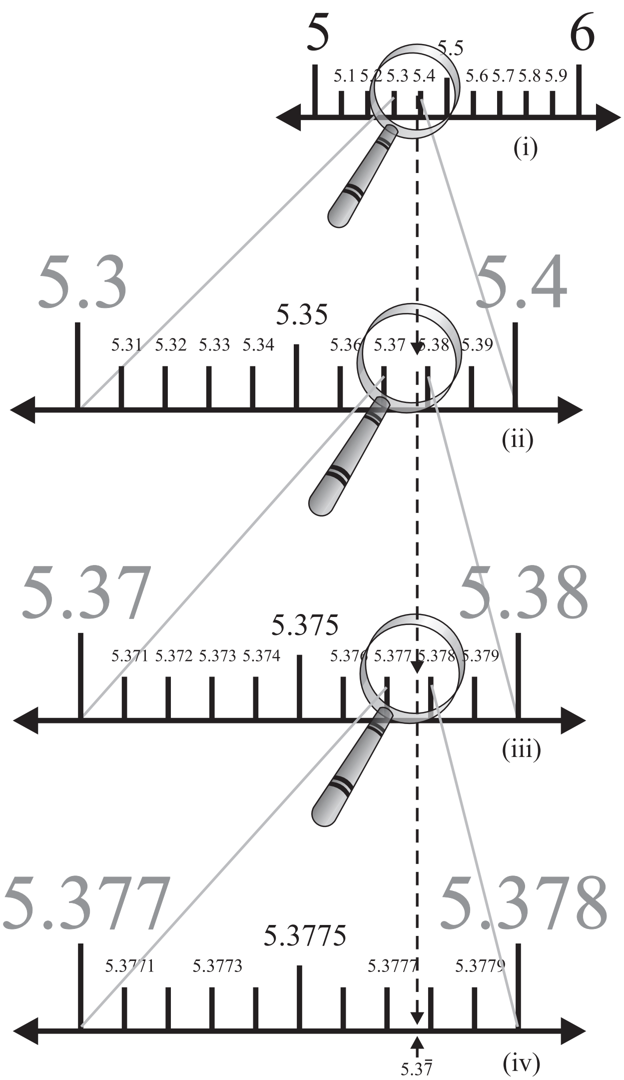
কাজেই, আমরা দেখলাম যে বাস্তব সংখ্যার সসীম দশমিক সংখ্যার বিস্তার পরপর ক্রমবিবর্ধনের মাধ্যমে সংখ্যা রেখার উপর এর অবস্থান প্রদর্শন করা সম্ভব।

দশমিক সংখ্যার বিস্তারকে সংখ্যা রেখার উপর প্রদর্শন করার চেষ্টা করব। আমরা বিবর্ধক কাচের সাহায্যে তা ক্রমবিবর্ধনের মাধ্যমে সংখ্যা রেখার উপর সংখ্যার অবস্থান প্রদর্শন করতে পারি।

উদাহরণ 11 : সংখ্যা রেখার উপর $5.3\overline{7}$ কে 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত উপস্থাপন করো অর্থাৎ, 5.37777 পর্যন্ত।

সমাধান : আমরা পুনরায় ক্রমবিবর্ধনের পথে যাব এবং ক্রমান্বয়ে সংখ্যা রেখার যে অংশে 5.37 অবস্থিত, সেই অংশের দৈর্ঘ্যকে হ্রাস করে অগ্রসর হব। প্রথমত, আমরা দেখি 5 এবং 6 এর মধ্যে $5.3\overline{7}$ অবস্থিত। পরবর্তী ধাপে 5.3 এবং 5.4 এর মধ্যে $5.3\overline{7}$ কে দেখাব। সঠিকভাবে উপস্থাপন করতে হলে, এই অংশটিকে আমরা সমান দশটি অংশে ভাগ করব এবং বিবর্ধক কাচ ব্যবহার করে দেখব। 5.37 এবং 5.38 এর মধ্যে $5.3\overline{7}$ অবস্থিত। $5.3\overline{7}$ কে আরও সঠিকভাবে দৃশ্যমান করার জন্য, আমরা পুনরায় 5.37 এবং 5.38 এর মধ্যবর্তী অংশকে 10 টি সমানভাগে ভাগ করি এবং 5.377 ও 5.378 এর মধ্যবর্তী $5.3\overline{7}$ এর অবস্থান বিবর্ধক কাচের (magnifying glass) সাহায্যে দেখতে পারি। এখন $5.3\overline{7}$ কে আরও সঠিকভাবে দেখার জন্য, 5.377 এবং 5.378 এর মধ্যবর্তী অংশকে 10টি সমান অংশে ভাগ করি এবং $5.3\overline{7}$ এর অবস্থান নির্দেশিত হয়। (চিত্র **1.14(iv)** এর মতো)।

লক্ষ করো $5.3\overline{7}$ এর অবস্থান 5.3778 অপেক্ষা 5.3777 এর নিকটবর্তী (চিত্র 1.14 (iv) দেখো)



চিত্র 1.14

মন্তব্য : আমরা এই উপায়ে আনুক্রমিক ভাবে বিবর্ধক কাচের ভিতর দিয়ে দৃষ্টি নিক্ষেপ করে এবং একই সঙ্গে যে সংখ্যা রেখায় $5.3\overline{7}$ অবস্থিত তার হ্রাস কল্পনা করে অবিরামভাবে অগ্রসর হতে পারি। সংখ্যা রেখায় যেসব সংখ্যার অবস্থান দেখানো হয় তার সত্যতার উপর সংখ্যা রেখার অংশের আকার নির্ভর করে।

তোমরা হয়তো এখন বুঝতে পেরেছ, বাস্তব সংখ্যার অসীম অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যার বিস্তারকে সংখ্যা রেখার উপর এই পদ্ধতিতে দেখানো যায়।

উপরের আলোচনার দিকে আলোকপাত এবং দৃষ্টিগোচর করে আমরা পুনরায় বলতে পারি যে, প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যাকে সংখ্যা রেখার উপর একটি অনন্য বিন্দু দ্বারা দেখানো যায়। এছাড়া, সংখ্যা রেখার উপর প্রতিটি বিন্দু একটি এবং কেবলমাত্র একটি বাস্তব সংখ্যাকে নির্দেশ করে।

অনুশীলনী-1.4

1. ক্রমবিবর্ধন পদ্ধতি ব্যবহার করে সংখ্যা রেখার উপর 3.765 কে প্রদর্শন করো।
2. $4.\overline{26}$ কে সংখ্যা রেখার উপর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত প্রদর্শন করো।

1.5 বাস্তব সংখ্যার উপর প্রক্রিয়া সমূহ (Operations on Real Numbers)

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে তোমরা শিখেছ, যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যাগুলো বিনিময়-সূত্র, সংযোগসূত্র এবং বণ্টন-সূত্র সিদ্ধ করে। অধিকন্তু যদি আমরা দুইটি মূলদ সংখ্যাকে যোগ, বিয়োগ, গুণ অথবা ভাগ (শূন্য ছাড়া) করি, তবে মূলদ সংখ্যাই পাব (অর্থাৎ যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগের সাপেক্ষে মূলদ সংখ্যা বদ্ধতাধর্ম সিদ্ধ করে)। আবার অমূলদ সংখ্যাগুলোও বিনিময়, সংযোগ এবং বণ্টন সূত্রগুলোকে যোগ এবং গুণের ক্ষেত্রে সিদ্ধ করে। যদিও অমূলদ সংখ্যাগুলোর যোগফল, বিয়োগফল, ভাগফল এবং গুণফল সবসময় অমূলদ হয় না।

উদাহরণস্বরূপ $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ এবং $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ সংখ্যাগুলো মূলদ।

চলো দেখি, মূলদ সংখ্যার সাথে অমূলদ সংখ্যা যোগ এবং গুণ করলে কি ঘটে। উদাহরণস্বরূপ $\sqrt{3}$একটি অমূলদ সংখ্যা। $2+\sqrt{3}$ এবং $2\sqrt{3}$ এর ক্ষেত্রে কি হবে? $\sqrt{3}$ এর যেমন অসীম অনাবৃত্ত দশমিক বিস্তার হয়। ঠিক তেমনি $2+\sqrt{3}$এবং $2\sqrt{3}$ ক্ষেত্রেও এমনটা হয়। সুতরাং, $2+\sqrt{3}$ এবং $2\sqrt{3}$ উভয়ই অমূলদ সংখ্যা।

উদাহরণ 12 : $7\sqrt{5}$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ এই সংখ্যাগুলো অমূলদ কি না যাচাই করো।

সমাধান : $\sqrt{5} = 2.236...$, $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.1415...$

তাহলে, $7\sqrt{5} = 15.652...$, $\dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304...$

$\sqrt{2} + 21 = 22.4142...$, $\pi - 2 = 1.1415...$

এগুলো সব অসীম অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যা। কাজেই এই সবগুলোই অমূলদ সংখ্যা।

চলো দেখি, অমূলদ সংখ্যাকে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গমূল এবং n তম মূল নির্ণয় করলে কী ঘটে। কিছু উদাহরণ লক্ষ করা যাক।

উদাহরণ 13 : যোগ করো : $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ এবং $\sqrt{2} \quad 3\sqrt{3}$

সমাধান : $\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{2} \quad 3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(5\sqrt{3} \quad 3\sqrt{3}\right)$

$$= (2 + 1)\sqrt{2} + (5 - 3)\sqrt{3} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

উদাহরণ 14 : গুণ করো : $6\sqrt{5}$ কে $2\sqrt{5}$ দ্বারা।

সমাধান : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

উদাহরণ 15 : $8\sqrt{15}$ কে $2\sqrt{3}$ দ্বারা ভাগ করো।

সমাধান : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3} \times \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

এই উদাহরণগুলো থেকে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো প্রত্যাশা করতে পারো, **যেগুলো সত্য** :

i) মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার যোগফল অথবা বিয়োগফল অমূলদ হবে।

ii) মূলদ সংখ্যার (শূন্য ব্যতিত) সঙ্গো অমূলদ সংখ্যার গুণফল অথবা ভাগফল অমূলদ।

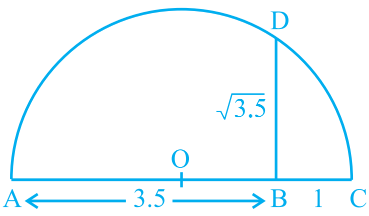
iii) যদি আমরা দুটি অমূলদ সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করি, তবে তাদের ফলাফল হয়তো মূলদ অথবা অমূলদ হবে।

এখন আমরা মূলদ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ে মনোযোগী হব। মনে রেখো, যদি a স্বাভাবিক সংখ্যা হয় তবে $\sqrt{a} = b$ অর্থাৎ $b^2 = a$ এবং $b > 0$ । ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে এই সংজ্ঞা প্রদান করা যায়।

ধরি, $a > 0$ হল একটি বাস্তব সংখ্যা। তাহলে $\sqrt{a} = b$ অর্থাৎ $b^2 = a$ এবং $b > 0$ ।

1.2 পরিচ্ছেদে আমরা দেখেছি কিভাবে যেকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n এর— বর্গমূলকে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন করা যায়—

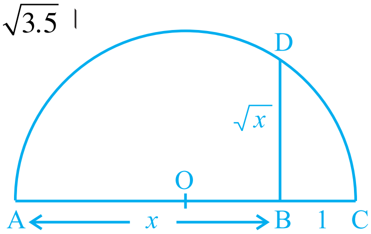
আমরা এখন দেখব কিভাবে জ্যামিতিকভাবে $\sqrt{x}$ বের করতে হয়, যেখানে প্রদত্ত x একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। উদাহরণস্বরূপ $x = 3.5$ এর জন্য এটির মান নির্ণয় করব অর্থাৎ, $\sqrt{3.5}$ এর মান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করব।



চিত্র 1.15

প্রদত্ত রেখায় নির্দিষ্ট বিন্দু A হতে 3.5 একক দূরে বিন্দুকে B দিয়ে চিহ্নিত করা হয় যাতে AB = 3.5 একক হয় (চিত্র 1.15 দেখো)। B হতে 1 একক দূরে চিহ্নিত করো এবং নতুন বিন্দুটিকে C দিয়ে চিহ্নিত করো। AC এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করো এবং বিন্দুটিকে O দিয়ে চিহ্নিত করো। 'O' কে কেন্দ্র করে OC ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করো। AC এর উপর B বিন্দুতে একটি লম্ব আঁকো, যা অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে BD = $\sqrt{3.5}$ ।

সাধারণভাবে, $\sqrt{x}$ নির্ণয় করার জন্য (যেখানে x একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা) আমরা B কে চিহ্নিত করি যাতে AB = x একক হয় এবং চিত্র 1.16 এর মতো, C কে চিহ্নিত করি যাতে BC = 1 একক হয়। তাহলে $x = 3.5$ এর জন্য আমরা যেরূপ করেছিলাম সেভাবে BD = $\sqrt{x}$ পাই (চিত্র 1.16 দেখো)। আমরা এটি পীথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে করতে পারি।



চিত্র 1.16

লক্ষ করো চিত্র 1.16 এ Δ OBD একটি সমকোণী ত্রিভুজ। যেখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\frac{x+1}{2}$ একক

সুতরাং, OC = OD = OA = $\frac{x+1}{2}$ একক।

এখন OB = $x-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}$।

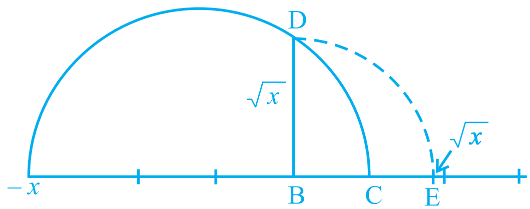
সুতরাং, পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে আমরা পাই

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x \text{ ।}$$

এটি দেখায় যে, BD = $\sqrt{x}$ ।

এই অঙ্কন থেকে আমরা পাই সমস্ত বাস্তব সংখ্যা x ($x > 0$) এর জন্য $\sqrt{x}$ এর অস্তিত্ব আছে যা জ্যামিতিক ভাবে দৃষ্টিগোচর। যদি তোমরা সংখ্যা রেখায় $\sqrt{x}$ এর অবস্থান জানতে চাও, তাহলে B কে 0 (শূন্য), C কে 1 ইত্যাদি ধরে BC কে সংখ্যা রেখা হিসাবে ধরো। B কে কেন্দ্র করে, BD ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো, যা সংখ্যা রেখাটিকে E বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 1.17 দেখো)। তাহলে E হবে $\sqrt{x}$ ।

এখন আমরা বর্গমূলের ধারণাকে ঘনমূল, চতুর্থমূল এবং সাধারণভাবে n তম মূলে প্রসারিত করি।



চিত্র 1.17

যেখানে n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। পূর্বের শ্রেণিতে পাওয়া বর্গমূল এবং ঘনমূলের ধারণাকে স্মরণ করো।

বলতে কি বোঝ? আমরা জানি, এটা হচ্ছে একটি ধনাত্মক সংখ্যা, যার ঘন 8 এবং তোমরা অবশ্য অনুমান করতে পারো $\sqrt[3]{8} = 2$ । এখন, $\sqrt[5]{243}$ এর ক্ষেত্রে চেষ্টা করা যাক। তোমরা কি কোনো সংখ্যা b কে জানো, যেখানে $b^5 = 243$? উত্তর হল 3। সুতরাং, $\sqrt[5]{243} = 3$ ।

এই উদাহরণগুলো থেকে তোমরা কি $\sqrt[n]{a}$ এর সংজ্ঞা নিরূপণ করতে পারো, যেখানে $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা?

ধরি, $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তাহলে $\sqrt[n]{a} = b$, যদি $b^n = a$ এবং $b > 0$ হয়। লক্ষ করো, $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[n]{a}$, ইত্যাদিতে ব্যবহৃত '$\sqrt{\ }$' চিহ্নকে **করণী চিহ্ন** (*radical sign*) বলা হয়ে থাকে।

এখন আমরা বর্গমূল সংক্রান্ত কিছু অভেদের তালিকা প্রস্তুত করব, যেগুলো বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয়। তোমরা ইতিমধ্যে পূর্বের শ্রেণিতে কিছু অভেদ সম্পর্কে অবগত হয়েছ। এদের আরেকটি হল যোগের উপর গুণের বণ্টন সূত্র। যাকে অনুসরণ করে, যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x এবং y এর জন্য, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ অভেদটি পাই।

ধরি, a এবং b ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, তাহলে,

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)=\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+2\sqrt{ab}+b$

চলো এই অভেদগুলোর কয়েকটি বিশেষক্ষেত্র লক্ষ করি।

উদাহরণ 16 : নিম্নলিখিত রাশিমালাকে সরল করো :

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

সমাধান :- (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25\quad 5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

মন্তব্য : লক্ষ করো, উপরের উদাহরণে 'সরল করো' বলতে রাশিগুলোকে মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার যোগফল রূপে লিখতে বলা হয়েছে। নিম্নলিখিত অঙ্কটি দিয়ে আমরা এই বিভাগটি শেষ করব।

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ কে লক্ষ করো, তোমরা কি বলতে পারো সংখ্যা রেখার এটির অবস্থান কোথায় ?

তোমরা জানো এটি হল অমূলদ সংখ্যা। হর মূলদ হলে সুবিধা হত, দেখা যাক, হরের করণী নিরসন (rationalise) করা যায় কি না, অর্থাৎ, হরকে মূলদ সংখ্যায় পরিণত করতে হবে। এটি করার জন্য বর্গমূলের সঙ্গো যুক্ত অভেদের প্রয়োজন। চলো দেখি এটি কিভাবে করা যায়।

উদাহরণ 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর হরের করণী নিরসন করো।

সমাধান : আমরা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ কে এমন একটি সমতুল্য রাশিতে প্রকাশ করতে চাই যার হর একটি মূলদ সংখ্যা। আমরা জানি $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ হল মূলদ সংখ্যা।

আমরা আরো জানি যে,

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ কে $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ দ্বারা গুণ করলে একটি সমতুল্য রাশি পাওয়া যায়, কারণ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ সুতরাং, এই দুটি তথ্যকে একত্রিত করলে আমরা পাই—

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

সংখ্যা রেখায় $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এই আকারের সংখ্যাকে সহজ করে নির্দেশ করা যায়। এটি হল 0 এবং $\sqrt{2}$ এর ঠিক মধ্যে অবস্থিত।

উদাহরণ 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ এর হরের করণী নিরসন করো।

সমাধান : উপরে দেওয়া অভেদ (iv) কে আমরা এখানে প্রয়োগ করব। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ কে $2-\sqrt{3}$ দ্বারা গুণ ও ভাগ করে পাই $\frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$.

উদাহরণ 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ এর হরের করণী নিরসন করো।

সমাধান : এখানে আমরা উপরে প্রদত্ত অভেদ (iii) কে ব্যবহার করব।

সুতরাং, $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

উদাহরণ 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ এর হরের করণী নিরসন করো।

সমাধান : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

সুতরাং, যখন কোনো রাশির হরে বর্গমূলসসসযুক্ত পদ থাকে (অথবা করণী চিহ্নের ভিতরে কোনো সংখ্যা), তখন তাকে মূলদ হর বিশিষ্ট একটি সমতুল্য রাশিতে পরিণত করার পদ্ধতিকে বলা হয় হরের করণী নিরসন।

অনুশীলনী-1.5

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলোর মধ্যে কোনটি মূলদ, কোনটি অমূলদ শ্রেণিবিভাগ করো—

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. প্রদত্ত রাশিগুলোকে সরল করো :-

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. তোমাদের হয়তো মনে আছে, π হল বৃত্তের পরিধি (ধরো c) এবং ব্যাস (ধরো d) এর অনুপাত। অর্থাৎ, $\pi = \dfrac{c}{d}$ । এটা হতে π যে অমূলদ সংখ্যা, এটা মনে হয় তার বিরুদ্ধাচরণ করছে। বিরুদ্ধাচরণের সমাধান কীভাবে করবে?

4. $\sqrt{9.3}$ কে সংখ্যা রেখার উপর উপস্থাপন করো :

5. নিম্নোক্তগুলোর হরের করণী নিরসন করো :

   (i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$

   (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে সূচকের সূত্রাবলী—

তোমাদের কি মনে আছে, নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলোর কীভাবে সরল করতে হয়?

(i) $17^2 . 17^5 =$ (ii) $(5^2)^7 =$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 . 9^3 =$

তোমরা কি এর উত্তরগুলো পেয়েছ? এগুলো নিম্নরূপ :

(i) $17^2 . 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 . 9^3 = 63^3$

এই উত্তরগুলো পাওয়ার জন্য, সূচকের সূত্রাবলী ব্যবহার করেছিলে, যা তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে শিখেছ।

এখানে , a, n এবং m স্বাভাবিক সংখ্যা। মনে রাখবে a হল নিধান এবং m ও n হল সূচক।

(i) $a^m \, . \, a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ কী? এটির মান 1 , তোমরা আগেই শিখেছ $(a)^0 = 1$ সুতরাং (iii) কে ব্যবহার করে আমরা পাই $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, আমরা এই সূত্রগুলোকে ঋণাত্মক সূচকের ক্ষেত্রেও সম্প্রসারণ করতে পারি।

সুতরাং, উদাহরণস্বরূপ :-

(i) $17^2 \cdot 17^{\;5} = 17^{\;3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $(5^2)^{\;7} = 5^{\;14}$

(iii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iv) $(7)^{\;3} \cdot (9)^{\;3} = (63)^{\;3}$

ধরে নাও, আমরা নিচেরগুলো হিসেব (computations) করতে চাই :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

আমরা কীভাবে এগুলোর সমাধান করব? এখানে দেখা যাচ্ছে যে সূচকের সূত্রাবলী যা আমরা পূর্বের শ্রেণিতে শিখেছিলাম তা এখানে প্রয়োগ করা যায়। যেখানে নিধান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং সূচকগুলো মূলদ সংখ্যা (পরে অধ্যয়ন করলে তোমরা জানতে পারবে যে, এই নিয়মগুলো সেখানেও প্রয়োগ করা যায় । যেখানে সূচকগুলো বাস্তব সংখ্যা)।

এই সূত্রগুলো উল্লেখ করার পূর্বে অথবা এই নিয়মগুলো প্রয়োগ করার পূর্বে উদাহরণ স্বরূপ $4^{\frac{3}{2}}$ কী তা বুঝতে হবে। সুতরাং, আমাদের কিছু কাজ করতে হবে।

1.4 পরিচ্ছেদে, a বাস্তব সংখ্যার জন্য $(a > 0)$ $\sqrt[n]{a}$ কে নিম্নরূপে ব্যাখ্যা করা যায়।

ধরি, $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

তাহলে, $\sqrt[n]{a} = b$, যদি $b^n = a$ এবং $b > 0$।

সূচকের ভাষায় $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, সুতরাং $\sqrt[3]{2}$ এর মান $2^{\frac{1}{3}}$ ।

এখন $4^{\frac{3}{2}}$ কে দু-রকমভাবে লিখা যায়— $4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

অতএব, আমাদের প্রাপ্ত সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

ধরি, $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা, ধরি, m এবং n এরূপ অখণ্ড সংখ্যা যেখানে m এবং n এর মধ্যে 1 ছাড়া অন্য কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই, এবং $n > 0$।

তাহলে, $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

অতএব সূচকের বর্ধিত সূত্রাবলি নিম্নরূপ :

ধরি $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং p ও q মূলদ সংখ্যা। তাহলে আমরা পাই—

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

এখন তোমরা এই সূত্রগুলো পূর্বের সমস্যাগুলো সমাধান করার জন্য ব্যবহার করতে পারো।

উদাহরণ 21 : সরল করো : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

সমাধান :

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

অনুশীলনী-1.5

1. মান নির্ণয় করো : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. মান নির্ণয় করো : i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. সরল করো : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\dfrac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 সারসংক্ষেপ :

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পড়েছ :

1. একটি সংখ্যা r কে বলা হবে মূলদ সংখ্যা, যদি এটিকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p এবং q হল অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$।
2. একটি সংখ্যা s কে বলা হবে অমূলদ সংখ্যা যদি এটাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা না যায়, যেখানে p এবং q অখণ্ড সংখ্যা এবং $q \neq 0$ ।
3. মূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার হয় সসীম অথবা অসীম অনাবৃত্ত। অধিকন্তু, একটি সংখ্যার দশমিক বিস্তার সসীম অথবা অসীম আবৃত্ত হলে এটি মূলদ।
4. অমূলদ সংখ্যার দশমিক বিস্তার হবে অসীম অনাবৃত্ত। অধিকন্তু যে সংখ্যার দশমিক বিস্তার অসীম অনাবৃত্ত সেই সংখ্যা অমূলদ।
5. সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা একত্রিত হয়ে বাস্তব সংখ্যার সংগ্রহ হয়।
6. সংখ্যা রেখার উপর প্রত্যেকটি বিন্দুর সাপেক্ষে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা আছে। আবার প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যার সাপেক্ষে সংখ্যা রেখার উপর একটি অনন্য বিন্দু আছে।
7. যদি r মূলদ এবং s অমূলদ হয়, তাহলে, $r+s$ এবং $r-s$ অমূলদ হবে এবং r,s ও $\frac{r}{s}$ অমূলদ, যেখানে $r \neq 0$ ।
8. যে কোনো ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a এবং b এর জন্য নিম্নলিখিত অভেদগুলো সিদ্ধ হয় :

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

   (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

   (v) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ এর হরের করণী নিরসনের জন্য এটিকে আমরা $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ দিয়ে গুণ করি,

যেখানে a এবং b অখণ্ড সংখ্যা।

10. ধরি, $a > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এবং p ও q মূলদ সংখ্যা। তাহলে,

    (i) $a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

    (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

অধ্যায়-2

বহুপদ রাশিমালা (POLYNOMIALS)

2.1 ভূমিকা

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে বীজগাণিতিক রাশিমালার যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ নিয়ে পড়াশোনা করেছ, বীজগাণিতিক রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ কিভাবে করা হয় তাও পড়েছ। তোমরা নিম্নলিখিত বীজগাণিতিক অভেদগুলো এবং উৎপাদক বিশ্লেষণে তাদের প্রয়োগ নিয়ে ভাবতে পারো :

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

এবং
$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

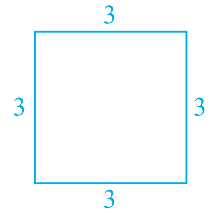
এ অধ্যায়ে আমরা এক বিশেষ ধরণের বীজগাণিতিক রাশিমালা, যাকে বহুপদ রাশিমালা বলা হয় এবং তার সাথে সম্পর্কিত পরিভাষা নিয়ে অধ্যয়ন শুরু করব। *ভাগশেষ উপপাদ্য* ও *গুণনীয়ক উপপাদ্য* এবং বহুপদ রাশিমালায় উৎপাদক বিশ্লেষণ ও তাদের প্রয়োগ নিয়েও অধ্যয়ন করব। উপরন্তু আমরা আরো কিছু বীজগাণিতিক অভেদ ও উৎপাদক বিশ্লেষণ এবং প্রদত্ত রাশিমালার মান নির্ণয়ে তাদের প্রয়োগ সম্বন্ধে অধ্যয়ন করব।

2.2 এক চলবিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা :

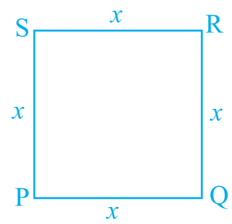
চলো আমরা শুরু করি, তোমরা জান যে একটি চলরাশিকে একটি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় যা যেকোনো বাস্তব মান নিতে পারে। চলরাশিকে প্রকাশ করার জন্য x, y, z ইত্যাদি বর্ণমালা আমরা ব্যবহার করি। লক্ষ করো যে, $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ হলো বীজগাণিতিক রাশিমালা। এই রাশিমালাগুলোর আকার হল, (একটি ধ্রুবক) $\times\, x$। এখন মনে করো আমরা (একটি ধ্রুবক) $\times$ (একটি চল) এই আকারের একটি রাশিমালা লিখতে চাই। এক্ষেত্রে ধ্রুবক পদটিকে আমরা $a, b, c,$ ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশ করি। সুতরাং এক্ষেত্রে রাশিমালাটি হবে ax (ধরো)।

যদিও একটি ধ্রুবক নির্দেশক বর্ণমালা এবং একটি চলরাশি নির্দেশক বর্ণমালার মধ্যে তফাত আছে। কোনো নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে ধ্রুবক পদের মান অপরিবর্তনীয় অর্থাৎ কোনো প্রদত্ত সমস্যায় ধ্রুবকের মানের পরিবর্তন হয় না, কিন্তু চলকের মান পরিবর্তনশীল।

এখন একটি বর্গক্ষেত্র বিবেচনা করো, যার বাহুর দৈর্ঘ্য 3 একক (চিত্র 2.1 দেখো)। তার পরিসীমা কত হবে? তোমরা জান বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা হল চারটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি। এখানে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 একক। সুতরাং এর পরিসীমা হবে 4×3 অর্থাৎ 12 একক। যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 একক হয় তবে এর পরিসীমা কত হবে? পরিসীমা হবে 4×10 অর্থাৎ 40 একক। যে সকল ক্ষেত্রে প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য x একক (চিত্র 2.2 দেখো) সে ক্ষেত্রে বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $4x$ একক। সুতরাং বাহুর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন হলে পরিসীমারও পরিবর্তন হয়।



চিত্র 2.1



চিত্র 2.2

তোমরা কি PQRS বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে? এটা হবে $x \times x = x^2$ বর্গ একক। x^2 হল একটি বীজগাণিতিক রাশিমালা। $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ এ ধরনের বীজগাণিতিক রাশিমালা সম্বন্ধেও তোমাদের পরিচিতি আছে। লক্ষ কর, এতক্ষণ যেসব বীজগাণিতিক রাশিমালা বিবেচনা করা হয়েছে, তাদের চলরাশির-ঘাতের সূচক হলো সমগ্র সংখ্যা। এ ধরনের রাশিমালাকে বলা হয় একচল-বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা। উপরের উদাহরণগুলিতে চল হল x। উদাহরণস্বরূপ, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ হল x এর একটি বহুপদ রাশিমালা। অনুরূপে $3y^2 + 5y$ হল y এর একটি বহুপদ রাশিমালা এবং $t^2 + 4$ হল t চলের একটি বহুপদ রাশিমালা।

$x^2 + 2x$ এই বহুপদ রাশিমালায়, x^2 ও $2x$ এই রাশি দুটিকে বহুপদ রাশিমালার পদ বলা হয়। অনুরূপে $3y^2 + 5y + 7$ রাশিমালায় তিনটি পদ আছে, যারা হল $3y^2$, $5y$ এবং 7। তোমরা কি $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ রাশিমালাটির পদগুলো লিখতে পারো? এ রাশিমালায় চারটি পদ যেমন, $-x^3$, $4x^2$, $7x$ এবং -2 ।

একটি রাশিমালার প্রতিটি পদের একটি করে সহগ আছে। সুতরাং $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ -তে x^3 এর সহগ -1 , x^2 এর সহগ 4 , x এর সহগ 7 এবং x^0 এর সহগ -2 (মনে রেখো, $x^0 = 1$) তোমরা কি জান $x^2 - x + 7$ এই রাশিমালাতে x এর সহগ কত? তা হল -1।

2ও হল একটি বহুপদ রাশিমালা, প্রকৃতপক্ষে 2, -5, 7 ইত্যাদি হল ধ্রুবক রাশিমালার উদাহরণ। ধ্রুবক রাশিমালা 0 কে **শূন্য বহুপদ রাশিমালা** বলে। তোমরা যখন উপরের শ্রেণিতে উঠবে তখন দেখতে পাবে যে বহুপদ রাশিমালার সংগ্রহে এগুলোর গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে।

এখন, $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$, $\sqrt[3]{y} + y^2$ এই বীজগাণিতিক রাশিমালাগুলিকে লক্ষ করো।

তোমরা কি জান যে $x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$ লেখা যায়? এখানে দ্বিতীয় পদের অর্থাৎ x^{-1} এর ঘাত হল -1, যা একটি সমগ্র সংখ্যা নয়। তাই এই বীজগাণিতিক রাশিমালাটি একটি বহুপদ রাশিমালা নয়।

আবার $\sqrt{x} + 3$ কে লেখা যায় $x^{\frac{1}{2}} + 3$, এখানে x এর ঘাত হল $\frac{1}{2}$, যা একটি সমগ্র সংখ্যা নয়। অতএব $\sqrt{x} + 3$ কি একটি বহুপদ রাশিমালা? না, এটি নয়। $\sqrt[3]{y} + y^2$ এর ব্যাপারে তোমার কী মতামত? এটিও একটি বহুপদ রাশিমালা নয় (কেন?)

কোনো বহুপদ রাশিমালায় চলরাশি x হলে আমরা বহুপদ রাশিমালাটিকে আমরা $p(x)$ বা $q(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করতে পারি। সুতরাং উদাহরণ স্বরূপ আমরা লিখতে পারি :

$$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = x^3 - 1$$
$$r(y) = y^3 + y + 1$$
$$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$$

একটি বহুপদ রাশিমালায় যে কোনো সংখ্যক (সসীম) পদ থাকতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, $x^{150} + x^{149} + ... + x^2 + x + 1$ হল একটি বহুপদ রাশিমালা যার পদসংখ্যা 151।

এখন, $2x$, 2, $5x^3$, $-5x^2$, y এবং u^4 এই রাশিমালাগুলিকে দেখো। তোমরা কি দেখেছ যে প্রত্যেকটি রাশিমালাতে কেবলমাত্র একটিই পদ আছে? কেবলমাত্র একপদ বিশিষ্ট রাশিমালাকে *একপদ রাশিমালা monomials* বলে। ('mono' এর অর্থ এক)।

এখন নিম্নলিখিত বহুপদ রাশিমালাগুলোকে লক্ষ করো :

$p(x) = x + 1$, $\quad q(x) = x^2 - x$, $\quad r(y) = y^9 + 1$, $\quad t(u) = u^{15} - u^2$

এদের প্রত্যেকটিতে কয়টি করে পদ আছে? এই প্রত্যেকটি বহুপদ রাশিমালায় কেবলমাত্র দুটি পদ আছে। যে সমস্ত বহুপদ রাশিমালায় কেবলমাত্র দুটি পদ থাকে তাদের *দ্বিপদ রাশিমালা* (*binomials*) বলে। ('bi' এর অর্থ দুই)।

অনুরূপে, যে সমস্ত বহুপদ রাশিমালায় কেবলমাত্র তিনটি পদ থাকে তাদের *ত্রিপদ রাশিমালা* (*trinomials*) বলে ('tri' এর অর্থ তিন)। কিছু ত্রিপদ রাশিমালার উদাহরণ হল—

$p(x) = x + x^2 + \pi$, $\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$,

$r(u) = u + u^2 - 2$, $\quad t(y) = y^4 + y + 5$.

$p(x) = 3x^7 - 4x^6 + x + 9$ এই বহুপদ রাশিমালাটি দেখো। x এর সর্বোচ্চ ঘাতসম্পন্ন পদটি

কী? এটা হল $3x^7$। এই পদে x এর ঘাতের সূচক হল 7। অনুরূপ $q(y) = 5y^6 - 4y^2 - 6$ বহুপদ রাশিমালাটি y এর সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক যুক্ত পদটি হল $5y^6$ এবং এই পদে y এর ঘাতের সূচক 6। আমরা বহুপদ রাশিমালায় চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক **বহুপদ রাশিমালাটির মাত্রা** বলব। সুতরাং $3x^7 - 4x^6 + x + 9$ বহুপদ রাশিমালার মাত্রা 7 এবং বহুপদ রাশিমালা $5y^6 - 4y^2 - 6$ এর মাত্রা 6। **অশূন্য ধ্রুবক রাশিমালার মাত্রা শূন্য।**

উদাহরণ 1 : নিম্নে প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালাগুলোর মাত্রা নির্ণয় করো :

(i) $x^5 - x^4 + 3$ (ii) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$ (iii) 2

সমাধান : (i) চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক 5। সুতরাং বহুপদ রাশিমালাটির মাত্রা হল 5

(ii) চলকের সর্বোচ্চ ঘাতের সূচক 8 । সুতরাং, বহুপদ রাশিমালাটির মাত্রা হল 8 ।

(iii) এখানে একটি মাত্র পদ 2 যাকে $2x^0$ রূপে লেখা যায়। সুতরাং, x এর ঘাতের সূচক হল '0', অতএব বহুপদ রাশিমালাটির মাত্রা হল 0

এখন, $p(x) = 4x + 5$, $q(y) = 2y$, $r(t) = t + \sqrt{2}$ এবং $s(u) = 3 - u$ বহুপদ রাশিমালাগুলোকে লক্ষ করো। তোমরা কি এদের মধ্যে কোনো মিল খুঁজে পেয়েছ? এই বহুপদ রাশিমালাগুলোর প্রতিটির মাত্রা এক। একটি বহুপদ রাশিমালা যার মাত্রা এক, তাকে *রৈখিক বহুপদ রাশিমালা* বলে। একচল বিশিষ্ট কয়েকটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা হল $2x - 1$, $\sqrt{2}y + 1$, $2 - u$ এখন 3টি পদযুক্ত x এর একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা নির্ণয় করতে চেষ্টা করো। তুমি এটি নির্ণয় করতে পারবে না কারণ x এর একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালার সর্বোচ্চ পদ সংখ্যা দুই। সুতরাং x -এর যে কোনো রৈখিক বহুপদ রাশিমালা হবে $ax + b$ আকারের। যেখানে a এবং b ধ্রুবক এবং $a \neq 0$ (কেন?)। অনুরূপে, $ay + b$ হল y এর একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা।

এখন $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 এবং $x^2 + \frac{2}{5}x$ বহুপদ রাশিমালাগুলো বিবেচনা করো।

তোমরা কি একমত যে, এগুলো সব দুই মাত্রা যুক্ত? দুই মাত্রা যুক্ত একটি বহুপদ রাশিমালাকে *দ্বিঘাত রাশিমালা* বলে। দ্বিঘাত রাশিমালার কিছু উদাহরণ হল $5 - y^2$, $4y + 5y^2$ এবং $6 - y - y^2$ তোমরা কি এক চল বিশিষ্ট চারপদ যুক্ত দ্বিঘাত রাশিমালা লিখতে পারো? তোমরা দেখতে পাবে যে, এক চল বিশিষ্ট একটি দ্বিঘাত রাশিমালার সর্বোচ্চ 3টি পদ থাকে। যদি তোমরা কিছু দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালার তালিকা কর, তবে দেখতে পাবে x-এর যেকোনো দ্বিঘাত বহুপদ রাশিমালা হবে $ax^2 + bx + c$ আকারের যেখানে $a \neq 0$ এবং a, b, c ধ্রুবক। অনুরূপে, y-এর যেকোনো দ্বিঘাত রাশিমালা হবে $ay^2 + by + c$ আকারের, যেখানে $a \neq 0$ এবং a, b, c ধ্রুবক।

আমরা একটি তিন মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালাকে ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালা বলি। x এর

কিছু ত্রিমাত্রিক বহুপদ রাশিমালার উদাহরণ হল $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 - x$, $6 - x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$। এক চলবিশিষ্ট ত্রিমাত্রিক বহুপদ রাশিমালার কতগুলো পদ তোমরা ভাবতে পারো? এটির সর্বোচ্চ পদ হতে পারে 4টি। এটিকে লেখা যায় $ax^3 + bx^2 + cx + d$ আকারে, যেখানে $a \neq 0$ এবং a, b, c এবং d ধ্রুবক।

এখন, তোমরা দেখেছ যে একটি একমাত্রিক, দ্বিমাত্রিক অথবা ত্রিমাত্রিক বহুপদ রাশিমালা কী রূপ। তোমরা কি এক চল বিশিষ্ট একটি n মাত্রিক বহুপদ রাশিমালা লিখতে পারবে যেখানে n যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা? x চল বিশিষ্ট n মাত্রিক বহুপদ রাশিমালার আকার হবে—

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

যেখানে $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ধ্রুবক এবং $a_n \neq 0$।

বিশেষ ক্ষেত্রে যদি $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (সব ধ্রুবকগুলো শূন্য) হয়, তবে আমরা পাব **শূন্য বহুপদ রাশিমালা** যাকে 0 দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। শূন্য বহুপদরাশি মালার মাত্রা কত? শূন্য রাশিমালার মাত্রা *সংজ্ঞাত নয়*।

এখন পর্যন্ত আমরা একচল বিশিষ্ট রাশিমালা সম্পর্কে আলোচনা করেছি। আমরা আরো পাব একাধিক চলযুক্ত বহুপদ রাশিমালা। উদাহরণস্বরূপ $x^2 + y^2 + xyz$ (যেখানে x, y এবং z চলরাশি) একটি ত্রিচল বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা। অনুরূপে $p^2 + q^{10} + r$ (যেখানে p, q এবং r চলরাশি), $u^3 + v^2$ (যেখানে u এবং v হল চলরাশি) যথাক্রমে ত্রিচল বিশিষ্ট এবং দ্বিচল বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা। তোমরা এরূপ রাশিমালাগুলো সম্পর্কে পরে বিস্তারিত অধ্যয়ন করবে।

অনুশীলনী-2.1

1. নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলোর কোনটি একচল বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা এবং কোনটি নয়? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

   (i) $4x^2 - 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$ (iv) $y + \frac{2}{y}$

   (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে x^2 -এর সহগ লেখো :

   (i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. একটি 35 মাত্রা বিশিষ্ট দ্বিপদ রাশিমালা এবং একটি 100 মাত্রা বিশিষ্ট একপদ রাশিমালার উদাহরণ দাও।

4. নিম্নলিখিত প্রতিটি বহুপদ রাশিমালার মাত্রা লেখো :
   (i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$
   (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলোর কোনটি রৈখিক, দ্বিঘাত এবং ত্রিঘাত তা সনাক্ত করো :
   (i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$
   (v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 বহুপদ রাশিমালার শূন্য

ধরো বহুপদ রাশিমালাটি $p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$

যদি $p(x)$এর সর্বত্র x এর পরিবর্তে 1 বসাই, তবে আমরা পাই

$$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$$
$$= 5 - 2 + 3 - 2$$
$$= 4$$

সুতরাং, আমরা বলতে পারি $x = 1$-এ $p(x)$-এর মান 4

অনুরূপে, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$
$= -2$

তোমরা কি $p(-1)$ বের করতে পারবে?

উদাহরণ 2 : চলকের নির্দেশিত মানের জন্য নিচের বহুপদ রাশিমালাগুলোর মান নির্ণয় করো :

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$ যখন $x = 1$.

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$ যখন $y = 2$.

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ যখন $t = a$.

সমাধান : (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ এ $p(x)$ বহুপদ রাশিমালাটির মান হবে—

$$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$$
$$= 5 - 3 + 7 = 9$$

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

$y = 2$ তে $q(y)$ বহুপদ রাশিমালাটির মান হবে

$$q(2) = 3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11} = 24 - 8 + \sqrt{11} = 16 + \sqrt{11}$$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

$t = a$ তে $p(t)$ বহুপদ রাশিমালাটির মান হবে—

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

এখন মনে করো বহুপদ রাশিমালাটি $p(x) = x - 1$

$p(1)$ কত? দেখো $p(1) = 1 - 1 = 0$

যেহেতু, $p(1) = 0$ আমরা বলব যে 1 হল $p(x)$ রাশিমালাটির একটি *শূন্য*।

অনুরূপে, তোমরা যাচাই করতে পারো যে, $q(x)$ -এর একটি *শূন্য* 2 যেখানে $q(x) = x - 2$।

সাধারণভাবে, আমরা বলতে পারি যে, $p(x)$ বহুপদ রাশিমালাটির একটি *শূন্য* c হবে যদি $p(c)=0$ হয়।

তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে, $x - 1$ বহুপদ রাশিমালাটির শূন্য নির্ণয়ে $x - 1$ কে শূন্যের সাথে সমান করা হয়েছে, অর্থাৎ $x - 1 = 0$, যা থেকে পাওয়া যায় $x = 1$। আমরা বলতে পারি $p(x) = 0$ একটি বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ এবং 1 হল $p(x) = 0$ *বহুপদ রাশিমালার সমীকরণের বীজ*। সুতরাং, আমরা বলতে পারি 1 হল বহুপদ রাশিমালা $x - 1$ এর শূন্য অথবা বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ $x - 1 = 0$ এর একটি বীজ।

এখন, ধ্রুবক বহুপদ রাশিমালা 5 কে ধরে নাও। তুমি কি বলতে পারো এর শূন্য কত? এর কোনো শূন্য নেই, কারণ $5x^0$-তে x এর পরিবর্তে যে কোনো সংখ্যা বসালে সর্বদা 5-ই হয়। প্রকৃতপক্ষে, *একটি অশূন্য ধ্রুবক বহুপদ রাশিমালার কোনো শূন্য নেই*।

শূন্য বহুপদ রাশিমালার শূন্য কী হবে? নিয়মানুযায়ী *প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা শূন্য বহুপদ রাশিমালার একটি শূন্য*।

উদাহরণ 3 : -2 এবং 2 বহুপদ রাশিমালা $x + 2$ এর শূন্য হবে কি না পরীক্ষা করো।

সমাধান : ধরো, $p(x) = x + 2$

তাহলে $p(2) = 2 + 2 = 4$, $p(-2) = -2 + 2 = 0$

সুতরাং, -2 বহুপদ রাশিমালা $x + 2$ এর একটি শূন্য। কিন্তু 2 শূন্য নয়।

উদাহরণ 4 : বহুপদ রাশিমালা $p(x) = 2x + 1$ এর একটি শূন্য নির্ণয় করো।

সমাধান : $p(x)$-এর শূন্য নির্ণয় করা, $p(x) = 0$ সমীকরণের সমাধান করা একই।

এখন, $2x + 1 = 0$ থেকে পাই $x = -\frac{1}{2}$

সুতরাং, $2x + 1$ বহুপদ রাশিমালার একটি শূন্য $-\frac{1}{2}$।

এখন যদি $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালা হয় তবে কী করে আমরা $p(x)$ এর শূন্য বের করবো? উদাহরণ 4 থেকে তোমরা কিছু ধারণা পেতে পারো। বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ এর শূন্য নির্ণয়ের অর্থ বহুপদ রাশিমালার সমীকরণ $p(x) = 0$ এর সমাধান করা।

এখন $p(x) = 0$ মানে $ax + b = 0, a \neq 0$

সুতরাং, $ax = -b$

অর্থাৎ $x = \frac{b}{a}$

সুতরাং, $x = \frac{b}{a}$ হল $p(x)$ এর একমাত্র শূন্য, অর্থাৎ *একটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালার একটি এবং কেবলমাত্র একটি শূন্য থাকে।*

এখন আমরা বলতে পারি 1 হল $x - 1$ এর শূন্য এবং -2 হল $x + 2$ এর শূন্য।

উদাহরণ 5 : 2 এবং 0 বহুপদরাশিমালা $x^2 - 2x$ এর শূন্য হতে পারে কি না যাচাই করো।

সমাধান : ধরা যাক, $p(x) = x^2 - 2x$

তাহলে $p(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

এবং $p(0) = 0 - 0 = 0$

সুতরাং, 2 এবং 0 উভয়েই বহুপদ রাশিমালা $x^2 - 2x$ এর শূন্য।

চলো, আমরা যা পেয়েছি তা লিপিবদ্ধ করি :

(i) একটি বহুপদ রাশিমালার শূন্য, '0' নাও হতে পারে।

(ii) 0 একটি বহুপদ রাশিমালার শূন্য হতে পারে।

(iii) প্রতিটি রৈখিক বহুপদ রাশিমালার কেবলমাত্র একটি শূন্য থাকে।

(iv) একটি বহুপদ রাশিমালার একের অধিক শূন্য থাকতে পারে।

অনুশীলনী-2.2

1. বহুপদ রাশিমালা $5x - 4x^2 + 3$ এর মান নির্ণয় করো যখন

   (i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. নিম্নলিখিত প্রতিটি বহুপদ রাশিমালাগুলোর ক্ষেত্রে $p(0)$, $p(1)$ এবং $p(2)$ নির্ণয় করো :

   (i) $p(y) = y^2 - y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 - t^3$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x - 1)(x + 1)$

3. বহুপদ রাশিমালাগুলোর পাশে নির্দেশিত মানগুলো তাদের শূন্য কি না যাচাই করো :

   (i) $p(x) = 3x + 1,\ x = \frac{1}{3}$ (ii) $p(x) = 5x - \pi,\ x = \frac{4}{5}$

   (iii) $p(x) = x^2 - 1,\ x = 1, -1$ (iv) $p(x) = (x + 1)(x - 2),\ x = -1, 2$

(v) $p(x) = x^2,\ x = 0$ (vi) $p(x) = lx + m,\ x = \dfrac{m}{l}$

(vii) $p(x) = 3x^2 - 1,\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 2x + 1,\ x = \dfrac{1}{2}$

4. নিম্নলিখিত প্রতিটি ক্ষেত্রে বহুপদ রাশিমালার শূন্য নির্ণয় করো :
   (i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x - 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$
   (iv) $p(x) = 3x - 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax,\ a \neq 0$
   (vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c,\ d$ হল বাস্তব সংখ্যা।

2.4 ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

15 ও 6 দুটি সংখ্যা নেওয়া হল। তোমরা জান 15 কে 6 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 এবং ভাগশেষ 3 হয়। তোমরা কি মনে করতে পারো এটি কীভাবে প্রকাশ করা যায়? আমরা 15 কে প্রকাশ করতে পারি :-

$$15 = (6 \times 2) + 3$$

আমরা লক্ষ করি যে, ভাগশেষ 3, ভাজক 6 থেকে ছোটো। অনুরূপে, যদি 12 কে 6 দিয়ে ভাগ করা হয়, আমরা পাই—

$$12 = (6 \times 2) + 0$$

এখানে ভাগশেষ কত? এখানে ভাগশেষ 0 এবং আমরা বলতে পারি 6 হল 12 এর উৎপাদক অথবা 12 হল 6 এর গুণিতক।

এখন প্রশ্ন হল, একটি বহুপদ রাশিমালাকে অপরটি দিয়ে ভাগ করতে পারি কি? চল আমরা ভাজকটি একপদ রাশি নিয়ে শুরু করি। সুতরাং, বহুপদ রাশিমালা $2x^3 + x^2 + x$ কে একপদ রাশি x দিয়ে ভাগ করি।

আমরা পাই $$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$
$$= 2x^2 + x + 1$$

প্রকৃতপক্ষে, তোমরা লক্ষ করেছ যে $2x^3 + x^2 + 0$ এর প্রতিটি পদে x আছে। সুতরাং আমরা লিখতে পারি $2x^3 + x^2 + x$ কে $x(2x^2 + x + 1)$ রূপে।

আমরা বলতে পারি যে, x এবং $2x^2 + x + 1$ হল $2x^3 + x^2 + x$ এর উৎপাদক এবং $2x^3 + x^2 + x$ হল x এবং $2x^2 + x + 1$ এর গুণিতক।

ধরো, $3x^2 + x + 1$ এবং x আর একজোড়া বহুপদ রাশিমালা

এখানে, $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, একটি বহুপদ রাশিমালার পদ পেতে গেলে 1 কে x দিয়ে ভাগ করতে পারি না। সুতরাং, আমাদের এখানে শেষ করতে হবে এবং লক্ষ করো 1 হল ভাগশেষ। সুতরাং আমরা পাই :

$$3x^2 + x + 1 = \{x \times (3x + 1)\} + 1$$

এই ক্ষেত্রে, $3x + 1$ হল ভাগফল এবং ভাগশেষ হল 1। তুমি কি মনে করো x হল $3x^2 + x + 1$ এর একটি উৎপাদক? যেহেতু ভাগফল শূন্য নয়, এটি একটি উৎপাদক নয়।

এখন আমরা একটি উদাহরণ দেখবো কী করে একটি বহুপদ রাশিমালাকে অপর একটি অশূন্য বহুপদ রাশিমালা দিয়ে ভাগ করা হয়।

উদাহরণ 6 : $p(x)$ কে $g(x)$ দিয়ে ভাগ করো, যেখানে $p(x) = x\ \ 3x^2 - 1$ এবং $g(x) = 1 + x$ ।

সমাধান : চল আমরা নিম্নলিখিত ধাপগুলোতে ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে এগিয়ে যাই :

ধাপ 1 : আমরা ভাজ্য $x + 3x^2 - 1$ এবং ভাজক $1 + x$ কে আদর্শ আকারে লিখি, অর্থাৎ পদগুলোকে তাদের ঘাতের অর্ধক্রমে সাজিয়ে লিখি। সুতরাং ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ এবং ভাজক হল $x+1$।

ধাপ 2 : আমরা ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দিয়ে ভাগ করি অর্থাৎ $3x^2$ কে x দিয়ে ভাগ করে $3x$ পাই। এটি হল ভাগফলের প্রথম পদ।

$$\frac{3x^2}{x} = 3x = \text{ ভাগফলের প্রথম পদ}$$

ধাপ 3 : আমরা ভাগফলের প্রথম পদ দিয়ে ভাজককে গুণ করি এবং ভাজ্য থেকে এই গুণফলকে বিয়োগ করি, অর্থাৎ $3x$ দিয়ে $x + 1$ কে গুণ করি এবং গুণফল $3x^2 + 3x$, ভাজ্য $3x^2 + x - 1$ থেকে বিয়োগ করি। যা থেকে $-2x - 1$ ভাগশেষ পাই।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 3x \\ \cline{2-2} x+1 & 3x^2 + \;\; x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & - \quad\;\; - \\ \cline{2-2} & \qquad -2x - 1 \end{array}$$

ধাপ 4 : আমরা ভাগশেষ $-2x - 1$কে নতুন ভাজ্য রূপে ধরব। কিন্তু ভাজক একই থাকবে। ভাগফলের পরবর্তী পদ পাওয়ার ধাপ 2 কে পুনরাবৃত্তি করি অর্থাৎ আমরা নতুন ভাজ্য $-2x$-এর প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দিয়ে ভাগ করে -2 পাই। সুতরাং -2 হল ভাগফলের দ্বিতীয় পদ।

$$\frac{2x}{x} = -2$$

$=$ ভাগফলের দ্বিতীয় পদ

নতুন ভাগফল $= 3x - 2$

ধাপ 5 : এখন আমরা ভাগফলের দ্বিতীয় পদ দিয়ে ভাজককে গুণ করি এবং উক্ত গুণফলটি ভাজ্য থেকে বিয়োগ করি। অর্থাৎ, আমরা -2 দিয়ে $x + 1$ কে গুণ করি এবং গুণফল $-2x - 2$ ভাজ্য $-2x - 1$ থেকে বিয়োগ করি। যা থেকে আমরা ভাগশেষ পাই 1

$$\begin{array}{l|l} (x+1)(-2) & -2x - 1 \\ = -2x - 2 & -2x - 2 \\ & \underline{+ \quad\; +} \\ & \quad\;\; +1 \end{array}$$

এই প্রক্রিয়া ততক্ষণ পর্যন্ত চলবে যতক্ষণ না ভাগশেষ 0 হয় অথবা নতুন ভাজ্যের ঘাত থেকে ছোটো হবে। এই পর্যায়ে নতুন ভাজ্যই হবে ভাগশেষ এবং সমগ্র ভাগফলটি হবে প্রাপ্ত ভাগফলগুলোর সমষ্টি।

ধাপ 6 : সুতরাং সম্পূর্ণ ভাগফল হল $3x - 2$ এবং ভাগশেষ হল 1

চলো আমরা পুরো প্রক্রিয়াটিতে যা করা হয়েছে তা পর্যবেক্ষণ করি :

$$\begin{array}{r|l} & \;\; 3x - 2 \\ \hline x + 1 & \;\; 3x^2 + x - 1 \\ & \;\; 3x^2 + 3x \\ & \underline{- \qquad -} \\ & \qquad -2x - 1 \\ & \qquad -2x - 2 \\ & \underline{\qquad\; + \qquad +} \\ & \qquad\qquad 1 \end{array}$$

লক্ষ করো যে, $3x^2 + x - 1 = (x + 1)(3x - 2) + 1$

অর্থাৎ, **ভাজ্য = (ভাজক × ভাগফল) + ভাগশেষ**

সাধারণভাবে যদি $p(x)$ এবং $g(x)$ দুটি বহুপদ রাশিমালা এরূপ যে $p(x)$ এর মাত্রা $\geq$ $g(x)$ এর মাত্রা এবং $g(x) \neq 0$ হয়, তাহলে আমরা বহুপদ রাশিমালা $q(x)$ এবং $r(x)$ পাই এমন যে—

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

যেখানে $r(x) = 0$ অথবা $r(x)$ এর মাত্রা $<$ $g(x)$ এর মাত্রা। এখানে আমরা ভাজ্য $p(x)$ কে $g(x)$ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল $q(x)$ এবং $r(x)$ ভাগশেষ পাই।

উপরের উদাহরণটিতে ভাজকটি ছিল রৈখিক বহুপদ রাশিমালা। এইরূপ পরিস্থিতিতে চলো আমরা ভাগশেষ এবং ভাজ্যের মধ্যে কোনো সংযোগ আছে কি না পর্যবেক্ষণ করি।

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ এর ক্ষেত্রে যদি x কে (-1) দিয়ে প্রতিস্থাপন করে আমরা পাই

$$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$$

সুতরাং $p(x) = 3x^2 + x - 1$ কে $x + 1$ দিয়ে ভাগ করে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় তার মান বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ -এ $x + 1$ রাশিমালার শূন্য অর্থাৎ -1 বসিয়ে যে মান পাওয়া যায় এর সমান।

চলো আমরা আরও উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

উদাহরণ 7 : বহুপদ রাশিমালা $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করো।

সমাধান : দীর্ঘ ভাগ প্রক্রিয়ায় আমরা পাই :

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & \underline{\overset{-}{}3x^4 \overset{-}{\underset{+}{}} 3x^3} \\
 & \quad - x^3 \qquad - 3x - 1 \\
 & \quad \underline{\overset{-}{\underset{+}{}} x^3 \overset{+}{\underset{-}{}} x^2} \\
 & \qquad - x^2 - 3x - 1 \\
 & \qquad \underline{\overset{-}{\underset{+}{}} x^2 \overset{+}{\underset{-}{}} x} \\
 & \qquad\quad - 4x - 1 \\
 & \qquad\quad \underline{\overset{-}{\underset{+}{}} 4x \overset{+}{\underset{-}{}} 4} \\
 & \qquad\qquad - 5
\end{array}$$

এখানে ভাগশেষ হল -5। এখন, $x - 1$ এর শূন্য 1

সুতরাং, $p(x)$ -এ $x = 1$ বসিয়ে আমরা দেখি—

$$p(1) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$$
$$= 3 - 4 - 3 - 1$$
$$= -5, \text{ যা হল ভাগশেষ।}$$

উদাহরণ 8 : $p(x) = x^3 + 1$ কে $x + 1$ দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় করো।

সমাধান : দীর্ঘ ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x+1 & x^3 + 1 \\
 & \underset{-}{x^3} \underset{-}{+} x^2 \\
\hline
 & -x^2 \quad + 1 \\
 & \underset{+}{-}x^2 \underset{+}{-} x \\
\hline
 & x + 1 \\
 & \underset{-}{x} \underset{-}{+} 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

সুতরাং, আমরা ভাগশেষ 0 পেলাম।

এখানে, $p(x) = x^3 + 1$ এবং $x = -1$ হল $x + 1 = 0$ এর বীজ। আমরা দেখি যে,

$$
\begin{aligned}
p(-1) &= (-1)^3 + 1 \\
&= -1 + 1 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

যা প্রকৃত ভাগ প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত ভাগশেষের সমান।

একটি বহুপদ রাশিমালাকে একটি রৈখিক রাশিমালা দিয়ে ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় করার এটি কি সহজ উপায় নয়? আমরা এখন এই ঘটনাটির সাধারণীকরণ নিম্নলিখিত উপপাদ্যের মাধ্যমে উপস্থাপন করব। আমরা এই উপপাদ্যটি কেন সত্য তা তোমাদের প্রমাণ করেও দেখাব।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) : *ধরো, $p(x)$ একটি এক বা ততোধিক মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা এবং ধরো a হল যেকোনো বাস্তব সংখ্যা। যদি $p(x)$ কে রৈখিক রাশিমালা $x - a$ দিয়ে ভাগ করা হয় তা হলে ভাগশেষ হবে $p(a)$।*

প্রমাণ : ধরো $p(x)$ একটি এক বা ততোধিক মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা। ধরে নাও, যখন $p(x)$ কে $x-a$ দিয়ে ভাগ করা হয় ভাগফল $q(x)$ এবং ভাগশেষ $r(x)$ হয়। অর্থাৎ,

$$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$$

যেহেতু $x - a$ এর মাত্রা 1 এবং $r(x)$ এর মাত্রা $x - a$ এর মাত্রা থেকে কম, তাই $r(x)$ এর মাত্রা $= 0$। যার অর্থ $r(x)$ একটি ধ্রুবক; ধরি r

সুতরাং, x এর সকল মানের জন্য $r(x) = r$

অতএব, $p(x) = (x - a)\, q(x) + r$

বিশেষ ক্ষেত্র, যদি $x = a$ হয় তবে এই সমীকরণ থেকে পাই—

$$p(a) = (a - a)\, q(a) + r$$
$$= r$$

এভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণিত ।

চলো আমরা এই ফলটি আর একটি উদাহরণে ব্যবহার করি।

উদাহরণ 9 : ভাগশেষ নির্ণয় করো যখন $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করা হয়।

সমাধান : এখানে $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ এবং $x - 1$ এর শূন্য 1

সুতরাং, $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$= 2$

সুতরাং, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, 2 হল ভাগশেষ যখন $x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করা হয়।

উদাহরণ 10 : $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ বহুপদ রাশিমালাটি $2t + 1$ এর গুণিতক কি না যাচাই করো।

সমাধান : তোমরা জানো যে, $2t + 1$, $q(t)$ -এর একটি গুণিতক হবে যদি $q(t)$ কে $2t + 1$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়। এখন $2t + 1 = 0$ নিয়ে আমরা পাই $t = -\frac{1}{2}$ ।

আবার $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$

সুতরাং, $2t + 1$ দিয়ে $q(t)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়।

অতএব, $2t + 1$ হল প্রদত্ত বহুপদ রাশিমালা $q(t)$-এর একটি উৎপাদক, অর্থাৎ $q(t)$ হল $2t + 1$ এর একটি গুণিতক।

অনুশীলনী-2.3

1. ভাগশেষ নির্ণয় করো, যখন $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ কে নিম্নলিখিত রাশিমালা দিয়ে ভাগ করা হয়—

(i) $x + 1$ (ii) $x - \frac{1}{2}$ (iii) x (iv) $x + \pi$ (v) $5 + 2x$

2. ভাগশেষ নির্ণয় করো যখন $x^3 - ax^2 + 6x - a$ কে $x - a$ দিয়ে ভাগ করা হয়।

3. $7 + 3x$ রাশিটি $3x^3 + 7x$ এর একটি উৎপাদক কি না পরীক্ষা করো।

2.5 বহুপদ রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Factorisation of Polynomials) :

চলো আমরা উদাহরণ 10 কে আরো ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করি। এটি বলছে যে, যেহেতু ভাগশেষ $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, তাই $(2t + 1)$ হল $q(t)$ এর একটি উৎপাদক, অর্থাৎ, $q(t) = (2t + 1)\, g(t)$, যেখানে $g(t)$ একটি বহুপদ রাশিমালা। এটি হল নিম্নলিখিত উপপাদ্যের একটি বিশেষ ক্ষেত্র।

গুণনীয়ক উপপাদ্য (Factor Theorem) : যদি $p(x)$ একটি বহুপদ রাশিমালা, যার মাত্রা $n > 1$ এবং a যে কোনো বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে—

(i) $x - a$ রাশিটি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে, যদি $p(a) = 0$ হয় এবং

(ii) $p(a) = 0$ হবে, যদি $x - a$ রাশিটি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়।

প্রমাণ : ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে পাই, $p(x)=(x - a)\, q(x) + p(a)$

(i) যদি $p(a) = 0$ হয়, তাহলে $p(x) = (x - a)\, q(x)$, যা প্রমাণ করে $x - a$ রাশিটি $p(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

(ii) যেহেতু $x - a$ রাশিটি $p(x)$ -এর একটি উৎপাদক, $p(x) = (x - a)\, g(x)$, যেখানে $g(x)$ একটি বহুপদ রাশিমালা।

এক্ষেত্রে $p(a) = (a - a)\, g(a) = 0.$

উদাহরণ 11 : $x + 2$ রাশিটি $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ এবং $2x + 4$ এর একটি উৎপাদক কি না পরীক্ষা করো।

সমাধান : $x + 2$ এর শূন্য -2। ধরো, $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ এবং $s(x) = 2x + 4$

তবে, $p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) + 6$

$= -8 + 12 - 10 + 6$

$= 0$

সুতরাং, গুণনীয়ক উপপাদ্য অনুযায়ী, $x + 2$ হল $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$ এর একটি উৎপাদক।

আবার, $s(-2) = 2(-2) + 4 = 0$

সুতরাং, $x + 2$ হল $2x + 4$ এর একটি উৎপাদক। প্রকৃতপক্ষে গুণনীয়ক উপপাদ্য ব্যতিরেকে তোমরা এটি যাচাই করতে পারো। যেহেতু, $2x + 4 = 2(x + 2)$।

উদাহরণ 12 : যদি $4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ এর একটি উৎপাদক $x - 1$ হয়, তবে k-এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ এর একটি উৎপাদক $x - 1$, তাই $p(1) = 0$

এখন, $p(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 4(1) + k$

সুতরাং, $4 + 3 - 4 + k = 0$

অর্থাৎ $k = -3$

আমরা এখন 2 এবং 3 মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণে গুণনীয়ক উপপাদ্যের প্রয়োগ করব। তোমরা ইতিমধ্যে দ্বিঘাত রাশিমালা $x^2 + lx + m$ -এর উৎপাদক বিশ্লেষণ সম্বন্ধে জেনেছ। এটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে মধ্যপদ lx-কে $ax + bx$ রূপে বিশ্লেষণ করেছ, যাতে $ab = m$ হয় তাহলে $x^2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ । এখন আমরা দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2 + bx + c$, যেখানে $a \neq 0$ এবং a, b, c হল ধ্রুবক, -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে চেষ্টা করব।

বহুপদ রাশিমালা $ax^2 + bx + c$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ **মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে** নিম্নরূপে করা হয় :

ধরো, এর উৎপাদকগুলো $(px + q)$ এবং $(rx + s)$, তাহলে

$$ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\,x^2 + (ps + qr)\,x + qs$$

x^2-এর সহগ তুলনা করে পাই, $a = pr$

অনুরূপে, x-এর সহগ তুলনা করে, আমরা পাই $b = ps + qr$ এবং ধ্রুবক পদের তুলনা করে আমরা পাই, $c = qs$

এটি থেকে আমরা দেখতে পাই b হল ps এবং qr-এর যোগফল, যাদের গুণফল

$$(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$$

অতএব, $ax^2 + bx + c$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণে আমরা b কে দুটি সংখ্যার যোগফল রূপে লিখি যাদের গুণফল ac হয়। উদাহরণ 13 থেকে পরিষ্কার হবে।

উদাহরণ 13 : মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে এবং গুণনীয়ক উপপাদ্য প্রয়োগ করে $6x^2+17x+5$-এর উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান 1 : (মধ্যপদ বিশ্লেষণে) : যদি আমরা দুটি সংখ্যা বের করতে পারি যাতে $p + q = 17$ এবং $pq = 6 \times 5 = 30$, তাহলে উৎপাদকগুলো আমরা পেতে পারি।

সুতরাং, চলো আমরা 30 -এর উৎপাদক যুগলের দিকে লক্ষ করি। এরা হল 1 এবং 30, 2 এবং 15, 3 এবং 10, 5 এবং 6 । অবশ্যই 2 এবং 15 যুগলের যোগফল থেকে পাই $p + q = 17$ ।

সুতরাং, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$$

$$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

সমাধান 2 : (গুণনীয়ক উপপাদ্য প্রয়োগে)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$ ধরি। যদি $p(x)$ -এর শূন্যগুলো a এবং b হয়,

তাহলে $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$ সুতরাং, $ab = \frac{5}{6}$ । চলো আমরা a ও b -এর সম্ভাবনাময় মানগুলোর দিকে তাকাই। এগুলো হতে পারে, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1$

এখন, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0.$

কিন্তু $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ । সুতরাং, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ হল $p(x)$-এর একটি উৎপাদক। অনুরূপে, পরীক্ষা করে আমরা পেতে পারি $p(x)$-এর একটি উৎপাদক হল $\left(x + \frac{5}{2}\right)$

অতএব, $$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$= (3x + 1)(2x + 5)$$

উপরের উদাহরণে, মধ্যপদ বিশ্লেষণ পদ্ধতি অধিকতর ফলপ্রদ। যাই হোক, চলো আমরা আরেকটি উদাহরণ লক্ষ করি।

উদাহরণ 14 : গুণনীয়ক উপপাদ্য প্রয়োগে $y^2 - 5y + 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : ধরি $p(y) = y^2 - 5y + 6$। এখন, যদি $p(y) = (y - a)(y - b)$ হয়, তবে তোমরা জান যে ধ্রুবক পদ হবে ab সুতরাং, $ab = 6$ সুতরাং, $p(y)$-এর উৎপাদক নির্ণয়ে আমরা, 6-এর উৎপাদকগুলো লক্ষ করি।

6-এর উৎপাদকগুলো হল 1, 2 এবং 3 ।

এখন, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

সুতরাং, $y - 2$ -এর একটি উৎপাদক $p(y)$

আরও দেখো, $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

সুতরাং, $(y - 3)$ ও হবে $y^2 - 5y + 6$-এর একটি উৎপাদক।

অতএব, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$

লক্ষ করো $y^2 - 5y + 6$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ, মধ্যপদ $-5y$ এর বিশ্লেষণ এর মাধ্যমেও করা যায়।

এখন, চলো আমরা ত্রিঘাত বহুপদ রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণ নিয়ে চিন্তা করি। এক্ষেত্রে বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে শুরু করা সুবিধাজনক হবে না। প্রথমে আমাদের কমপক্ষে একটি উৎপাদক বের করতে হবে, যা পরের উদাহরণে দেখতে পাবে।

উদাহরণ 15 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো : $x^3 - 23x^2 + 142x - 120.$

সমাধান : ধরো $p(x) = x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

আমরা এখন -120 এর সব উৎপাদকগুলো দেখব। তাদের কয়েকটি হল—

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm8, \pm10, \pm12, \pm15, \pm20, \pm24, \pm30, \pm60.$

পরীক্ষামূলক ভাবে আমরা পাই $p(1) = 0$। সুতরাং $x - 1$ হলো $p(x)$-এর একটি উৎপাদক।

এখন আমরা দেখি যে, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1) \quad \text{(কেন?)}$$

$$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120), \quad [\,(x - 1) \text{ কমন নিয়ে}]$$

$p(x)$ কে $x - 1$ দ্বারা ভাগ করেও এটা আমরা পেতে পারি।

এখন $x^2 - 22x + 120$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ, মধ্যপদ বিশ্লেষণের মাধ্যমে বা গুণনীয়ক উপপাদ্যের প্রয়োগ করা যেতে পারে। মধ্যপদ বিশ্লেষণের দ্বারা আমরা পাই—

$$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$$

$$= x(x - 12) - 10(x - 12)$$

$$= (x - 12)(x - 10)$$

সুতরাং, $x^3 - 23x^2 - 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

অনুশীলনী-2.4

1. নিচের বহুপদ রাশিমালার কোনগুলোর উৎপাদক $(x+1)$ হয় তা নির্ণয় করো :

   (i) x^3+x^2+x+1 (ii) $x^4+x^3+x^2+x+1$

   (iii) $x^4+3x^3+3x^2+x+1$ (iv) $x^3-x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}$

2. গুণনীয়ক উপপাদ্য প্রয়োগে নিচের প্রতিটি ক্ষেত্রে $p(x)$ -এর একটি উৎপাদক $g(x)$ হয় কি না নির্ণয় করো :

   (i) $p(x)=2x^3+x^2-2x-1,\ g(x)=x+1$

   (ii) $p(x)=x^3+3x^2+3x+1,\ g(x)=x+2$

   (iii) $p(x)=x^3-4x^2+x+6,\ g(x)=x-3$

3. নিচের প্রতিটি ক্ষেত্রে $p(x)$-এর একটি উৎপাদক যদি $(x+1)$ হয় তবে k-এর মান নির্ণয় করো:

   (i) $p(x)=x^2+x+k$ (ii) $p(x)=2x^2+kx+\sqrt{2}$

   (iii) $p(x)=kx^2-\sqrt{2}x+1$ (iv) $p(x)=kx^2-3x+k$

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

   (i) $12x^2-7x+1$ (ii) $2x^2+7x+3$

   (iii) $6x^2+5x-6$ (iv) $3x^2-x-4$

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

   (i) x^3-2x^2-x+2 (ii) x^3-3x^2-9x-5

   (iii) $x^3+13x^2+32x+20$ (iv) $2y^3+y^2-2y-1$

2.6 বীজগাণিতিক অভেদ (Algebraic Identities) :

তোমাদের পূর্বের শ্রেণিগুলো থেকে তোমরা জান যে অভেদের ক্ষেত্রে চলকের যে কোনো মানের জন্য উভয়দিকের সমতা বজায় থাকে। তোমরা আগের শ্রেণিগুলোতে নিম্নলিখিত বীজগাণিতিক অভেদগুলো সম্পর্কে পড়েছ :

অভেদ I : $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

অভেদ II : $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

অভেদ III : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

অভেদ IV : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

তোমরা নিশ্চয়ই বীজগাণিক রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণে অনেক সময় এসব অভেদগুলোর প্রয়োগ করেছ।

উদাহরণ 16 : উপযুক্ত অভেদ প্রয়োগে নিচের গুণফলগুলো নির্ণয় করো :

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(x-3)(x+5)$

সমাধান : (i) এখানে আমরা অভেদ-I প্রয়োগ করতে পারি : $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$। এতে $y = 3$ বসিয়ে আমরা পাই—

$$(x+3)(x+3) = (x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

(ii) উপরের অভেদ -IV প্রয়োগে অর্থাৎ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

আমরা পাই, $$(x-3)(x+5) = x^2 + (-3+5)x + (-3)(5)$$
$$= x^2 + 2x - 15$$

উদাহরণ 17 : সরাসরি গুণ না করে 105×106 মান নির্ণয় করো ।

সমাধান : $105 \times 106 = (100+5) \times (100+6)$

$= (100)^2 + (5+6)(100) + (5 \times 6)$, অভেদ IV ব্যবহার করে

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

প্রদত্ত কোনো রাশিমালার গুণের মান নির্ণয়ে তোমরা উপরের অভেদগুলোর কিছু ব্যবহার দেখেছ। এই অভেদগুলো বীজগাণিতিক রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করার ক্ষেত্রেও উপযোগী, যা তোমরা নিচের উদাহরণগুলোতে দেখবে—

উদাহরণ 18 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

(i) $49a^2 + 70ab + 25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

সমাধান : (i) এখানে তোমরা দেখো,

$$49a^2 = (7a)^2,\ 25b^2 = (5b)^2,\ 70ab = 2(7a)(5b)$$

প্রদত্ত রাশিমালাকে $x^2 + 2xy + y^2$ এর সাথে তুলনা করে আমরা দেখি যে, $x = 7a$ এবং $y = 5b$.

অভেদ I ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a+5b)^2 = (7a+5b)(7a+5b)$$

(ii) আমরা পাই, $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 \quad \left(\frac{y}{3}\right)^2$

এখন এটিকে অভেদ - III এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই—

$$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 \quad \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$$

এতক্ষণ পর্যন্ত আমাদের অভেদগুলো ছিল দ্বিপদ রাশিমালার গুণফল। চলো আমরা অভেদ I কে বর্ধিত করি ত্রিপদ রাশিমালা $x + y + z$ তে। আমরা অভেদ I ব্যবহার করে $(x + y + z)^2$ নির্ণয় করব।

ধরো, $x + y = t$ তাহলে,

$(x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + t^2$ (অভেদ I ব্যবহার করে)

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ (t এর মান প্রতিস্থাপন করে)

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2$ (অভেদ I ব্যবহার করে)

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ (পদগুলোকে পুনরায় সাজিয়ে)

সুতরাং আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি পাই :

অভেদ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

মন্তব্য : আমরা ডানদিকের রাশিমালাকে বাঁদিকের রাশিমালার বিস্তৃত আকার বলব। লক্ষ করো $(x + y + z)^2$ এর বিস্তৃতিতে আছে তিনটি বর্গ পদ এবং তিনটি গুণফলের পদ।

উদাহরণ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ এর বিস্তৃত আকার লেখো।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিমালাকে $(x + y + z)^2$ এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই

$x = 3a$, $y = 4b$ এবং $z = 5c$

অতএব, অভেদ V ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$
$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ac$$

উদাহরণ 20 : $(4a – 2b – 3c)^2$ কে বিস্তৃত করো।

সমাধান : অভেদ V ব্যবহার করে আমরা পাই—

$(4a – 2b – 3c)2 = [4a + (–2b) + (–3c)]^2$

$= (4a)^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2(4a)(-2b) + 2(-2b)(-3c) + 2(-3c)(4a)$

$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 16ab + 12bc - 24ac$

উদাহরণ 21 : উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো : $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$.

সমাধান : আমরা পাই, $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz = (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(2x)(z)$

$= [2x + (-y) + z]^2$ (অভেদ V ব্যবহার করে)

$= (2x - y + z)^2 = (2x - y + z)(2x - y + z)$

এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা দ্বি-মাত্রিক পদ যুক্ত অভেদ নিয়ে আলোচনা করেছি। এখন আমরা অভেদ I ব্যবহার করে $(x + y)^3$ এর মান নির্ণয় করব—

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2\\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\ &= x^3+y^3+3xy(x+y)\end{aligned}$$

সুতরাং, আমরা নিম্নের অভেদটি পাই :

অভেদ VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

অভেদ VI-তে y এর পরিবর্তে $-y$ বসিয়ে আমরা আরোও পাই

অভেদ VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

উদাহরণ 22 : নিম্নলিখিত ঘনগুলোকে বিস্তৃত রূপে লেখো :

(i) $(3a + 4b)^3$ (ii) $(5p - 3q)^3$

সমাধান : (i) $(x + y)^3$ এর সাথে প্রদত্ত রাশিটির তুলনা করে আমরা পাই যে

$x = 3a$ এবং $y = 4b$

সুতরাং, অভেদ VI ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$\begin{aligned}(3a+4b)^3 &= (3a)^3+(4b)^3+3(3a)(4b)(3a+4b)\\ &= 27a^3+64b^3+108a^2b+144ab^2\end{aligned}$$

(ii) $(x-y)^3$ এর সাথে প্রদত্ত রাশিটির তুলনা করে আমরা পাই যে—

$$x = 5p,\ y = 3q.$$

সুতরাং, অভেদ VII ব্যবহার করে আমরা পাই—

$$\begin{aligned}(5p-3q)^3 &= (5p)^3-(3q)^3-3(5p)(3q)(5p-3q)\\ &= 125p^3-27q^3-225p^2q+135pq^2\end{aligned}$$

উদাহরণ 23 : উপযুক্ত অভেদ ব্যবহার করে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটির মান নির্ণয় করো :

(i) $(104)^3$ (ii) $(999)^3$

সমাধান : (i) আমরা পাই

$$\begin{aligned}(104)^3 &= (100+4)^3\\ &= (100)^3+(4)^3+3(100)(4)(100+4)\end{aligned}$$

(অভেদ VI ব্যবহার করে)

$$\begin{aligned}&= 1000000+64+124800\\ &= 1124864\end{aligned}$$

(ii) আমরা পাই

$$\begin{aligned}(999)^3 &= (1000-1)^3\\ &= (1000)^3-(1)^3-3(1000)(1)(1000-1)\end{aligned}$$

(অভেদ VII প্রয়োগ করে)

$$\begin{aligned}&= 1000000000-1-2997000\\ &= 997002999\end{aligned}$$

উদাহরণ 24 : $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিটিকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যেতে পারে

$$\begin{aligned}&(2x)^3+(3y)^3+3(4x^2)(3y)+3(2x)(9y^2)\\ &= (2x)^3+(3y)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2\\ &= (2x+3y)^3 \qquad \text{(অভেদ VI প্রয়োগ করে)}\\ &= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)\end{aligned}$$

এখন, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ কে বিবেচনা করো।

অতএব, গুণফলের বিস্তৃত রূপ হলো—

$x(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$+z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+xy^2+xz^2-x^2y-xyz-zx^2+x^2y$

$+y^3+yz^2-xy^2-y^2z-xyz+x^2z+y^2z+z^3-xyz-yz^2-xz^2$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$ (সরল করে)

অতএব, আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি পাই :

অভেদ VIII : $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

উদাহরণ 25 : $8x^3+y^3+27z^3-18xyz$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

সমাধান : এখানে আমরা পাই—

$$\begin{aligned}&8x^3+y^3+27z^3-18xyz\\&=(2x)^3+y^3+(3z)^3-3(2x)(y)(3z)\\&=(2x+y+3z)[(2x)^2+y^2+(3z)^2-(2x)(y)-(y)(3z)-(2x)(3z)]\\&=(2x+y+3z)\,(4x^2+y^2+9z^2-2xy-3yz-6xz)\end{aligned}$$

অনুশীলনী-2.5

1. উপযুক্ত অভেদ প্রয়োগ করে নিম্নের গুণফলগুলো নির্ণয় করো:

(i) $(x+4)(x+10)$ (ii) $(x+8)(x-10)$ (iii) $(3x+4)(3x-5)$

(iv) $\left(y^2+\frac{3}{2}\right)\left(y^2-\frac{3}{2}\right)$ (v) $(3-2x)(3+2x)$

2. সরাসরি গুণ না করে নিম্নলিখিত গুণফল নির্ণয় করো :

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. উপযুক্ত অভেদ প্রয়োগ করে নিম্নলিখিতগুলোর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

(i) $9x^2+6xy+y^2$ (ii) $4y^2-4y+1$ (iii) $x^2-\frac{y^2}{100}$

4. উপযুক্ত অভেদ প্রয়োগ করে নিম্নের প্রত্যেকটিকে বিস্তৃত করো :

(i) $(x+2y+4z)^2$ (ii) $(2x-y+z)^2$ (iii) $(-2x+3y+2z)^2$

(iv) $(3a-7b-c)^2$ (v) $(-2x+5y-3z)^2$ (vi) $\left[\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+1\right]^2$

5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4\sqrt{2}\,yz - 8xz$

6. নিচের ঘনগুলোকে বিস্তৃত রূপে লেখ :

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$ (iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. উপযুক্ত অভেদ প্রয়োগে নিম্নলিখিত মান নির্ণয় করো :

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. নিচের প্রত্যেকটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. যাচাই করো :

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. নিম্নলিখিত প্রতিটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো :

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[সংকেত : প্রশ্ন 9 দেখো]

11. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. যাচাই করো যে,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\left[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right]$$

13. যদি হয় $x + y + z = 0$, তবে দেখাও যে $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

14. প্রকৃত ঘন-এর মান নির্ণয় করে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটির মান নির্ণয় করো :

(i) $(-12)^3 + (7)^3 + (5)^3$

(ii) $(28)^3 + (-15)^3 + (-13)^3$

15. নিম্নে প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল থেকে তাদের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সম্ভাব্য রাশি নির্ণয় করো :

(i)	(ii)
ক্ষেত্রফল : $25a^2 - 35a + 12$	ক্ষেত্রফল : $35y^2 + 13y - 12$

16. নিচে যে আয়তঘনগুলোর আয়তন দেওয়া হয়েছে তাদের সম্ভাব্য মাত্রা কী হবে?

(i)	(ii)
আয়তন : $3x^2 - 12x$	আয়তন : $12ky^2 + 8ky - 20k$

2.7 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে, তোমরা নিম্নলিখিত ধারণাগুলো পেয়েছ :

1. একচল বিশিষ্ট একটি বহুপদ রাশিমালা $p(x)$ কে x -এর বীজগাণিতিক রাশিমালারূপে লেখা হয়। $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$,

যেখানে $a_0, a_1, a_2, \ldots, a$ হল ধ্রুবক এবং $a_n \neq 0$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ যথাক্রমে $x^0, x, x^2, \ldots, x^n$ এর সহগ এবং

n-কে বলা হয় বহুপদ রাশিমালার মাত্রা । $a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_0$, -এর প্রতিটি $p(x)$ বহুপদ রাশিমালার এক একটি পদ, যেখানে $a_n \neq 0$,।

2. একটি পদযুক্ত বহুপদ রাশিমালাকে একপদ রাশিমালা বলে।

3. দুইটি পদযুক্ত বহুপদ রাশিমালাকে দ্বিপদ রাশিমালা বলে।

4. তিনটি পদযুক্ত বহুপদ রাশিমালাকে ত্রিপদ রাশিমালা বলে।

5. যে বহুপদ রাশিমালার মাত্রা এক তাকে রৈখিক রাশিমালা বলে।

6. যে বহুপদ রাশিমালার মাত্রা দুই তাকে দ্বিঘাত রাশিমালা বলে।

7. যে বহুপদ রাশিমালার মাত্রা তিন তাকে ত্রিঘাত রাশিমালা বলে।

8. বহুপদ রাশিমালা $p(x)$-এর একটি শূন্য 'a' হবে যদি $p(a) = 0$ হয়। এক্ষেত্রে a কে বলা হয় $p(x) = 0$ সমীকরণের বীজ।

9. প্রতিটি একচল বিশিষ্ট রৈখিক রাশিমালার কেবলমাত্র একটি শূন্য থাকে। অশূন্য ধ্রুবক রাশিমালার কোনো শূন্য থাকে না এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যা কোনো শূন্য বহুপদ রাশিমালার শূন্য হতে পারে।

10. **ভাগশেষ উপপাদ্য :** যদি $p(x)$ একটি এক বা ততোধিক ঘাতযুক্ত বহুপদ রাশিমালা হয় এবং $p(x)$-কে একটি রৈখিক রাশিমালা $x - a$ দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ হবে $p(a)$

11. **গুণীনয়ক উপপাদ্য :** $p(x)$ বহুপদ রাশিমালার একটি উৎপাদক $x - a$ হবে যদি $p(a) = 0$ হয়। আবার যদি $(x - a)$ রাশিটি $p(x)$ -এর উৎপাদক হয়, তবে $p(a) = 0$ হয়।

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

14. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

অধ্যায়-3

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (COORDINATE GEOMETRY)

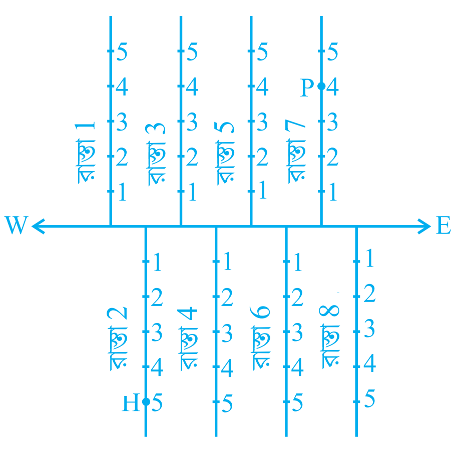
What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?' So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, *The Hunting of the Snark*

3.1 ভূমিকা :

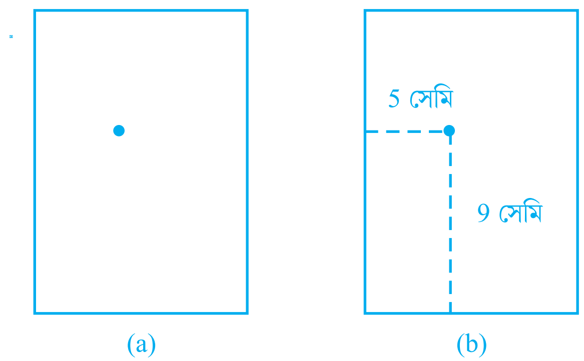
তোমরা ইতিপূর্বে জেনেছ যে কীভাবে সংখ্যারেখার উপর বিন্দু স্থাপন করতে হয়। তোমরা আরো জান যে কীভাবে সংখ্যারেখার উপর কোনো বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করতে হয়। বিভিন্ন সময়ে একের বেশি রেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করার প্রয়োজন হয়ে পরে। উদাহরণস্বরূপ নিচের ঘটনাগুলি লক্ষ করো :

I. চিত্র 3.1 এ পূর্ব-পশ্চিম দিক বরাবর একটি প্রধান সড়ক (main road) চলে গেছে এবং রাস্তাগুলো (streets) পশ্চিমদিক থেকে পূর্বদিক বরাবর সংখ্যার মাধ্যমে চিহ্নিত করা হয়েছে। আবার প্রতিটি রাস্তায় বাড়িগুলোর নম্বর দেওয়া আছে। এখানে একটি বন্ধুর বাড়ির দিকে তাকাও, বাড়িটির অবস্থান বোঝানোর জন্য কি একটি মাত্র বিন্দুর উল্লেখই যথেষ্ট? উদাহরণস্বরূপ, যদি আমরা শুধু বলি, সে 2 নং রাস্তায় থাকে, আমরা কি খুব সহজেই তার বাড়ি খুঁজে বের করতে সমর্থ হব? সহজ নয় যদি না আমরা ঐ বাড়ি সম্পর্কে দুটি তথ্য না জানি— যথা বাড়িটি কত নম্বর রাস্তার উপর অবস্থিত এবং বাড়ির নম্বর যদি 2 নং রাস্তার 5 নং বাড়িতে পৌঁছতে চাই, তবে প্রথমে আমরা 2 নং রাস্তা খুঁজে বের করে তারপর 5 নং বাড়ি খুঁজব। 3.1 চিত্রে H বাড়ির অবস্থান বোঝায়। অনুরূপে P, 7 নং রাস্তার 4 নং বাড়িকে বোঝায়।



চিত্র. 3.1

II. মনে করো তোমরা একটি কাগজের সিটে একটি বিন্দু স্থাপন করেছ [চিত্র 3.2 (a)] , যদি আমরা তোমাদের জিজ্ঞেস করি কাগজের উপর বিন্দুর অবস্থান বলো। তোমরা কীভাবে এটা করবে? সম্ভবত তুমি এভাবে চেস্টা করবে,"বিন্দুটি কাগজের অর্ধেকের উপরে আছে," অথবা "এটি কাগজের বাম ধারের কাছাকাছি" অথবা "এটি উপরের দিকে বাম কোণের খুব কাছাকাছি"। এই বিবৃতিগুলি কি বিন্দুটির যথাযথ অবস্থান নির্ধারণ করে? না! কিন্তু যদি তোমরা বল "বিন্দুটি কাগজের বাম ধার থেকে 5 সেমি দূরে," তবে তা কিছু ধারণা দিতে সাহায্য করে। কিন্তু এখনো বিন্দুটির সঠিক অবস্থান নির্ধারিত হল না। একটা ছোটো ধারণা তোমাদের উত্তরকে শক্তিশালী করবে, যদি তোমরা বলো বিন্দুটি সর্বনিম্ন রেখা থেকে 9 সেমি উপরে আছে। এখন আমরা জানি কোথায় বিন্দুটির সঠিক অবস্থান।



চিত্র **3.2**

এ ব্যাপারে দুটি নির্দিষ্ট রেখা, কাগজের বামদিকের ধার এবং সর্বনিম্ন রেখা [চিত্র 3.2 (b)], হতে বিন্দুটির দূরত্ব উল্লেখ করে বিন্দুটির অবস্থান নিম্নরূপ করা হয়। অন্যভাবে বিন্দুটির সঠিক অবস্থান জানার জন্য আমাদের দুটি স্বাধীন তথ্যের প্রয়োজন।

এখন, নীচের কার্যকলাপ যা 'আসন বিন্যাস পরিকল্পনা' ('Seating Plan') নামে পরিচিত তা শ্রেণিকক্ষে সম্পাদন করো।

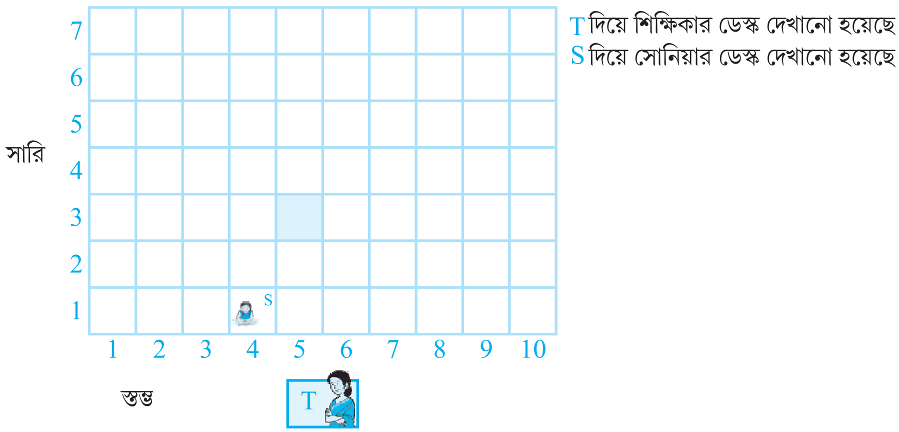
কার্যকলাপ 1 (আসন বিন্যাস পরিকল্পনা) : সবগুলো ডেস্ককে একসঙ্গো করে শ্রেণিকক্ষে একটি আসন বিন্যাস পরিকল্পনা তৈরি করো। প্রতিটি বর্গাকার ছক এক একটি ডেস্ক এর প্রতিরূপ। যে ছাত্র যে ডেস্কে বসা তা বর্গাকার ছক নির্দেশ করে, তার উপর শিক্ষার্থীর নাম লেখো। শ্রেণিকক্ষের ভিতর প্রত্যেক ছাত্রের অবস্থান দুটি স্বাধীন তথ্যের মাধ্যমে যথাযথভাবে বর্ণনা করো।

(i) যে স্তম্ভে শিক্ষার্থী বসেছে।

(ii) যে সারিতে শিক্ষার্থী বসেছে।

যদি তোমার বসার ডেস্ক পঞ্চম স্তম্ভের তৃতীয় সারিতে হয় [চিত্র 3.3 (a) এ গাঢ় ছায়া (shaded square) দিয়ে চিহ্নিত হয়েছে], তবে তোমার অবস্থান লেখা যেতে পারে এভাবে (5, 3), প্রথমে স্তম্ভের সংখ্যা এবং তারপর সারির সংখ্যা। এটি কি (3, 5) এর সমান? তোমার শ্রেণির অন্য

আরেকজন শিক্ষার্থীর নাম ও অবস্থান লেখো। উদাহরণস্বরূপ, যদি সোনিয়ার অবস্থান চতুর্থ স্তম্ভের প্রথম সারিতে হয়, তাহলে লেখো S(4,1)। শিক্ষিকার বসার ডেস্ক তোমার আসন বিন্যাস পরিকল্পনার অংশ হবে না। এখানে শিক্ষিকা কেবলমাত্র একজন পর্যবেক্ষক।



চিত্র.. 3.3

উপরের আলোচনা থেকে, তুমি লক্ষ করেছ যে সমতলে কোনো বস্তুর অবস্থান দুটি পরস্পর লম্বরেখার সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রয়োজন কাগজের বামপ্রান্ত থেকে দূরত্বের পাশাপাশি সর্বনিম্ন রেখা হতে দূরত্ব। আসন বিন্যাস পরিকল্পনার ক্ষেত্রে প্রয়োজন স্তম্ভের সংখ্যা এবং সেই স্তম্ভের সারির সংখ্যা, এই সহজ ধারণাটির সুদূরপ্রসারী গুরুত্ব আছে এবং এর থেকে গণিতের গুরুত্বপূর্ণ শাখা **স্থানাঙ্ক জ্যামিতির** সৃষ্টি। এই অধ্যায়ে আমাদের লক্ষ হল স্থানাঙ্ক জ্যামিতির কিছু প্রাথমিক ধারণার পরিচয় করানো। তোমরা উপরের শ্রেণিগুলিতে এ সম্পর্কে বিশদভাবে পড়বে। এ সম্পর্কিত অধ্যয়ন প্রথমে করেছিলেন ফ্রান্সের দার্শনিক ও গণিতজ্ঞ **রেনে ডেকার্তে** (*René Déscartes*)।

1700 শতাব্দীর বিখ্যাত ফ্রান্স গণিতজ্ঞ রেনে ডেকার্তে শুয়ে শুয়ে চিন্তা করতে ভালোবাসতেন। একদিন তিনি যখন বিছানায় বিশ্রাম করছিলেন সে সময় তিনি সমতলে একটি বিন্দুর অবস্থান সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করেন। অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমাংশের পুরোনো মতবাদের উন্নত রূপ ছিল তাঁর পদ্ধতি। ডেকার্তের সম্মানার্থে একটি সমতলের উপর একটি বিন্দুর অবস্থানের আলোচনা *কার্তেসীয়* পদ্ধতি নামে পরিচিত।

রেনে ডেকার্তে (1596 -1650)

চিত্র. 3.4

অনুশীলনী-3.1

1. কীভাবে তুমি তোমার পড়ার টেবিলের উপরে থাকা টেবিল ল্যাম্পের (table lamp) অবস্থান অন্য ব্যক্তিকে বর্ণনা করবে?

2. **(রাস্তা পরিকল্পনা) :** শহরের প্রাণকেন্দ্রে দুটি প্রধান রাস্তা একটি অপরটির সাথে আড়াআড়ি ভাবে মিলিত হয়েছে। রাস্তা দুটির মধ্যে একটি উত্তর-দক্ষিণ দিক এবং অপরটি পূর্ব-পশ্চিম দিক বরাবর অবস্থান করছে।

   শহরের অন্যান্য সব রাস্তাগুলো প্রধান সড়কের সঙ্গে 200 মি ব্যাবধানে সমান্তরাল ভাবে গেছে। প্রত্যেক দিকে পাঁচটি (5) করে রাস্তা আছে। 1 সেমি = 200 মি ধরে তোমার নোটবুকে শহরের একটি নমুনা চিত্র অঙ্কন করো। প্রত্যেকটি প্রধান সড়ক/রাস্তাগুলো এককেটি রেখার মাধ্যমে নির্দেশ করো।

   তোমার নমুনা চিত্রে অনেকগুলো আড়াআড়ি রাস্তা আছে। একটি নির্দিষ্ট আড়াআড়ি রাস্তা, দুটি রাস্তা দিয়ে তৈরি, একটি উত্তর-দক্ষিণ দিক এবং অপরটি পূর্ব-পশ্চিম দিক বরাবর। প্রত্যেকটি আড়াআড়ি রাস্তা নিচে উল্লেখিত পদ্ধতি অনুসরণ করা : যদি দ্বিতীয় রাস্তাটি উত্তর-দক্ষিণ দিক বরাবর যায় এবং পঞ্চম রাস্তাটি পূর্ব-পশ্চিম দিক বরাবর গিয়ে কোনো চৌমাথায় মিলিত হয়, তখন আমরা ঐ আড়াআড়ি রাস্তাকে (2, 5) দ্বারা চিহ্নিত করবো। এই নিয়ম ব্যবহার করে বের করো :

   (i) (4, 3) কোন্ কোন্ আড়াআড়ি রাস্তাগুলো নির্দেশ করে?

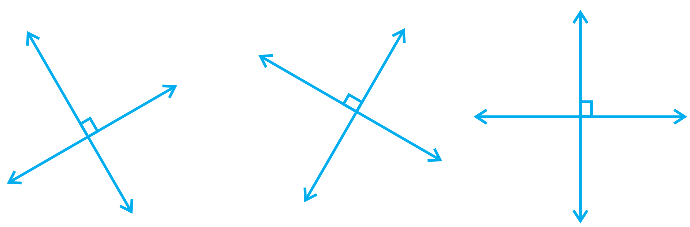
   (ii) (3, 4) কোন্ কোন্ আড়াআড়ি রাস্তাগুলো নির্দেশ করে?

3.2 কার্তেসীয় পদ্ধতি :

তোমরা "সংখ্যাতত্ত্ব" অধ্যায়ে সংখ্যারেখা সম্পর্কে জেনেছ। সংখ্যারেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্বগুলো সমান একক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়, ধনাত্মকভাবে একদিকে এবং ঋণাত্মক ভাবে অন্যদিকে। যে নির্দিষ্ট বিন্দু হতে দূরত্বগুলো চিহ্নিত করা হয় তা হল ***মূলবিন্দু***। একটি রেখার উপর সমদূরত্বে বিন্দু চিহ্নিত করে সংখ্যাগুলো প্রকাশ করার জন্য আমরা সংখ্যারেখা ব্যবহার করি। যদি সংখ্যা '1' এক একক দূরত্বকে প্রকাশ করে তবে তিন একক দূরত্ব প্রকাশ করে সংখ্যা '3', '0'এর অস্তিত্ব হল মূলবিন্দুতে। সংখ্যা 'r' মূলবিন্দু হতে ধনাত্মক দিকে r দূরত্বের বিন্দুকে প্রকাশ করে। সংখ্যা '$-r$' মূলবিন্দু হতে ঋণাত্মক দিকে r দূরত্বের বিন্দুকে প্রকাশ করে। সংখ্যারেখার উপর বিভিন্ন সংখ্যার অবস্থান চিত্র 3.5 এ দেখানো হয়েছে।

চিত্র 3.5

এরকম কোনো পরস্পর লম্ব দুটি রেখার ধারণা এবং এসব রেখাগুলোর সাহায্যে কোনো তলে বিন্দু স্থাপনের ধারণা ডেকার্তে (Descartes) আবিষ্কার করেন। লম্ব রেখাগুলো যেকোনো দিক বরাবর হতে পারে, যেমন



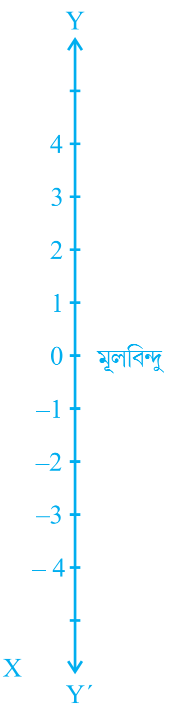
চিত্র **3.6**

চিত্র 3.6 । কিন্তু এ অধ্যায়ে আমরা যখন কোনো সমতলে কোনো একটি বিন্দু স্থাপন করার জন্য এ দুটি রেখা নির্বাচন করবো তখন একটি অণুভূমিক ও অন্যটি উলম্ব হবে, চিত্র 3.6 (c)এর মত।

আক্ষরিক ভাবে এই রেখাগুলো আসে এভাবে :

দুটি সংখ্যারেখা নাও। তাদের X′X ও Y′Y নাম দাও। X′X কে অণুভূমিক [চিত্র 3.7(a) এর মতো] রেখে তার উপর সংখ্যাগুলো লেখো ঠিক যেভাবে সংখ্যারেখায় লেখা হয়। Y′Y কে অণুভূমিকের পরিবর্তে উল্লম্ব বরাবর রেখে একই কাজ করো [চিত্র 3.7(b)]।

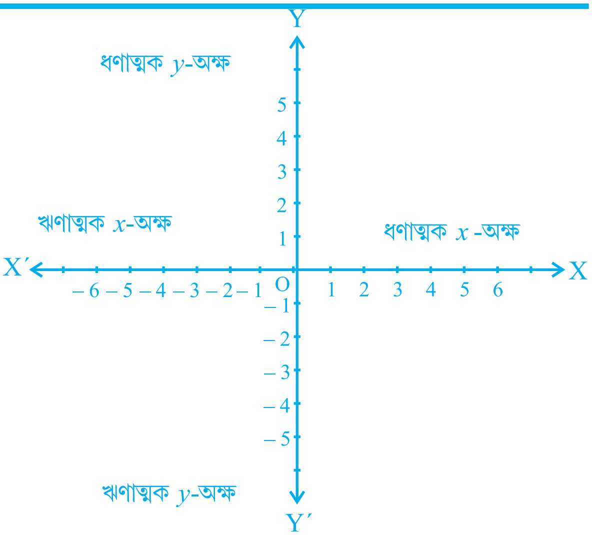
(a)



(b)

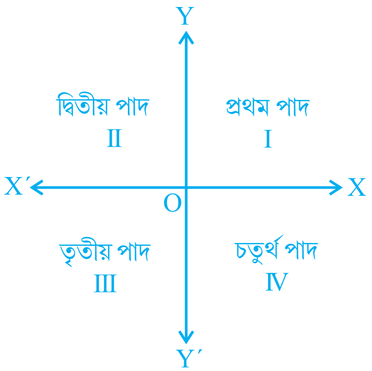
চিত্র **3.7**

দুটি রেখাকে এমনভাবে সংযুক্ত করো যাতে করে দুটো রেখা একে অপরকে শূন্যতে অথবা মূলবিন্দুতে ছেদ করে [চিত্র 3.8]। অণুভূমিক রেখা X′X হল x -অক্ষ এবং YY′ হল y-অক্ষ। যে বিন্দুতে X′X ও YY′ ছেদ করে তাকে **মূলবিন্দু** বলা হয়। এবং তাকে 'O' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেহেতু OX এবং OY বরাবর ধনাত্মক সংখ্যাগুলো অবস্থান করে, তাই OX এবং OY কে যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এর **ধনাত্মক দিক** হিসেবে ধরা হয়। অনুরূপে, OX′ এবং OY′কে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ এর **ঋণাত্মক দিক** হিসেবে ধরা হয়।



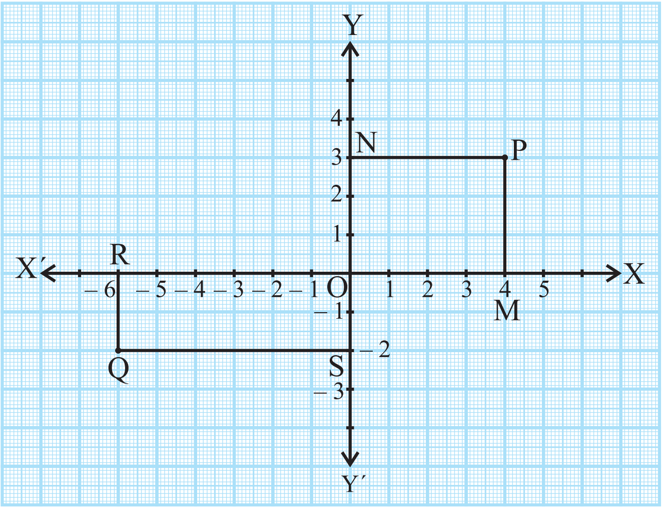
চিত্র **3.8**

তোমরা লক্ষ করেছ যে, অক্ষদ্বয় (অক্ষ দুটি) সমতলকে চারটি অংশে ভাগ করেছে। প্রতিটি অংশকে এক একটি **পাদ** (quadrant) বলা হয় (চার ভাগের এক অংশ)। OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত ক্রমে প্রতিটি পাদকে যথাক্রমে I, II, III এবং IV দ্বারা চিহ্নিত করা হয় [চিত্র 3.9 দেখো]। সুতরাং সমতলটি অক্ষদ্বয় এবং পাদগুলো নিয়ে গঠিত। সমতলটিকে *কার্তেসীয় সমতল* বা *স্থানাঙ্ক সমতল* বা *xy সমতল* বলা হয়। অক্ষদ্বয়কে বলা হয় স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়।



চিত্র **3.9**

এখন দেখা যাক, কেন এই পদ্ধতি গণিতের মৌলিক বিষয় এবং কীভাবে তা প্রয়োজনীয়। নিচের চিত্রটি লক্ষ করো যেখানে ছক কাগজের উপর অক্ষদ্বয় আঁকা হয়েছে। অক্ষদ্বয় হতে P এবং Q বিন্দুর দূরত্ব লক্ষ করো। এজন্য x-অক্ষের উপর PM এবং y-অক্ষের উপর PN লম্ব আঁকা হল। অনুরূপভাবে QR ও QS লম্বদ্বয় আঁকা হল যা চিত্র 3.10-তে দেখানো হয়েছে।



চিত্র.. 3.10

তোমরা পেয়েছ যে—

(i) x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর y-অক্ষ হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব PN = OM = 4 একক।

(ii) y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর x-অক্ষ হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব PM = ON = 3 একক।

(iii) x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর y-অক্ষ হতে Q বিন্দুর লম্ব দূরত্ব OR = SQ = 6 একক।

(iv) y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর x-অক্ষ হতে Q বিন্দুর লম্ব দূরত্ব OS = RQ = 2 একক।

এখন এই দূরত্বগুলো ব্যবহার করে কীভাবে ঐ বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করবে যাতে কোনো বিভ্রান্তির অবকাশ না থাকে?

নীচের নিয়ম অনুযায়ী আমরা একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লিখতে পারি :

(i) কোনো বিন্দুর ***x*-স্থানাঙ্ক** হল x-অক্ষ বরাবর y-অক্ষ হতে বিন্দুটির লম্ব দূরত্ব (ধনাত্মক হলে x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর এবং ঋণাত্মক হলে x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক

বরাবর)। P বিন্দুর ক্ষেত্রে এটি + 4 এবং Q এর বেলায় – 6 , x - স্থানাঙ্ককে **ভুজ** (***abscissa***) বলা হয়।

(ii) কোনো বিন্দুর ***y*** **-স্থানাঙ্ক** হল y-অক্ষ বরাবর x-অক্ষ হতে বিন্দুটির লম্ব দূরত্ব (ধনাত্মক হলে y -অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর এবং ঋণাত্মক হলে y -অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর)। P বিন্দুর ক্ষেত্রে এটা + 3 এবং Q এর বেলায় – 2, y - স্থানাঙ্ককে **কোটি** (***ordinate***) বলা হয়।

(iii) কোনো স্থানাঙ্ক সমতলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের শুরুতে x স্থানাঙ্ক প্রথমে আসে তারপর y স্থানাঙ্ক। আমরা স্থানাঙ্কগুলোকে প্রথম বন্ধনীর মধ্যে রাখি। ভুজ ও কোটির মাঝখানে কমা ব্যবহার করে স্থানাঙ্ক প্রথম বন্ধনীতে প্রকাশ করা হয়।

অতএব, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 3) এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (– 6, – 2)।

লক্ষ করো যে, কোনো সমতলে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক অনন্য। (3, 4) এবং (4, 3) এক নয়।

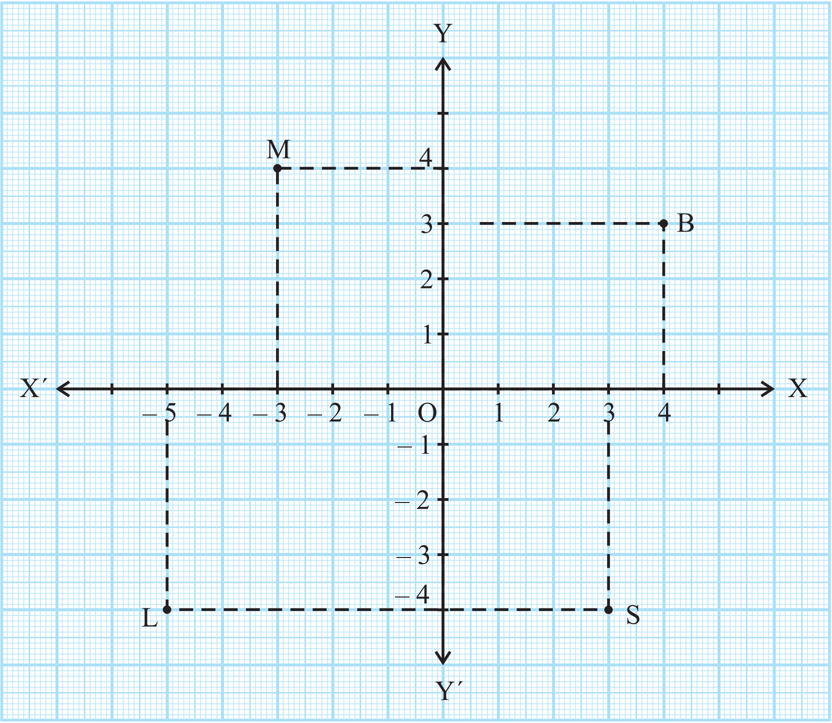
উদাহরণ 1 : চিত্র 3.11 দেখো এবং নিচের বিবৃতগুলো সম্পূর্ণ করো।

(i) B বিন্দুর ভুজ ও কোটি যথাক্রমে_____ এবং _____ । অতএব, B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (__ ,__)।

(ii) M বিন্দুর x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে _____ এবং _____ । সুতরাং, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (__ ,__)।

(iii) L বিন্দুর x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে _____ এবং _____ । সুতরাং, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (__ ,__)।

(iv) S বিন্দুর x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে _____ এবং _____ । সুতরাং, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (__ ,__)।



চিত্র.. 3.11

সমাধান : (i) যেহেতু y - অক্ষ হতে B বিন্দুর দূরত্ব 4 একক, সুতরাং, B বিন্দুর x -স্থানাঙ্ক বা ভুজ হল 4। x -অক্ষ হতে B বিন্দুর দূরত্ব 3 একক, সুতরাং, B বিন্দুর y -স্থানাঙ্ক অর্থাৎ কোটি হল 3, অতএব B বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (4, 3)।

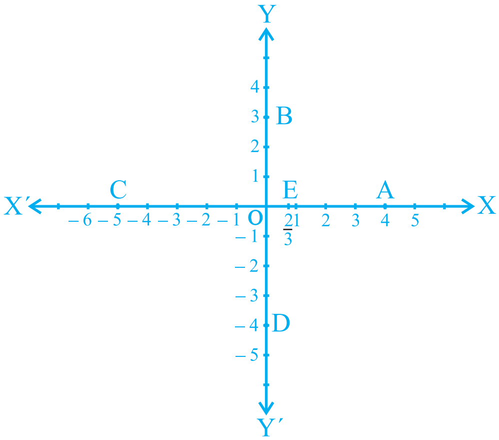
উপরের (i) নং এর মতো :

(ii) M বিন্দুর x স্থানাঙ্ক এবং y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে –3 এবং 4। সুতরাং, M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–3, 4)।

(iii) L বিন্দুর x স্থানাঙ্ক এবং y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে –5 এবং – 4। সুতরাং, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–5, – 4)।

(iv) S বিন্দুর x স্থানাঙ্ক এবং y স্থানাঙ্ক যথাক্রমে 3 এবং – 4 । সুতরাং, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3,– 4)।

উদাহরণ 2 : চিত্র 3.12 অনুযায়ী অক্ষদ্বয়ে চিহ্নিত বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক লেখো।



চিত্র.. 3.12

সমাধান : তোমরা দেখেছ যে :

(i) y অক্ষ থেকেA বিন্দুর দূরত্ব 4 একক এবং x -অক্ষ থেকে দূরত্ব শূন্য (0) একক, অতএব A বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক 4 এবং y-স্থানাঙ্ক হল 0 (শূন্য)। সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (4, 0)।

(ii) B এর স্থানাঙ্ক হল (0, 3), কেন?

(iii) C এর স্থানাঙ্ক হল (– 5, 0), কেন?

(iv) D এর স্থানাঙ্ক হল (0, – 4), কেন?

(v) E এর স্থানাঙ্ক হল $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, কেন?

যেহেতু x-অক্ষ হতে x-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেকটি বিন্দুর কোনো দূরত্ব নেই (শূন্য দূরত্ব) অতএব x-অক্ষ এর উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দুর y স্থানাঙ্ক সর্বদা শূন্য। সুতরাং x-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার $(x, 0)$, যেখানে x হল y অক্ষ থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্ব। অনুরূপে y-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার হল $(0, y)$, যেখানে y হল x অক্ষ থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্ব। কেন?

মূলবিন্দু ‘O’ এর স্থানাঙ্ক কী? উভয় অক্ষ থেকে তার দূরত্ব শূন্য **(0)**। সুতরাং ভুজ ও কোটি উভয়ই শূন্য। অতএব মূলবিন্দু হল **(0, 0)**।

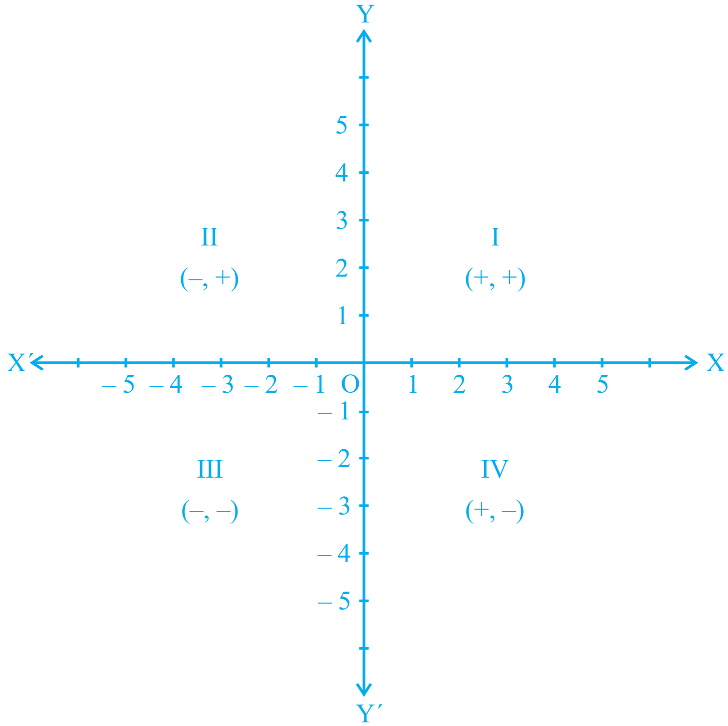
উপরের উদাহরণে, কোনো বিন্দু যে পাদে অবস্থিত সেই পাদ এবং স্থানাঙ্কের চিহ্নগুলোর মধ্যে নিম্নলিখিত সম্পর্কগুলো তোমরা সম্ভবত লক্ষ করেছ।

(i) যদি কোনো বিন্দু প্রথম পাদে অবস্থিত হয়, তবে ঐ বিন্দুর আকার হবে (+, +)। যেহেতু প্রথম পাদ x অক্ষের ধনাত্মক এবং y অক্ষের ধনাত্মক দিক দ্বারা আবদ্ধ।

(ii) যদি কোনো বিন্দু দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হয় তবে ঐ বিন্দুর আকার হবে (–, +)। যেহেতু দ্বিতীয় পাদ x অক্ষের ঋণাত্মক এবং y অক্ষের ধনাত্মক দিক দ্বারা আবদ্ধ।

(iii) যদি কোনো বিন্দু তৃতীয় পাদে অবস্থিত হয় তবে ঐ বিন্দুর আকার হবে (–, –)। যেহেতু তৃতীয় পাদ x অক্ষ এবং y অক্ষের ঋণাত্মক দিক দ্বারা আবদ্ধ।

(iv) যদি কোনো বিন্দু চতুর্থ পাদে অবস্থিত হয় তবে ঐ বিন্দুর আকার হবে (+, –)। যেহেতু চতুর্থ পাদ x অক্ষের ধণাত্মক এবং y অক্ষের ঋণাত্মক দিক দ্বারা আবদ্ধ (চিত্র 3.13 দেখো)।



চিত্র **3.13**

মন্তব্য : একটি সমতলে একটি বিন্দুর অবস্থানের বর্ণনা আমরা যেভাবে উপরে আলোচনা করেছি তা শুধুমাত্র একটি প্রথা যা সমগ্র বিশ্বে স্বীকৃত। আবার পদ্ধতিটি এমন করা যায় যেমন প্রথমে কোটি (ordinate) এবং পরে ভুজ (abscissa)। তথাপি যে কোনো বিভ্রান্তি এড়ানোর জন্য, সমগ্র বিশ্ব আমাদের বর্ণিত পদ্ধতির সাথেই যুক্ত।

অনুশীলনী 3.2

1. নিচের প্রতিটি প্রশ্নের উত্তর লেখো :

(i) কার্তেসীয় সমতলে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য অণুভূমিক এবং উল্লম্ব বরাবর যে রেখাগুলো অঙ্কন করা হয় তাদের নাম কী?

(ii) এ দুটি রেখা দ্বারা গঠিত সমতলের প্রতিটি অংশের নাম কী?

(iii) এ দুটি রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করে তার নাম লেখো?

2. চিত্র 3.14 দেখো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(i) B এর স্থানাঙ্ক

(ii) C এর স্থানাঙ্ক

(iii) (–3, –5) স্থানাঙ্ক দ্বারা চিহ্নিত বিন্দুটি

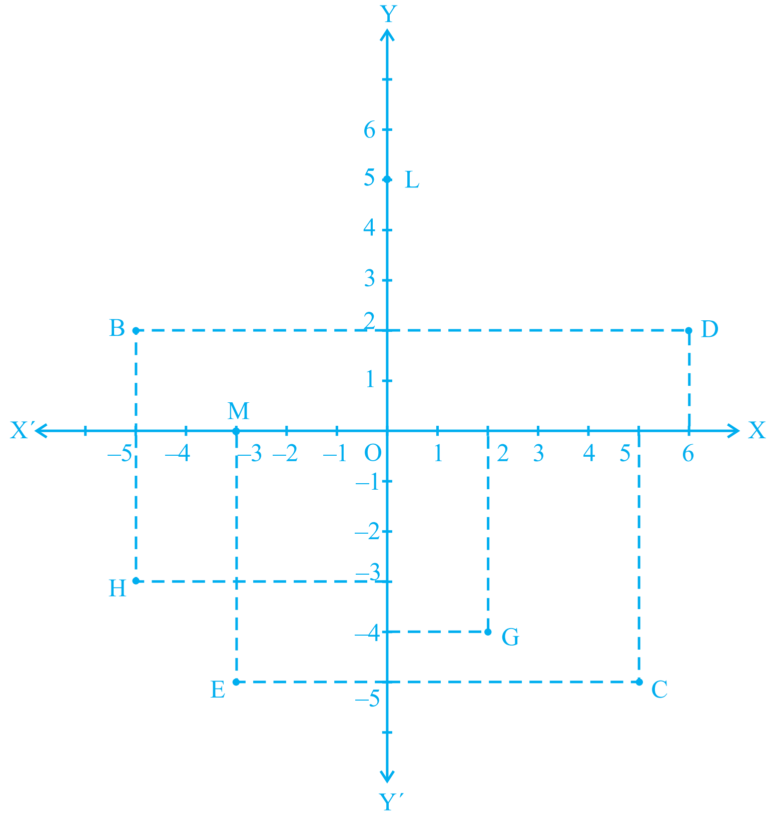
(iv) (2, – 4) স্থানাঙ্ক দ্বারা চিহ্নিত বিন্দুটি

(v) D বিন্দুর ভুজ

(vi) H বিন্দুর কোটি

(vii) L বিন্দুর স্থানাঙ্ক

(viii) M বিন্দুর স্থানাঙ্ক



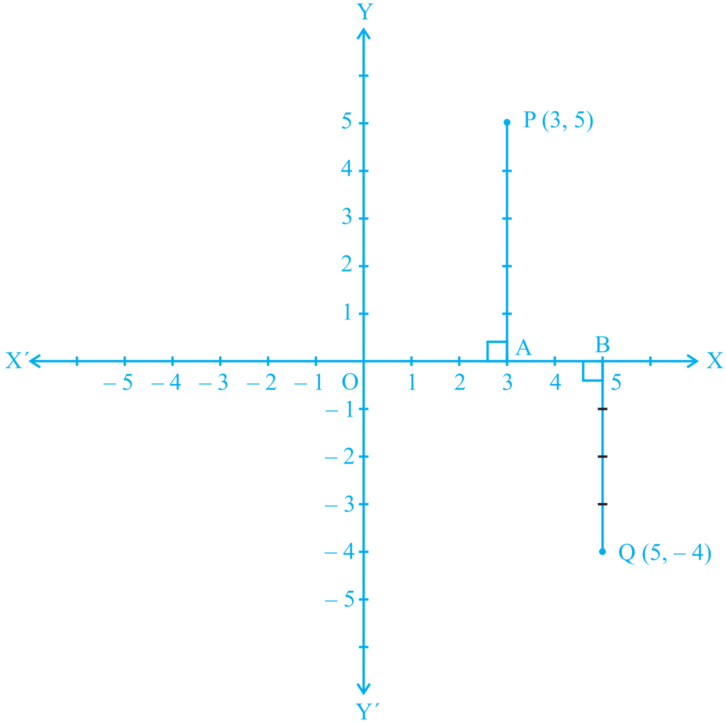
চিত্র **3.14**

3.3 একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে সমতলে ঐ বিন্দু স্থাপন :

এখন তোমাদের জন্য কিছু বিন্দু দেওয়া হল এবং তোমাদের বলা হল বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক দেওয়ার জন্য। এখন আমরা তোমাদের দেখাব বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলে কীভাবে সমতলে বিন্দুগুলো স্থাপন করা হয়। এই পদ্ধতিকে বলা হয় "বিন্দু স্থাপন।"

মনে করো একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 5), স্থানাঙ্ক সমতলে আমরা বিন্দুটি স্থাপন করতে চাই। অক্ষদ্বয় অঙ্কন করা হল এবং একক এমনভাবে ধরা হল যেন উভয় অক্ষ বরাবর এক সেন্টিমিটার এক একক নির্দেশ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (3, 5) থেকে আমরা পাই যে x অক্ষের ধনাত্মক দিক

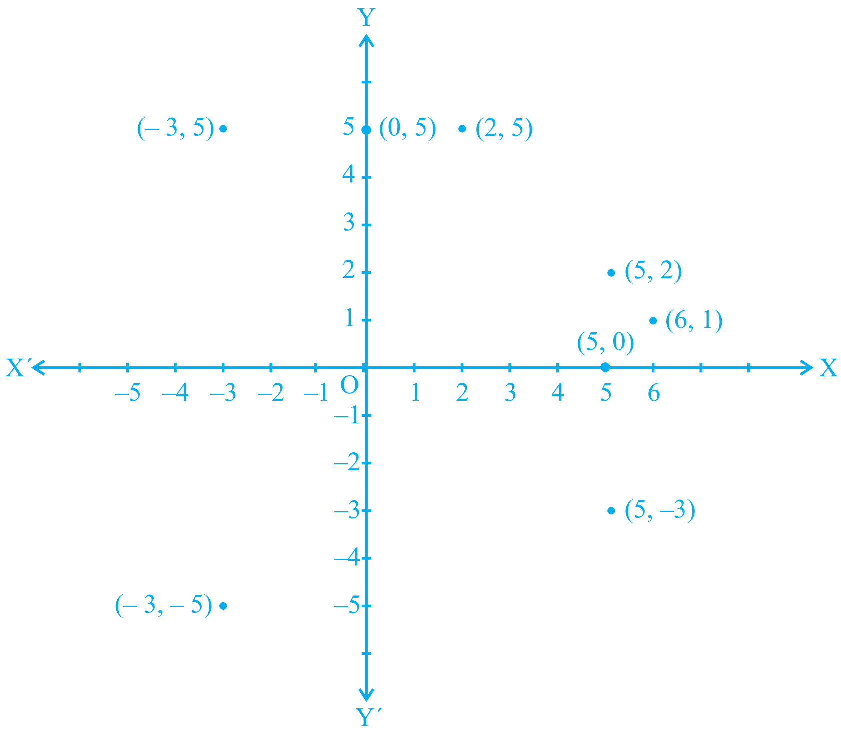
বরাবর y অক্ষ হতে বিন্দুটির দূরত্ব 3 একক এবং y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর x -অক্ষ হতে বিন্দুটির দূরত্ব 5 একক। মূলবিন্দু O থেকে শুরু করে, x-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর আমরা 3 একক গণনা করি এবং অনুরূপ বিন্দুটি A দ্বারা চিহ্নিত করি। এখন A বিন্দু থেকে শুরু করে y অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর অগ্রসর হই এবং 5 একক গণনা করি এবং অনুরূপে বিন্দুটি P-দ্বারা চিহ্নিত করি (চিত্র 3.15 দেখো)। তোমরা লক্ষ করো যে, P এর দূরত্ব y -অক্ষ হতে 3 একক এবং x-অক্ষ হতে 5 একক, অতএব P হল বিন্দুটির অবস্থান। লক্ষ করো P প্রথম পাদে অবস্থিত, যেহেতু P এর উভয় স্থানাঙ্কই ধনাত্মক। অনুরূপে, তোমরা স্থানাঙ্ক সমতলে Q (5, – 4) বিন্দুটি স্থাপন করতে পারো। y অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর x অক্ষ হতে Q বিন্দুর দূরত্ব 4 একক, সুতরাং এর y স্থানাঙ্ক –4 (চিত্র 3.15 দেখো)। Q বিন্দুটি চতুর্থপাদে অবস্থিত, কেন?



চিত্র.. 3.15

উদাহরণ 3: কার্তেসীয় তলে (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) এবং (6, 1) বিন্দুগুলো স্থাপন করো।

সমাধান : 1 সেমি = 1 একক ধরে, আমরা x অক্ষ এবং y অক্ষ অঙ্কন করি, 3.16 চিত্রে বিন্দুগুলোর অবস্থান বিন্দু (dot) দ্বারা দেখানো হয়েছে।



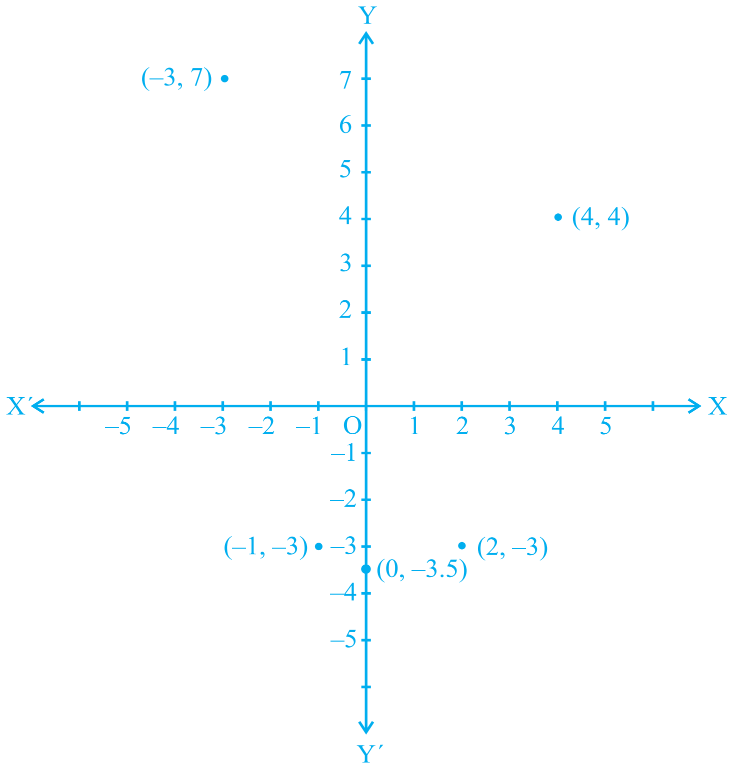
চিত্র.. 3.16

দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে তোমরা লক্ষ করেছ যে, (5, 0) এবং (0, 5) বিন্দুগুলো একই জায়গায় অবস্থান করে না। অনুরূপে, (5, 2) এবং (2, 5) বিন্দুগুলোর অবস্থান আলাদা। (–3, 5) এবং (5, –3) বিন্দুর অবস্থানও আলাদা। এরূপ অসংখ্য উদাহরণ নিয়ে তোমরা দেখবে যে, **যদি $x \neq y$ হয়, তবে কার্তেসীয় সমতলে (x, y) এবং (y, x) এর অবস্থান আলাদা।** অতএব, আমরা যদি x এবং y স্থানাঙ্ক অদল-বদল (বিনিময়) করি তবে (x, y) এর অবস্থান (y, x) থেকে আলাদা হবে। এর অর্থ, (x, y) এ, x এবং y এর ক্রম (ordered) গুরুত্বপূর্ণ। এজন্য, (x, y) কে বলা হয় ক্রমযুগল (ordered pair) । যদি $x \neq y$, তবে ক্রমযুগল $(x, y) \neq$ ক্রমযুগল (y, x) । আবার, $(x, y) = (y, x)$, যদি $x = y$ হয়।

উদাহরণ 4: অক্ষদ্বয় বরাবর 1সেমি = 1 একক স্কেল ব্যবহার করে, কার্তেসীয় সমতলে নিম্নলিখিত ক্রমযুগল (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি।

x	– 3	0	– 1	4	2
y	7	–3.5	– 3	4	– 3

সমাধান : সারণিতে প্রদত্ত সংখ্যাযুগল গুলোকে (– 3, 7), (0, –3.5), (–1,–3), (4, 4) এবং (2,–3) বিন্দু দ্বারা প্রকাশ করা যায়। চিত্রে বিন্দুগুলোর অবস্থান ডটের (dot) মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।



চিত্র.. 3.17

কার্যকলাপ (Activity) 2: দুজনের একটি খেলা (প্রয়োজনীয় বস্তু : দুটি কাউন্টার বা মুদ্রা, ছক কাগজ, দুটি বিভিন্ন রঙের পাশা (dice) যেমন— লাল এবং সবুজ রঙের) :

প্রতিটি কাউন্টার বা মুদ্রা (0, 0) তে রাখো। প্রত্যেক খেলোয়াড় পাশা দুটি একসঙ্গে নিক্ষেপ করে। যখন প্রথম খেলোয়াড় এরূপ করে, মনে করো লাল পাশায় দেখায় 3 এবং সবুজ পাশায় দেখায় 1, সুতরাং সে তার কাউন্টার বা মুদ্রাকে (3, 1) এ অগ্রসর করে। অনুরূপে যদি দ্বিতীয় খেলোয়াড় লাল পাশাটির 2 এবং সবুজ পাশাটির 4 কে নিক্ষেপ করে, তাহলে তার কাউন্টারটি অগ্রসর হল (2, 4) এ, দ্বিতীয়বার নিক্ষেপে যদি প্রথম খেলোয়াড় লাল পাশাটির 1 এবং সবুজ পাশাটির 4 নিক্ষেপ করে তবে তার কাউন্টার ((3, 1) হতে অগ্রসর হয় (3 + 1, 1 + 4) এ, অর্থাৎ x স্থানাঙ্কের সাথে 1 এবং y স্থানাঙ্কের সাথে 4 যোগ হয়।

খেলাটির উদ্দেশ্য হল, লক্ষ্য অতিক্রম না করে প্রথমে (10, 10) বিন্দুতে পৌঁছানো। অর্থাৎ ভুজ অথবা কোটি এর মধ্যে কোনটিই 10 অপেক্ষা বড় হবে না। আবার একটি কাউন্টার অপর একটি কাউন্টারের অবস্থানের উপর সমাপতিত হবে না। উদাহরণস্বরূপ, যদি প্রথম খেলোয়াড়ের কাউন্টারটি

এমন বিন্দুতে অগ্রসর হল, সেখানে দ্বিতীয় খেলোয়াড়ের কাউন্টারটি আগে থেকেই সেখানে অবস্থান করছে, তবে দ্বিতীয় খোলায়াড়ের কাউন্টারটি (0,0) তে চলে যাবে। যদি কোনো অগ্রসর, অতিক্রম করা ছাড়া অসম্ভব হয়ে পড়ে, সেক্ষেত্রে ঐ খেলোয়াড় সুযোগ হারাবে। তোমরা এ খেলাটি আরো বন্ধুদের নিয়েও খেলতে পারো।

মন্তব্য : কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুগুলোর স্থাপন, বিভিন্ন ঘটনার লেখচিত্র অঙ্কনের সাথে তুলনা করা যেতে পারে, যেমন সময়-দূরত্ব লেখচিত্র, বাহু-পরিসীমা লেখচিত্র ইত্যাদি, যা তোমরা আগের শ্রেণিগুলোতে করে এসেছো। এসব ক্ষেত্রে x এবং y অক্ষের পরিবর্তে, আমরা অক্ষদ্বয়কে t অক্ষ, d অক্ষ, s অক্ষ বা p অক্ষ ইত্যাদি বলতে পারি।

অনুশীলনী-3.3

1. (–2, 4), (3, – 1), (– 1, 0), (1, 2) এবং (– 3, – 5) বিন্দুগুলো কোন পাদে অথবা কোন অক্ষের উপর অবস্থিত ? কার্তেসীয় সমতলে বিন্দুগুলো স্থাপন করে তোমার উত্তরের সত্যতা যাচাই করো।

2. অক্ষদ্বয়ের উপর দূরত্বের সুবিধামতো একক ধরে নিচের সারণীতে দেওয়া বিন্দুগুলো (x, y) সমতলে স্থাপন করো।

x	– 2	–1	0	1	3
y	8	7	– 1.25	3	– 1

3.4 সারসংক্ষেপ : এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো জেনেছ :

1. একটি সমতলে একটি বস্তু বা একটি বিন্দু স্থাপন করতে হলে, দুটি লম্বরেখার প্রয়োজন। তাদের একটি অণুভূমিক এবং অন্যটি উল্লম্ব।
2. সমতলটিকে বলা হয় কার্তেসীয় বা স্থানাঙ্ক সমতল এবং রেখাগুলোকে বলা হয় স্থানাঙ্ক অক্ষ।
3. অণুভুমিক রেখাকে বলা হয় x অক্ষ এবং উল্লম্ব রেখাকে বলা হয় y অক্ষ।
4. স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটি সমতলকে চারটি অংশে ভাগ করে প্রতিটি অংশকে এক একটি পাদ বলে।
5. অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দুকে বলা হয় মূলবিন্দু।
6. y অক্ষ হতে কোনো বিন্দুর দূরত্ব হল x স্থানাঙ্ক বা ভুজ এবং x অক্ষ হতে কোনো বিন্দুর দূরত্ব হল y স্থানাঙ্ক বা কোটি।
7. যদি কোনো বিন্দুর ভুজ x এবং কোটি y হয়, তবে (x, y) হল ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক।
8. x অক্ষের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার হল $(x, 0)$ এবং y অক্ষের উপর অবস্থিত স্থানাঙ্ক হল $(0, y)$ ।
9. মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (0, 0)।
10. প্রথম পাদে অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্কের আকার (+ , +), দ্বিতীয় পাদে (–, +), তৃতীয় পাদে (–, –) এবং চতুর্থ পাদে (+, –), যেখানে + ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং – ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যাকে বোঝায়।
11. যদি $x \neq y$ হয়, তবে $(x, y) \neq (y, x)$ এবং $(x, y) = (y, x)$, যদি $x = y$ হয়।

অধ্যায়-4

দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ (LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be

(বিশ্লেষণাত্মক কলার মুখ্য প্রয়োগ হলো গণিতের সমস্যাগুলোকে সমীকরণ আকারে প্রকাশ করা এবং এই সমীকরণগুলোকে যথাসম্ভব সরলপদে তৈরি করা।)

—***Edmund Halley***

4.1 ভূমিকা :

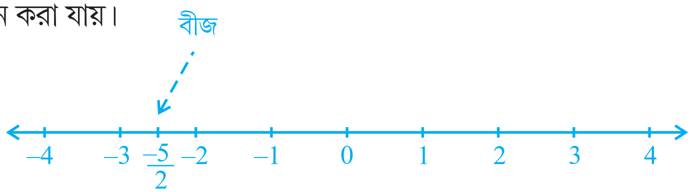
পূর্বের শ্রেণিগুলোতে তোমরা একচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ নিয়ে পড়েছ। তুমি কি একচল বিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণ লিখতে পারো? হয়তো তুমি বলবে যে, $x + 1 = 0, x + \ = \sqrt{2} = 0$ এবং $\sqrt{2}\ y + \sqrt{3} = 0$ একচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের উদাহরণ। তুমি জান, এই ধরনের সমীকরণের উদাহরণ। তুমি আরো জানো, এই ধরনের সমীকরণের একটি অনন্য (একটি এবং কেবলমাত্র একটি) সমাধান আছে। তোমার হয়তো মনে আছে সরলরেখার উপর এই সমাধানকে কিভাবে উপস্থাপন করতে হয়। এটি অধ্যায়ে একচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের জ্ঞানকে স্মরণ করা হবে এবং ইহা দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যাবে। দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের সমাধান আছে কি? যদি সঠিক হয় তবে এটি কেন অনন্য (unique)? কার্তেসীয় তলে তাদের সমাধান দেখতে কিরূপ? এ ধরনের প্রশ্নের সমাধান করার জন্য, আমরা তৃতীয় অধ্যায়ে আলোচিত ধারণাগুলোর প্রয়োগ করব।

4.2 রৈখিক সমীকরণ :

চলো দেখি এখন পর্যন্ত তোমাদের কি কি পড়া হয়েছে। নিম্নলিখিত সমীকরণটি দেখি :

$$2x + 5 = 0$$

এটির সমাধান অর্থাৎ সমীকরণটির বীজ (root) হল $-\frac{5}{2}$ । এটিকে নিম্নলিখিত রূপে সংখ্যারেখার উপর উপস্থাপন করা যায়।



চিত্র. 4.1

একটি সমীকরণ সমাধান করার সময়, তোমরা অবশ্যই নিচের তথ্যগুলো মনে রাখবে :

রৈখিক সমীকরণের সমাধান প্রভাবিত হয় না যখন :

(i) সমীকরণের উভয়দিকে একই সংখ্যা যোগ (অথবা বিয়োগ) করা হয়।

(ii) সমীকরণের উভয়দিকে একই সংখ্যা দ্বারা (শূন্য ব্যতীত) গুণ বা ভাগ করা হয়।

চলো এখন নিম্নলিখিত অবস্থা নিয়ে বিচার করি :

নাগপুরে অনুষ্ঠিত ভারত ও শ্রীলঙ্কার মধ্যে একদিনের আন্তর্জাতিক ক্রিকেট ম্যাচে দুইজন ভারতীয় ব্যাটসম্যান একত্রে 176 রান করে। এই তথ্যটিকে একটি সমীকরণ আকারে প্রকাশ করো।

এখানে তোমরা দেখতে পাচ্ছো, দুইজন ব্যাটসম্যানের মধ্যে কোনো ব্যাটসম্যানের রানই আমাদের জানা নেই অর্থাৎ এখানে দুটিই অজ্ঞাত রাশি। চলো, আমরা ওদেরকে x এবং y এর সাহায্যে প্রকাশ করি। সুতরাং এভাবে একজন ব্যাটসম্যান কর্তৃক সংগৃহীত রান হল x এবং অপর ব্যাটসম্যান কর্তৃক সংগৃহীত রান হল y । আমরা জানি,

$$x + y = 176,$$

যা নির্ণেয় সমীকরণ।

এটি দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের উদাহরণ। প্রথা অনুযায়ী এই ধরনের সমীকরণের চলরাশিকে x এবং y দিয়ে প্রকাশ করা হয়, কিন্তু অন্য অক্ষরগুলোকেও ব্যবহার করা যায়। দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের কিছু উদাহরণ হল :

$$1.2s + 3t = 5, p + 4q = 7, \pi u + 5v = 9 \text{ এবং } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y$$

লক্ষ করো এই সমীকরণগুলোকে যথাক্রমে $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ এবং $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$

সুতরাং যে সমীকরণগুলোকে $ax + by + c = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে a, b এবং c মূলদ সংখ্যা এবং $a \neq 0$, $b \neq 0$, তাদের বলা হয় দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ। এর অর্থ এই যে, তুমি এমন ধরনের অনেক সমীকরণ নিয়ে ভাবতে পারো।

উদাহরণ 1: নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে $ax + by + c = 0$ আকারে লেখ এবং a, b এবং c এর মান প্রতিক্ষেত্রে নির্ণয় করো :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

সমাধান : (i) $2x + 3y = 4.37$ কে লেখা যায় $2x + 3y - 4.37 = 0$, এখানে $a = 2$, $b = 3$ এবং $c = -4.37$.

(ii) সমীকরণ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ কে লেখা যায়, $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ এখানে $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ এবং $c = -4$.

(iii) সমীকরণ $4 = 5x - 3y$ কে লেখা যায়, $5x - 3y - 4 = 0$ এখানে $a = 5$, $b = -3$ এবং $c = -4$ । তুমি কি একমত এটিকে $-5x + 3y + 4 = 0$ আকারে লিখতে? এক্ষেত্রে $a = -5$, $b = 3$ এবং $c = 4$

(iv) $2x = y$ এই সমীকরণকে $2x - y + 0 = 0$ আকারে লেখা যায়, এখানে $a = 2$, $b = -1$ এবং $c=0$। $ax + b = 0$ আকারের সমীকরণগুলোও দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের উদাহরণ, কারণ তাদের $ax + 0.y + b = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, $4 - 3x = 0$ কে $-3x + 0.y + 4 = 0$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 2: নিচের প্রত্যেকটিকে দ্বিচলবিশিষ্ট সমীকরণে প্রকাশ করো :

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

সমাধান : (i) $x = -5$ কে লেখা যায় $1.x + 0.y = -5$ অথবা $1.x + 0.y + 5 = 0$ আকারে।

(ii) $y = 2$ কে লেখা যায় $0.x + 1.y = 2$, বা $0.x + 1.y - 2 = 0$ আকারে।

(iii) $2x = 3$ কে লেখা যায় $2x + 0.y - 3 = 0$ আকারে।

(iv) $5y = 2$ কে লেখা যায় $0.x + 5y - 2 = 0$ আকারে।

অনুশীলনী-4.1

1. একটি নোটবই এর মূল্য একটি কলমের মূল্যের দ্বিগুণ। এ তথ্যটিকে উপস্থাপন করার জন্য দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণ লেখো। (ধরো, একটি নোটবইয়ের মূল্য x টাকা এবং একটি কলমের মূল্য y টাকা)

2. নিম্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে $ax + by + c = 0$ আকারে প্রকাশ করো এবং প্রতিক্ষেত্রে a, b, c এর মান নির্ণয় করো :

(i) $2x + 3y = 9.3\bar{5}$ (ii) $x - \dfrac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 রৈখিক সমীকরণের সমাধান :

তোমরা দেখেছ প্রতিটি একচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের সমাধান অনন্য (unique) এ

সম্পর্কে তোমার অভিমত কী? যেহেতু সমীকরণে দুটি চলরাশি আছে, তাই এর সমাধান মানে একজোড়া মান, একটি x এর জন্য এবং আরেকটি y এর জন্য, যা প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। চলো একটি সমীকরণ $2x + 3y = 12$ কে ধরি, এখানে $x = 3$ এবং $y = 2$ হল সমাধান কারণ যখন তুমি $x = 3$ এবং $y = 2$ উপরের সমীকরণে বসাবে, তখন তুমি পাবে—

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$$

এ সমাধানটিকে $(3, 2)$ এ ক্রমযুগলে লেখা যায়, যেখানে প্রথমটি x এর মানকে বোঝায় এবং পরেরটি y এর মানকে বোঝায়। অনুরূপে $(0, 4)$ ও উপরের সমীকরণের সমাধান।

অন্যভাবে $(1, 4)$, $2x + 3y = 12$ এর সমাধান নয়— কারণ $x = 1$ এবং $y = 4$ বসালে আমরা পাই $2x + 3y = 14$, যা 12 নয়। লক্ষ করো $(0, 4)$ সমাধান কিন্তু $(4, 0)$ সমাধান নয়।

তুমি লক্ষ করেছ, $2x + 3y = 12$ সমীকরণের কমপক্ষে দুইটি সমাধান হলো $(3, 2)$ এবং $(0, 4)$। তুমি কি আরো একটি সমাধান বের করতে পারো? তুমি কি একমত $(6, 0)$ আর একটি সমাধান? যদি হ্যাঁ হয় তবে তা প্রতিষ্ঠিত করো। নিচের নিয়মানুসারে, অসংখ্য সমাধান পাই।

$2x + 3y = 12$ এই সমীকরণের জন্য তোমার পছন্দমতো x এর একটি মান গ্রহণ করো (ধরো, $x = 2$) তাহলে সমীকরণটি হয় $4 + 3y = 12$ যাহা x এর একটি একচল বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ। ইহাকে সমাধান করে পাবে $y = \frac{8}{3}$। সুতরাং $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ হল $2x + 3y = 12$ এর আরেকটি সমাধান। অনুরূপে $x = -5$ বসালে সমীকরণটি হয় $-10 + 3y = 12$। এটি থেকে পাওয়া যায় $y = \frac{22}{3}$ ·। সুতরাং $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ হল $2x + 3y = 12$ এর আরেকটি সমাধান।

সুতরাং দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের বিভিন্ন সমাধানের শেষ নেই। *তাহলে দ্বিচলরাশিবিশিষ্ট একটি রৈখিক সমীকরণের অসংখ্য সমাধান আছে।*

উদাহরণ 3: $x + 2y = 6$ এর চারটি বিভিন্ন সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান : পর্যবেক্ষণ করে, $x = 2, y = 2$ হল সমাধান, কারণ $x = 2, y = 2$ এর জন্য

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

এখন চলো ধরি $x = 0$, x এর এ মানের জন্য প্রদত্ত সমীকরণটি $2y = 6$, যার অনন্য সমাধান $y=3$। সুতরাং, $x = 0, y = 3$ হল $x + 2y = 6$ এর সমাধান। অনুরূপে $y = 0$ বসিয়ে সমীকরণটি হয় $x = 6$।

সুতরাং, $x = 6, y = 0$ হল $x + 2y = 6$ এর সমাধান। সবশেষে চলো ধরি $y = 1$। তাহলে $x + 2y = 6$ সমীকরণের সমাধান হল $x = 4$। সুতরাং, $(4, 1)$ ও প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের অসংখ্য সমাধানের মধ্যে চারটি সমাধান হল—

$$(2, 2), (0, 3), (6, 0) \text{ এবং } (4, 1)$$

মন্তব্য : লক্ষ করো সমাধান পাওয়ার সহজ উপায় হল $x = 0$ ধরে এবং তার সাপেক্ষে y এর মান

নির্ণয় করা। অনুরূপে $y = 0$ ধরলে, তার সাপেক্ষে x এর মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ 4 : নিম্নে প্রদত্ত প্রশ্নগুলোর দুটি করে সমাধান লেখো :

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

সমাধান : (i) $x = 0$ ধরলে, আমরা পাই $3y = 12$ অর্থাৎ $y = 4$। সুতরাং $(0, 4)$ প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান। অনুরূপে $y = 0$ ধরে আমরা পাই $x = 3$। সুতরাং $(3, 0)$ হল সমাধান।

(ii) $x = 0$ ধরে, আমরা পাই $5y = 0$ অর্থাৎ $y = 0$। সুতরাং $(0, 0)$ প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান।

এখন তুমি যদি $y = 0$ ধরো তাহলে পুনরায় সমাধান পাবে $(0, 0)$, যা পূর্বে পাওয়া মানের মতো।

আরেকটি সমাধান পাওয়ার জন্য, ধরো $x = 1$, তাহলে দেখতে পাবে y এর মান হবে $-\frac{2}{5}$,

সুতরাং $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ হবে $2x + 5y = 0$ এর আরেকটি সমাধান।

(iii) $3y + 4 = 0$ সমীকরণকে $0.x + 3y + 4 = 0$ এর মত লিখে তোমরা পাবে $y = -\frac{4}{3}$ । x এর যে কোনো মানের জন্য তাহলে আমরা দুটি সমাধান পাই $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ এবং $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$।

অনুশীলনী-4.2

1. নিচে প্রদত্ত বিকল্পগুলোর মধ্যে কোনটি সত্য এবং কেন?

এর ক্ষেত্রে $y = 3x + 5$

(i) একটি অনন্য সমাধান আছে। (ii) মাত্র দুটি সমাধান আছে। (iii) অসংখ্য সমাধান আছে।

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলোর চারটি করে সমাধান লেখো :

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. নিম্নলিখিত সমাধানগুলোর মধ্যে কোনটি $x - 2y = 4$ সমীকরণের সমাধান এবং কোনটি নয়, পরীক্ষা করো :

(i) $(0, 2)$ (ii) $(2, 0)$ (iii) $(4, 0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

(v) $(1, 1)$

4. যদি $x = 2, y = 1$ সমীকরণ $2x + 3y = k$ এর সমাধান হয় তবে k এর মান নির্ণয় করো।

4.4 দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র :

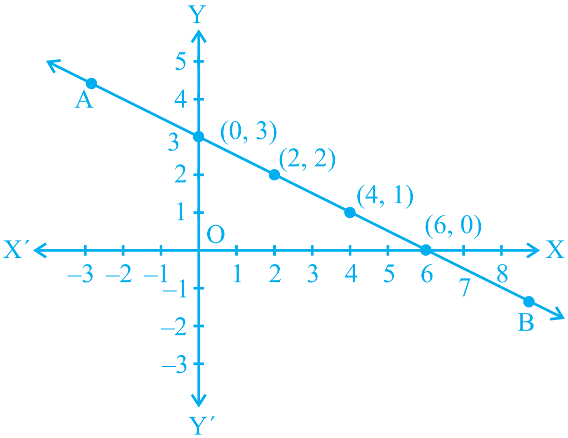
এখন পর্যন্ত তোমরা দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের বীজগাণিতিক রূপ পেয়েছ। চলো এখন তাদের জ্যামিতিক ভাবে কিরূপে প্রকাশ করা যায় তা দেখি। তোমরা জানো, এ ধরনের সমীকরণের অসংখ্য সমাধান আছে। আমরা কীভাবে তাদের কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দেখাতে পারি? সমাধানগুলোর যুগলমান লিখলে, তার থেকে কিছু সংকেত পাওয়া যায়।

উদাহরণ 3 হতে পাওয়া $x + 2y = 6$ (1) রৈখিক সমীকরণের সমাধানগুলোকে নিম্নে সারণি আকারে প্রকাশ করা যায়। যেখানে x এর মানের নিচে y এর অনুরূপ মানকে লেখা হয়েছে।

সারণি-1

x	0	2	4	6	. . .
y	3	2	1	0	. . .

পূর্বের অধ্যায়ে তোমরা পড়েছ কীভাবে ছক কাগজে বিন্দু স্থাপন করতে হয়। চলো আমরা (0, 3), (2, 2), (4, 1), এবং (6, 0), বিন্দুগুলো ছক কাগজে (graph paper) স্থাপন করি। এখন যেকোনো দুটি বিন্দু যোগ করে একটি রেখা পাই। এই রেখাটির নাম AB (চিত্র 4.2 দেখো)।



চিত্র. 4.2

তোমরা লক্ষ করেছ কি, অপর দুটি বিন্দু, AB রেখার উপর অবস্থিত? এখন অন্য আরেকটি বিন্দু (8,–1) ধরা হল। এটি কি প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান? বস্তুত $8 + 2(-1) = 6$। সুতরাং (8,–1) হল প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান। AB এর উপর যেকোনো বিন্দু নিয়ে যাচাই করে দেখো। এই স্থানাঙ্কটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে কি না। এখন এমন একটি বিন্দু (2, 0) নেওয়া হল, যা AB এর উপর অবস্থিত নয়। এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক কি সমীকরণকে সিদ্ধ করে? পরীক্ষা করে দেখো এটা সিদ্ধ করে না।

চলো আমরা পর্যবেক্ষণগুলোর একটি তালিকা তৈরি করি :

1. যে বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক সমীকরণ (1) কে সিদ্ধ করে সে বিন্দুগুলো AB এর উপর অবস্থিত।

2. AB রেখার উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু (a, b), সমীকরণ (1) এর একটি সমাধান $x = a$, $y = b$ কে প্রদর্শন করে।

3. যে বিন্দুগুলো AB রেখার উপর অবস্থিত নয় সে বিন্দুগুলো সমীকরণ (1) এর সমাধান নয়।

সুতরাং তোমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারো যে রেখার উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং সমীকরণের প্রতিটি সমাধান রেখার উপর অবস্থিত এক একটি বিন্দু। বস্তুতপক্ষে, দ্বিচল রাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণকে জ্যামিতির সাহায্যে একটি রেখার দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং এই রেখার অবস্থিত বিন্দুগুলো সমীকরণটির সমাধান। এটাকে রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র (*graph*) বলা হয়। অতএব, দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে, প্রদত্ত সমীকরণের দুটি সমাধানের অনুরূপ দুটি বিন্দু স্থাপন করে, তাদের একটি রেখায় সংযোগ করাই যথেষ্ট। যদিও দুইয়ের অধিক বিন্দু নিয়ে লেখচিত্রটি অঙ্কন করলে ভাল, কারণ এর ফলে লেখচিত্রটির শুদ্ধতা যাচাই করা যায়।

মন্তব্য : একঘাতবিশিষ্ট বহুপদ সমীকরণ $ax + by + c = 0$ কে রৈখিক সমীকরণ বলা হয় কারণ এই সমীকরণের জ্যামিতিক উপস্থাপন হল একটি সরলরেখা।

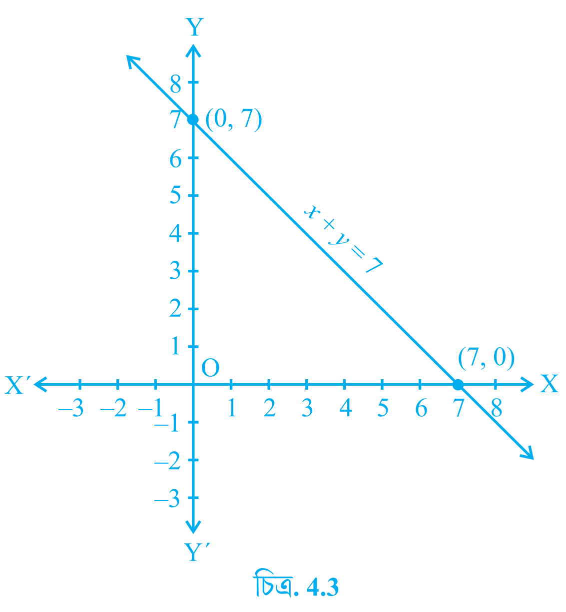
উদাহরণ 5 : এমন একটি রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো, যার উপর (1, 2) বিন্দুটি অবস্থিত। এ ধরনের সমীকরণ আরও কতগুলো হতে পারে?

সমাধান : এখানে তোমরা (1, 2) সমাধান বিশিষ্ট একটি সমীকরণের চিন্তা করছো অর্থাৎ এমন একটি রেখা ভাবছ যা (1, 2) বিন্দুগামী। তাহলে প্রদত্ত বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হল $x + y = 3$ । অন্যান্য সমীকরণগুলো হল $y - x = 1$, $y = 2x$, কারণ তারাও (1, 2) বিন্দুর দ্বারা সিদ্ধ হয়।

বাস্তবে, অসীম সংখ্যক রৈখিক সমীকরণ আছে যারা (1, 2) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয়। এটিকে চিত্রের সাহায্যে দেখাতে পারবে কি?

উদাহরণ 6 : $x + y = 7$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করো।

সমাধান : লেখচিত্রটি আঁকার জন্য আমাদের কমপক্ষে দুটি সমাধান প্রয়োজন। তোমরা এখানে দেখতে পারো প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান হলো $x = 0, y = 7$ এবং $x = 7, y = 0$ । সুতরাং তোমরা লেখচিত্রটি অঙ্কন করার জন্য নিচের সারণি ব্যবহার করতে পারো।



চিত্র. 4.3

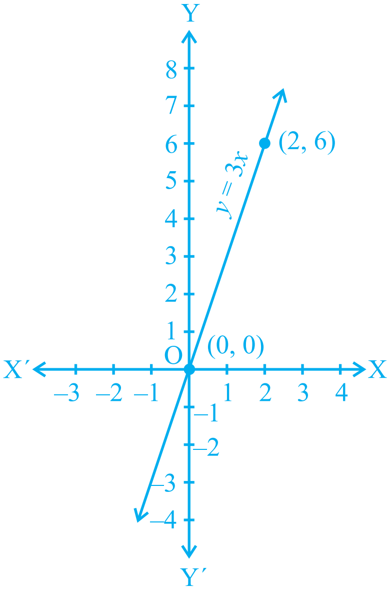
সারণি-2

x	0	7
y	7	0

সারণি 2 হতে প্রদত্ত দুটি বিন্দু ছক কাগজে স্থাপন করো এবং তাদের একটি রেখা দিয়ে সংযুক্ত করা (চিত্র 4.3 দেখো) হল। এ রেখাই $x + y = 7$ সমীকরণের লেখচিত্র।

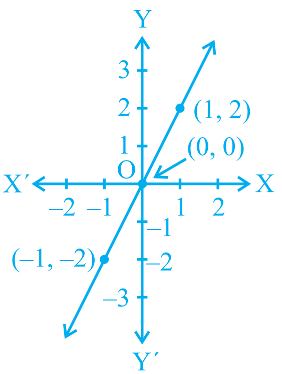
উদাহরণ 7 : তোমরা জানো যে, একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল বস্তুতে উৎপন্ন ত্বরণের প্রত্যক্ষ সমানুপাতি। এ উক্তিটি একটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করো এবং এর একটি লেখচিত্র অঙ্কন করো।

সমাধান : এখানে সংশ্লিষ্ট চলরাশিগুলো হল, বল এবং ত্বরণ। ধরা হলো প্রযুক্ত বল y একক এবং উৎপন্ন ত্বরণ x একক। অনুপাত এবং সমানুপাত হতে তোমরা x ও y এর সম্পর্ককে লিখতে পার $y = kx$, যেখানে k একটি ধ্রুবক। বিজ্ঞানের ভাষায় k হল একটি বস্তু বা ভর।

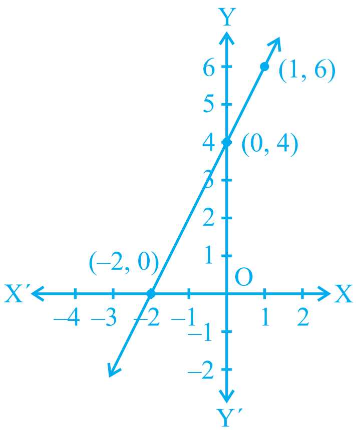


চিত্র. 4.4

এখন যেহেতু আমরা জানি না k এর মান কী, তাই $y = kx$ এর প্রকৃত চিত্র অঙ্কন সম্ভব হচ্ছে না। যদি আমরা k এর একটি মান ধরি তাহলে আমরা লেখচিত্রটি অঙ্কন করতে পারি। $k = 3$ হলে $y = 3x$ সমীকরণের লেখ অঙ্কন করা যাবে।



(i)



(ii)

চিত্র. 4.5

এরজন্য এই সমীকরণের দুটি সমাধান (0, 0) এবং (2, 6) ধরা হল (চিত্র 4.4 দেখো)।

লেখচিত্র হতে পাওয়া যায়, যখন প্রযুক্ত বলের পরিমাণ 3 একক তখন ত্বরণ উৎপন্ন হয় 1 একক। আরও দেখা যায় (0, 0) বিন্দুটি লেখচিত্রে অবস্থিত, যার অর্থ ত্বরণ উৎপন্ন হয় 0 একক যখন বল প্রয়োগ করা হয় 0 একক।

মন্তব্য : সমীকরণ $y = kx$ রূপের সমীকরণের লেখ একটি রেখা নির্দেশ করে যা সর্বদা মূলবিন্দুগামী।

উদাহরণ 8 : চিত্র 4.5 এ দেওয়া লেখচিত্রগুলোকে দেখো এবং নিচের বিকল্পগুলো থেকে প্রতিটি লেখচিত্রের সঠিক সমীকরণটিকে সনাক্ত করো :

(a) 4.5 (i), এরজন্য

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$

(iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) 4.5 (ii), এরজন্য

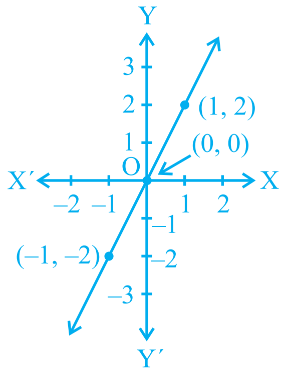
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$

(iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

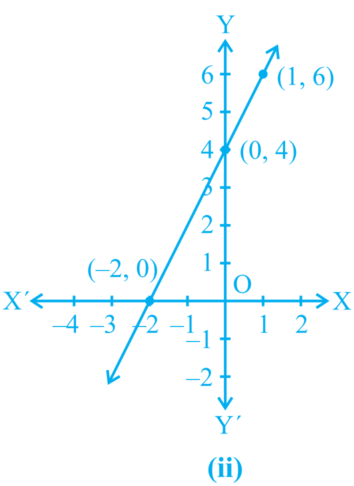
(c) 4.5 (iii), এরজন্য

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$

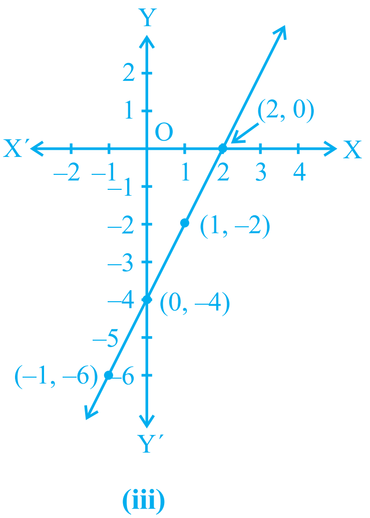
(iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



(i)



(ii)



(iii)

চিত্র. 4.5

সমাধান : (a) চিত্র 4.5 (i) এ, রেখাটির উপর বিন্দুগুলো হল (–1, –2), (0, 0), (1, 2) ।পর্যবেক্ষণ করে বোঝা যায় এ লেখচিত্র সংক্রান্ত সমীকরণটি হল $y = 2x$ । তোমরা দেখতে পারো y স্থানাঙ্ক প্রতিক্ষেত্রে x স্থানাঙ্কের দ্বিগুণ।

(b) চিত্র 4.5 (ii) এ, রেখাটির উপর বিন্দুগুলো হল (–2, 0), (0, 4), (1, 6)। তোমরা জানো লেখচিত্রের রেখার উপর বিন্দুগুলো $y = 2x + 4$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 4.5 (ii) নং লিখচিত্র সংক্রান্ত সমীকরণটি হল $y = 2x + 4$।

(c) 4.5 (iii) নং চিত্রে রেখাটির উপর বিন্দুগুলো হল (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0)। পর্যবেক্ষণ দ্বারা তোমরা দেখতে পারো প্রদত্ত লেখচিত্র সংক্রান্ত সমীকরণটি হল $y = 2x – 4$।

অনুশীলনী-4.3

1. নিচের প্রতিটি দ্বিচলরাশি বিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করো :

(i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

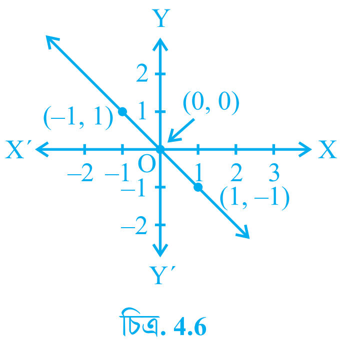
2. (2, 14) বিন্দুগামী দুটি রেখার সমীকরণ দাও। এরূপ আরো কতগুলো রেখা আছে এবং কেন?

3. যদি (3, 4) বিন্দুটি $3y = ax + 7$ সমীকরণের লেখচিত্রে অবস্থিত হয়, তবে a এর মান নির্ণয় করো।

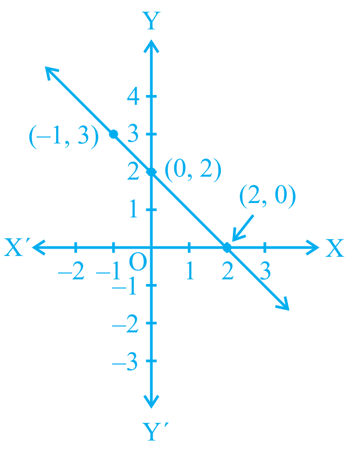
4. একটি শহরের ট্যাক্সি ভাড়া নিম্নরূপ : প্রথম 1 কিমি এর জন্য ভাড়া 8 টাকা এবং পরবর্তী প্রতি কিমি দূরত্বের ভাড়া 5 টাকা। অতিক্রম করা দূরত্ব x কিমি এবং মোট ভাড়াকে y টাকা ধরে, এই তথ্যটি নিয়ে একটি রৈখিক সমীকরণ লেখ এবং এর একটি লেখচিত্র অঙ্কন করো।

5. নিচে উল্লেখিত বিকল্পগুলো হতে, সঠিক সমীকরণটি বেছে নাও যাদের লেখচিত্র, চিত্র 4.6 এবং চিত্র 4.7 এ প্রদত্ত।

চিত্র 4.6 এর জন্য	চিত্র 4.7 এর জন্য
(i) $y = x$	(i) $y = x + 2$
(ii) $x + y = 0$	(ii) $y = x – 2$
(iii) $y = 2x$	(iii) $y = –x + 2$
(iv) $2 + 3y = 7x$	(iv) $x + 2y = 6$



চিত্র. 4.6



চিত্র. 4.7

6. একটি ধ্রুবক বল একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হওয়ার ফলে যে কার্যের সৃষ্টি হয় তা যদি অতিক্রান্ত দূরত্বের প্রত্যক্ষ সমানুপাতি হয়, তাহলে এই উক্তিটিকে দুটি চলক বিশিষ্ট সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করো এবং ধ্রুবক বলকে 5 একক হিসেবে ধরে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করো। এ লেখচিত্র থেকে বস্তুর দ্বারা সৃষ্ট কার্যের পরিমাণ নির্ণয় করো, যদি অতিক্রান্ত দূরত্ব—

(i) 2 একক এবং (ii) 0 একক হয়।

7. একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির দুইটি ছাত্রী যামিনী এবং ফাতিমা ভূমিকম্পে বিধ্বস্ত পীড়িতদের সাহায্যের জন্য প্রধানমন্ত্রীর ত্রাণ তহবিলে একত্রে 100 টাকা দান করেছে। একটি রৈখিক সমীকরণ লেখো যা এ তথ্যকে সিদ্ধ করে। (তাদের দানের পরিমাণ যথাক্রমে x টাকা এবং y টাকা ধরতে পারো) এ সমীকরণের লেখচিত্র আঁকো।

8. আমেরিকা (USA) এবং কানাডার মতো দেশে তাপমাত্রা মাপা হয় ফারেনহাইট স্কেলে, যেখানে ভারতবর্ষের মতো দেশে তা মাপা হয় সেলসিয়াস স্কেলে। এখানে ফারেনহাইট স্কেল থেকে সেলসিয়াস স্কেলে রূপান্তরিত করার জন্য একটি রৈখিক সমীকরণ দেওয়া হল :

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) x অক্ষকে সেলসিয়াস এবং y অক্ষকে ফারেনহাইট ধরে উপরোক্ত রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করো।

(ii) কোনো বস্তুর তাপমাত্রা 30°C, ফারেনহাইট স্কেলে এই তাপমাত্রা কত হবে?

(iii) কোনো বস্তুর তাপমাত্রা 95°F, সেলসিয়াস স্কেলে এই তাপমাত্রা কত হবে?

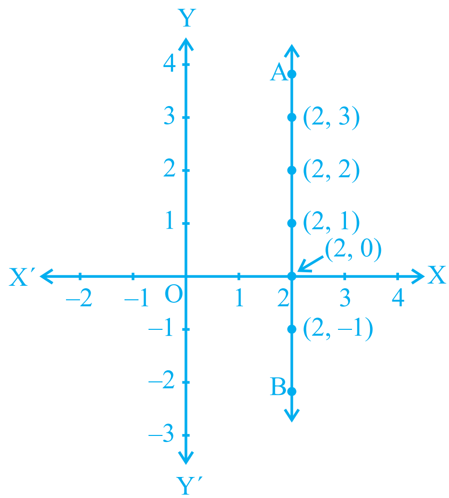
(iv) 0°C তাপমাত্রা ফারেনহাইট স্কেলে কত হবে? 0°F তাপমাত্রা সেলসিয়াস স্কেলে কত হবে?

(v) এমনকি কোনো তাপমাত্রা আছে যার সাংখ্যমান ফারেনহাইট এবং সেলসিয়াস স্কেলে সমান? যদি থাকে তবে বের করো।

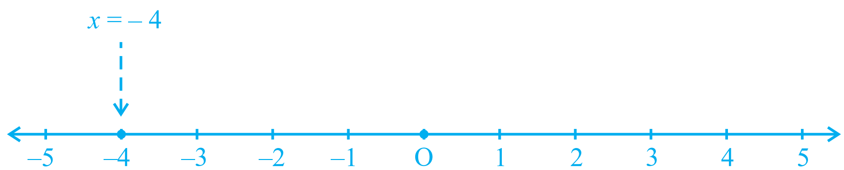
4.5 x অক্ষ এবং y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ :

তোমরা ইতোমধ্যে পেয়েছ কার্তেসীয় তলে একটি প্রদত্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক কীভাবে স্থাপন করতে হয়। তোমরা কি জানো (2, 0), (–3, 0), (4, 0) এবং (n, 0) (যেখানে n যে কোনো বাস্তব সংখ্যা) বিন্দুগুলো কার্তেসীয় তলে কোথায় অবস্থিত? হ্যাঁ, সবকটি বিন্দু x অক্ষের উপর অবস্থিত। কিন্তু তোমরা কি জানো, কেন? কারণ x অক্ষের উপর প্রত্যেকটি বিন্দুর y এর সথানাঙ্ক 0। x অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর আকার হল (x, 0)। এখন তোমরা x অক্ষের সমীকরণ অনুমান করতে পার কি? এর সমীকরণ হল $y = 0$। লক্ষ করো $y = 0$ কে $0.x + 1.y = 0$ আকারে লেখা যায়। অনুরূপে লক্ষ করো y অক্ষের সমীকরণ প্রকাশ করা যায় $x = 0$ আকারে।

এখন একটি সমীকরণ $x - 2 = 0$ ধরা যাক। যদি এটাকে কেবলমাত্র একচলবিশিষ্ট x এর সমীকরণ ধরা হয় তবে এটার অদ্বিতীয় (unique) সমাধান হবে $x = 2$, যা সংখ্যারেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দু। তা সত্ত্বেও এটিকে দ্বিচল বিশিষ্ট সমীকরণ ধরলে তবে তাকে $x+0.y-2=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়। এটির অসংখ্য সমাধান আছে। যদিও তারা $(2, r)$ রূপে আছে, যেখানে r একটি যে কোনো বাস্তব সংখ্যা। যাচাই করে তোমরা দেখতে পার, $(2, r)$ রূপে প্রতিটি বিন্দু এই সমীকরণের সমাধান। সুতরাং দ্বিচলরাশিবিশিষ্ট সমীকরণের মতো, $x - 2 = 0$ সমীকরণকে লেখচিত্রে চিত্র 4.8 এর মতো AB রেখা দ্বারা নিরূপণ করা যায়।



চিত্র **4.8**



চিত্র **4.9**

উদাহরণ 9 : $2x + 1 = x - 3$ সমীকরণটি সমাধান নির্ণয় করো এবং সমাধানগুলো—
(i) সংখ্যারেখা এবং (ii) কার্তেসীয় তলে প্রদর্শন করো।

সমাধান : $2x + 1 = x - 3$ কে সমাধান করে

পাওয়া যায় $2x - x = -3 - 1$

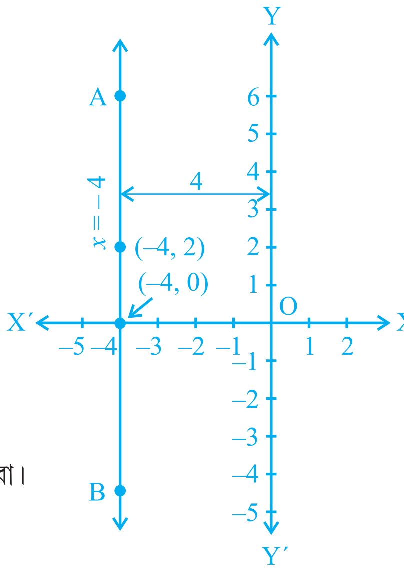
অর্থাৎ $x = -4$

(i) সংখ্যারেখার উপর সমাধানটির উপস্থাপন চিত্র 4.9 এ দেখানো হয়েছে, যেখানে $x = -4$ কে একচলবিশিষ্ট সমীকরণ হিসেবে ধরা হয়েছে।

আমরা জানি যে $x = -4$ কে $x + 0.y = -4$ রূপেও লেখা যায়, যা x এবং y চল এর রৈখিক সমীকরণ। এটাকে একটি রেখার সাহায্যে প্রদর্শন করা যায়। এখানে y এর সবগুলো মান গ্রহণযোগ্য কারণ $0.y$ সর্বদাই 0 হয়। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণের সমাধানগুলো হল $x = -4, y = 0$ এবং $x = -4, y = 2$

লক্ষ করো AB রেখার লেখচিত্র y অক্ষের সমান্তরাল, যা তার বাদিকে 4 একক দূরবর্তী (চিত্র 4.10 দেখো)

অনুরূপে $y = 3$ অথবা $0.x + 1.y = 3$ আকারের সমীকরণ থেকে একটি রেখা পাওয়া যাবে যা x অক্ষের সমান্তরাল হবে।



চিত্র **4.10**

অনুশীলনী-4.4

1. $y = 3$ সমীকরণটিতে

(i) একচলবিশিষ্ট এবং

(ii) দ্বিচলবিশিষ্ট হিসেবে জ্যামিতিক চিত্রে প্রদর্শন করো।

2. $2x + 9 = 0$ সমীকরণটিকে

(i) একচলবিশিষ্ট এবং

(ii) দ্বিচলবিশিষ্ট হিসেবে জ্যামিতিক চিত্রে প্রদর্শন করো।

4.6 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যায়ন করেছ :

1. $ax + by + c = 0$ আকারের সমীকরণকে দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণ বলা হয়, যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং a ও b উভয়ে শূন্য নয় ।

2. দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের অসংখ্য সমাধান আছে।

3. দ্বিচলবিশিষ্ট প্রতিটি রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র হবে একটি সরলরেখা।

4. $x = 0$ হল y অক্ষের সমীকরণ এবং $y = 0$ হল x অক্ষের সমীকরণ।

5. $x = a$ সমীকরণের লেখচিত্র হবে y অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

6. $y = a$ সমীকরণের লেখচিত্র হবে x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

7. $y = mx$ আকারের সমীকরণ, মূলবিন্দুগামী রেখাকে নির্দেশ করে।

8. দ্বিচলবিশিষ্ট রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্রের উপর অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু রৈখিক সমীকরণের এক একটি সমাধান। আবার রৈখিক সমীকরণের প্রত্যেকটি সমাধান এক একটি বিন্দু যা সমীকরণের লেখচিত্রের উপর অবস্থিত।

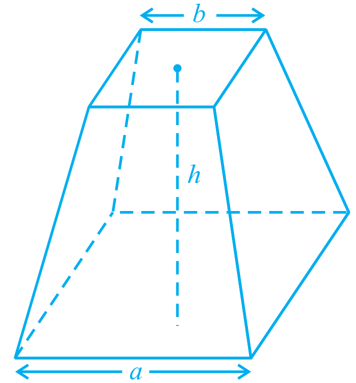
অধ্যায়-5

ইউক্লিডীয় জ্যামিতির পরিচয় (INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY)

5.1 ভূমিকা :

'জ্যামিতি (geometry) শব্দটি এসেছে গ্রিক শব্দ 'জিয়ো' (geo) যার অর্থ পৃথিবী বা ভূমি এবং 'মেট্রিন' (metrein) যার অর্থ 'পরিমাপ' থেকে। এ থেকে বোঝা যায় যে ভূমির পরিমাপের আবশ্যকতা থেকে জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছে। গণিতের এই শাখা বিভিন্ন রূপে প্রত্যেক প্রাচীন সভ্যতায় অধ্যায়ন করা হয়েছে। যেমন, মিশরীয়, ব্যাবিলনীয়, চৈনিক, ভারতীয়, গ্রিক, ইনকাস (Incas) ইত্যাদি সভ্যতায়। এই সভ্যতাগুলোর মানুষেরা বিভিন্ন ব্যবহারিক সমস্যার সম্মুখীন হয় যার জন্য জ্যামিতির বিকাশের প্রয়োজন হয় বিভিন্নভাবে।

উদাহরণস্বরূপ, যখন নীলনদে বন্যা হতো, তখন পাশ্ববর্তী অঞ্চলের বিভিন্ন মালিকের জমির সীমারেখাগুলো (boundaries) ভাসিয়ে নিয়ে যেত। বন্যার পর এইসব সীমারেখাগুলোকে পুনরায় তৈরি করা হত। এটি করার জন্য মিশরীয়রা বিভিন্ন প্রকার কৌশল এবং নিয়ম উদ্ভাবন করেছিলেন। যেগুলোর সরল ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা এবং সরল অঙ্কন করার জন্যেও ব্যবহৃত হত। শস্যাগারের আয়তন নির্ণয়ে, পয়ঃপ্রণালী নির্মাণে এবং পিরামিড (pyramid) নির্মাণ করার জন্যেও জ্যামিতির জ্ঞান তাঁরা ব্যবহার করতেন। ছিন্ন পিরামিডের (truncated pyramid) (চিত্র 5.1 দেখো) আয়তন নির্ণয়ের শুদ্ধ সূত্রও তাঁরা জানতেন। তোমরা জান যে, একটি পিরামিড হল একটি ঘন আকৃতি, যার ভূমি হল একটি ত্রিভুজ বা বর্গক্ষেত্র, অথবা অন্য কোনো বহুভুজ এবং যার পার্শ্বতলগুলো (side faces) হল ত্রিভুজ যেগুলো উপরে একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

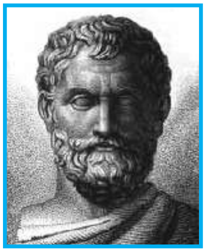


চিত্র. 5.1 ছিন্ন পিরামিড

ভারতীয় উপমহাদেশে হরপ্পা এবং মহেঞ্জোদরোতে খননকার্য ইত্যাদি থেকে জানা যায় যে সিন্ধু সভ্যতার সময় (প্রায় 3000 খ্রিস্ট পূর্বাব্দে) জ্যামিতির ব্যবহার ছিল ব্যাপক। এটি একটি অত্যন্ত সংগঠিত সমাজ ছিল। শহরটি অত্যন্ত উন্নত এবং খুব ভাল পরিকল্পিত ছিল। উদাহরণস্বরূপ, রাস্তাগুলো একে অপরের সমান্তরাল ছিল এবং একটি ভূগর্ভস্থ নিষ্কাষণ ব্যবস্থা ছিল। বাড়িগুলোতে বিভিন্ন ধরনের কক্ষ ছিল। এটি দেখায় যে, শহরে বসবাসকারীরা ব্যবহারিক পাটিগণিত এবং পরিমিতিতে দক্ষ ছিল। নির্মাণের জন্য ব্যবহৃত ইটগুলো ছিল ভাঁটায় পোড়ানো (তৈরি) এবং ইটগুলোর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের অনুপাত ছিল 4 : 2 : 1।

প্রাচীন ভারতে সল্বসূত্রগুলো (*Sulbasutras*) (800 খ্রিস্ট পূর্বাব্দ থেকে 500 খ্রিস্ট পূর্বাব্দ) ছিল জ্যামিতিক নির্মাণের সারগ্রন্থ। বৈদিক যুগের জ্যামিতি, পূজার বেদী নির্মাণ এবং বৈদিক ধর্মাচরণের জন্য অগ্নিকুণ্ডগুলোর তৈরির সাথে সম্পর্কযুক্ত ছিল। পবিত্র আগুনের অধিক প্রভাবের জন্য বর্গাকার অথবা বৃত্তাকার বেদী ব্যবহার করা হত, আবার সার্বজনীন পূজা স্থানের জন্য আয়তাকার, ত্রিভুজাকৃতি এবং ট্রাপিজিয়াম আকৃতির সমন্বয়ে তৈরি আকারের বেদী ব্যবহার করা হত। (অথর্ববেদে দেওয়া আছে) ‘শ্রীয়ন্ত’তে একটির সাথে আর একটি যুক্ত এরূপ 9টি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অন্তর্নিহিত ত্রিভুজের সৃষ্টি করে। এসব ত্রিভুজগুলো এরূপে সাজানো হত যেন তারা 43 টি সহায়ক ত্রিভুজের সৃষ্টি করে। যদিও বেদীগুলো তৈরি করার জন্য বিশুদ্ধ জ্যামিতির নিয়ম ব্যবহার করা হত, কিন্তু তার জন্য প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তগুলো কোনও জায়গায় আলোচিত হয়নি।

উপরোক্ত উদাহরণগুলো এটিই প্রমাণ করে যে বিশ্বের সব প্রান্তেই জ্যামিতির বিকাশ ও ব্যবহার হয়েছিল। কিন্তু এটি হয়েছিল এলোমেলো ভাবে। এখানে মজার বিষয় হল, প্রাচীন বিশ্বে জ্যামিতির বিকাশের এই ধারা এক প্রজন্ম থেকে পরবর্তী প্রজন্মে চলে এসেছে হয় মৌখিকভাবে অথবা তালপাতায় লেখা বার্তার মাধ্যমে বা অন্য কোনো উপায়ে। এই সঙ্গে আমরা এও জানতে পারি যে কোনো কোনো সভ্যতায়, যেমন বেবিলনীয় সভ্যতায় জ্যামিতি ছিল একটি অত্যধিক ব্যবহারিক শাখা, যা ছিল ভারতীয় এবং রোমান সভ্যতায়। মিশরীয়দের উদ্ভাবিত জ্যামিতিতে মূলত ছিল সংজ্ঞা বা বিবৃতি থেকে প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত। সেখানে কোনো সাধারণ কার্যপ্রণালী ছিলনা। আদতে, ব্যাবিলনীয় এবং মিশরীয়রা জ্যামিতি ব্যবহার করতেন মূলত ব্যবহারিক প্রয়োজনে এবং একটি সুসম্বন্ধ বিজ্ঞান বিকাশের জন্য ব্যবহার করতেন খুবই স্বল্প মাত্রায়। কিন্তু গ্রিকদের মতো সভ্যতার ক্ষেত্রে এই যুক্তির উপর জোর দেওয়া হতো যে, কীভাবে ঐ সময়ের নির্মাণকার্য সম্পন্ন হয়েছে। গ্রিকরা কোনো বিবৃতির সত্যতা প্রমাণ করতে অবরোহী যুক্তি (deductive reasoning) ব্যবহার করতে আগ্রহী ছিলেন। (পরিশিষ্ট 1 দেখো)।



থেলস্

(640 খ্রিস্টপূর্ব – 546 খ্রিস্টপূর্ব)

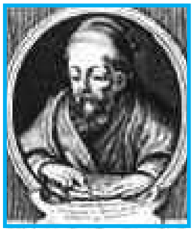
চিত্র **5.2**

গ্রিক গণিতবিদ থেলস্ কে প্রথম জ্যামিতিক বিবৃতির জ্ঞাত প্রমাণ (known proof) প্রদানের কৃতিত্ব দেওয়া যায়। এই প্রমাণের বিবৃতিটি ছিল বৃত্তের ব্যাস বৃত্তটিকে দুটি অংশে (অর্থাৎ দুটি সর্বসম অংশে) বিভক্ত করে। থেলসের ছাত্রদের মধ্যে অন্যতম ছিলেন

পিথাগোরাস (572 খিস্টপূর্ব), যাঁর নাম তোমরা অবশ্যই শুনেছ।

পিথাগোরাস এবং তাঁর সহকারীরা মিলে অনেক জ্যামিতিক বৈশিষ্ট্য আবিষ্কার করেছিলেন এবং জ্যামিতির তত্ত্বকে ব্যাপকভাবে উন্নীত করেছিলেন। এই প্রক্রিয়াটি 300 খ্রিস্টপূর্বাব্দ পর্যন্ত অব্যাহত ছিল। সেই সময় ইউক্লিড (Euclid) ছিলেন মিশরের আলেকজান্দ্রিয়াতে গণিতের শিক্ষক।

তিনি গণিতের সমস্ত পরিচিত কাজগুলো সংগ্রহ করে এলিমেন্টস (Elements) নামক তাঁর প্রসিদ্ধ গ্রন্থে লিপিবদ্ধ করেন। তিনি এলিমেন্টেসকে তেরো (13) টি অধ্যায়ে বিভাজন করেন এবং প্রত্যেকটিকে বলা হয় 'পুস্তক' (book)। এই পুস্তকগুলো সমগ্র বিশ্বের পরবর্তী প্রজন্মকে, জ্যামিতিকে উপলব্ধ করতে অনুপ্রাণিত করেছিল।



ইউক্লিড
(325 খ্রিস্টপূর্ব – 265 খ্রিস্টপূর্ব)
চিত্র **5.3**

এই অধ্যায়ে আমরা জ্যামিতিতে ইউক্লিডের দৃষ্টিভঙ্গি এবং চর্চা নিয়ে আলোচনা করব এবং জ্যামিতির বর্তমান স্বরূপের সাথে তাকে যুক্ত করতে সচেষ্ট হব।

5.2 ইউক্লিডীয় সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য (Euclid's Definitions, Axioms and Postulates)

ইউক্লিডের সমসাময়িক গ্রিক গণিতবিদগণ জ্যামিতির গুরুত্বপূর্ণ মডেল হিসেবে এই পৃথিবীকে মনে করতেন। যেখানে তারা বাস করতেন। তাঁদের চারপাশে দৃশ্যমান বস্তুগুলো থেকে বিন্দু, রেখা, সমতল (বা তল) ইত্যাদির ধারণা গ্রহণ করতেন। মহাকাশ এবং আশপাশে ছড়িয়ে থাকা বিভিন্ন বস্তু পর্যবেক্ষণের মাধ্যমে জমি ও ঘনবস্তু সম্পর্কিত ধারণার বিকাশ সাধন করতেন। একটি ঘনবস্তুর আকৃতি, আকার, অবস্থান আছে এবং এরা একস্থান থেকে অন্যত্র স্থানান্তরিত হয়। এদের প্রান্তগুলো হল তল (**surfaces**)। এরা চারপাশের একটি অংশ থেকে অন্যটিকে পৃথক করে এবং এদের কোনো বেধ নেই। তলের প্রান্তরেখাগুলো হল বক্ররেখা (**curves**) অথবা সরলরেখা (**lines**)। এই রেখাগুলোর প্রান্তকে বিন্দু (**points**) বলে।

মনে করো ঘনবস্তু থেকে বিন্দু পর্যন্ত তিনটি ধাপ (ঘনবস্তু-তল-রেখা-বিন্দু)। এই ধাপগুলোর প্রতিটিতে আমরা একটি করে সংযোজিত অংশ হারিয়ে ফেলি, যাকে একটি মাত্রা (**dimension**) বলা হয়। সুতরাং, একটি ঘনবস্তুর তিনটি মাত্রা, তলের দুটি, রেখার একটি এবং বিন্দুর কোনো মাত্রা নেই। ইউক্লিড এসকল বিবৃতিগুলোকে সংজ্ঞায়িত করে সংক্ষেপিত করেন। তিনি তার 'ইলিমেন্টস' পুস্তকের প্রথম খণ্ডে 23 টি সংজ্ঞার মাধ্যমে ব্যাখ্যা করেন। এগুলোর কয়েকটি নিচে দেওয়া হল:

1. একটি বিন্দুর কোনো অংশ নেই।
2. একটি সরলরেখার প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য আছে।

3. একটি সরলরেখার দুইপ্রান্তে বিন্দু থাকে।
4. একটি সরলরেখা নিজস্ব কতগুলো বিন্দু সমন্বয়ে গঠিত।
5. একটি তলের শুধুমাত্র দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে।
6. একটি তলের ধারগুলো রেখা হয়।
7. একটি সমতল হল এরূপ তল যার উপর যে কোনো দুটি বিন্দু সংযোজক সরলরেখা পুরোপুরি অবস্থান করে।

যদি তোমরা সংজ্ঞাগুলোকে সযত্নে পড়াশোনা কর, তবে সেখানে কিছু বিষয় পাবে যেমন, অংশ, প্রস্থ, দৈর্ঘ্য, সমান ইত্যাদির আরও স্পষ্ট করে ব্যাখ্যা প্রয়োজন। উদাহরণস্বরূপ তাঁর দেওয়া বিন্দুর সংজ্ঞা নিয়ে ভাবা যাক। উক্ত সংজ্ঞাতে 'অংশ' বিষয়টি ব্যবহৃত হয়েছে। ধরো, যদি 'অংশ' কে সংজ্ঞায়িত করতে 'ক্ষেত্র' (area)-কে ব্যবহার করা হয়, তবে ক্ষেত্রকে পুনরায় সংজ্ঞায়িত করা দরকার। সুতরাং, একটি বিষয়কে সংজ্ঞায়িত করতে গিয়ে তোমাদের অনেকগুলো বিষয়ের সংজ্ঞার প্রয়োজন হয়ে পড়ে এবং এভাবে তুমি একটি সংজ্ঞায়িতকরণের অনন্ত শৃঙ্খল পাবে। এসব কারণে গণিতবিদেরা একমত হয়ে জ্যামিতির কিছু পদ (terms)-কে অসংজ্ঞায়িত রেখেছেন।

যাই হোক, বিন্দু সম্পর্কে প্রদত্ত সংজ্ঞা থেকে আমাদের জ্যামিতিক ধারণার স্বজ্ঞাত অনুভূতি হয়েছে। সুতরাং একটি বিন্দুকে আমরা একটি ডট্-এর মাধ্যমে উপস্থাপন করব, যদিও একটি ডটের কয়েকটি মাত্রা আছে।

অনুরূপ সমস্যার উদ্ভব হয় উপরোক্ত সংজ্ঞা 2-এর ক্ষেত্রে যেহেতু সেখানে দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ এর সংজ্ঞা ব্যতিরেকে এদের অবতারণা করা হয়েছে। এই কারণে কিছু পদকে অসংজ্ঞাত রেখে কোর্সের অধ্যয়নের বিকাশ হয়েছে। সুতরাং, জ্যামিতিতে একটি বিন্দু, একটি রেখা এবং একটি তল (ইউক্লিডের ভাষায় সমতল পৃষ্ঠ) অসংজ্ঞায়িত রূপে রয়ে গেছে। শুধুমাত্র তাদের উপস্থাপন আমরা স্বজ্ঞাত অনুভূতি দ্বারা বা 'পার্থিব নমুনা' - এর দ্বারা এদের ব্যাখ্যা করতে পারি।

প্রথমেই ইউক্লিড সংজ্ঞা নিরূপণে কিছু ধর্মের অনুমান করেছিলেন যেগুলো প্রমাণিত নয়। এই অনুমানগুলো প্রকৃতপক্ষে "স্পষ্টতই সার্বজনীন সত্য"। তিনি এদের দু'রকমে ভাগ করেন, স্বতঃসিদ্ধ এবং স্বীকার্য। যেসব অনুমান বিশেষ করে জ্যামিতির সাথে সম্পর্কিত তিনি তাদের **'স্বীকার্য' (postulate)** বলেছেন। অন্যদিকে যে অনুমানগুলো গণিতশাস্ত্রের সর্বত্র ব্যবহৃত হয় এবং শুধুমাত্র জ্যামিতির সাথে সম্পর্কিত নয় সাধারণত এদের **স্বতঃসিদ্ধ (axioms)** বলা হয়। স্বতঃ সিদ্ধ এবং স্বীকার্য সম্পর্কে বিস্তারিত জানার জন্য পরিশিষ্ট-1 দেখো। ইউক্লিডীয় স্বতঃসিদ্ধের কয়েকটি, ঠিক তাঁর দেওয়া ক্রমে নয়, এমন কয়েকটি নিম্নে দেওয়া হল :

1. যে সকল বস্তুর প্রত্যেকটি অপর কোনো একটি নির্দিষ্ট বস্তুর সমান, তারা পরস্পর সমান।

2. সমান রাশির সঙ্গে সমান সমান রাশি যোগ করলে যোগফলগুলোও সমান হয়।
3. সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলোও সমান হয়।
4. যে সকল বস্তু একে অপরের সাথে মিশে যায় তারা পরস্পর সমান।
5. একটি সমগ্র রাশি তার যে কোনো অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।
6. সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ ফলগুলো পরস্পর সমান হয়।
7. সমান সমান বস্তুর অর্ধেক অংশগুলো পরস্পর সমান।

এই 'সাধারণ ধারণাগুলো' কোনো প্রকার রাশির পরিমাণ সম্পর্কে উল্লেখ করা হয়েছে। প্রথম সাধারণ ধারণাটি সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ যদি একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয় এবং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের সমান হয়, তবে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

একই প্রকার রাশিগুলোকে তুলনা এবং যুক্ত করা যেতে পারে, কিন্তু ভিন্ন প্রকার রাশিদের মাঝে তুলনা করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, একটি রেখার সাথে আয়তক্ষেত্রের তুলনা করা যায়না, বা কোনো কোণ কে পঞ্চভুজের সাথে তুলনা করা যায় না।

উপরোক্ত স্বতঃসিদ্ধ (4) থেকে বলা যায় যে যদি দুটি বস্তু সর্বসম হয় (অর্থাৎ এরা একই), তাহলে তারা সমান। অন্যভাবে বলা যায় প্রতিটি বস্তু নিজের সাথে সমান। এটি উপরিপাতের (superposition) নীতিকে সমর্থন করে। স্বতঃসিদ্ধ (5) আমাদেরকে 'এর চেয়ে বড়' (greater than) -কে সংজ্ঞায়িত করে। উদাহরণস্বরূপ, যদি B রাশিটি A রাশিটির অংশ হয়, তবে A রাশিটিকে B এবং তৃতীয় একটি রাশি C-এর সমষ্টিরূপে লেখা যায়। সাংকেতিক রূপে, $A > B$ মানে, একটি C এরূপে থাকে যেন $A = B + C$ হয়।

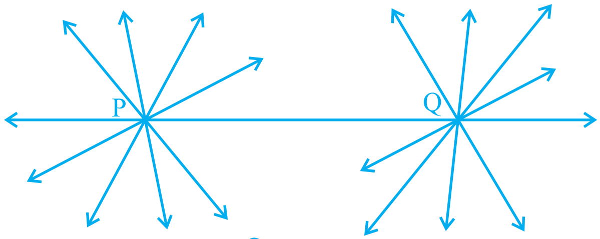
এখন আমরা ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য নিয়ে আলোচনা করব। এগুলো হল :

স্বীকার্য 1 : *যে কোনো বিন্দু থেকে অন্য কোনো বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যেতে পারে।*

লক্ষ করো, এখানে বলা হয়েছে যে, দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে কমপক্ষে একটি সরলরেখা আঁকা করা যায় কিন্তু এটি বলা হয়নি যে, সেখানে একের অধিক এরূপ রেখা থাকবে না। তদুপরি ইউক্লিড তাঁর সমস্ত কাজে, কোনো কিছু না বলে এটি কল্পনা করেছেন যে, দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে একটি অনন্য (*unique*) সরলরেখা অঙ্কন করা যায়। আমরা এই ফলাফলকে একটি স্বতঃসিদ্ধ-এর আকারে নিম্নরূপে বিবৃত করি :

স্বতঃসিদ্ধ 5.1 : *প্রদত্ত দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে একটি অনন্য (unique) রেখা অঙ্কন করা যায়।*

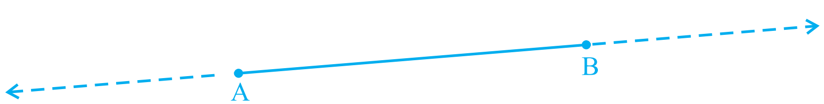
P বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ কতগুলো রেখা হতে পারে যেগুলো Q বিন্দু দিয়ে যায় ? (চিত্র 5.4 দেখো) কেবল একটি। সেটি হল PQ রেখা। Q বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ কতগুলো রেখা হতে পারে যেগুলো P বিন্দু দিয়ে যায়? কেবলমাত্র একটি। সেটি হল PQ। এই জন্য উপরোক্ত বিবৃতিটি একটি স্বয়ংসিদ্ধ (Self evident) সত্য এবং এইজন্য এটিকে একটি স্বতঃসিদ্ধ হিসাবে ধরা হয়েছে।



চিত্র. 5.4

স্বীকার্য 2 : *একটি সসীম রেখাকে (terminated line) অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা যেতে পারে।*

লক্ষ করো যাকে আমরা বর্তমানে রেখাংশে (line segment) বলি, তাকে ইউক্লিড বলেছিলেন সসীমরেখা (terminated line)। সুতরাং, বর্তমান দিনের পরিভাষা অনুযায়ী দ্বিতীয় স্বীকার্য বলছে যে একটি রেখাংশকে উভয়দিকে বর্ধিত করে একটি রেখা তৈরি করা যেতে পারে (চিত্র 5.5 দেখো)।



চিত্র. 5.5

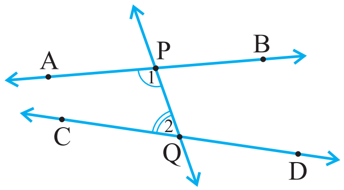
স্বীকার্য 3 : *যে কোনো কেন্দ্র এবং যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যেতে পারে।*

স্বীকার্য 4 : *সবগুলো সমকোণই একে অপরের সমান হয়।*

স্বীকার্য 5 : *যদি দুটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা পতিত হয়ে রেখাটির একই পাশে যে দুটি অন্তঃকোণ (interior angles) উৎপন্ন করে তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা কম হয়, তবে ঐ রেখা দুটিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করলে, রেখা দুটি ওই পাশে মিলিত হবে যে দিকে অন্তঃ কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণ থেকে কম।*

উদাহরণস্বরূপ, চিত্র 5.6 তে PQ সরলরেখা AB এবং CD রেখার উপর এইরূপে পতিত

হয়েছে যে, PQ এর বা-দিকের অন্তঃকোণ 1 ও 2 এর সমষ্টি 180° থেকে কম। অতএব, AB ও CD রেখা দুটি অবশেষে PQ এর বা-দিকে ছেদ করবে।



চিত্র. 5.1

এই পাঁচটি স্বীকার্যের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা থেকে তোমরা লক্ষ করো যে, স্বীকার্য 5, অন্য যে কোনো স্বীকার্য থেকে জটিল। অন্যদিকে 1 থেকে 4 পর্যন্ত স্বীকার্যগুলো এতটাই সরল ও সুস্পষ্ট যে তাদের ধরে নেওয়া হয় ‘স্বয়ং-সিদ্ধ সত্য’ (self-evident truths)। কিন্তু এগুলোকে প্রমাণ করা সম্ভব নয়। এইজন্য এই বিবৃতিগুলোকে কোনো প্রমাণ ছাড়াই গ্রহণ করে নেওয়া হয়েছে (পরিশিষ্ট 1 দেখো)। এটির জটিলতার কারণে পঞ্চম স্বীকার্যের উপর পরবর্তী অনুচ্ছেদে অধিক গুরুত্ব দেওয়া হবে।

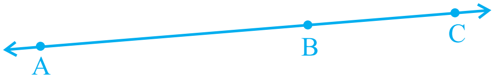
আজকাল, ‘স্বীকার্য’ এবং ‘স্বতঃসিদ্ধ’ এই দুটি পদকে একটির পরিবর্তে অপরটি ব্যবহার করা হয় এবং একই অর্থে ব্যবহার করা হয়। বাস্তবে স্বীকার্য হল ক্রিয়া (verb)। যখন আমরা বলি ‘এসো স্বীকার করি’ (let us postulate)। এটি বলতে আমরা বোঝাই, এসো আমরা মহাবিশ্বের ঘটনা পর্যবেক্ষণের উপর ভিত্তি করে কিছু বিবৃত করি। এটির সত্যতা / বৈধতা পরে যাচাই করা হয়। যদি এটি সত্য হয়, তবে এটিকে ‘স্বীকার্য’ (Postulate) হিসাবে গ্রহণ করা হয়।

একটি স্বতঃসিদ্ধ তন্ত্র (system) কে সংজ্ঞত (**consistent**) বলা হবে (পরিশিষ্ট 1 দেখো) যদি এই স্বতঃসিদ্ধগুলো থেকে কোনো বিবৃতি দেওয়া অসম্ভব হয়। যা অন্য স্বতঃসিদ্ধগুলো, যা পূর্বে সিদ্ধ হয়েছে এইরূপ বিবৃতির বিরোধী (contradicts) হয়। অতএব, যখন কোনো স্বতঃসিদ্ধের তন্ত্র (system) বিবৃত করা হবে, তখন এটি সুনিশ্চিত করা প্রয়োজন যে তন্ত্রটি সংজ্ঞত।

ইউক্লিড তাঁর স্বীকার্য এবং স্বতঃসিদ্ধগুলো বিবৃত করার পর, তিনি অন্য সিদ্ধান্ত প্রমাণ করার জন্য এগুলোকে ব্যবহার করেছেন। তারপর এই সিদ্ধান্তগুলো ব্যবহার করে, তিনি অবরোহী যুক্তির সাহায্যে আরও কতগুলো ফলাফল প্রমাণ করেন। এই বিবৃতিগুলো যেগুলো প্রমাণিত তাদের বলা হয় **প্রতিজ্ঞা** (**propositions**) বা **উপপাদ্য** (**theorems**)। ইউক্লিড তার স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য, সংজ্ঞা এবং পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্যগুলো ব্যবহার করে একটি যৌক্তিক শৃঙ্খলিত 465 টি প্রতিজ্ঞা প্রণয়ন (deduced) করেছিলেন। জ্যামিতির পরবর্তী কিছু অধ্যায়ে তোমরা এই স্বতঃসিদ্ধগুলো প্রয়োগ করে কিছু উপপাদ্য প্রমাণ করবে।

এখন, চল আমরা নিচের উদাহরণগুলোতে দেখি, ইউক্লিড কীভাবে তাঁর স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যগুলো ব্যবহার করে কিছু সিদ্ধান্ত প্রমাণ করেছেন :

উদাহরণ 1 : যদি একটি সরলরেখার উপর A, B ও C তিনটি বিন্দু হয় এবং B বিন্দুটি A এবং C এর মধ্যবর্তী হয় (চিত্র 5.7 দেখো), তবে প্রমাণ করো যে AB + BC = AC।



চিত্র. 5.7

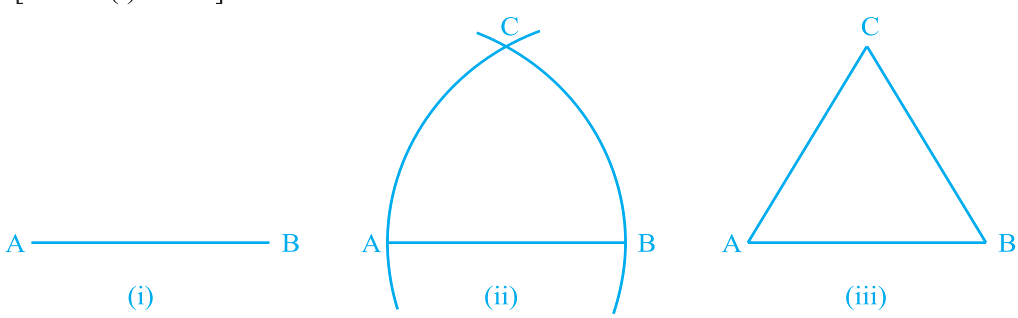
সমাধান : প্রদত্ত চিত্রে AC, AB + BC এর সাথে সমাপতিত। ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ (4) এটিও বলে যে, কোনো রাশি অপর রাশির সাথে সমাপতিত হলে তারা পরস্পর সমান। অতএব, এটা সিদ্ধ হয় যে,

$$AB + BC = AC$$

লক্ষ করো এই সমাধানে, এটি কল্পনা করা হয়েছে যে দুটি বিন্দু দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

উদাহরণ 2 : প্রদত্ত যে কোনো রেখাংশের উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকা যায়।

সমাধান : উপরিউক্ত বিবৃতি অনুযায়ী, যে কোনো দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ প্রদত্ত, ধরো AB। [চিত্র 5.8(i) দেখো]



চিত্র. 5.8

এখানে তোমাদেরকে কিছু অংকন করতে হবে। ইউক্লিডের স্বীকার্য 3-এর প্রয়োগ তোমরা A-কে কেন্দ্র করে AB ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকতে পার [চিত্র 5.8(ii) দেখো]। অনুরূপে B-কে কেন্দ্র করে BA ব্যাসার্ধ নিয়ে আরেকটি বৃত্ত আঁকো। ধরো, বৃত্ত দুটি C-বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন ΔABC তৈরি করার জন্য AC এবং BC রেখাংশ যুক্ত করো। [চিত্র 5.8(iii) দেখো]

সুতরাং, তোমাদের এখন প্রমাণ করতে হবে ত্রিভুজটি সমবাহু অর্থাৎ, AB = AC = BC।

এখন, AB = AC যেহেতু এরা একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ। (1)

অনুরূপে AB = BC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) । (2)

এই তথ্যগুলো এবং একই বস্তুর সাথে সমান বস্তুগুলো পরস্পর সমান— ইউক্লিডের এই স্বতঃসিদ্ধ থেকে তোমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারো, AB = AC = BC

অতএব, Δ ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

লক্ষ করো, কোথাও উল্লেখ না করে ইউক্লিড ধারণা করেছিলেন যে, A এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট অঙ্কিত দুটি বৃত্ত পরস্পর একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

এখন আমরা এমন একটি উপপাদ্য প্রমাণ করব, যার ফলাফল বিভিন্ন ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়।

উপপাদ্য 5.1 : *দুটি ভিন্ন রেখার একাধিক সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে না।*

প্রমাণ : এখানে আমাদের প্রদত্ত দুটি রেখা l ও m। আমাদের প্রমাণ করতে হবে তাদের কেবলমাত্র একটিই সাধারণ বিন্দু।

কিছু সময়ের জন্য ধরা যাক, সরলরেখাদ্বয় দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, ধরো বিন্দুদ্বয় P ও Q। সুতরাং, তোমার কাছে P ও Q বিন্দুগামী দুটি সরলরেখা আছে। কিন্তু 'দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা আঁকা যায়'— এই স্বতঃসিদ্ধকে এটি বিরোধিতা করে। সুতরাং, যে অনুমান নিয়ে আমরা শুরু করেছিলাম— সেটি হল দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে দুটি সরলরেখা গমন করে— তা ভুল।

এটা থেকে আমরা কী সিদ্ধান্তে আসতে পারি? আমরা এই সিদ্ধান্ত নিতে বাধ্য যে, দুটি ভিন্ন রেখার একাধিক সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে না।

অনুশীলনী-5.1

1. নিচের বিবৃতিগুলোর কোনটি সত্য এবং কোনটি মিথ্যা? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও :

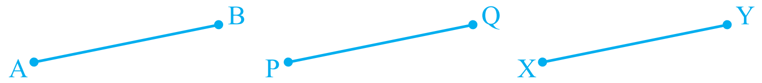
(i) একটি বিন্দু দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা অতিক্রম করে।

(ii) দুটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে অসংখ্য সরলরেখা অতিক্রান্ত হয়।

(iii) একটি খণ্ডিত রেখাংশকে উভয়দিকে বর্ধিত করা যেতে পারে।

(iv) যদি দুটি বৃত্ত সমান হয়, তবে তাদের ব্যাসার্ধও সমান।

(v) চিত্র 5.9 -এ, যদি AB = PQ এবং PQ = XY হয় তবে AB = XY



চিত্র. 5.9

2. নিম্নলিখিত প্রতিটি পদের সংজ্ঞা দাও। এটি করতে গিয়ে প্রথমে অন্য কোনো পদকে সংজ্ঞায়িত করা প্রয়োজন কি না? এগুলো কি হবে এবং তুমি এদেরকে কীভাবে সংজ্ঞায়িত করবে?

(i) সমান্তরাল সরলরেখা (ii) লম্বরেখা (iii) রেখাংশ

(iv) বৃত্তের ব্যাসার্ধ (v) বর্গ

3. নিম্নে প্রদত্ত 'স্বীকার্য' দুটিকে বিবেচনা করো :

(i) দুটি প্রদত্ত বিন্দু A ও B এর জন্য, একটি বিন্দু C বিদ্যমান যা A ও B -এর মধ্যবর্তী।

(ii) কমপক্ষে তিনটি বিন্দু বিদ্যমান যারা একই রেখায় অবস্থিত নয়।

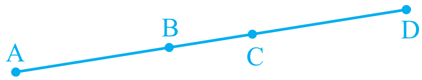
এই স্বীকার্য গুলোতে কোনো অসংজ্ঞায়িত পদ আছে কি? এই স্বীকার্যগুলো সংগত কি না?

এরা ইউক্লিডের স্বীকার্যগুলোকে অনুসরণ করে কি না? ব্যাখ্যা করো।

4. যদি C বিন্দুটি A ও B -এর পরবর্তী এমন যে $AC = BC$ হয়, তবে প্রমাণ করো $AC = \frac{1}{2}AB$। চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা করো।

5. 4 নং প্রশ্নে C-কে AB-এর মধ্যবিন্দু বলা হয়। প্রমাণ করো প্রতিটি রেখাংশের একটি এবং কেবলমাত্র একটি মধ্যবিন্দু থাকে।

6. 5.10 চিত্রে, যদি $AC = BD$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে $AB = CD$।



চিত্র. 5.10

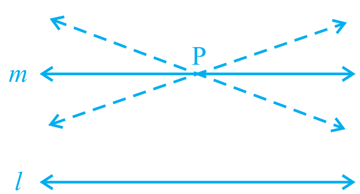
7. ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ তালিকার 5 নং স্বতঃসিদ্ধকে কেন একটি 'সার্বজনীন সত্য হিসেবে বিবেচিত হয়? (লক্ষ করো এ প্রশ্নটি পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধের সাথে সম্পর্কিত নয়)।

5.3 ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের সমতুল্য রূপান্তর :

গণিতের ইতিহাসে ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। অনুচ্ছেদ 5.2 থেকে পুনরায় এটিকে মনে করো। এই স্বীকার্যের ফলস্বরূপ যদি দুটি রেখার উপর পতিত হওয়া রেখার একই পাশের দুটি অন্তঃকোণের সমষ্টি 180° হয়, তবে দুটি রেখা কোনো সময়ই ছেদ করবে না। এই স্বীকার্যের অনেক সমতুল্য রূপান্তর (equivalent versions) আছে। এর মধ্যে একটি হল প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ (Playfair's Axiom) (যেটি স্কটিশ গণিতজ্ঞ জন প্লেফেয়ার1729 সালে দিয়েছিলেন) নিম্নে তা উল্লিখিত হল :

'প্রত্যেক রেখা l এবং এর উপর অবস্থিত নয় এরূপ প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য একটি অনন্য রেখা m এরূপ হবে যেটি P বিন্দু দিয়ে যাবে এবং l এর সমান্তরাল হবে।'

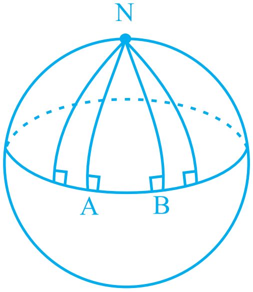
চিত্র 5.11-তে তোমরা দেখতে পারো যে, P বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সকল রেখার মধ্যে কেবল m রেখা হল l-রেখার সমান্তরাল।



চিত্র. 5.11

এই ফলাফলকে নিম্নরূপেও বিবৃত করা যায় :

দুটি ভিন্ন পরস্পরছেদী রেখা অন্য একটি রেখার সমান্তরাল হতে পারে না।



চিত্র. 5.12

ইউক্লিড তাঁর প্রথম 28 টি উপপাদ্য প্রমাণ করার জন্য পঞ্চম স্বীকার্যটি প্রয়োগ করার প্রয়োজন বোধ করেননি। উনি স্বয়ং এবং অনেক গণিতজ্ঞ এটি বিশ্বাস করতেন যে পঞ্চম স্বীকার্যটি বাস্তবে একটি উপপাদ্য, যেটি প্রথম চারটি স্বীকার্য এবং এবং অন্য স্বতঃসিদ্ধ প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যাবে। কিন্তু পঞ্চম স্বীকার্যটি একটি উপপাদ্য রূপে প্রমাণ করার সব প্রচেষ্টা ব্যর্থ হয়। কিন্তু এই প্রচেষ্টার ফলে একটি গুরুত্বপূর্ণ উপলব্ধি হয়— যা অন্য অনেক জ্যামিতিক ধারণার সৃষ্টি করে। যে জ্যামিতিগুলো ইউক্লিডীয় জ্যামিতি থেকে অনেকটাই ভিন্ন। এগুলোকে বলা হয় *অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি* (*non-Euclidean geometries*)। তাদের এই সৃষ্টি, জ্যামিতিক চিন্তনের ইতিহাসে ল্যান্ডমার্ক হিসাবে বিবেচিত হয় কারণ সেই পর্যন্ত প্রত্যেকে বিশ্বাস করতেন যে ইউক্লিডীয় জ্যামিতি হল একমাত্র জ্যামিতি এবং সম্পূর্ণ বিশ্বটাই ইউক্লিডীয়। যে বিশ্বে আমরা আছি, সেই জ্যামিতিকে বর্তমানে অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি রূপে দেখানো হয়েছে। বাস্তবে এটিকে বলা হয় *গোলীয় জ্যামিতি* (*spherical geometry*)। গোলীয় জ্যামিতিতে রেখাগুলো সোজা হয় না। এই রেখাগুলো বড়ো বৃত্তের অংশ হয় (অর্থাৎ, একটি গোলক এবং গোলকের কেন্দ্রগামী তলের ছেদে উৎপন্ন বৃত্ত)।

চিত্র 5.12 তে রেখা AN এবং BN (যা গোলকের বড়ো বৃত্তের অংশ) একই রেখা AB এর উপর লম্ব। কিন্তু তারা একে অপরের সাথে একই বিন্দুতে মিলিত হয়েছে যদিও AB রেখার একই দিকের কোণগুলোর সমষ্টি দুই সমকোণ থেকে ছোট নয় (বস্তুত পক্ষে, এটি হল $90° + 90° = 180°$)। আরোও লক্ষ করো, ত্রিভুজ NAB এর কোণগুলোর সমষ্টি 180° থেকে বেশি, যেহেতু $\angle A + \angle B = 180°$। এই কারণে, ইউক্লিডীয় জ্যামিতি কেবল মাত্র সামতলিক চিত্রের জন্য বৈধ। বক্রতলের ক্ষেত্রে এটি ব্যর্থ হয়।

এখন, চল একটি উদাহরণ দেখি।

উদাহরণ 3 : নিচের বিবৃতিটি বিচার করো : এক জোড়া এইরূপ সরলরেখার অস্তিত্ব আছে যেগুলো সব জায়গায় একে অপরের থেকে সমদূরত্বে (equidistant) থাকে। এই বিবৃতিটি কি ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের প্রত্যক্ষ (সোজা) পরিণতি ? ব্যাখ্যা করো।

সমাধান : একটি সরলরেখা l এবং একটি বিন্দু P ধরো যা l-এর উপর নয়। অতএব, প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ, যা ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের সমতুল্য, তা থেকে আমরা জানি যে, P দিয়ে যায় এরূপ একটি অনন্য রেখা m আছে যা l এর সমান্তরাল।

এখন, *একটি বিন্দু থেকে একটি রেখার দূরত্ব* হল ঐ বিন্দু থেকে ঐ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য। m-এর উপর যে কোনো বিন্দু থেকে l এর এই দূরত্ব এবং l এর উপর যে কোনো বিন্দু থেকে m এর এই দূরত্ব একই হবে। সুতরাং, এই রেখা দুইটি সব অবস্থানে পরস্পর থেকে সমদূরবর্তী (equidistant)।

মন্তব্য : পরবর্তী কিছু অধ্যায়ে তোমরা যে জ্যামিতি পড়বে তা হল ইউক্লিডীয় জ্যামিতি। যদিও আমরা যে স্বতঃসিদ্ধ ও উপপাদ্যগুলো প্রয়োগ করবো সেগুলো ইউক্লিডীয় জ্যামিতি থেকে পৃথকও হতে পারে।

অনুশীলনী-5.2

1. ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যকে তুমি সরল করে কিভাবে লিখবে, যাতে বুঝতে সহজ হয়?
2. ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য কি সমান্তরাল সরলরেখার অস্তিত্বের ধারণাকে নির্দেশ করে? ব্যাখ্যা করো।

5.4 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. যদিও ইউক্লিড বিন্দু, রেখা এবং তলকে সংজ্ঞায়িত করেছিলেন। কিন্তু এসব সংজ্ঞাগুলো গণিতবিদেরা গ্রহণ করেন নি। তাই, এগুলো এখনও অসংজ্ঞাত রয়ে গেল।
2. স্বতঃসিদ্ধ বা স্বীকার্যগুলো হল অনুমান যেগুলো স্পষ্টতই সার্বজনীন সত্য। তারা প্রমাণিত নয়।
3. উপপাদ্য হল এমন এক বিবৃতি যা সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, পূর্বে প্রমাণিত বিবৃতি এবং অবরোহ যুক্তির সাহায্যে প্রমাণিত হয়।
4. ইউক্লিডের **স্বতঃসিদ্ধগুলোর** কয়েকটি হল :
   (1) যে সকল বস্তুর প্রতিটি অপর কোনো একটি নির্দিষ্ট বস্তুর সমান, তারা নিজেরা পরস্পর সমান।
   (2) সমান রাশির সাথে সমান সমান রাশি যোগ করলে, যোগফলগুলোও সমান হয়।
   (3) সমান রাশির থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে, বিয়োগফলগুলোও সমান হয়।
   (4) যে সকল বস্তু একে অপরের সাথে মিশে যায় তারা পরস্পর সমান।
   (5) একটি সমগ্ররাশি তার যে কোনো অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর।
   (6) সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ ফলগুলো পরস্পর সমান হয়।
   (7) সমান সমান বস্তুর অর্ধেক অংশগুলো পরস্পর সমান।
5. ইউক্লিডের **স্বীকার্যগুলো** হল :

   স্বীকার্য 1 : যে কোনো বিন্দু থেকে অন্য কোনো বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যেতে পারে।

   স্বীকার্য 2 : একটি সসীম রেখাকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা যেতে পারে।

   স্বীকার্য 3 : যে কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা যেতে পারে।

   স্বীকার্য 4 : সব সমকোণগুলো পরস্পর সমান।

   স্বীকার্য 5 : একটি সরলরেখা দুটি সরলরেখার উপর পতিত হলে যদি রেখাটির একই পার্শ্বস্থ অন্তঃ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের কম হয় তবে সরলরেখা দুটিকে অসীম পর্যন্ত বাড়ালে যে পাশের অন্তঃ কোণদ্বয়ের সমষ্টি 2 সমকোণের কম সেই পাশে সরলরেখা দুটি ছেদ করবে।
6. ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্যের দুটি সমতুল্য পরিভাষা হল :
   (i) প্রত্যেক রেখা l এবং l -এর উপর অবস্থিত নয় প্রতিটি বিন্দু P-এর ক্ষেত্রে, P বিন্দুগামী একটি অনন্য সরলরেখা বিদ্যমান যা l -এর সমান্তরাল।
   (ii) দুটি ভিন্ন পরস্পর ছেদি সরলরেখা কখনো একই সরলরেখার সাথে সমান্তরাল হয় না।
7. প্রথম 4 টি স্বীকার্য প্রয়োগে ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য প্রমাণে সকল প্রচেষ্টা অসফল রয়েছে। কিন্তু এগুলো থেকে অপর কিছু জ্যামিতিক ধারণার উদ্ভব হয়। যাকে **অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতি** বলা হয়।

অধ্যায়-6

রেখা এবং কোণ (LINES AND ANGLES)

6.1 ভূমিকা :

পঞ্চম অধ্যায়ে, তোমরা জেনেছো যে, একটি রেখা অঙ্কন করতে হলে কমপক্ষে দুটি বিন্দু প্রয়োজন। কতিপয় স্বতঃসিদ্ধগুলোর (axiom) অধ্যয়ন করেছো এবং এই অধ্যয়নগুলোর সাহায্যে কিছু বিবৃতি (statement) প্রমাণ করেছো। দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে যে কোণ তৈরি করে তার ধর্মাবলী সম্পর্কে তোমরা এই অধ্যায়ে জানবে এবং একটি রেখা দুই বা তার বেশি সমন্তরাল রেখাকে স্বতন্ত্র বিন্দুতে ছেদ করলে যে সকল কোণ তৈরি হয় তাদের ধর্ম সম্পর্কেও জানবে। এছাড়া, তোমরা এই ধর্মগুলো ব্যবহার করে অবরোহ পদ্ধতিতে কতিপয় বিবৃতি প্রমাণ করবে। (পরিশিষ্ট 1 দেখ)। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে, এই বিবৃতিগুলোকে কিছু কার্যকলাপের মাধ্যমে যাচাই করেছো।

দৈনন্দিন জীবনে তোমরা সমতল পৃষ্ট ও প্রান্ত দ্বারা গঠিত বিভিন্ন প্রকার কোণ দেখ। সমতলপৃষ্ঠের প্রয়োগ করে এইরূপ মডেল তৈরি করার জন্য, তোমাদের কোণ সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা প্রয়োজন। উদাহরণস্বরূপ, ধর তুমি বিদ্যালয়ের প্রদর্শনীতে বাঁশের কঞ্চি ব্যবহার করে একটি কুটির বানাতে চাও। ইহা কিভাবে বানাবে চিন্তা করো। কিছু বাঁশের কঞ্চি রাখবে পরস্পর সমান্তরালভাবে আর কিছু রাখবে হেলানোভাবে। যখন একজন স্থাপত্য শিল্পী একটি বহুতল বিল্ডিং এর নকশা অঙ্কন করে তখন কিছু পরস্পরছেদী রেখা এবং কিছু সমান্তরাল রেখা বিভিন্ন কোণে আঁকতে হয়। তোমরা কি ভাবতে পারো, এই রেখা ও কোণের ধারণা ছাড়া বিল্ডিং-এর নকশা তিনি আঁকতে পারবেন?

বিজ্ঞানে রশ্মির রেখাচিত্র অঙ্কন করে আলোকের ধর্মাবলী তোমরা অধ্যয়ন করেছো। উদাহরণস্বরূপ আলোকের প্রতিসরণ ধর্ম অধ্যয়ন করার জন্য, যখন রশ্মি এক মাধ্যম হতে অন্য মাধ্যমে প্রবেশ করে তখন পরস্পর ছেদী রেখা ও সমান্তরাল রেখার ধর্মাবলী ব্যবহার করা হয়। যখন একটি বস্তুর উপর দুই বা তার অধিক বল কার্য করে তখন বস্তুর উপর মোট কার্যকরী বল পরিমাপ করার জন্য তোমরা এমন চিত্র আঁক যেখানে বলগুলোকে দিক নির্দেশিত রেখাংশ দ্বারা উপস্থাপন করা হয়। ঠিক এই সময়, এই কোণগুলোর মধ্যে তোমাদের সম্পর্ক জানতে হবে যাদের রশ্মিগুলো (অথবা রেখাংশ) পরস্পর সমান্তরাল বা পরস্পরছেদী। একটি মিনার এর উচ্চতা বের করার জন্য অথবা বাতিঘর (light house) হতে একটি জাহাজের দূরত্ব নির্ণয় করার জন্য, অনুভূমিক রেখার সঙ্গে, দৃষ্টিরেখার মধ্যবর্তী কোণ সম্পর্কে জানতে হবে।

এরকম অনেক উদাহরণ আছে, যেখানে কোণ ও রেখার প্রয়োগ করা হয়েছে। জ্যামিতির পরবর্তী অধ্যায়নগুলোতে, তোমরা এই রেখা এবং কোণের ধর্মগুলো ব্যবহার করে অন্য অনেক প্রয়োজনীয় ধর্মাবলী বের করতে পারবে।

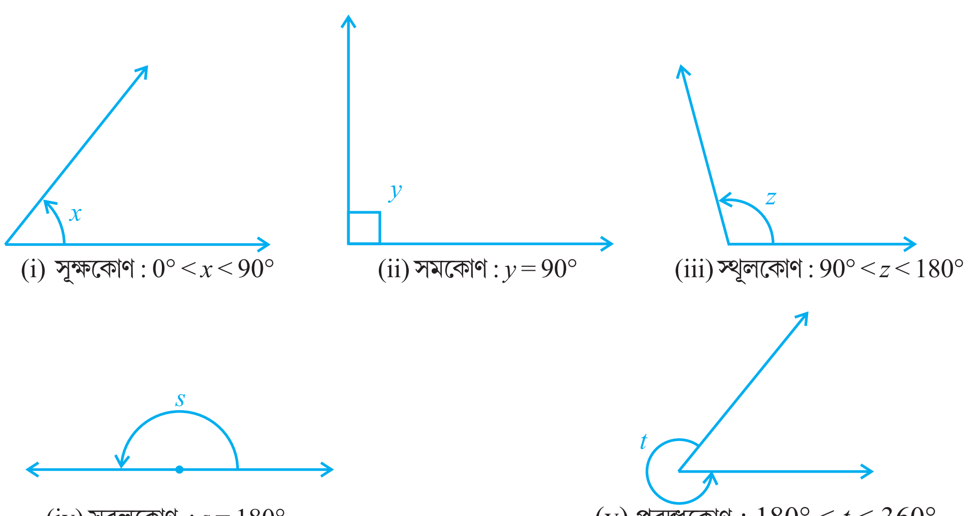
আমরা প্রথমে, পূর্বের শ্রেণিতে শিখে নেওয়া রেখা ও কোণ সম্পর্কিত পরিভাষা ও সংজ্ঞাগুলো স্মরণ করবো।

6.2 প্রাথমিক পদ এবং সংজ্ঞা সমূহ :

স্মরণ করো যে, দুটি প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট একটি **রেখার অংশকে রেখাংশ** বলা হয় এবং একটি প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট রেখাকে বলা হয় রশ্মি। লক্ষ করো রেখাংশ AB কে চিহ্নিত করা হয় $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা এবং ইহার দৈর্ঘ্য চিহ্নিত করা হয় AB দ্বারা। রশ্মি AB কে চিহ্নিত করা হয় $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা এবং একটি রেখাকে চিহ্নিত করা হয় $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা। কিন্তু আমরা এই চিহ্নগুলো ব্যবহার করবো না অর্থাৎ রেখা AB, রশ্মিAB, রেখাংশ AB এবং উহার দৈর্ঘ্যকে একই সংকেত AB দ্বারা চিহ্নিত করবো। প্রসঙ্গ থেকে এর অর্থ স্পষ্ট হবে। কখনো কখনো ছোট অক্ষর যেমন l, m, n, ইত্যাদি দ্বারা রেখাগুলোকে চিহ্নিত করা হবে।

যদি তিন বা তার অধিক বিন্দু একই রেখায় অবস্থান করে তবে তাদের বলা হয় সমরেখ বিন্দু অন্যথা বিন্দুগুলোকে বলা হয় **অসমরেখ বিন্দু**।

মনে রাখবে একটি কোণ তখনই তৈরি হয় যখন দুটি রশ্মি একই প্রান্তবিন্দু হতে সৃষ্টি হয়। যে রশ্মিগুলোর সমন্বয়ে কোণ তৈরি হয় তাদের বলা হয় কোণের বাহু এবং প্রান্তবিন্দুটিকে বলা হয় কোণের শীর্ষবিন্দু। তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে বিভিন্ন প্রকার কোণ যেমন সমকোণ, স্থূলকোণ, সরলকোণ এবং প্রবৃদ্ধ কোণ সম্পর্কে জেনেছো।



(i) সূক্ষ্মকোণ : $0° < x < 90°$ (ii) সমকোণ : $y = 90°$ (iii) স্থূলকোণ : $90° < z < 180°$

(iv) সরলকোণ : $s = 180°$ (v) প্রবৃদ্ধকোণ : $180° < t < 360°$

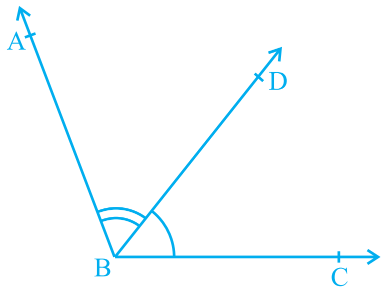
চিত্র. 6.1

একটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপ হলো 0° হতে 90° এর মধ্যে; যেখানে **সমকোণ** হল ঠিক 90°। একটি কোণ 90° থেকে বড়ো কিন্তু 180° থেকে ছোটো হলে তাকে বলা হয় **স্থূলকোণ**। আরও মনে করে দেখো যে, একটি **সরলকোণ** হল 180° এর সমান। যে কোণের মান 180° থেকে বড়ো কিন্তু 360° থেকে ছোটো, তাকে বলা হয় **প্রবৃদ্ধ কোণ**। উপরন্তু, দুটি কোণ যাদের সমষ্টি 90°, তাদের বলা হয় **পূরক কোণ** এবং দুটি কোণ যাদের সমষ্টি 180° তাদের বলা হয় **সম্পূরক কোণ**।

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা, সন্নিহিত কোণ সম্পর্কেও জেনেছো (চিত্র 6.2 দেখ)। দুটি কোণকে সন্নিহিত বলা হবে যদি তাদের একই শীর্ষবিন্দু, একটি সাধারণ বাহু এবং অপর বাহু দুটি সাধারণ বাহু দুটির দুইদিকে থাকে। চিত্র -6.2এ, $\angle$ ABD এবং $\angle$ DBC হল সন্নিহিত কোণ। BD রশ্মি হল তাদের সাধারণ বাহু এবং B বিন্দু তাদের সাধারণ শীর্ষবিন্দু। BA রশ্মি এবং BC রশ্মি সাধারণ বাহু নয়। অধিকন্তু, যখন দুটি কোণ সন্নিহিত তখন তাদের সমষ্টি সর্বদাই সাধারণ নয় এমন বাহুদ্বয় দ্বারা গঠিত কোণের সমষ্টির সমান হয়। তাহলে আমরা লিখতে পারি,

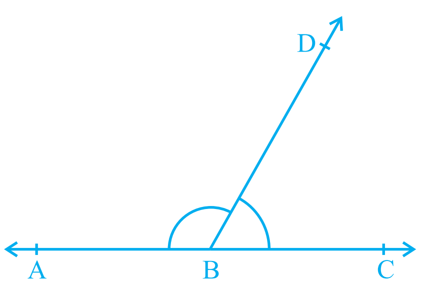
$$\angle \text{ABC} = \angle \text{ABD} + \angle \text{DBC}.$$

লক্ষ করো, $\angle$ ABC এবং $\angle$ ABD সন্নিহিত কোণ নয়। কেন, বলতে পারো? কারণ কোণদ্বয়ের বাহুদ্বয় BD এবং BC সাধারণ বাহু BA এর একই পাশে অবস্থিত।



চিত্র **6.2 :** সন্নিহিত কোণ

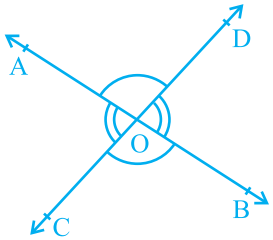
6.2 নং চিত্রে যদি বাহুদ্বয় BA এবং BC (সাধারণ নয়) 6.3 নং চিত্রে দেখানো মতো একটি রেখা গঠন করে তবে $\angle$ ABD এবং $\angle$ DBC কে **রৈখিক কোণ যুগল** বলা হয়।



চিত্র **6.3 :** রৈখিক কোণ যুগল

তোমাদের হয়তো মনে আছে, যখন দুটি রেখা AB এবং CD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে তখন **বিপ্রতীপ কোণ** উৎপন্ন হয় (চিত্র 6.4 দেখ)। এখানে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ আছে।

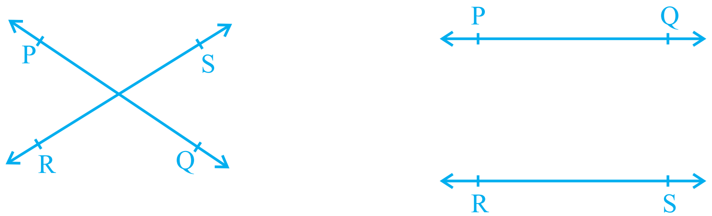
এক জোড়া বিপ্রতীপ কোণ হল $\angle$AOD এবং $\angle$BOC। অপর জোড়াটি কি তোমরা বের করতে পারো?



চিত্র **6.4 :** বিপ্রতীপ কোণ

6.3 পরস্পরছেদী রেখা এবং পরস্পরছেদী নয় এমন রেখা :

দুটি ভিন্ন রেখা PQ এবং RS কাগজের উপর আঁক। ইহা দুটি ভিন্ন উপায়ে করতে পার চিত্র 6.5 (i) এবং চিত্র 6.5 (ii) এর মত।



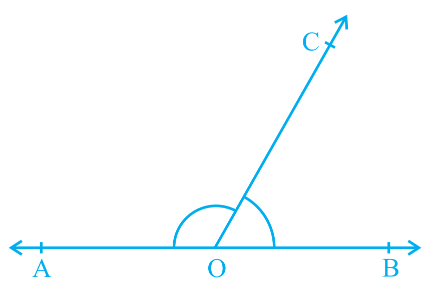
(i) পরস্পরছেদী সরলরেখা (ii) পরস্পরছেদী নয় এমন রেখা

চিত্র. 6.5 : দুটি সরলরেখা অঙ্কনের বিভিন্ন উপায়

ভিন্নভাবে দুটি রেখার অঙ্কনের ধরণা হতে মনে করে দেখ যে, ইহাদের উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বর্ধিত করা যায়। চিত্র 6.5 (i)-এ রেখা PQ এবং RS হল পরস্পর ছেদিত রেখা এবং 6.5 (ii) নং চিত্রে পরস্পর সমান্তরাল রেখা। এই সমান্তরাল রেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত সাধারণ লম্বগুলোর দৈর্ঘ্য একই অর্থাৎ পরস্পর সমান। এই সমান দৈর্ঘ্যকে *সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব* বলে।

6.4 কোণ যুগল (Pairs of Angles)

6.2 অনুচ্ছেদে, তোমরা কতিপয় কোণ যুগল যেমন, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সন্নিহিত কোণ এবং রৈখিক কোণ যুগল ইত্যাদি সম্পর্কে জেনেছো। এ কোণগুলোর মধ্যে কোন সম্পর্ক আছে কি? একটি রশ্মি, অপর একটি রেখার উপর দণ্ডায়মান হয়ে যখন কোণ তৈরি করে, তার মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করা যাক। 6.6 নং চিত্রের মতো একটি ছবি আঁক, যেখানে একটি রশ্মি একটি রেখার উপর অবস্থিত। রেখাটির নাম দাও AB এবং রশ্মিটির নাম দাও OC। 'O' বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলো কি কি? তারা হল $\angle$ AOC, $\angle$ BOC এবং $\angle$ AOB।



চিত্র. 6.6 : রৈখিক কোণ যুগল

আমরা কি লিখতে পারি—$\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$? (1)

হ্যাঁ! (কেন ? অনুচ্ছেদ 6.2 এ প্রদত্ত সন্নিহিত কোণ)।

$\angle$ AOB এর পরিমাপ কত? ইহা হল $180°$। (কেন?) (2)

(1) এবং (2) হইতে, তোমরা কি বলতে পার— $\angle AOC + \angle BOC = 180°$? হ্যাঁ! কেন?

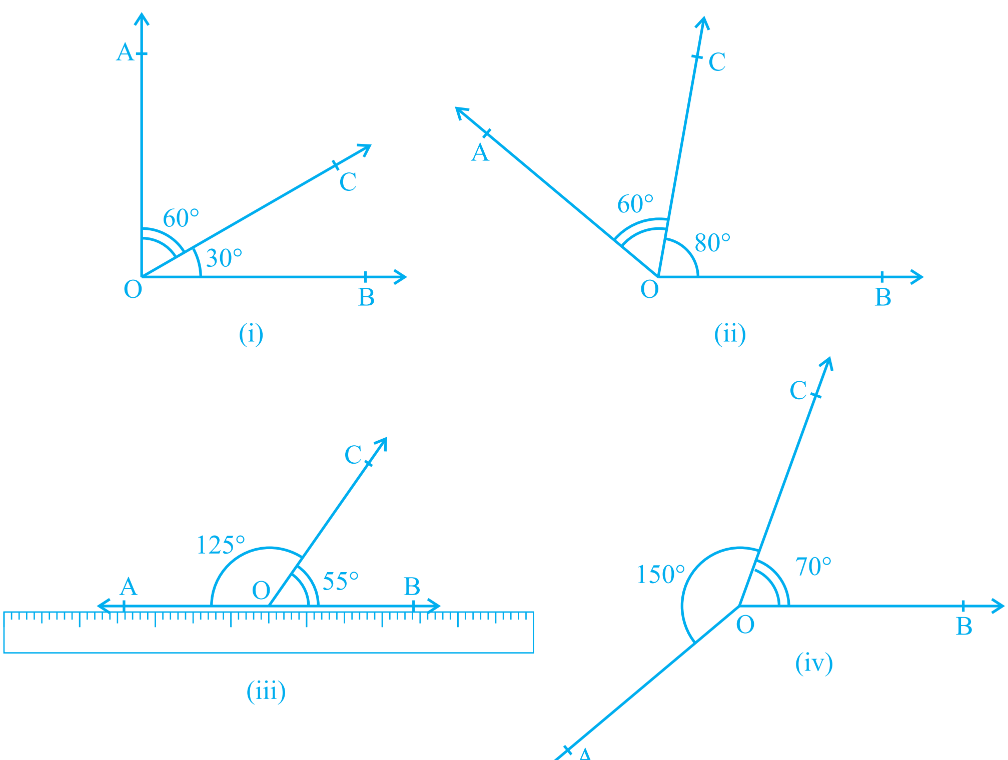
উপরিউক্ত আলোচনা হতে, আমরা নিচের স্বতঃসিদ্ধটি লিখতে পারি :

স্বতঃসিদ্ধ 6.1 : *যদি একটি রশ্মি অপর একটি রেখার উপর দণ্ডায়মান হয়, তবে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুটির সমষ্টি হয়* 180°।

মনে করে দেখ, যখন দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি 180° হয়. তখন তাদের বলা হয় **রৈখিক কোণ যুগল**। স্বতঃসিদ্ধ 6.1 এ ইহা প্রদত্ত যে "একটি রশ্মি অপর একটি রেখার উপর দণ্ডায়মান।" এই উক্তি হতে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, "দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি 180°।" আমরা স্বতঃসিদ্ধ 6.1 কে কি অন্যভাবে লিখতে পারি? অর্থাৎ স্বতঃসিদ্ধ 6.1 এর 'সিদ্ধান্ত'-কে ধরো 'প্রদত্ত' এবং 'প্রদত্ত' কে ধরো 'সিদ্ধান্ত'। তাহলে এটা দাঁড়ায় :

(A) যদি দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি 180° হয় তবে একটি রেখার উপর অপর একটি রশ্মি দণ্ডায়মান হয় (অর্থাৎ সাধারণ বাহু নয় এমন দুটি বাহু একটি রেখা তৈরি করে)।

এখানে তোমরা দেখতে পাও যে, স্বতঃসিদ্ধ 6.1 এবং বিবৃতি (A) একে অপরের বিপরীত। বিবৃতি (A) সত্য না মিথ্যা তা আমরা জানি না। চলো আমরা এর সত্যতা যাচাই করি। 6.7 নং চিত্রে বিভিন্ন পরিমাপের সন্নিহিত কোণ দেখানো হল। প্রতিক্ষেত্রে, যে বাহুগুলো সাধারণ নয় তাদের একটি বাহু বরাবর মাপনী (ruler) রাখা হল। অপর সাধারণ বাহু নয় এমন বাহুটির বরাবর মাপনী থাকবে কি?



চিত্র. 6.7 : বিভিন্ন পরিমাপের সন্নিহিত কোণ সমূহ

তোমরা দেখবে 6.7 (iii) নং চিত্রে, যে দুটি সাধারণ নয় এমন বাহুই মাপনীর উপর অবস্থিত অর্থাৎ A, O, B বিন্দু সকল রেখায় অবস্থিত এবং রশ্মি OC ইহার উপর দণ্ডায়মান। আবার দেখ $\angle AOC + \angle COB = 125° + 55° = 180°$। ইহা হতে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়, বিবৃতি (A) হল সত্য। সুতরাং এই বিবৃতিটি নীচে দেওয়া স্বতঃসিদ্ধ আকারে প্রকাশ করা যায়।

স্বতঃসিদ্ধ 6.2 : *যদি দুটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি 180° হয়, তাহলে কোণের সাধারণ নয় এমন বাহুদ্বয় একটি রেখা তৈরি করে।*

স্পষ্টত উপরের দুটি স্বতঃসিদ্ধকে একত্রে বলা হয় ***রৈখিক যুগলের স্বতঃসিদ্ধ।***

চলো আমরা এখন সেই ক্ষেত্রটি পরীক্ষা করি— যেখানে দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে।

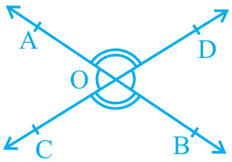
পূর্বের শ্রেণি হতে মনে করো যে, যখন দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তখন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়। চলো, এর ফলাফল প্রমাণ করি। প্রমাণের উপাদানগুলোর জন্য পরিশিষ্ট 1 (Appendix) দেখ এবং নিম্নের প্রমাণটি করার সময় এগুলো মনে রাখবে।

উপপাদ্য 6.1 : যদি দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তাহলে বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

প্রমাণ : উপরের বিবৃতিতে, ইহা প্রদত্ত যে 'দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে'। তাহলে, ধরো AB এবং CD দুটি রেখা O বিন্দুতে ছেদ করেছে, যা চিত্র 6.8 এ দেখানো হয়েছে। এখানে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ হল—

(i) $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$ (ii) $\angle AOD$ এবং $\angle BOC$

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\angle AOC = \angle BOD$ এবং $\angle AOD = \angle BOC$।



চিত্র. 6.8 : বিপ্রতীপ কোণ

এখন, OA রশ্মি CD রেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ (স্বতঃসিদ্ধ রৈখিক যুগল) (1)

আমরা কি লিখতে পারি $\angle AOD + \angle BOD = 180°$? হ্যাঁ! (কেন?) (2)

(1) ও (2) হইতে আমরা লিখতে পারি—

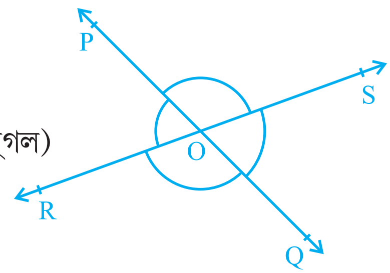
$$\angle AOC + \angle AOD = \angle AOD + \angle BOD$$

ইহা হতে পাওয়া যায় $\angle AOC = \angle BOD$ (অনুচ্ছেদ 5.2 এর স্বতঃসিদ্ধ 3 দেখ)

অনুরূপে, ইহা প্রমাণ করা যায় যে $\angle AOD = \angle BOC$

চলো এখন আমরা স্বতঃসিদ্ধ রৈখিক যুগল এবং উপপাদ্য 6.1 এর উপর ভিত্তি করে কিছু উদাহরণ করি।

উদাহরণ 1 : 6.9 নং চিত্রে, PQ এবং RS রেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle$ POR : $\angle$ ROQ = 5 : 7 হয়, তবে সবগুলো কোণের মান নির্ণয় করো।



চিত্র. 6.9

সমাধান : $\angle POR + \angle ROQ = 180°$ (রৈখিক কোণ যুগল)

কিন্তু $\angle POR : \angle ROQ = 5 : 7$ (প্রদত্ত)

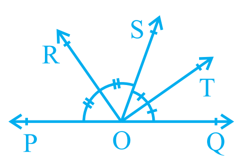
সুতরাং, $\angle POR = \frac{5}{12} \times 180° = 75°$

অনুরূপে, $\angle ROQ = \frac{7}{12} \times 180° = 105°$

এখন, $\angle POS = \angle ROQ = 105°$ (বিপ্রতীপ কোণগুলো সমান)

এবং $\angle SOQ = \angle POR = 75°$ (বিপ্রতীপ কোণগুলো সমান)

উদাহরণ 2 : চিত্র 6.10 এ, রশ্মি OS, POQ রেখার উপর অবস্থিত। রশ্মি OR এবং রশ্মি OT যথাক্রমে $\angle$ POS এবং $\angle$ SOQ এর সমদ্বিখণ্ডক। যদি $\angle POS = x$ হয়, তবে $\angle$ ROT এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র. 6.10

সমাধান : $\therefore$ OS রশ্মি, POQ রেখার উপর অবস্থিত ।

সুতরাং, $\angle POS + \angle SOQ = 180°$

কিন্তু, $\angle POS = x$

তাহলে, $x + \angle SOQ = 180°$

সুতরাং $\angle SOQ = 180° - x$

এখন, রশ্মি OR, $\angle$ POS এর সমদ্বিখণ্ডক,

সুতরাং $\angle ROS = \frac{1}{2} \times \angle POS$

$$= \frac{1}{2} \times x = \frac{x}{2}$$

অনুরূপে, $\angle SOT = \frac{1}{2} \times \angle SOQ$

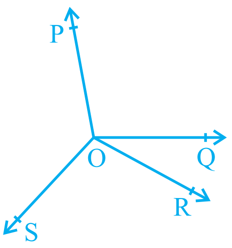
$$= \frac{1}{2} \times (180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

এখন, $\angle ROT = \angle ROS + \angle SOT$

$$= \frac{x}{2} + 90° - \frac{x}{2}$$

$$= 90°$$

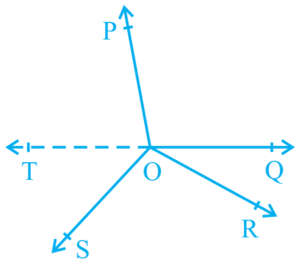


চিত্র 6.11

উদাহরণ 3 : 6.11 নং চিত্রে OP, OQ, OR এবং OS হল চারটি রশ্মি। প্রমাণ করো—

$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$.

সমাধান : 6.11 নং চিত্রে, OP, OQ, OR অথবা OS এর মধ্যে যে কোন একটি রশ্মিকে বিপরীত দিকে একটি বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করতে হবে। মনে করি রশ্মি OQ কে বিপরীত দিকে বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যাতে TOQ একটি সরলরেখা হয়। (চিত্র 6.12 দেখ)



চিত্র 6.12

এখন যেহেতু রশ্মি OP, TOQ রেখার উপর দণ্ডায়মান

সুতরাং, $\angle TOP + \angle POQ = 180°$ (1)

(রৈখিক যুগল স্বতঃসিদ্ধ)

অনুরূপে, রশ্মি OS, TOQ রেখার উপর দণ্ডায়মান।

সুতরাং, $\angle TOS + \angle SOQ = 180°$ (2)

কিন্তু $\angle SOQ = \angle SOR + \angle QOR$

তাহলে, (2) থেকে পাওয়া যায়—

$$\angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 180° \quad (3)$$

এখন (1) এবং (3) যোগ করে পাওয়া যায়

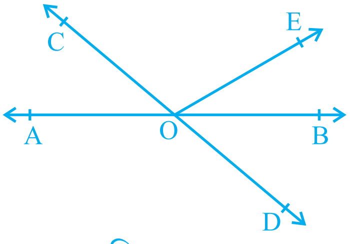
$$\angle TOP + \angle POQ + \angle TOS + \angle SOR + \angle QOR = 360° \quad (4)$$

কিন্তু $\angle TOP + \angle TOS = \angle POS$

তাহলে, (4) থেকে পাওয়া যায়—

$$\angle POQ + \angle QOR + \angle SOR + \angle POS = 360°$$

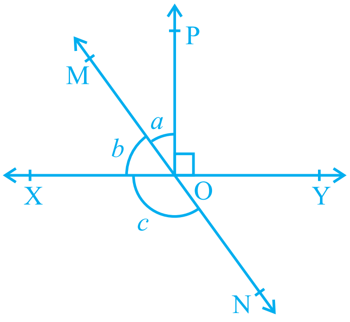
অনুশীলনী 6.1



চিত্র 6.13

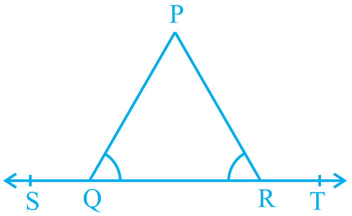
1. 6.13 নং চিত্রে AB এবং CD রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle AOC + \angle BOE = 70°$ এবং $\angle BOD = 40°$ হয়, তবে $\angle BOE$ এবং প্রবৃদ্ধ $\angle COE$. এর মান নির্ণয় করো।

2. 6.14 নং চিত্রে, XY এবং MN রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle POY = 90°$ এবং $a : b = 2 : 3$ হয় তবে c এর মান নির্ণয় করো।



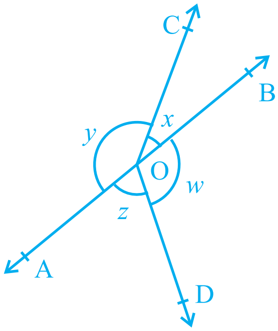
চিত্র 6.14

3. 6.15 নং চিত্রে, $\angle PQR = \angle PRQ$ হলে প্রমাণ করো $\angle PQS = \angle PRT$ ।



চিত্র 6.15

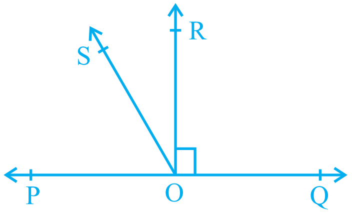
4. 6.16 নং চিত্রে, যদি $x + y = w + z$ হয়, তবে প্রমাণ করো, AOB একটি সরলরেখা।



চিত্র 6.16

5. 6.17 নং চিত্রে, POQ হল একটি সরলরেখা। OR রশ্মি PQ রেখার উপর লম্ব। অপর রশ্মি OS , রশ্মি OP এবং OR এর মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করো—

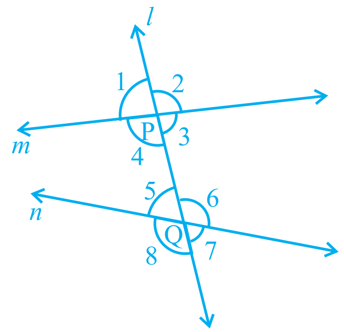
$$\angle ROS = \frac{1}{2} (\angle QOS - \angle POS).$$



চিত্র 6.17

6. দেওয়া আছে $\angle XYZ = 64°$ এবং XY কে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। প্রদত্ত তথ্য হতে একটি চিত্র আঁকো। যদি YQ রশ্মি, $\angle ZYP$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে $\angle XYQ$ এবং এর প্রবৃদ্ধ $\angle QYP$ মান নির্ণয় করো।

6.5 সমান্তরাল রেখা এবং ভেদক



চিত্র 6.18

আমরা জানি যে, একটি রেখা দুই বা তার অধিক রেখাকে স্বতন্ত্র বিন্দুতে ছেদ করলে, তাকে ভেদক বলা হয় (চিত্র 6.18 দেখ)। l রেখা, m এবং n রেখাকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, রেখা l হল, রেখা m এবং রেখা n এর ভেদক। লক্ষ করো প্রতিটি বিন্দু P এবং Q তে চারটি করে কোণ উৎপন্ন করেছে।

এই কোণগুলোকে $\angle 1, \angle 2, \ldots, \angle 8$ নাম দ্বারা 6.18 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।

$\angle 1, \angle 2, \angle 7$ এবং $\angle 8$ কোণগুলোকে বলা হয় **বহিঃকোণ**, যেখানে $\angle 3, \angle 4, \angle 5$ এবং $\angle 6$ কে বলা হয় **অন্তঃকোণ**।

পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা কিছু কোণ যুগলের নামকরণ করেছিলে, যখন একটি ভেদক দুটি রেখাকে ছেদ করে। এগুলো নিম্নরূপ :

(a) **অনুরূপ কোণ সমূহ :**

(i) $\angle 1$ এবং $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ এবং $\angle 6$

(iii) $\angle 4$ এবং $\angle 8$ (iv) $\angle 3$ এবং $\angle 7$

(b) **অন্তঃ একান্তর কোণ সমূহ :**

(i) $\angle 4$ এবং $\angle 6$ (ii) $\angle 3$ এবং $\angle 5$

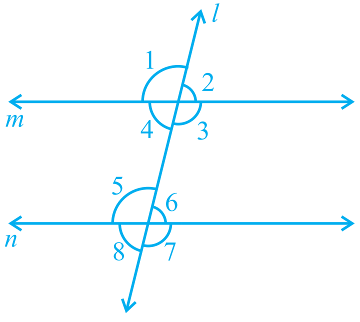
(c) **বহিঃ একান্তর কোণ সমূহ :**

(i) $\angle 1$ এবং $\angle 7$ (ii) $\angle 2$ এবং $\angle 8$

(d) **ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ সমূহ :**

(i) $\angle 4$ এবং $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ এবং $\angle 6$

ভেদকের একই পার্শ্বের অন্তঃকোণগুলোকে ক্রমিক **অন্তঃকোণ (consecutive interior angle)** বা **সমজাতীয় কোণ (allied angle)** বা **সহ-অন্তঃকোণ (co-interior allied)** বলা হয়। আবার, অনেক সময় আমরা অন্তঃস্থ একান্তর কোণকে শুধু একান্তর কোণ বলতে পারি।



চিত্র 6.19

এখন, আমরা সেই কোণ-যুগলের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করব। যখন m এবং n রেখা পরস্পর সমান্তরাল হয়। তোমাদের অর্থ বইয়ের রুল টানা রেখাগুলো পরস্পর সমান্তরাল। এদের যেকোনো একটি রেখা বরাবর স্কেল এবং পেনসিলের সাহায্যে দুটি সমান্তরাল রেখা এবং একটি ভেদক আঁক, যা রেখা দুটোকে ছেদ করে (চিত্র 6.19 এর মতো)

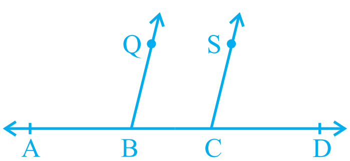
এখন, যে কোন একজোড়া অনুরূপ কোণের পরিমাপ এবং তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করো। দেখবে : $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 4 = \angle 8$ এবং $\angle 3 = \angle 7$। এই সম্পর্কগুলো হতে নিচের স্বতঃসিদ্ধটিতে উপনীত হওয়া যায়।

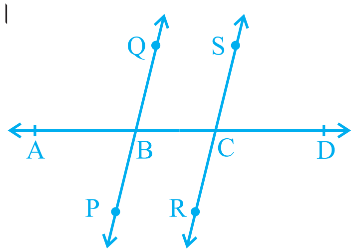
স্বতঃসিদ্ধ 6.3 : *যদি একটি ভেদক দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, তাহলে প্রতিজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়।*

স্বতঃসিদ্ধ 6.3 কে **অনুরূপ কোণের স্বতঃসিদ্ধ** বলা যায়। এখন আমরা এই স্বতঃসিদ্ধের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধ নিয়ে আলোচনা করব।

যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যেন এক জোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়, তবে রেখা দুটি সমান্তরাল হবে।

এই বিবৃতিটি কি সত্য? ইহা নিম্নরূপে যাচাই করা যায়। একটি রেখা AD আঁক এবং উহার উপর দুটি বিন্দু B এবং C চিহ্নিত করো। B এবং C বিন্দুতে $\angle$ ABQ এবং $\angle$ BCS অঙ্কন কর (চিত্র 6.20 (i) এর মতো) যাতে তারা পরস্পর সমান হয়।





চিত্র. 6.20

QB এবং SC কে AD এর অপর পার্শ্বে এরূপে বর্ধিত করো যেন দুটি রেখা এবং রেখা পাওয়া যায় (চিত্র 6.20 (ii) দেখ) তোমরা হয়তো লক্ষ্য করেছো, দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করেনি। PQ এবং RS এর বিভিন্ন বিন্দুতে সাধারণ লম্ব অঙ্কন করো এবং তাদের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো। দেখবে ইহা সব জায়গায় সমান। সুতরাং এর থেকে সিদ্ধান্ত নিতে পারো যে, রেখাগুলো পরস্পর সমান্তরাল। তাহলে অনুরূপ কোণের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধটিও সত্য। এভাবে আমরা নীচের স্বতঃসিদ্ধটি পাই :

স্বতঃসিদ্ধ 6.4 : *একটি ভেদক দুটি রেখাকে ছেদ করার ফলে যদি একজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয় তবে রেখাদুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।*

যখন একটি ভেদক দুটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে তখন তাদের মধ্যে উৎপন্ন অন্তঃকোণগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করার জন্য আমরা কি অনুরূপ কোণের স্বতঃসিদ্ধটি ব্যবহার করতে পারি? 6.21 নং চিত্রে ভেদক PS, দুটি সমান্তরাল সরলরেখা AB এবং CD কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।

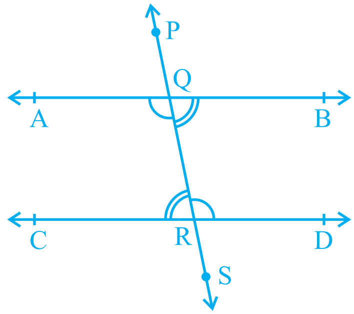


Fig. 6.21

$\angle$ BQR = $\angle$ QRC এবং $\angle$ AQR = $\angle$ QRD হবে কি?

তোমরা জান $\angle$ PQA = $\angle$ QRC (1)

(অনুরূপ কোণের স্বতঃসিদ্ধ)

$\angle$ PQA =$\angle$ BQR? হ্যাঁ ! (কেন?) (2)

সুতরাং, (1) ও (2) হইতে, লেখা যায়—

$\angle$ BQR = $\angle$ QRC

অনুরূপে, $\angle$ AQR =$\angle$ QRD.

এই ফলাফলকে নিম্নে প্রদত্ত উপপাদ্যের আকারে উপস্থাপন করা যায় :

উপপাদ্য 6.2 : *যদি একটি ভেদক দুটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে, তবে প্রতিজোড়া একান্তর কোণ সমান হয়।*

এখন অনুরূপ কোণের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধটি ব্যবহার করে, আমরা কি দেখাতে পারি যে, দুটি রেখা সমান্তরাল হবে যদি তাদের একজোড়া একান্তর কোণ সমান হয়? 6.22 নং চিত্রে ভেদক PS রেখা AB এবং CD কে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে এরূপে ছেদ করে যেন $\angle$ BQR = $\angle$ QRC হয়।

AB || CD হবে কি?

$\angle$ BQR = $\angle$ PQA (কেন?) (1)

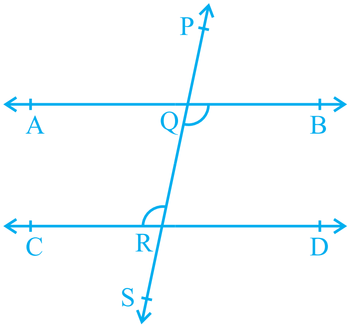
কিন্তু, $\angle$ BQR = $\angle$ QRC (প্রদত্ত) (2)

সুতরাং, (1) এবং (2) হইতে, সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় যে,

$\angle$ PQA = $\angle$ QRC

কিন্তু তারা অনুরূপ কোণ

সুতরাং, AB || CD (অনুরূপ কোণের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধ)



চিত্র 6.22

এই ফলাফলকে নিম্নে প্রদত্ত উপপাদ্যের আকারে ব্যক্ত করা যায় :

উপপাদ্য 6.3 : *যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এরূপে ছেদ করে যে, একজোড়া অন্তঃস্থ একান্তর কোণ সমান হয় তবে রেখা দুটি সমান্তরাল হবে।*

অনুরূপে, ভেদকের একই পাশে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য নিম্নরূপ পাওয়া যায়।

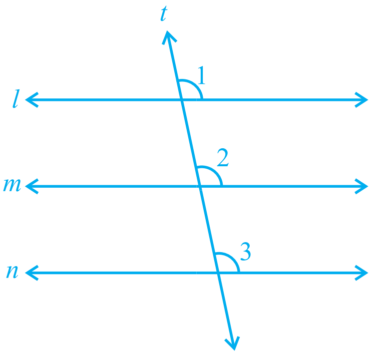
উপপাদ্য 6.4 : *যদি একটি ভেদক দুটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে, তবে ভেদকের একই পাশে অবস্থিত প্রতি জোড়া অন্তঃস্থ কোণ হবে সম্পূরক।*

উপপাদ্য 6.5 : *যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এরূপে ছেদ করে যে, ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত প্রতিজোড়া অন্তঃস্থ কোণ সম্পূরক হয়, তবে রেখা দুটি সমান্তরাল হবে।*

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা উপরোক্ত স্বতঃসিদ্ধ এবং উপপাদ্যগুলোকে কার্যপ্রণালী দ্বারা যাচাই করেছ। এই কার্যপ্রণালীগুলো তোমরা এখানে পুনরায় করতে পারো।

6.6 একই রেখার সমান্তরাল রেখাসমূহ :

যদি দুটি রেখা এরূপ হয় যে, তাদের প্রত্যেকে অন্য একটি রেখার সমান্তরাল হয়, তবে রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে কি? চলো, আমরা এর সত্যতা যাচাই করি। 6.23 নং চিত্র দেখ, যেখানে রেখা $m \parallel$ রেখা l এবং রেখা $n \parallel$ রেখা l।



চিত্র 6.23

l, m এবং n রেখাগুলোর একটি ভেদক রেখা t আঁকি।

দেওয়া আছে, $m \parallel l$ এবং $n \parallel l$ ।

সুতরাং, $\angle 1 = \angle 2$ এবং $\angle 1 = \angle 3$

(অনুরূপ কোণের স্বতঃসিদ্ধ)

তাহলে, $\angle 2 = \angle 3$ (কেন?)

কিন্তু $\angle 2$ এবং $\angle 3$ হল অনুরূপ কোণ এবং তাহারা পরস্পর সমান।

সুতরাং, তোমরা বলতে পার যে, রেখা $m \parallel$ রেখা n

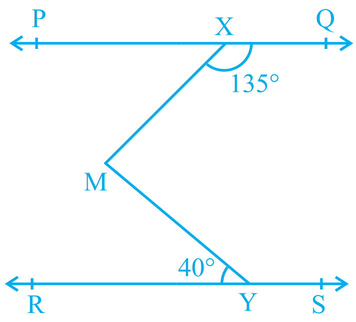
(অনুরূপ কোণের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধ)

এই ফলাফলকে নিম্নলিখিত উপপাদ্যের আকারে উপস্থাপন করা যায় :

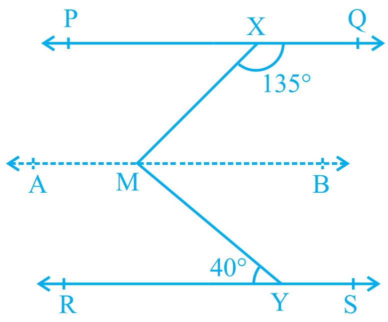
উপপাদ্য 6.6 : *যদি দুটি রেখা এরূপ হয় যে, তাদের প্রত্যেকে অন্য একটি রেখার সমান্তরাল, তাহলে রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।*

লক্ষ করো, উপরিউক্ত ধর্ম দুই বা তার অধিক রেখার ক্ষেত্রেও প্রয়োগ করা যায়।

এখন, আমরা সমান্তরাল রেখা সংক্রান্ত কিছু উদাহরণের সমাধান করবো।



চিত্র. 6.24



চিত্র. 6.25

উদাহরণ 4 : 6.24 নং চিত্রে, যদি $PQ \parallel RS$ হয় এবং $\angle MXQ = 135°$ ও $\angle MYR = 40°$ হয় তবে $\angle XMY$ এর মান কত?

সমাধান : 6.25 নং চিত্রে, M বিন্দুর মধ্য দিয়ে PQ রেখার সমান্তরাল করে AB রেখা অঙ্কন করা হল। তাহলে $AB \parallel PQ$ এবং $PQ \parallel RS$ হবে।

সুতরাং, $AB \parallel RS$ (কেন?)

এখন, $\angle QXM + \angle XMB = 180°$

($AB \parallel PQ$, ভেদক XM এর একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ)

কিন্তু $\angle QXM = 135°$

তাহলে, $135° + \angle XMB = 180°$

সুতরাং, $\angle XMB = 45°$ (1)

এখন, $\angle BMY = \angle MYR$ ($AB \parallel RS$, একান্তর কোণ)

সুতরাং, $\angle BMY = 40°$ (2)

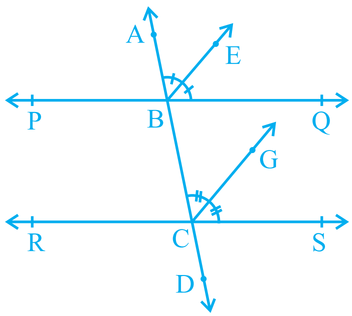
(1) এবং (2) যোগ করে পাওয়া যায়

$$\angle XMB + \angle BMY = 45° + 40°$$

তাহলে, $\angle XMY = 85°$

উদাহরণ 5 : যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এমনভাবে ছেদ করে যাতে, তাদের অনুরূপ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।

সমাধান : 6.26 নং চিত্রে,একটি ভেদক AD, দুটি রেখা PQ এবং RS কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। রশ্মি BE, $\angle ABQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং রশ্মি CG, $\angle BCS$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং $BE \parallel CG$



চিত্র **6.26**

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $PQ \parallel RS$

দেওয়া আছে, রশ্মি BE, $\angle ABQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

তাহলে, $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABQ$ (1)

অনুরূপে, রশ্মি CG, $\angle BCS$ এর সমদ্বিখণ্ডক

তবে, $\angle BCG = \frac{1}{2} \angle BCS$ (2)

কিন্তু $BE \parallel CG$ এবং AD হল ভেদক

তাহলে, $\angle ABE = \angle BCG$

(অনুরূপ কোণ স্বতঃসিদ্ধ) (3)

(1) এবং (2) কে, (3) এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{1}{2} \angle ABQ = \frac{1}{2} \angle BCS$$

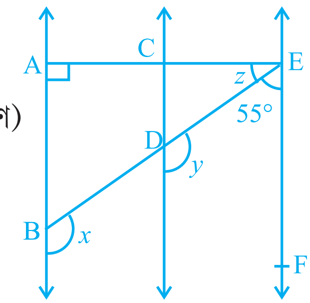
অর্থাৎ, $\angle ABQ = \angle BCS$

কিন্তু, এই কোণদ্বয় অনুরূপ কোণ, ভেদক AD, PQ এবং RS রেখাকে ছেদ করার ফলে এই কোণদ্বয় উৎপন্ন হয়েছে।

সুতরাং, PQ || RS

(অনুরূপ কোণের বিপরীত স্বতঃসিদ্ধ)

উদাহরণ 6 : 6.27 নং চিত্রে, AB || CD এবং CD || EF আবার EA ⊥ AB। যদি ∠ BEF =55° হয়, তবে x, y এবং z এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র **6.27**

সমাধান : $y + 55° = 180°$

(ভেদক ED এর একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ)

সুতরাং, $y = 180° - 55° = 125°$

আবার $x = y$

(AB || CD, অনুরূপ কোণ স্বতঃসিদ্ধ)

সুতরাং, $x = 125°$

এখন, যেহেতু AB || CD এবং CD || EF,

সুতরাং, AB || EF.

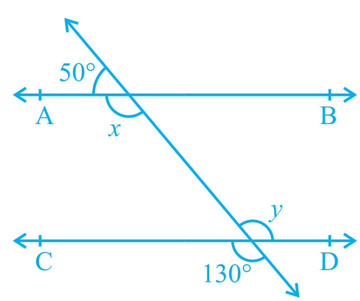
আবার, ∠ EAB + ∠ FEA = 180° (ভেদক এর একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ)

সুতরাং, $90° + z + 55° = 180°$

$z = 35°$

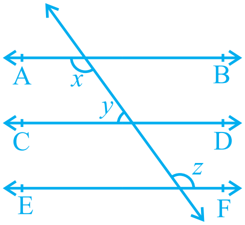
অনুশীলনী 6.2

1. 6.28 নং চিত্রে, x এবং y এর মান নির্ণয় করো এবং তারপর দেখাও যে, AB || CD



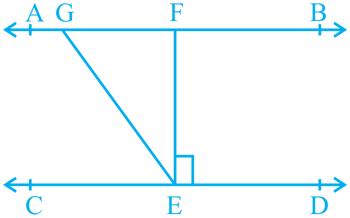
চিত্র **6.28**

2. 6.29 নং চিত্রে, যদি AB || CD, CD || EF হয় এবং $y : z = 3 : 7$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র **6.29**

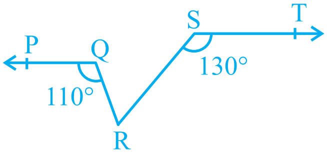
3. 6.30 নং চিত্রে, যদি AB || CD, EF ⊥ CD এবং ∠ GED = 126° হয়, তবে ∠ AGE, ∠ GEF এবং ∠ FGE এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র **6.30**

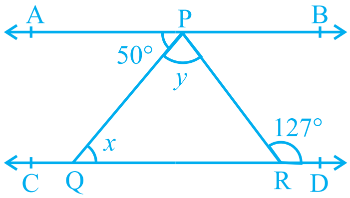
4. 6.31 নং চিত্রে, যদি PQ || ST, ∠ PQR = 110° এবং ∠ RST = 130° হয়, তবে ∠ QRS এর মান নির্ণয় করো।

(ইঙ্গিত : ST এর সমান্তরাল একটি রেখা আঁক, যাহা R বিন্দুগামী)



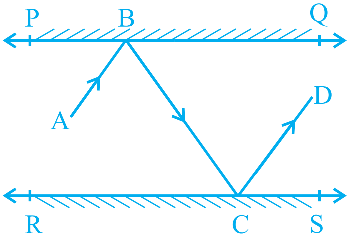
চিত্র **6.31**

5. 6.32 নং চিত্রে, যদি AB || CD, ∠ APQ = 50°, এবং ∠ PRD = 127° হয়, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র **6.32**

6. 6.33 নং চিত্রে, PQ এবং RS দুটি সমতল দর্পণকে পরস্পর সমান্তরালভাবে রাখা হয়েছে। আপতিত রশ্মি AB, দর্পণ PQ এর B বিন্দুতে আপতিত হয়েছে এবং প্রতিফলিত রশ্মি BC পথে অগ্রসর হয়ে RS দপর্ণের C বিন্দুতে আপতিত হয়ে পুনরায় CD পথে অগ্রসর হয়েছে। প্রমাণ করো AB || CD।



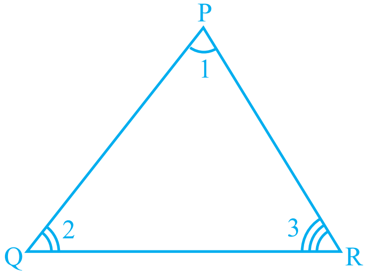
চিত্র **6.33**

6.7 ত্রিভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম :

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা কার্যকলাপের মাধ্যমে জেনেছো যে, ত্রিভুজের সবগুলো কোণের সমষ্টি হল 180°। সমান্তরাল রেখা সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ এবং উপপাদ্য প্রয়োগ করে এই বিবৃতিটি প্রমাণ করা যায়।

উপপাদ্য 6.7 : একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর সমষ্টি 180° ।

প্রমাণ : চলো, আমরা দেখি উপরের বিবৃতিতে কি দেওয়া আছে অর্থাৎ পরিকল্পনা কি এবং আমাদের কি প্রমাণ করতে হবে। একটি ত্রিভুজ PQR দেওয়া আছে এবং এর কোণগুলো হল $\angle 1$, $\angle 2$ এবং $\angle 3$ (চিত্র 6.34 দেখ)। প্রমাণ করতে হবে $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$। QR এর সমান্তরাল করে, এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু P দিয়ে XPY রেখা অংকন (চিত্র 6.35 এর মত) করা হল, যাতে সমান্তরাল রেখা সংক্রান্ত ধর্মগুলো প্রয়োগ করা যায়।



চিত্র 6.34

এখন, XPY হল একটি রেখা।

সুতরাং, $\angle 4 + \angle 1 + \angle 5 = 180°$ (1)

কিন্তু XPY || QR এবং PQ ও PR হল ভেদক।

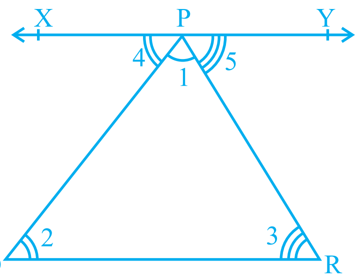
তাহলে, $\angle 4 = \angle 2$ এবং $\angle 5 = \angle 3$

(একান্তর কোণ যুগল)

$\angle 4$ এবং $\angle 5$ কে (1) এ বসিয়ে আমরা পাই

$$\angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = 180°$$

অর্থাৎ $$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$



চিত্র 6.35

পূর্বে তোমরা একটি ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ সম্পর্কে পড়েছো (চিত্র 6.36 দেখি)। QR বাহুকে S বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল, $\angle$ PRS হল ΔPQR এর বহিঃকোণ।

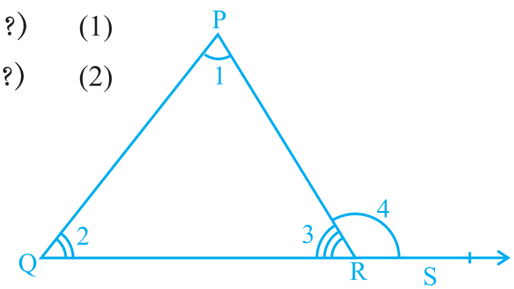
তাহলে কি $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (কেন ?) (1)

আবার, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ (কেন ?) (2)

(1) এবং (2) হইতে, পাওয়া যায়

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2.$$

এই ফলাফলকে নিম্নে প্রদত্ত উপপাদ্যের আকারে উপস্থাপন করা যায় :



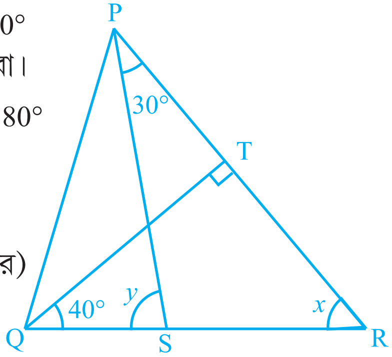
চিত্র 6.36

উপপাদ্য 6.8 : ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে, উৎপন্ন বহিঃকোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

উপরের উপপাদ্য থেকে এটি স্পষ্ট যে, ত্রিভুজের একটি বহিঃকোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের প্রতিটি অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

এখন উপরের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে আমরা কিছু উদাহরণের সমাধান করবো।

উদাহরণ 7 : 6.37 নং চিত্রে, যদি $QT \perp PR$, $\angle TQR = 40°$ এবং $\angle SPR = 30°$ হয়, তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র 6.37

সমাধান : Δ TQR থেকে পাওয়া যায় $90° + 40° + x = 180°$

(ত্রিভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম)

সুতরাং $x = 50°$

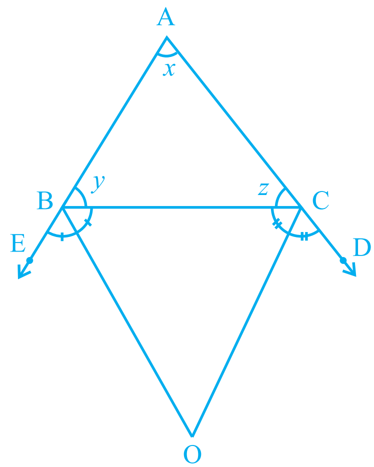
এখন, $y = \angle SPR + x$ (উপপাদ্য 6.8 প্রয়োগ করে)

তাহলে, $y = 30° + 50°$

$= 80°$

উদাহরণ 8: 6.38 নং চিত্রে, ΔABC এর AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে E এবং D পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। যদি $\angle$ CBE এবং $\angle$ BCD এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BO এবং CO পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করো—

$$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle BAC.$$



চিত্র 6.38

সমাধান : BO রশ্মি, $\angle$ CBE এর সমদ্বিখণ্ডক

তাহলে, $\angle CBO = \frac{1}{2} \angle CBE$

$$= \frac{1}{2}(180° - y)$$

$$= 90° - \frac{y}{2} \qquad (1)$$

অনুরূপে, CO রশ্মি, $\angle$ BCD এর সমদ্বিখণ্ডক

তাহলে, $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD$

$$= \frac{1}{2}(180° - z)$$

$$= 90° - \frac{z}{2} \qquad (2)$$

Δ BOC থেকে, $\angle BOC + \angle BCO + \angle CBO = 180°$ (3)

(1) এবং (2) কে (3) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$\angle BOC + 90° - \frac{z}{2} + 90° - \frac{y}{2} = 180°$$

তাহলে, $\angle BOC = \dfrac{z}{2} + \dfrac{y}{2}$

অথবা, $\angle BOC = \dfrac{1}{2}(y+z)$ (4)

কিন্তু $x + y + z = 180°$ (ত্রিভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম)

তাহলে, $y + z = 180° - x$

তাহলে, (4) হতে পাওয়া যায়—

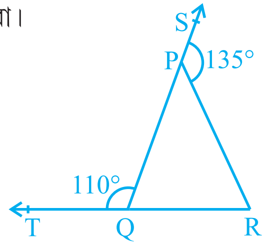
$$\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - x)$$

$$= 90° - \frac{x}{2}$$

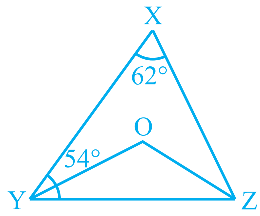
$$= 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$$

অনুশীলনী 6.3

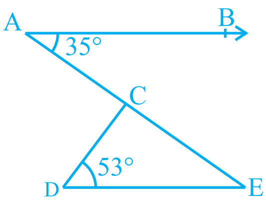
1. 6.39 নং চিত্রে, Δ PQR এর বাহু QP এবং RQ কে যথাক্রমে S ও T পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। যদি $\angle SPR = 135°$ এবং $\angle PQT = 110°$ হয়, তবে $\angle PRQ$ এর মান নির্ণয় করো।
2. 6.40 নং চিত্রে, $\angle X = 62°$, $\angle XYZ = 54°$। Δ XYZ ত্রিভুজে যদি YO এবং ZO যথাক্রমে $\angle XYZ$ এবং $\angle XZY$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে $\angle OZY$ এবং $\angle YOZ$ এর মান নির্ণয় করো।
3. 6.41 নং চিত্রে, যদি AB || DE, $\angle BAC = 35°$ এবং $\angle CDE = 53°$ হয় তবে, $\angle DCE$ এর মান নির্ণয় করো।



চিত্র 6.39



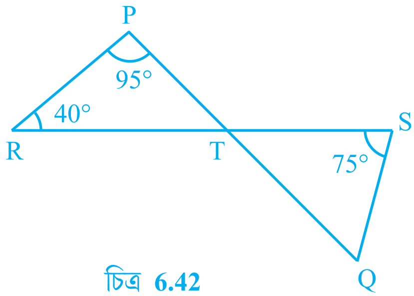
চিত্র 6.40



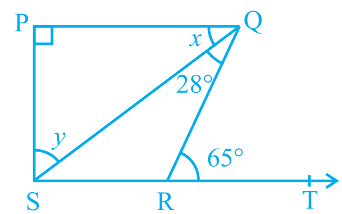
চিত্র 6.41

4. 6.42 নং চিত্রে, PQ এবং RS যদি T বিন্দুতে এরূপে ছেদ করে যে, $\angle PRT = 40°$, $\angle RPT = 95°$ এবং $\angle TSQ = 75°$ হয় তবে $\angle SQT$ এর মান নির্ণয় করো।

5. 6.43 নং চিত্রে, যদি $PQ \perp PS$, $PQ \parallel SR$, $\angle SQR = 28°$ এবং $\angle QRT = 65°$ হয় তবে x এবং y এর মান নির্ণয় করো।

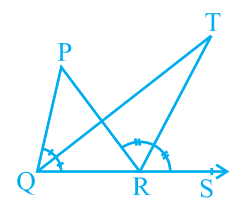


চিত্র **6.42**



চিত্র **6.43**

6. 6.44 নং চিত্রে, Δ PQR এর বাহু QR কে S বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। যদি $\angle PQR$ এবং $\angle PRS$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে T বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করো $\angle QTR = \dfrac{1}{2} \angle QPR$.



চিত্র **6.44**

6.8 সারসংক্ষেপ

1. যদি একটি রশ্মি এটি রেখার উপর দণ্ডায়মান হয়, তবে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুটির সমষ্টি হল 180° এবং বিপরীতভাবেও ইহা সত্য। এই ধর্মটিকে বলা হয় রৈখিক যুগ্মতার স্বতঃসিদ্ধ।

2. যদি দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তবে তাদের বিপ্রতীপ কোণগুলো সমান হয় ।

3. যদি একটি ভেদক, দুটি সমান্তরাল রেখাকে ছেদ করে, তবে—

(i) প্রতিজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়,

(ii) প্রতি জোড়া অন্তঃস্থ একান্তর কোণ সমান হয়,

(iii) ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত প্রতিজোড়া অন্তঃকোণ সম্পূরক।

4. যদি একটি ভেদক দুটি রেখাকে এরূপে ছেদ করে, যাতে—

(i) যে কোন একজোড়া অনুরূপ কোণ সমান হয়, অথবা

(ii) যে কোন একজোড়া একান্তর কোণ সমান হয়, অথবা

(iii) ভেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত যে কোণ একজোড়া অন্তঃকোণের সমষ্টি সম্পূরক হয়, তবে ঐ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

5. যদি দুই বা ততোধিক সরলরেখার প্রত্যেকটি অন্য একটি সরলরেখার সমান্তরাল হয়, তাহলে তারা পরস্পর সমান্তরাল।

6. ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180°।

7. ত্রিভুজের কোনও বাহুকে বর্ধিত করলে, উৎপন্ন বহিঃকোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

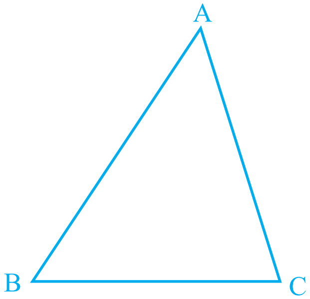
অধ্যায়-7

ত্রিভুজ (TRIANGLES)

7.1 ভূমিকা :

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা ত্রিভুজ এবং এর বিভিন্ন ধর্মাবলী নিয়ে পড়েছ। তোমরা জান যে, তিনটি পরস্পর-ছেদী রেখা দ্বারা উৎপন্ন বদ্ধচিত্রকে ত্রিভুজ বলে। ('ত্রি' এর অর্থ হল তিন)। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু, তিনটি কোণ এবং তিনটি শীর্ষবিন্দু আছে। উদাহরণস্বরূপ ABC ত্রিভুজকে Δ ABC দ্বারা প্রকাশ করা হয় (চিত্র 7.1 দেখ); AB, BC, CA হল তিনটি বাহু, $\angle$ A, $\angle$ B, $\angle$ C হল তিনটি কোণ এবং A, B, C হল তিনটি শীর্ষবিন্দু।

ষষ্ঠ অধ্যায়ে, তোমরা ত্রিভুজের কিছু ধর্মাবলী জেনেছো। এই অধ্যায়ে তোমরা ত্রিভুজের সর্বসমতা, সর্বসমতার শর্ত, ত্রিভুজের আরো কিছু ধর্ম এবং ত্রিভুজের অসমতা (inequalities) সম্পর্কে বিস্তারিত জানবে। তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে অধিকাংশ ত্রিভুজের ধর্মের সত্যতা যাচাই করেছ। আমরা এখানে এদের কয়েকটি ধর্ম প্রমাণ করব।



চিত্র 7.1

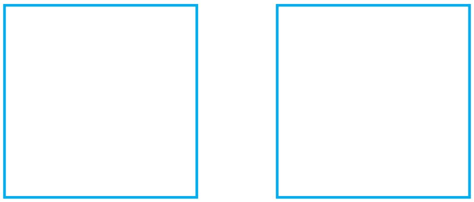
7.2 ত্রিভুজের সর্বসমতা

তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে, একই আকারের দুটি আলোকচিত্রের প্রতিলিপি (copies) অভিন্ন। অনুরূপে একই আকারের দুটি বালা (bangles), একই ব্যাঙ্ক দ্বারা প্রদত্ত দুটি এটিএম কার্ড অভিন্ন হয়। তোমরা আরো দেখেছো, একই সালে তৈরি করা একটি এক টাকার মুদ্রাকে আরেকটি এক টাকার মুদ্রার উপর রাখলে তারা পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে ঢেকে রাখে।

তোমাদের কি মনে আছে, এ ধরনের আকৃতিকে কী বলে? প্রকৃতপক্ষে এদের বলা হয় **সর্বসম আকৃতি** (সর্বসমতা কথাটির অর্থ হল এদের আকার এবং আকৃতি উভয়ই অভিন্ন)

এখন একই ব্যাসার্ধের দুটি বৃত্ত আঁক এবং একটিকে অপরটির উপর স্থাপন করো। তোমরা কী লক্ষ করেছ? দেখবে তারা পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে ঢেকে রাখে এবং এদের সর্বসম বৃত্ত বলা হয়।

একই মাপের বাহুবিশিষ্ট দুটি বর্গক্ষেত্রের একটিকে অপরটির উপর রেখে (চিত্র 7.2 দেখো) অথবা একই মাপের বাহুবিশিষ্ট দুটি সমবাহু ত্রিভুজের একটিকে অপরটির উপর রেখে এই কার্যকলাপকে (activity) পুনরায় করো। তোমরা দেখবে বর্গক্ষেত্রগুলো পরস্পর সর্বসম এবং সমবাহু ত্রিভুজগুলোও সর্বসম।



চিত্র. **7.2**

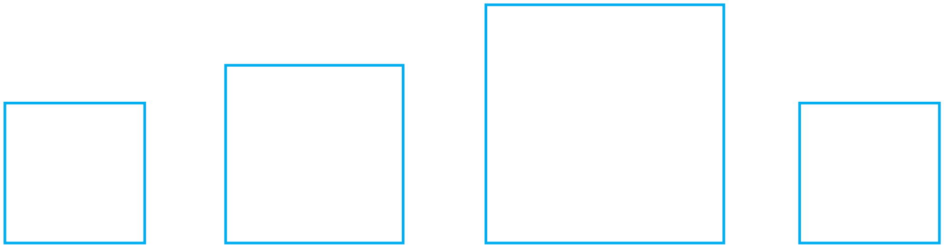
তোমরা হয়তো অবাক হবে যে, আমরা কেন সর্বসমতা নিয়ে আলোচনা করছি। রেফ্রিজেরটরে রাখা বরফের ট্রে (Ice tray) তোমরা অবশ্যই দেখেছ। লক্ষ করো, বরফ জমানোর জন্য সবগুলো ছাঁচ (mould) সর্বসম। ট্রেতে ছাঁচ তৈরির জন্য ব্যবহৃত ছাঁচের গভীরতা ও সর্বসম (এরা সবাই হয়তো আয়তাকার অথবা সবাই বৃত্তাকার অথবা সবাই ত্রিভুজাকার)।

অর্থাৎ যখনই সর্বসম বৃত্ত তৈরির প্রয়োজন হয়, তখনই ছাঁচ বানানোর জন্য সর্বসমতার ধারণা প্রয়োগ করা হয়। কখনো কখনো তোমাদের নিজেদের কলমের রিফিলটি পরিবর্তন করতে সমস্যা হয়, যদি নতুন রিফিলটি এবং পুরোনো রিফিলটি একই আকারের না হয়। স্পষ্টতঃ যদি দুটি রিফিল অভিন্ন বা সর্বসম হয় তবেই নতুন রিফিলটি লাগবে।

এভাবে দৈনন্দিন জীবনের পরিবেশ থেকে তোমরা অনেক উদাহরণ বের করতে পার, যেখানে সর্বসমতার ধর্ম প্রয়োগ করা যায়।

সর্বসম আকৃতির আরো কিছু উদাহরণ তোমরা চিন্তা করতে পারো?

নিম্নে চিত্রগুলোর মধ্যে কোন চিত্রগুলো 7.3 (i) নং চিত্রের বর্গক্ষেত্রের সর্বসম নয়?



(i) (ii) (iii) (iv)

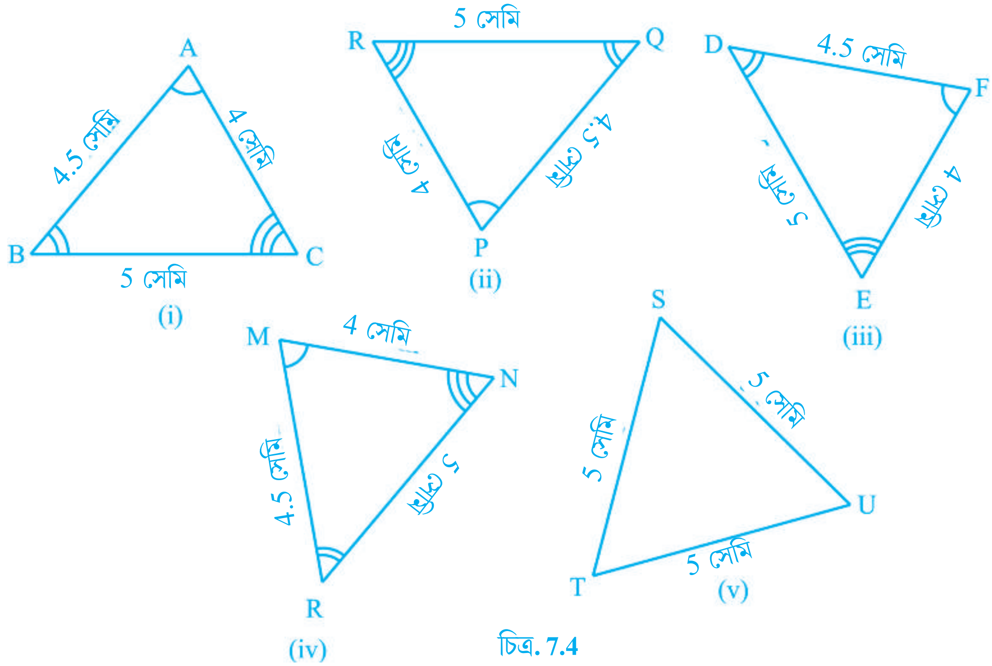
চিত্র. **7.3**

7.3 (ii) এবং (iii) নং চিত্রের বড় বর্গক্ষেত্রগুলো স্পষ্টতঃ 7.3 (i) নং চিত্রের বর্গক্ষেত্রের সর্বসম নয় কিন্তু 7.3 (iv) নং চিত্রের বর্গক্ষেত্র 7.3 (i) নং চিত্রের সঙ্গে সর্বসম।

এখন চলো আমরা দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতা নিয়ে আলোচনা করি।

তোমরা আগে থেকেই জান যে, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে যখন, একটি ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো অপর ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু কোণগুলোর ও অনুরূপ সমান হয়।

নিম্নে 7.4 (i) নং চিত্রে, প্রদত্ত ত্রিভুজগুলোর মধ্যে কোন ত্রিভুজগুলো ABC ত্রিভুজের সর্বসম ?



চিত্র. 7.4

7.4 (ii) নং চিত্র হইতে 7.4 (v) নং চিত্র পর্যন্ত, প্রত্যেকটি ত্রিভুজ কাটো এবং এদের ঘুরিয়ে Δ ABC কে আবৃত করার চেষ্টা করো। লক্ষ করে দেখো 7.4 নং চিত্রের (ii), (iii) এবং (iv) এর ত্রিভুজগুলো Δ ABC এর সঙ্গে সর্বসম যেখানে 7.4 (v) নং চিত্রের Δ TSU, Δ ABC এর সর্বসম নয়।

যদি Δ PQR, Δ ABC এর সর্বসম হয়, তবে আমরা লিখতে পারি $\Delta \text{ PQR} \cong \Delta \text{ ABC}$।

লক্ষ করো যে, যখন $\Delta \text{ PQR} \cong \Delta \text{ ABC}$, তখন Δ PQR এর বাহুগুলোর সাথে, Δ ABC এর অনুরূপ বাহুগুলোর উপরিপাতন হয় এবং এটি কোণের ক্ষেত্রেও সত্য হয়।

অর্থাৎ PQ আবৃত করে AB কে, QR আবৃত করে BC কে RP আবৃত করে CA কে; $\angle$ P আবৃত করে $\angle$ A কে, $\angle$ Q আবৃত করে $\angle$ B কে, $\angle$ R আবৃত করে $\angle$ C কে। আবার দুটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো এক-এক অনুরূপতা। অর্থাৎ P অনুরূপ A, Q অনুরূপ B, R অনুরূপ C, নিম্নরূপে লেখা যায় ।

$$P \leftrightarrow A,\ Q \leftrightarrow B,\ R \leftrightarrow C$$

লক্ষ করো এই অনুরূপতার অন্তঃগর্ত হলো, $\Delta \text{ PQR} \cong \Delta \text{ ABC}$;

কিন্তু $\Delta\text{QRP} \cong \Delta \text{ ABC}$ লেখা যাবে না।

অনুরূপে, 7.4 (iii) নং চিত্র থেকে পাই,

$$FD \leftrightarrow AB,\ DE \leftrightarrow BC \text{ এবং } EF \leftrightarrow CA$$

$$\text{এবং } F \leftrightarrow A,\ D \leftrightarrow B \text{ এবং } E \leftrightarrow C$$

সুতরাং, $\Delta\, FDE \cong \Delta\, ABC$ কিন্তু $\Delta\, DEF \cong \Delta\, ABC$ লেখা সত্য নয়।

7.4 (iv) নং চিত্রের ত্রিভুজের সঙ্গে $\Delta\, ABC$. এর অনুরূপতা লেখো।

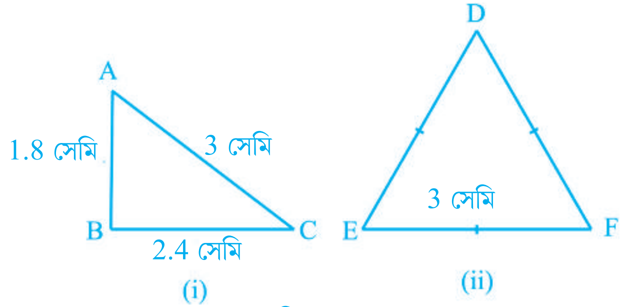
অতএব, ত্রিভুজের সর্বসমতাকে সাংকেতিকরূপে লেখার জন্য, তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর অনুরূপতা সঠিকভাবে লেখা প্রয়োজন।

লক্ষ করো যে, দুটি সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশগুলো সমান অথবা 'সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশের জন্য' আমরা সংক্ষেপে 'CPCT' (*corresponding parts of congruent triangles*) লিখতে পারি।

7.3 ত্রিভুজসমূহ সর্বসম হওয়ার শর্ত :

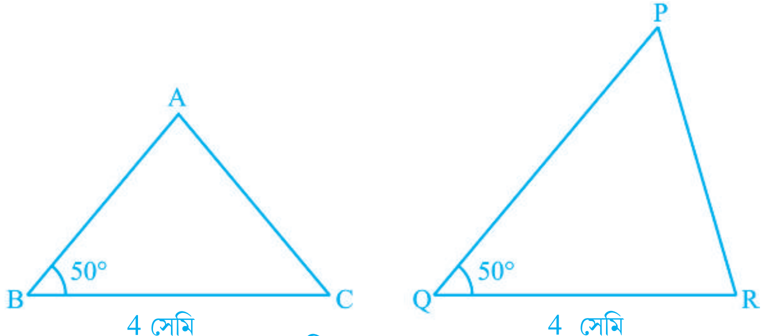
পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা ত্রিভুজের সর্বসমতার চারটি শর্ত শিখেছ। চলো এগুলোকে পুনরায় আলোচনা করি।

একটি বাহু 3 সেমি নিয়ে দুটি ত্রিভুজ আঁকো। এই ত্রিভুজগুলো কি সর্বসম? লক্ষ করে দেখো, তারা সর্বসম নয় (চিত্র 7.5 দেখ)



চিত্র 7.5

এখন একটি বাহু 4 সেমি এবং একটি কোণ 50° কোণ নিয়ে দুটি ত্রিভুজ আঁকো (চিত্র 7.6 দেখ)। তারা কি সর্বসম?



চিত্র 7.6

দেখো ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

এই কার্যকলাপকে (activity) আরো কয়েক জোড়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তি করো।

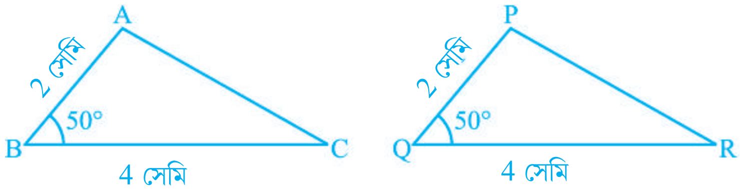
সুতরাং, একজোড়া বাহুর সমতা অথবা একজোড়া বাহু এবং একজোড়া কোণের সমতা ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হওয়ার জন্য যথেষ্ট নয়।

সমান কোণের বাহুগুলো ছাড়া যদি অন্য বাহুজোড়া সমান হয় তখন কী ঘটবে?

7.7 নং চিত্রে, $BC = QR$, $\angle B = \angle Q$ এবং সঙ্গে $AB = PQ$ এখন তোমরা বল, ΔABC এবং ΔPQR সর্বসম হবে কি?

পূর্বের অভিজ্ঞতা থেকে বলা যায় ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। 7.7 নং চিত্রে ΔABC এবং ΔPQR এর সর্বসমতার সত্যতা যাচাই করো।

ত্রিভুজগুলোর অপর বাহু জোড়া নিয়ে এই কার্যকলাপকে পুনরায় করো। তোমরা কি লক্ষ করেছ দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্গত কোণের সমতা ত্রিভুজের সর্বসমতার জন্য যথেষ্ট? হ্যাঁ এই শর্তটি যথেষ্ট।



চিত্র 7.7

এটি হল ত্রিভুজের সর্বসমতার প্রথম নিয়ম

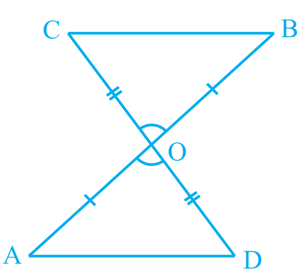
স্বতঃসিদ্ধ 7.1 (বাহু কোণ বাহু বা SAS সর্বসমতার শর্ত) : *দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে, যদি একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু ও তাদের কোন অপর ত্রিভুজের দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্গত কোণের সমান হয়।*

এই ফলাফলকে পূর্বে জানা ফলাফলের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় না এবং এজন্য একে একটি স্বতঃসিদ্ধরূপে গ্রহণ করা হয়েছে যা সত্য বলে ধরা হয়েছে। (পরিশিষ্ট 1 দেখ)

চলো এখন আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 1 : 7.8 নং চিত্রে $OA = OB$ এবং $OD = OC$ । দেখাও যে,

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ এবং (ii) $AD \parallel BC$



চিত্র 7.8

সমাধান : তোমরা হয়ত লক্ষ করেছ ΔAOD এবং ΔBOC এ

$$\left.\begin{aligned} OA &= OB \\ OD &= OC \end{aligned}\right\} \quad \text{(প্রদত্ত)}$$

আবার যেহেতু $\angle$ AOD এবং $\angle$ BOC বিপ্রতীপ কোণের জোড়া এবং বিপ্রতীপ কোণের জোড়া।

তাই $\angle AOD = \angle BOC$.

সুতরাং, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (SAS সর্বসমতা শর্ত)

(ii) AOD এবং BOC সর্বসম ত্রিভুজে, অন্য অনুরূপ অংশগুলো সমান।

সুতরাং, $\angle OAD = \angle OBC$ এবং তারা AD ও BC রেখাংশের একজোড়া একান্তর কোণ তৈরি করে।

তাহলে, $AD \parallel BC$

উদাহরণ 2 : AB একটি রেখাংশ এবং রেখা l হল এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক, যদি একটি বিন্দু P, l এর উপর অবস্থিত হয় তবে প্রমাণ করো A এবং B হতে P সমদূরবর্তী।

সমাধান : রেখা $l \perp AB$ এবং AB এর মধ্যবিন্দু C বিন্দুগামী (চিত্র 7.9 দেখ)। তোমাদের দেখাতে হবে PA = PB। এজন্য ΔPCA এবং ΔPCB কে দেখ।

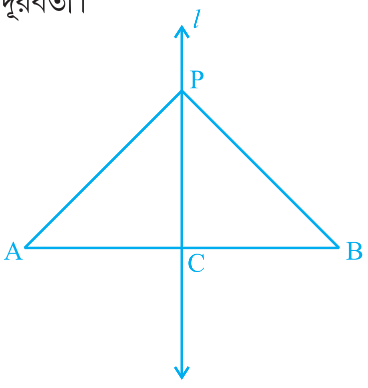
আমরা পাই $AC = BC$ (C, AB এর মধ্যবিন্দু)

$\angle PCA = \angle PCB = 90°$ (প্রদত্ত)

$PC = PC$ (সাধারণ)

সুতরাং, $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS সর্বসমতার শর্ত)

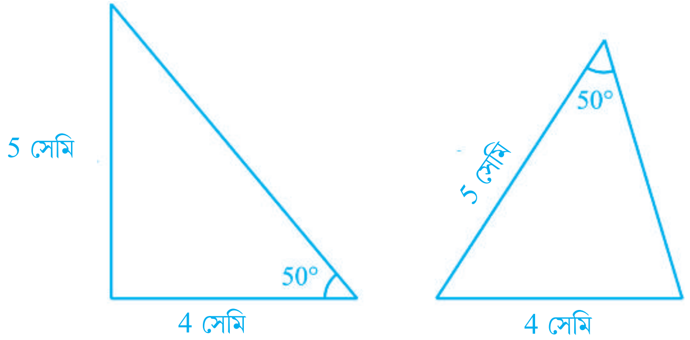
এবং তাহলে, $PA = PB$ (CPCT)



চিত্র 7.9

এখন চলো দুটি ত্রিভুজ আঁকি, যাদের বাহু 4 সেমি ও 5 সেমি এবং একটি কোণ 50°। এই কোণটি সমান বাহু দুটোর অন্তর্গত কোণ নয় (চিত্র 7.10 দেখ)।

এই ত্রিভুজদ্বয় কি সর্বসম?



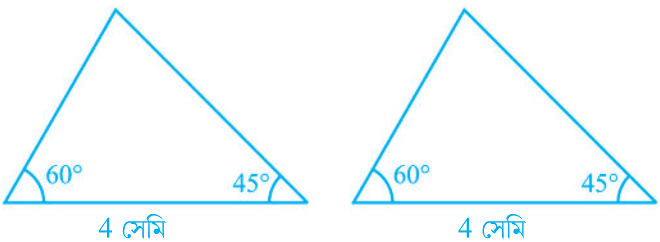
চিত্র 7.10

লক্ষ করো ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

এই কার্যকলাপকে আরো কয়েক জোড়া ত্রিভুজ নিয়ে পুনরায় করো। তোমরা দেখবে, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার জন্য, দুইটি সমান বাহু জোড়ার অন্তর্গত কোণ দুইটি সমান হওয়া প্রয়োজন।

অতএব, বাহু-কোণ-বাহু (SAS) সর্বসমতা শর্ত সিদ্ধ হয়; কিন্তু কোণ-বাহু-বাহু (ASS) বা বাহু-বাহু-কোণ (SSA) শর্ত সিদ্ধ হয় না।

এখন এমন দুটি ত্রিভুজ অঙ্কন করার চেষ্টা করো, যেখানে দুটি কোণ 60° ও 45° এবং এ কোণ দুটির অন্তর্গত বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি হয় (চিত্র 7.11 দেখ)



চিত্র **7.11**

এ দুটি ত্রিভুজকে কাট এবং একটিকে অপরটির উপর রাখো। তোমরা কী লক্ষ করছো? দেখো, একটি ত্রিভুজ অপর ত্রিভুজকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করে, অর্থাৎ ত্রিভুজ দুটি সর্বসম। এই কার্যকলাপকে আরো কিছু ত্রিভুজ জোড়া নিয়ে পুনরায় করো। তোমরা দেখবে যে, দুটির সমান কোণ এবং তাদের অন্তর্গত বাহু ত্রিভুজগুলো সর্বসমতার জন্য যথেষ্ট।

এই ফলাফলটি সর্বসমতার কোণ-বাহু-কোণ শর্ত এবং একে লেখা হয় **ASA** শর্ত হিসেবে।

তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে এর সত্যতা যাচাই করেছ। চলো আমরা এই বিবৃতিটি লিখি এবং প্রমাণ করি।

যেহেতু এই ফলাফলকে প্রমাণ করা যায়, তাই একে উপপাদ্য বলা হয় এবং একে প্রমাণ করার জন্য আমরা বাহু-কোণ-বাহু বা (SAS) সর্বসমতাস্বতঃসিদ্ধ প্রয়োগ করব।

উপপাদ্য 7.1 (কোণ-বাহু-কোণ বা ASA সর্বসমতা নিয়ম) : যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ ও তাদের অন্তর্গত বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ ও অন্তর্গত বাহুর সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

প্রমাণ : দুটি ত্রিভুজ ABC এবং DEF দেওয়া আছে যার $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$

এবং $BC = EF$

আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

ত্রিভুজটি সর্বসমতার জন্য তিনটি ক্ষেত্র বিচার করতে হবে।

ক্ষেত্র (i) : ধরা যাক AB = DE (চিত্র 7.12 দেখ)

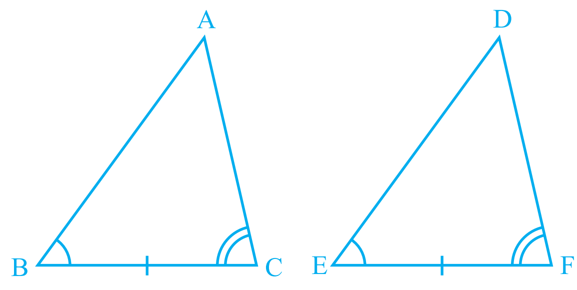
এখন তোমরা কী লক্ষ করছো? তোমরা হয়তো দেখছ

$AB = DE$ (অনুমিত)

$\angle B = \angle E$ (প্রদত্ত)

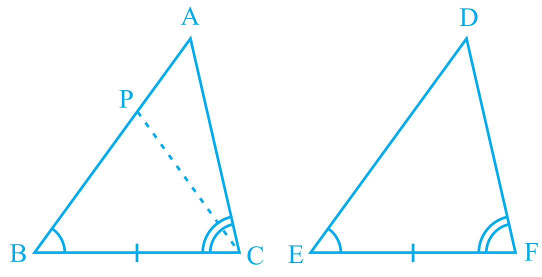
$BC = EF$ (প্রদত্ত)

সুতরাং, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS সর্বসমতার শর্তানুযায়ী)



চিত্র. 7.12

ক্ষেত্র (ii) : যদি সম্ভব হয় ধরা হল $AB > DE$। AB এর উপর P এমন একটি বিন্দু নেওয়া হল যেন $PB = DE$ হয়। এখন ΔPBC এবং ΔDEF ত্রিভুজ দুটি নাও। (চিত্র 7.13 দেখ)



চিত্র. 7.13

লক্ষ করো ΔPBC এবং ΔDEF এর

$PB = DE$ (অঙ্কন অনুযায়ী)

$\angle B = \angle E$ (প্রদত্ত)

$BC = EF$ (প্রদত্ত)

তাহলে, আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে :

$\Delta PBC \cong \Delta DEF$ (SAS সর্বসমতার শর্তানুযায়ী)

যেহেতু ত্রিভুজগুলো সর্বসম, তাই তাদের অনুরূপ অংশগুলো সমান হবে।

সুতরাং, $\angle PCB = \angle DFE$

কিন্তু আমাদের দেওয়া আছে

$\angle ACB = \angle DFE$

সুতরাং, $\angle ACB = \angle PCB$

এটি কি সম্ভব?

এটি তখনই সম্ভব যখন A তে P সমাপতিত হয়।

অথবা $BA = ED$

সুতরাং, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (SAS সর্বসত্বমতার শর্তানুযায়ী)

ক্ষেত্র (iii) : যদি $AB < DE$, তাহলে DE এর উপর একটি বিন্দু M এরূপে নেওয়া হয় যেন $ME = AB$ হয়। ক্ষেত্র (ii) এর যুক্তিকে পুনরাবৃত্তি করে, আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, $AB = DE$ এবং এজন্য $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ হবে।

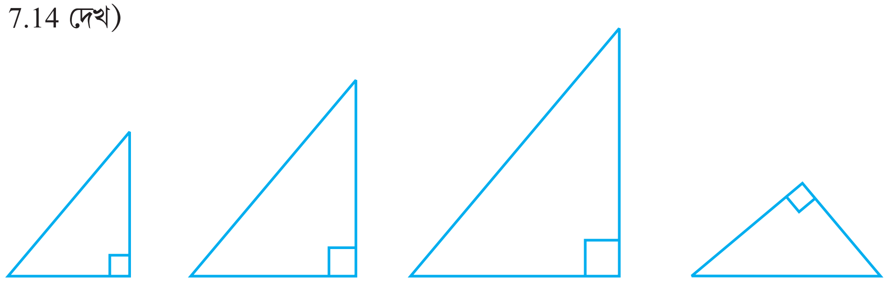
এখন ধরা যাক দুটি ত্রিভুজের দুই জোড়া কোণ এবং তাদের একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান কিন্তু, এই বাহুটি, অনুরূপ সমান কোণযুগলের অন্তর্গত বাহু নয়। এই ত্রিভুজগুলো কি সর্বসম? তোমরা দেখবে যে এরা সর্বসম। এর কারণ কি তোমরা বলতে পারবে?

তোমরা জানো ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°। সুতরাং যদি দুইজোড়া কোণ সমান হয় তবে তৃতীয় জোড়া অবশ্যই সমান হবে। (180° সমান কোণগুলোর সমষ্টি)।

তাহলে দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে যদি যেকোন দুই জোড়া কোণ এবং একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান হয়। একে আমরা **কোণ-কোণ-বাহু (বা AAS) সর্বসম নিয়ম** বলতে পারি।

চলো এখন আমরা নিচের কার্যকলাপটি সম্পন্ন করি। 40°, 50° এবং 90° কোণ নিয়ে কিছু ত্রিভুজ অঙ্কন করি। এই ধরনের কতগুলো ত্রিভুজ কি তোমরা আঁকতে পার?

বাস্তবে, বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের বাহু নিয়ে তোমরা যতগুলো ইচ্ছে ততগুলো ত্রিভুজ আঁকতে পারো (চিত্র 7.14 দেখ)



চিত্র **7.14**

লক্ষ করো, এই ত্রিভুজগুলো পরস্পর সর্বসম হতে পারে আবার নাও হতে পারে।

সুতরাং, তিনটি কোণ সমান হওয়া, ত্রিভুজগুলো সর্বসম হওয়ার জন্য যথেষ্ট নয়। এজন্য ত্রিভুজগুলো সর্বসম হতে হলে, তিনটি সমান অংশের মধ্যে একটি বাহু অবশ্যই থাকতে হবে।

এখন আমরা আরো কিছু উদাহরণ নিয়ে দেখবো।

উদাহরণ 3 : রেখাংশ AB , অপর রেখাংশ CD এর সমান্তরাল। AD এর মধ্যবিন্দু 'O' (চিত্র 7.15 দেখ) দেখাও যে— (i) $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (ii) 'O', BC মধ্যবিন্দু।

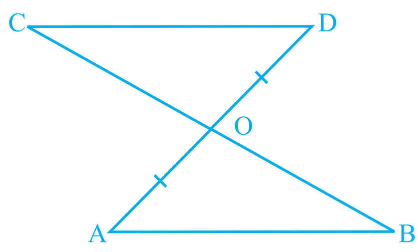
সমাধান : (i) এখন Δ AOB ও Δ DOC থেকে পাই

$\angle ABO = \angle DCO$

(একান্তর কোণযুগল, যেহেতু AB || CD এবং BC ভেদক)

$\angle AOB = \angle DOC$ (বিপ্রতীপ কোণযুগল)

$OA = OD$ (প্রদত্ত)



চিত্র **7.15**

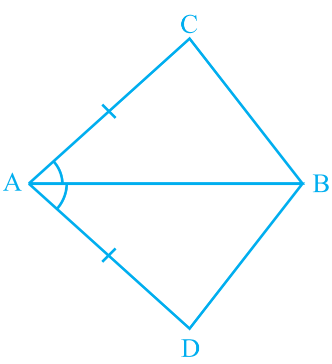
সুতরাং, $\Delta AOB \cong \Delta DOC$ (AAS সর্বসমতার শর্তানুযায়ী)

(ii) $OB = OC$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ বা CPCT)

অর্থাৎ O, BC রেখাংশের মধ্যবিন্দু।

অনুশীলনী 7.1

1. ACBD চতুর্ভুজে, AC = AD এবং AB, $\angle$ A এর সমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 7.16 দেখ)। দেখাও যে $\Delta ABC \cong \Delta ABD$। BC এবং BD সম্পর্কে তোমাদের কী বক্তব্য ?



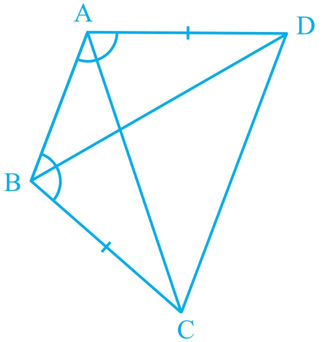
চিত্র **7.16**

2. ABCD চতুর্ভুজে, AD = BC এবং $\angle$ DAB = $\angle$ CBA (চিত্র 7.17 দেখ)। প্রমাণ করো—

(i) Δ ABD $\cong$ Δ BAC

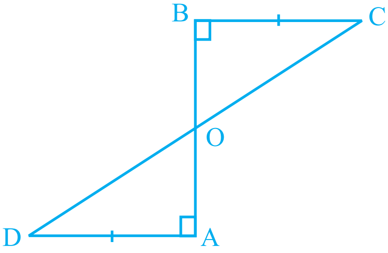
(ii) BD = AC

(iii) $\angle$ ABD = $\angle$ BAC.



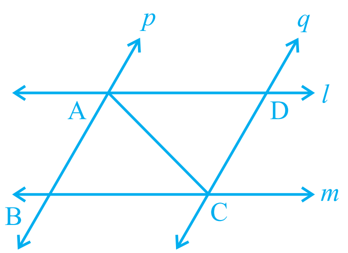
চিত্র **7.17**

3. AB রেখাংশের উপর, দুটি সমান মাপের লম্ব হল AD এবং BC (চিত্র 7.18 দেখ)। দেখাও যে, CD, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



চিত্র **7.18**

4. *l* এবং *m* দুটি সমান্তরাল রেখা অপর দুটি সমান্তরাল রেখা *p* এবং *q* দ্বারা ছেদিত হয় (চিত্র 7.19 দেখ)। দেখাও যে— Δ ABC $\cong$ Δ CDA

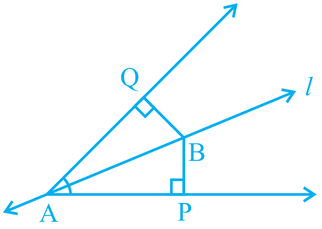


চিত্র **7.19**

5. *l* রেখা, $\angle$ A এর সমদ্বিখণ্ডক এবং B, *l* এর উপর যেকোন একটি বিন্দু। B বিন্দু হতে A কোণের বাহুদ্বয়ের উপর BP এবং BQ দুটি লম্ব। দেখাও যে,

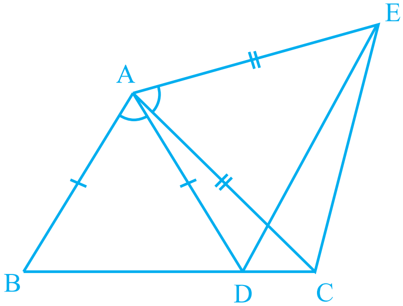
(i) Δ APB $\cong$ Δ AQB

(ii) BP = BQ অথবা B বিন্দু, $\angle$ A এর বাহুদ্বয় হতে সম দূরবর্তী।



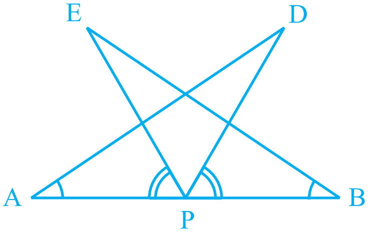
চিত্র **7.20**

6. 7.21 নং চিত্রে $AC = AE$, $AB = AD$ এবং $\angle BAD = \angle EAC$ । দেখাও যে $BC = DE$ ।



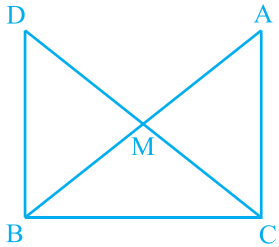
চিত্র 7.21

7. AB একটি রেখাংশ এবং P তার মধ্যবিন্দু। D এবং E, AB এর একই পাশে এরূপে অবস্থিত যেন $\angle BAD = \angle ABE$ এবং $\angle EPA = \angle DPB$ (চিত্র 7.22 দেখ)? দেখাও যে,
   (i) $\Delta DAP \cong \Delta EBP$
   (ii) $AD = BE$



চিত্র 7.22

8. ABC সমকোণী ত্রিভুজে, C কোণ সমকোণ এবং 'M' অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু। C কে M এর সঙ্গে যুক্ত করা হল এবং D পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হল যেন $DM = CM$ হয়। D এবং B যুক্ত করা হল (চিত্র 7.23 দেখ)। দেখাও যে—
   (i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$
   (ii) $\angle DBC$ একটি সমকোণ
   (iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$
   (iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



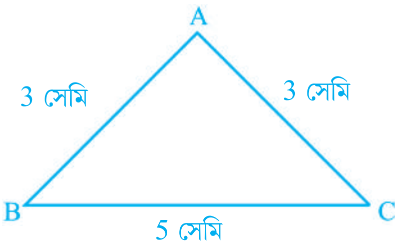
চিত্র 7.23

7.4 ত্রিভুজের কয়েকটি ধর্মাবলী :

উপরের অনুচ্ছেদে তোমরা ত্রিভুজের সর্বসমতার দুটি শর্ত জেনেছ। চলো, এখন এই ফলাফলগুলো একটি ত্রিভুজের ধর্ম জানার জন্য ব্যবহার করব যার দুটি বাহু সমান।

প্রদত্ত কার্যকলাপটি করো :

একটি ত্রিভুজ আঁকো যার দুটি বাহু সমান। ধরা যাক, প্রতিটি সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি এবং তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি (চিত্র 7.24 দেখো)। তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে এ ধরনের অঙ্কন করেছ।



চিত্র 7.24

তোমাদের কি মনে আছে এ ধরনের ত্রিভুজকে কি বলে? একটি ত্রিভুজ যার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান তাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে। তাহলে 7.24 নং চিত্রে Δ ABC হল একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC ।

এখন $\angle$ B এবং $\angle$ C এর পরিমাপ করো। তোমরা কী লক্ষ করলে?

বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট সমদ্বিবাহু নিয়ে এই কার্যকলাপের পুনরাবৃত্তি করো।

তোমরা হয়তো লক্ষ করবে যে, এরূপ প্রতিটি ত্রিভুজে, সমান বাহুগুলোর বিপরীত কোণগুলো সমান।

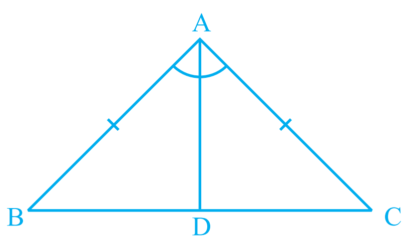
এটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ফলাফল এবং প্রকৃতপক্ষে যে কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের জন্য একথা সত্য। এটি নিম্নে প্রমাণ করা যায়।

উপপাদ্য 7.2 : *একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুগুলোর বিপরীত কোণগুলো সমান।*

এ উপপাদ্যকে বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। এর মধ্যে একটি প্রমাণ নিচে দেওয়া হল।

প্রমাণ : একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC দেওয়া আছে যার AB = AC। আমাদের প্রমাণ করতে হবে $\angle$ B = $\angle$C।

চলো, $\angle$ A এর সমদ্বিখণ্ডক আঁকি। ধরে নাও $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 7.25 দেখ)।



চিত্র 7.25

Δ BAD এবং Δ CAD এর মধ্যে

AB = AC (প্রদত্ত)

$\angle$ BAD = $\angle$ CAD (অঙ্কনানুসারে)

AD = AD (সাধারণ)

সুতরাং, Δ BAD $\cong$ Δ CAD (বাহু কোণ বাহু বা SAS সর্বসমতার শর্ত)

তাহলে $\angle$ ABD = $\angle$ ACD (যেহেতু তারা সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ)।

সুতরাং, $\angle$ B = $\angle$ C

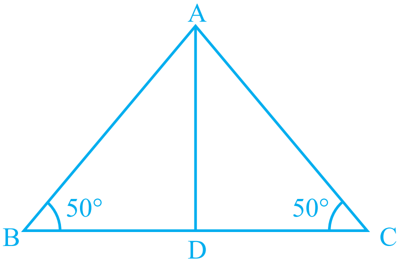
এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যটিও কি সত্য হবে?

অর্থাৎ যদি কোন ত্রিভুজের দুটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে আমরা কি সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, উহাদের বিপরীত বাহুগুলো সমান?

নিচে দেওয়া কার্যকলাপটি কর।

ABC একটি ত্রিভুজ আঁকো। যেখানে BC যে কোনো দৈর্ঘ্যের একটি বাহু এবং $\angle B = \angle C = 50°$ হয়। $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক আঁকো যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 7.26 দেখ)

কাগজ হতে ABC ত্রিভুজটি কেটে নাও এবং এটাকে AD বরাবর এরূপে ভাঁজ করো যেন C শীর্ষবিন্দু, B শীর্ষবিন্দুর উপর পতিত হয়।



চিত্র. 7.26

AC এবং AB বাহু সম্পর্কে তোমরা কী বলতে পারো?

লক্ষ করো যে, AC বাহু সম্পূর্ণরূপে AB বাহুকে আবৃত করে।

তাহলে, $AC = AB$

আরো কিছু ত্রিভুজ নিয়ে এই কার্যলাপটির পুনরাবৃত্তি করো। প্রতি ক্ষেত্রে তোমরা দেখবে, সমান কোণগুলোর বিপরীত বাহুগুলো সমান। অতএব আমরা নিচের উপপাদ্যটি পাই :

উপপাদ্য 7.3 : *একটি ত্রিভুজের সমান কোণগুলোর বিপরীত বাহুগুলো সমান।*

এটি হল উপপাদ্য 7.2 এর বিপরীত উপপাদ্য।

এই উপপাদ্যটি তোমরা কোণ-বাহু-কোণ (বা ASA) সর্বসমতার শর্তের সাহায্যে প্রমাণ করতে পারো।

চলো, এই ফলাফলকে প্রয়োগ করার জন্য আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

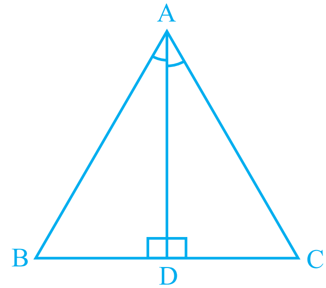
উদাহরণ 4 : ΔABC এ, AD হল $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক যা BC বাহুর উপর লম্ব (চিত্র 7.27 দেখ)। দেখাও যে $AB = AC$ এবং ΔABC হল সমদ্বিবাহু।

সমাধান : ΔABD এবং ΔACD এর মধ্যে

$\angle BAD = \angle CAD$ (প্রদত্ত)

$AD = AD$ (সাধারণ)

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$ (প্রদত্ত)



চিত্র. 7.27

সুতরাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

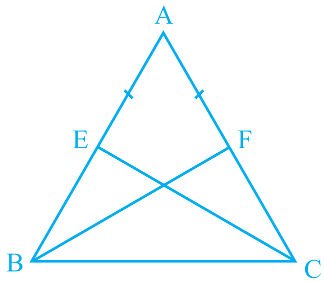
(কোণ-বাহু-কোণ নিয়মে বা ASA সর্বসমতার শর্তে)

তাহলে, $AB = AC$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশগুলো সমান বা CPCT)

সুতরাং, ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ 5 : Δ ABC এর সমান বাহুদ্বয় AB এবং AC এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে E ও F (চিত্র 7.28 দেখ)

দেখাও যে BF = CE



চিত্র 7.28

সমাধান : Δ ABF এবং Δ ACE এর মধ্যে

AB = AC (প্রদত্ত)

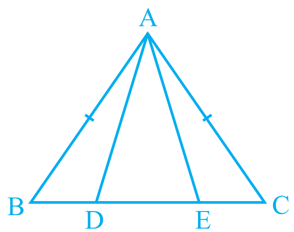
∠ A = ∠ A (সাধারণ)

AF = AE (সমান বাহুর অর্ধেক)

সুতরাং, Δ ABF ≅ Δ ACE

তাহলে, BF = CE (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ বা CPCT)

উদাহরণ 6 : ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC, D এবং E, BC এর উপর এরূপে অবস্থিত যেন BE = CD হয় (চিত্র 7.29 দেখ)। দেখাও যে, AD = AE



চিত্র 7.29

সমাধান : Δ ABD এবং Δ ACE এর মধ্যে

AB = AC (প্রদত্ত) (1)

∠ B = ∠ C

(সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয়) (2)

আবার BE = CD

তাহলে, BE – DE = CD – DE

অর্থাৎ BD = CE (3)

তাহলে, Δ ABD ≅ Δ ACE

((1), (2), (3) এবং বাহু-কোণ-বাহু বা SAS সর্বসমতার শর্ত প্রয়োগ করে)

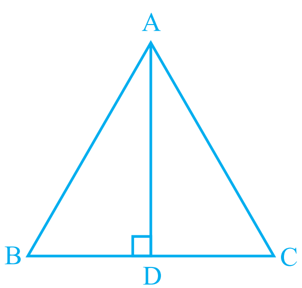
এ থেকে পাওয়া যায় AD = AF (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ বা CPCT)

অনুশীলন 7.2

1. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, AB = AC। ∠ B এবং ∠ C এর সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O যুক্ত করো। দেখাও যে,

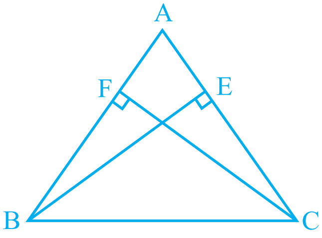
   (i) OB = OC (ii) AO, ∠ A -কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. Δ ABC এ, AD, BC এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক (চিত্র 7.30 দেখ)। দেখাও যে Δ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC।



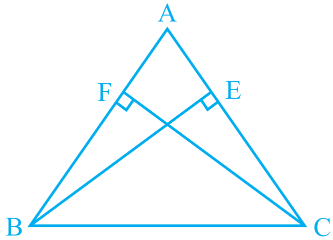
চিত্র 7.30

3. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যেখানে সমান বাহুদ্বয় AC ও AB এর উপর যথাক্রমে BE এবং CF উচ্চতাদ্বয় অঙ্কন করা হল (চিত্র 7.31 দেখ)। দেখাও যে, এই উচ্চতাগুলো সমান।



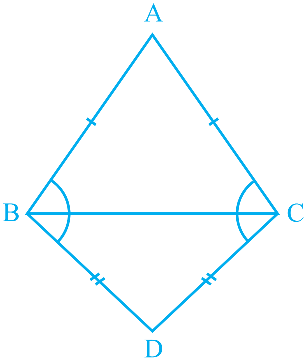
চিত্র 7.31

4. ABC একটি ত্রিভুজ যার সমান বাহুদ্বয় AC ও AB বাহুর উপর উচ্চতাদ্বয় যথাক্রমে BE এবং CF সমান (চিত্র 7.32 দেখো)। দেখাও যে,
   (i) $\Delta ABE \cong \Delta ACF$
   (ii) $AB = AC$, অর্থাৎ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।



চিত্র 7.32

5. ABC এবং DBC দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই ভূমি BC এর উপর অবস্থিত (চিত্র 7.33 দেখ)। দেখাও যে, $\angle ABD = \angle ACD$।

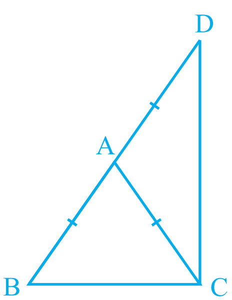


চিত্র 7.33

6. ΔABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যেখানে $AB = AC$। BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AD = AB$ হয় (চিত্র 7.34 দেখ)। দেখাও যে $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

7. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যেখানে $\angle A = 90°$ এবং $AB = AC$। $\angle B$ এবং $\angle C$ এর মান নির্ণয় করো।

8. দেখাও যে, সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ 60°।

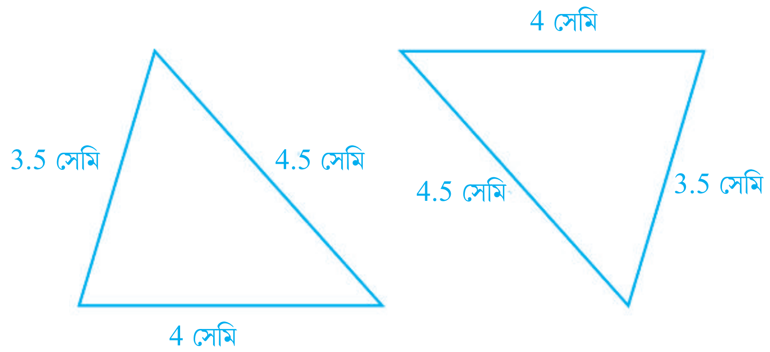


চিত্র 7.34

7.5 ত্রিভুজের সর্বসমতার আরো কিছু শর্ত :

পূর্বে এই অধ্যায়ে তোমরা দেখেছ যে, একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ অপর ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হওয়া, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার পক্ষে যথেষ্ট নয়। তোমরা হয়তো অবাক হবে যে, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হওয়া, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হওয়ার পক্ষে যথেষ্ট। পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা যাচাই করেছ যে, প্রকৃতপক্ষে এটি সত্য।

এই ধারণাটি নিশ্চিত করার জন্য, 4 সেমি, 3.5 সেমি এবং 4.5 সেমি বাহু নিয়ে দুটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো (চিত্র 7.35 দেখো)। এদের কেটে, একটিকে অপরটির উপর রাখো। কী লক্ষ করেছ? তারা পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করে, যদি সমান বাহুগুলোর একটিকে অপরটির উপর রাখা হয়, তাহলে ত্রিভুজগুলো সর্বসম।



চিত্র 7.35

আরো কিছু ত্রিভুজ নিয়ে এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করো। এভাবে আমরা সর্বসমতার আরেকটি নিয়মে পৌঁছি।

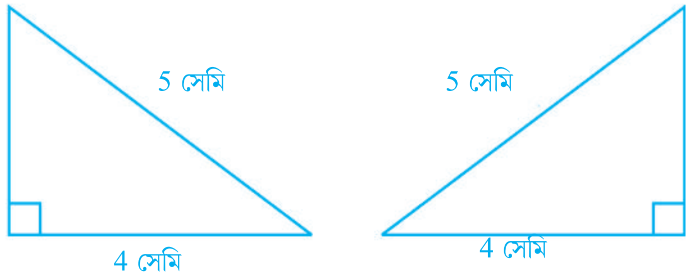
উপপাদ্য 7.4 (বাহু-বাহু-বাহু বা SSS সর্বসমতার শর্ত) : *যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।*

উপযুক্ত অঙ্কনের সাহায্যে এই উপপাদ্যটিকে প্রমাণ করা যায়।

তোমরা ইতোমধ্যে বাহু-কোণ-বাহু (বা SAS) সর্বসমতার শর্ত দেখেছ, সমান কোণের জোড়া অবশ্যই অনুরূপ বাহুযুগলের অন্তর্গত কোণ হতে হবে এবং যদি এরূপ না হয় তবে ত্রিভুজ দুটো সর্বসম নাও হতে পারে।

এই কার্যকলাপটি করো :

দুটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো যেন, তাদের অতিভুজ 5 সেমি এবং একটি বাহু 4 সেমি হয় (চিত্র 7.36 দেখ)।



চিত্র **7.36**

তাদের কেটে নাও এবং একটি ত্রিভুজকে অপর ত্রিভুজের উপর এমনভাবে রাখো যেন সমান বাহুগুলো একটি অপরটির উপর পড়ে। যদি প্রয়োজন হয়, ত্রিভুজগুলো ঘুরিয়ে দেখো। তোমরা কী লক্ষ করলে?

ত্রিভুজ দুটি পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে আবৃত করে এবং এ জন্য তাহারা সর্বসম। আরো কিছু সমকোণী ত্রিভুজের জোড়া নিয়ে এই কার্যকলাপের পুনরাবৃত্তি করো। তোমরা কী লক্ষ করেছো?

দেখবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে যখন একজোড়া বাহু এবং অতিভুজ সমান হয়।

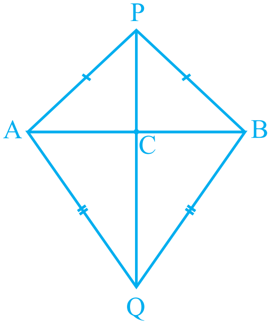
তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে এর সত্যতার যাচাই করেছ।

লক্ষ করো, এই ক্ষেত্রে সমকোণটি অন্তর্গত কোণ নয়। তাহলে তোমরা নিম্নের সর্বসমতার শর্তে পৌঁছুতে পারো।

উপপাদ্য 7.5 (সমকোণ -অতিভুজ-বাহু বা RHS সর্বসমতার শর্ত) : *যদি দুটি সমকোণী ত্রিভুজের, একটি ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহু, অপর ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহুর সমান হয় তাহলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। এই শর্তটিকে 'সমকোণ-অতিভুজ-বাহু' অথবা* RHS *শর্ত বলে।*

চলো এখন আমরা কিছু উদাহরণ লই।

উদাহরণ 7 : AB একটি রেখাংশ। P এবং Q বিন্দুদ্বয়। AB এর বিপরীত পার্শ্বে এরূপে অবস্থিত যেন এরা প্রত্যেক A ও B থেকে সমদূরবর্তী হয় (চিত্র 7.3 দেখো) দেখাও যে PQ, রেখা AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্র **7.36**

সমাধান : PA = PB এবং QA = QB দেওয়া আছে। তোমাদের দেখাতে হবে $PQ \perp AB$; PQ, AB এর সমদ্বিখণ্ডক। ধরা যাক PQ, AB কে C বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এ চিত্রে দুটি সর্বসম ত্রিভুজ কি তোমরা দেখতে পাও?

চলো আমরা Δ PAQ এবং Δ PBQ কে নিই।

এ দুটি ত্রিভুজে,

$AP = BP$ (প্রদত্ত)

$AQ = BQ$ (প্রদত্ত)

$PQ = PQ$ (সাধারণ)

তাহলে, $\Delta\ PAQ \cong \Delta\ PBQ$ (বাহু-বাহু-বাহু বা SSS সর্বসমতার শর্ত)

সুতরাং, $\angle\ APQ = \angle\ BPQ$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ বা CPCT)

এখন, Δ PAC এবং Δ PBC থেকে পাওয়া যায়

$AP = BP$ (প্রদত্ত)

$\angle\ APC = \angle\ BPC$ ($\angle\ APQ = \angle\ BPQ$, উপরে প্রমাণিত)

$PC = PC$ (সাধারণ বাহু)

তাহলে, $\Delta\ PAC \cong \Delta\ PBC$ (বাহু-কোণ-বাহু বা SAS সর্বসমতার শর্ত)

সুতরাং, $AC = BC$ (CPCT) (1)

এবং $\angle\ ACP = \angle\ BCP$ (CPCT)

আবার, $\angle\ ACP + \angle\ BCP = 180°$ (রৈখিক যুগল)

তাহলে, $2\angle\ ACP = 180°$

বা $\angle\ ACP = 90°$ (2)

(1) নং এবং (2) নং থেকে তোমরা সহজেই সিদ্ধান্ত নিতে পারো যে, PQ, AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। [লক্ষ করো যে, Δ PAQ এবং Δ PBQ কে সর্বসম না দেখিয়ে $\Delta\ PAQ \cong \Delta\ PBC$ দেখাতে পারবে না, যদিও $AP = BP$ (প্রদত্ত)

$PC = PC$ (সাধারণ)

এবং $\angle\ PAC = \angle\ PBC$ (ΔAPB এর সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয়)

এই ফলাফল থেকে, আমরা পাই বাহু-বাহু-কোণ শর্ত। যা ত্রিভুজের সর্বসমতার জন্য সর্বদা যুক্তিসিদ্ধ বা সত্য নয়। এখানে কোণটি, সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নয়।]

চলো আমরা আরো কিছু উদাহরণ নেই।

উদাহরণ 8 : l এবং m রেখা দুটি পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং P এমন একটি বিন্দু যা রেখা দুটি হতে সমদূরবর্তী (চিত্র 7.38 দেখ)। দেখাও যে, AP রেখা তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান : দেওয়া আছে, l এবং m রেখা পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। ধরি $PB \perp l$, $PC \perp m$। দেওয়া আছে $PB = PC$।

তোমাদের দেখাতে হবে, $\angle\ PAB = \angle\ PAC$

Δ PAB এবং Δ PAC কে নেওয়া হল। এই দুটি ত্রিভুজে,

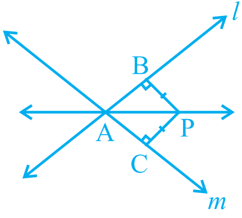
PB = PC (প্রদত্ত)

$\angle$ PBA = $\angle$ PCA = 90° (প্রদত্ত)

PA = PA (সাধারণ বাহু)

তাহলে, Δ PAB $\cong$ Δ PAC (RHS সর্বসমতার শর্তে)

সুতরাং, $\angle$ PAB = $\angle$ PAC (CPCT)



চিত্র 7.38

লক্ষ করো যে, অনুশীলনী 7.1 এর 5 নং প্রশ্নের ফলাফল, উদাহরণ 8 এর ফলাফলের বিপরীত।

অনুশীলনী 7.3

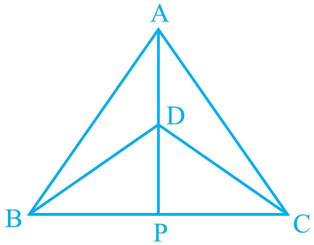
1. Δ ABC এবং Δ DBC দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ভূমি BC এর একই পাশে অবস্থিত এবং শীর্ষবিন্দু A এবং D, ভূমি BC এর একই পাশে অবস্থিত (চিত্র 7.39 দেখো)। AD কে বর্ধিত করলে যদি এটি BC কে P বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে

(i) Δ ABD $\cong$ Δ ACD

(ii) Δ ABP $\cong$ Δ ACP

(iii) AP, $\angle$A এবং $\angle$D কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(iv) AP, BC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিত।



চিত্র 7.39

2. AD হল, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা যার AB = AC। দেখাও যে

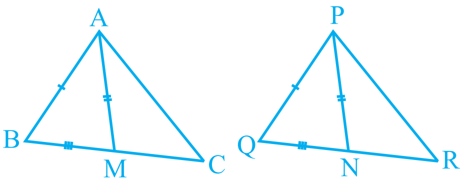
(i) AD, BC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) AD , $\angle$ A. কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

3. ABC ত্রিভুজের দুটো বাহু AB, BC এবং মধ্যমা AM যথাক্রমে Δ PQR এর দুটো বাহু PQ, QR এবং মধ্যমা PN এর সমান (চিত্র 7.40 দেখো)। দেখাও যে—

(i) Δ ABM $\cong$ Δ PQN

(ii) Δ ABC $\cong$ Δ PQR



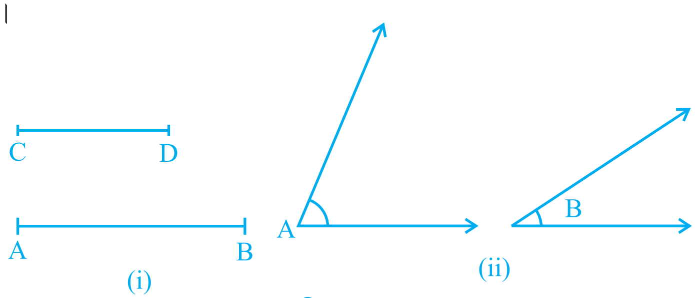
চিত্র 7.40

4. Δ ABC এর দুটি উচ্চতা BE এবং CF সমান। সমকোণ-অতিভুজ-বাহু (বা RHS) শর্ত ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

5. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB=AC। AP $\perp$ BC আঁকো এবং দেখাও যে $\angle$ B = $\angle$ C।

7.6 ত্রিভুজের অসমতা (Inequalities in a Triangle)

এখন পর্যন্ত তোমরা ত্রিভুজের বাহু, কোণ বা ত্রিভুজের সমতা নিয়ে পড়েছ। কখনো কখনো আমরা অসমান বস্তুকে দেখতে পাই, যাদের তুলনা করা প্রয়োজন হয়। উদাহরণস্বরূপ, 7.41 (i) নং চিত্রে AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য CD রেখাংশের দৈর্ঘ্যের তুলনায় বড়ো এবং 7.41 (ii) নং চিত্রে $\angle A$, $\angle B$ অপেক্ষা বড়ো।

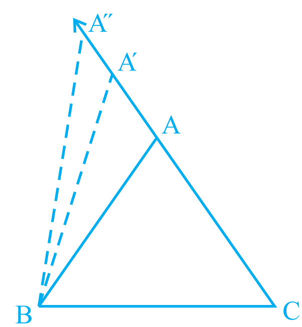


চিত্র 7.41

এখন চলো আমরা একটি ত্রিভুজের অসমান বাহু এবং অসমান কোণের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি না পরীক্ষা করি। এর জন্য নিচের কার্যকলাপটি করা যাক :

কার্যকলাপ : একটি ড্রয়িং বোর্ডের উপর দুটি আলপিন B এবং C-তে গেঁথে নাও। এবার B ও C কে সুতো দিয়ে বেঁধে ABC ত্রিভুজের একটি বাহু BC নাম দেওয়া হল।

আরেকটি সুতোর এক প্রান্ত C এর সঙ্গে এবং অপর প্রান্ত (মুক্ত) একটি পেনসিলের সঙ্গে বেঁধে দেওয়া হলো। পেনসিল বাঁধা প্রান্তটিকে A হিসেবে চিহ্নিত করে Δ ABC অঙ্কন করা হল (চিত্র 7.42 দেখো)। এখন পেনসিলটিকে CA এর দিকে অবস্থান পরিবর্তন করে অপর বিন্দু A′ চিহ্নিত করা হল যা A এর নতুন অবস্থান।



চিত্র 7.42

তাহলে, $A'C > AC$ (দৈর্ঘ্যকে তুলনা করে)

A′ কে B এর সঙ্গে যুক্ত করে A′BC ত্রিভুজটি পাওয়া গেল। $\angle A'BC$ এবং $\angle ABC$ সম্পর্কে তোমাদের কী ধারণা? এদের মধ্যে তুলনা করো। কী লক্ষ করছো?

স্পষ্টত, $\angle A'BC > \angle ABC$

এভাবে CA (বর্ধিত) এর উপর আরো কিছু বিন্দু নিয়ে BC ভুমি বিশিষ্ট A′BC বা A″BC ত্রিভুজ অঙ্কন করা হল।

তোমরা লক্ষ করবে যে, AC বাহুর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে (A বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থানের জন্য), এর বিপরীত কোণ অর্থাৎ $\angle B$ এর পরিমাণও বাড়ছে।

এখন চলো আমরা আরেকটি কার্যকলাপ করি :

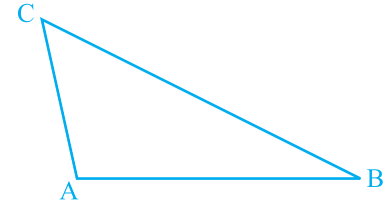
কার্যকলাপ : একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ আঁকো (যে ত্রিভুজের সবগুলো বাহু বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের)। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করো।

এখন কোণগুলো পরিমাপ করো। তোমরা কী লক্ষ করলে?

7.43 নং চিত্রে, Δ ABC এর BC বাহুটি দীর্ঘতম এবং AC বাহুটি ক্ষুদ্রতম।

আবার, $\angle$ A হল বৃহত্তম এবং $\angle$ B হল ক্ষুদ্রতম।

আরো কিছু ত্রিভুজ নিয়ে এই কার্যকলাপটির পুনরাবৃত্তি করো।



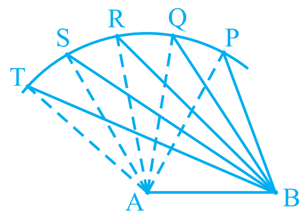
চিত্র 7.43

উপরের কার্যকলাপ থেকে আমরা ত্রিভুজের অসমতার অত্যন্ত প্রয়োজনীয় ফলাফল পাই। একে নিম্নের উপপাদ্যের আকারে বিবৃতি করা যায়:

উপপাদ্য 7.6 : *যদি একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু অসমান হয়, তবে বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তর হয়।*

Δ ABC এর BC বাহুর উপর একটি বিন্দু P (যাতে CA = CP হয়) নিয়ে তোমরা এই উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারো (চিত্র 7.43)।

এমন আরেকটি কার্যকলাপ করা যাক :

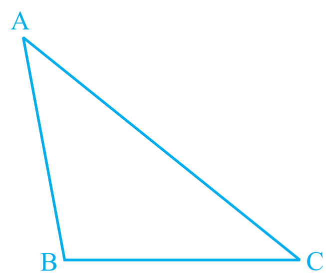


চিত্র 7.44

কার্যকলাপ : একটি রেখাংশ AB আঁকো। A কে কেন্দ্র করে, যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকো এবং এর উপর P, Q, R, S, T বিন্দুগুলো নেওয়া হল।

A এবং B এর সঙ্গে প্রত্যেকটি বিন্দুকে যুক্ত করা হল (চিত্র 7.44 দেখো) P হতে T এর দিকে অগ্রসর হলে দেখা যায়, $\angle$A এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায়। তাহলে এই কোণের বিপরীত বাহুর ক্ষেত্রে কী ঘটে? লক্ষ করো বাহুর দৈর্ঘ্যও ক্রমশ বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ $\angle$ TAB > $\angle$ SAB > $\angle$ RAB > $\angle$ QAB > $\angle$ PAB এবং TB> SB > RB > QB > PB।

এখন, এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকো যার সবগুলো কোণ অসমান। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ করো (চিত্র 7.45 দেখো)।



চিত্র 7.45

দেখো, বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহুটি দীর্ঘতম। 7.45 নং চিত্রে, $\angle$ B হল বৃহত্তম কোণ এবং AC হল দীর্ঘতম বাহু।

আরো কিছু ত্রিভুজ নিয়ে এই কার্যকলাপটি বারবার করো এবং দেখতে পাবে উপপাদ্য 7.6 , বিপরীতভাবেও সত্য। এভাবে আমরা নিচের উপপাদ্যটি পাই :

উপপাদ্য 7.7 : *কোনো ত্রিভুজে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু দীর্ঘতর হয়।*

এই উপপাদ্যটি বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যায়।

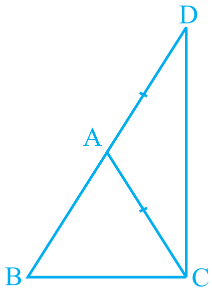
একটি ত্রিভুজ ABC নিয়ে, যার AB + BC, BC + AC এবং AC + AB নির্ণয় করো। তোমরা কী লক্ষ করলে? তোমরা দেখতে পাবে $AB + BC > AC$,

$BC + AC > AB$ এবং $AC + AB > BC$.

আরো কিছু ত্রিভুজ নিয়ে এই কার্যকলাপটি বারবার করো এবং এর সাহায্যে নিচের উপপাদ্যটি পাওয়া যায় :

উপপাদ্য 7.8 : *একটি ত্রিভুজের যে কোন দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।*

চিত্র 7.46 এ, লক্ষ করো Δ ABC এর BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন AD=AC হয়। এখন তোমরা কি দেখাতে পারো যে $\angle BCD > \angle BDC$ এবং $BA + AC > BC$ উপরের উপপাদ্যটি কি তোমরা প্রমাণ করতে পেরেছো?



চিত্র 7.46

চলো, এই ফলাফলের উপর ভিত্তি করে আমরা কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 9 : Δ ABC এর BC বাহুর উপর D এমন একটি বিন্দু নাও যেন AD=AC (চিত্র 7.47 দেখ) হয়।

দেখাও যে $AB > AD$।

সমাধান : Δ DAC থেকে পাই

$AD = AC$ (প্রদত্ত)

তাহলে, $\angle ADC = \angle ACD$

(সমান বাহুর বিপরীত কোণ)

এখন, ΔABD এর বহিঃকোণ হল $\angle ADC$

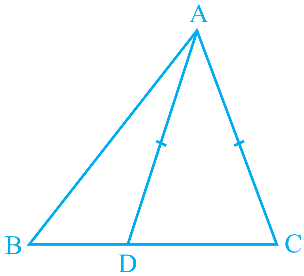
সুতরাং $\angle ADC > \angle ABD$

বা, $\angle ACD > \angle ABD$

বা, $\angle ACB > \angle ABC$

সুতরাং $AB > AC$ (Δ ABC এ বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু)

বা, $AB > AD$ ($AD = AC$)

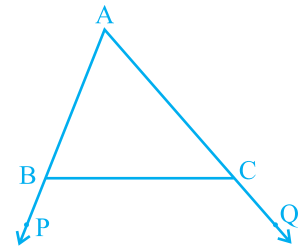


চিত্র 7.47

অনুশীলনী 7.4

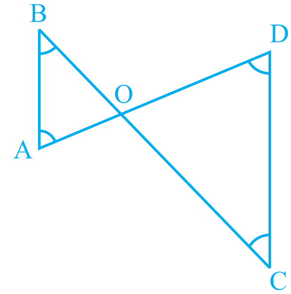
1. দেখাও যে, সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ দীর্ঘতম বাহু।

2. 7.48 নং চিত্রে, ΔABC এর AB এবং AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল এবং $\angle PBC < \angle QCB$। দেখাও যে, $AC > AB$।



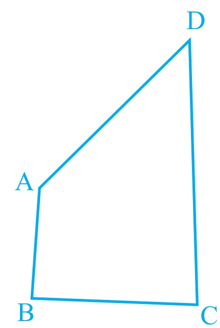
চিত্র 7.48

3. 7.49 নং চিত্রে, $\angle B < \angle A$ এবং $\angle C < \angle D$। দেখাও যে $AD < BC$।



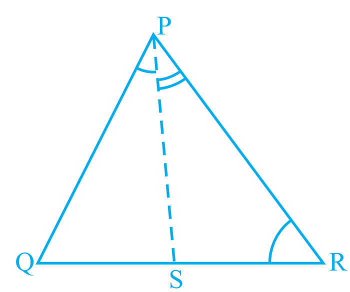
চিত্র 7.49

4. ABCD চতুর্ভুজে AB এবং CD হল যথাক্রমে ক্ষুদ্রতম এবং দীর্ঘতম বাহু (চিত্র 7.50 দেখ)। দেখাও যে, $\angle A > \angle C$ এবং $\angle B > \angle D$।



চিত্র 7.50

5. 7.51 নং চিত্রে, $PR > PQ$ এবং PS, $\angle QPR$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ করো $\angle PSR > \angle PSQ$।



চিত্র 7.51

6. দেখাও যে, বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে কোনো রেখার উপর যতগুলো রেখা টানা যায় তার মধ্যে লম্বের দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী 7.5 (ঐচ্ছিক) (Optional)*

1. ABC একটি ত্রিভুজ। Δ ABC এর ভিতরে একটি বিন্দু P নির্ণয় করো যা শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

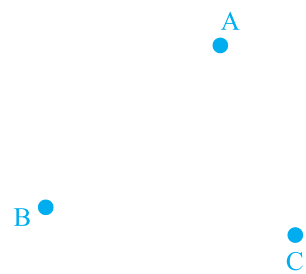
2. একটি ত্রিভুজের ভেতরে একটি বিন্দু স্থাপন করো যা সবগুলো বাহু হতে সমদূরবর্তী।

3. একটি বৃহদাকার বাগানের তিনটি স্থানে জনসমাবেশ হয়েছে (চিত্র 7.52 দেখো)

A : যেখানে শিশুদের জন্য স্লাইড (slides) এবং দোলনা আছে।

B : যার কাছে একটি মনুষ্য নির্মিত হ্রদ আছে।

C : যার কাছে মোটর গাড়ি রাখার বড়ো জায়গা এবং বের হওয়ার জায়গা আছে।

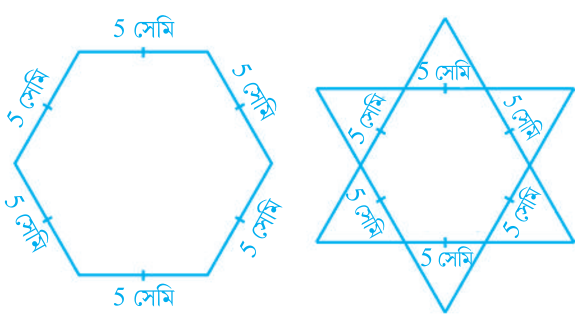


চিত্র 7.52

একটি আইসক্রিমের দোকান কোথায় স্থাপন করলে বেশি সংখ্যক লোক যেতে পারবে?

(ইঙ্গিত : দোকানটি A, B এবং C থেকে সমদূরবর্তী হবে।)

4. ষড়ভুজাকার এবং তারকা আকৃতির আলপনা (Rangolies) [চিত্র 7.53 (i) এবং (ii) দেখো] দুটিকে 1 সেমি বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পূর্ণ করো। প্রতি ক্ষেত্রে ত্রিভুজের সংখ্যা গণনা করো। কোনটির মধ্যে বেশি সংখ্যক ত্রিভুজ আছে?



(i) (ii)

চিত্র 7.53

* এই অনুশীলনী (7.5) পরীক্ষার জন্য নয়।

7.7 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো পড়েছো :

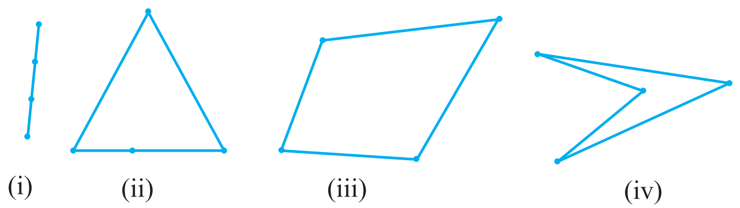
1. দুটি চিত্র সর্বসম হবে, যদি তারা একই আকার এবং একই আকৃতির হয়।
2. একই ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুটি বৃত্ত সর্বসম হবে।
3. সমান বাহু বিশিষ্ট দুটি বর্গক্ষেত্র সর্বসম হবে।
4. দুটি ত্রিভুজ ABC এবং PQR সর্বসম হলে, তাদের কোণের ক্রম $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ এবং $C \leftrightarrow R$, হলে সাংকেতিকভাবে এদের প্রকাশ করা হয় $\Delta\, ABC \cong \Delta\, PQR$ হিসেবে।
5. যদি একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। একে 'বাহু-কোণ-বাহু' বা 'SAS ' নিয়ম বলা হয়।
6. যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত বাহু যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। একে 'কোণ-বাহু-কোণ' বা 'ASA ' নিয়ম বলা হয়।
7. যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং অনরূপ বাহুর সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। একে 'কোণ-কোণ-বাহু বা 'AAS ' নিয়ম বলা হয়।
8. একটি ত্রিভুজের সমান বাহুগুলোর বিপরীত কোণগুলো সমান।
9. একটি ত্রিভুজের সমান কোণগুলোর বিপরীত বাহুগুলো সমান।
10. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের মান $60°$।
11. যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। একে 'বাহু-বাহু-বাহু' বা 'SSS ' নিয়ম বলে।
12. যদি দুটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহু আরেকটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে। একে 'সমকোণ-অতিভুজ-বাহু' বা RHS নিয়ম বলে।
13. একটি ত্রিভুজের দীর্ঘতর বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তর হবে।
14. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু দীর্ঘতর হবে।
15. একটি ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের যেকোনো দুটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা দীর্ঘতর হবে।

অধ্যায়-8

চতুর্ভুজ (QUADRILATERALS)

8.1 ভূমিকা :

ষষ্ঠ এবং সপ্তম অধ্যায়ে তোমরা ত্রিভুজের ধর্মাবলী নিয়ে পড়েছ এবং তোমরা জানো যে তিনটি অসমরেখ বিন্দু থেকে জোড়ায় জোড়ায় নিয়ে যুক্ত করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তা হল ত্রিভুজ। চলো, এখন চারটি বিন্দু নিয়ে নির্দিষ্ট ক্রমে তাদের জোড়ায় জোড়ায় যুক্ত করলে কী পাওয়া যায় দেখি।

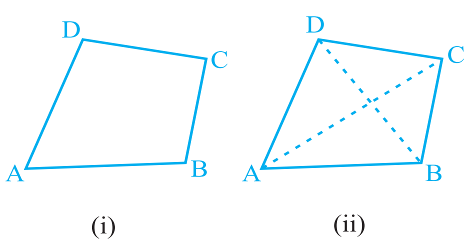


চিত্র 8.1

লক্ষ করো, যদি চারটি বিন্দুই সমরেখ (একই রেখায়) হয় তবে আমরা একটি রেখাংশ পাই [চিত্র 8.1 (i) দেখো], যদি চারটি বিন্দুর মধ্যে তিনটি সমরেখ হয় তবে আমরা একটি ত্রিভুজ পাই। [চিত্র 8.1 (ii) দেখো], যদি চারটি বিন্দুর মধ্যে তিনটি সমরেখ না হয় তবে আমরা চার বাহু বিশিষ্ট একটি বদ্ধ চিত্র পাই। [চিত্র 8.1 (iii) এবং (iv) দেখো]।

এভাবে নির্দিষ্টক্রমে চারটি বিন্দু যুক্ত করে গঠিত চিত্রকে চতুর্ভুজ বলা হয়। এই পুস্তকে আমরা চিত্র 8.1 (iii) এ দেওয়া চতুর্ভুজ নিয়ে শুধু বিবেচনা করব, কিন্তু চিত্র 8.1 (iv) -এ দেওয়া চতুর্ভুজ নিয়ে নয়।

একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু, চারটি কোণ এবং চারটি শীর্ষবিন্দু আছে। [চিত্র 8.2 (i) দেখো]।



চিত্র 8.2

ABCD চতুর্ভুজে AB, BC, CD এবং DA হল চারটি বাহু। A, B, C এবং D হল চারটি শীর্ষবিন্দু এবং $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ এবং $\angle D$ হলো শীর্ষবিন্দুগুলোতে গঠিত চারটি কোণ।

এখন, বিপরীত শীর্ষবিন্দু A ও C এবং B ও D যুক্ত করা হল [চিত্র 8.2 (ii) দেখো] AC এবং BD হল ABCD চতুর্ভুজের দুটি কর্ণ।

এই অধ্যায়ে আমরা বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজ, তাদের ধর্মাবলী এবং বিশেষভাবে সামান্তরিক নিয়ে বিশদভাবে জানব।

তোমরা সম্ভবত অবাক হবে, কেন আমরা চতুর্ভুজ (অথবা সামান্তরিক) সম্বন্ধে জানব। তোমাদের চারপাশে তাকাও এবং তোমরা অনেক বস্তু দেখবে যাদের আকার চতুর্ভুজের মতো– শ্রেণিকক্ষের মেঝে, দেওয়াল, সিলিং, জানালা, ব্ল্যাকবোর্ড, ডাস্টারের প্রতিটি তল, তোমরা বই এর প্রতিটি পাতা, পড়ার টেবিলের উপরিতল ইত্যাদি। এদের কতগুলি চিত্র নিচে দেওয়া হল। (চিত্র 8.3 দেখো)।

চিত্র 8.3

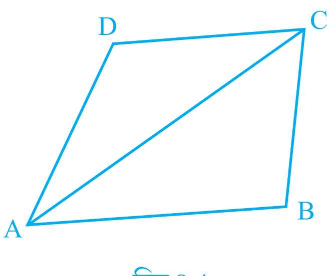
যদিও আমাদের চারপাশের বস্তুগুলোর মধ্যে অধিকাংশই বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ যা আয়তক্ষেত্র নামে পরিচিত। আমরা চতুর্ভুজ সম্পর্কে বিশেষভাবে জানব বিশেষত সামান্তরিক সম্পর্কে, কারণ আয়তক্ষেত্র একটি সামান্তরিকও এবং সামান্তরিকের সমস্ত ধর্মাবলী আয়তক্ষেত্রের জন্য প্রযোজ্য।

8.2 চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম (Angle Sum Property of a Quadrilateral) :

চলো এখন চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম পুনরায় আয়ত্ত করি।

একটি চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমষ্টি 360°। চতুর্ভুজের একটি কর্ণ অঙ্কন করে চতুর্ভুজকে দুটি ত্রিভুজে ভাগ করে এ ধর্মের সত্যতা যাচাই করা যেতে পারে।

মনে করো ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং AC একটি কর্ণ (চিত্র 8.4 দেখো)



চিত্র 8.4

Δ ADC এর কোণগুলোর সমষ্টি কত?

তোমরা জান যে,

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180° \qquad (1)$$

অনুরূপভাবে Δ ABC এর

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° \qquad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180° + 180° = 360°$$

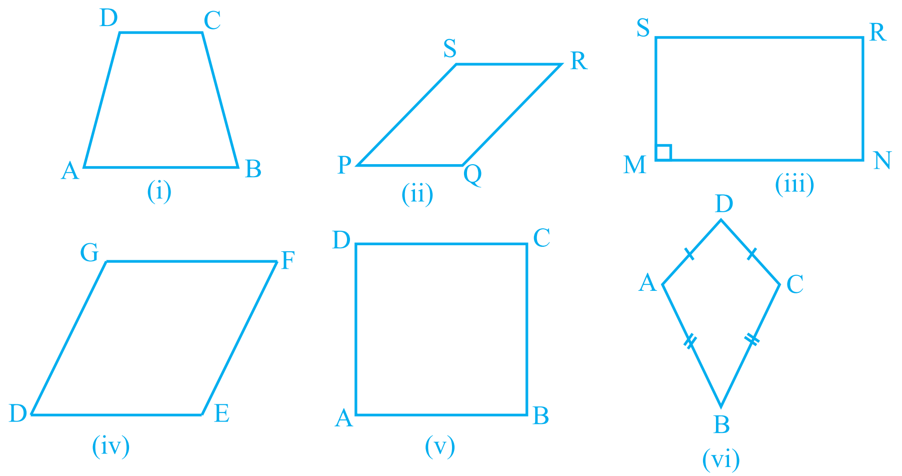
আবার, $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$ এবং $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$

সুতরাং, $\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360°$.

অর্থাৎ, চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমষ্টি 360°

8.3 চতুর্ভুজের প্রকারভেদ : (Types of Quadrilaterals) :

নিচে অঙ্কিত বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজগুলোর দিকে তাকাও :



চিত্র 8.5

লক্ষ করো :

- চিত্র 8.5 (i) এ, চতুর্ভুজ ABCD এর একজোড়া বিপরীত বাহু AB ও CD সমান্তরাল, তোমরা জান এটি হল ট্রাপিজিয়াম।
- চিত্র 8.5 (ii), (iii) , (iv) এবং (v) এ দেওয়া চতুর্ভুজগুলোর উভয় জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল। এই ধরনের চতুর্ভুজগুলোকে বলা হয় সামান্তরিক।

সুতরাং, চিত্র 8.5 (ii) এ PQRS চতুর্ভুজটি হল একটি সামান্তরিক।

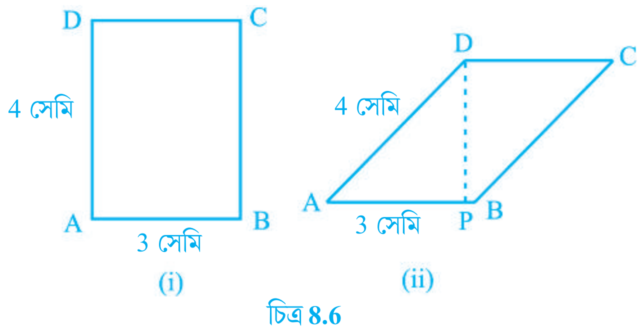
অনুরূপে চিত্র 8.5 (iii), (iv) এবং (v) -এ দেওয়া চতুর্ভুজগুলো হল সামান্তরিক।

- লক্ষ করো চিত্র 8.5 (iii) এ সামান্তরিক MNRS এর একটি কোণ যথা $\angle M$ হল একটি সমকোণ। এই বিশেষ ধরনের সামান্তরিককে কি বলে? মনে করার চেষ্টা করো, এটি হল আয়তক্ষেত্র।
- চিত্র 8.5 (iv) এ সামান্তরিক DEFG এর সবগুলো বাহুই সমান এবং আমরা জানি এটি হল রম্বস।
- চিত্র 8.5 (v) এ সামান্তরিক ABCD এর $\angle A = 90°$ এবং সবগুলো বাহু সমান, এটি হল বর্গক্ষেত্র।
- চিত্র 8.5 (vi) এ চতুর্ভুজ ABCD এর $AD = CD$ এবং $AB = CB$ অর্থাৎ, দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান, এটি সামান্তরিক নয় এটি হল ঘুড়ি।

লক্ষ করো বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র এবং রম্বস প্রত্যেকটিই হল সামান্তরিক।

- বর্গক্ষেত্র একটি আয়তক্ষেত্র এবং এটি একটি রম্বসও।
- সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম।
- ঘুড়ি একটি সামান্তরিক নয়।
- ট্রাপিজিয়াম একটি সামান্তরিক নয় (কারণ ট্রাপিজিয়ামের কেবল মাত্র একজোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল এবং সামান্তরিকে উভয় জোড়া বাহুই সমান্তরাল হওয়া প্রয়োজন)।
- আয়তক্ষেত্র অথবা রম্বস কোনটাই বর্গক্ষেত্র নয়।

চিত্র 8.6 এর দিকে তাকাও এখানে একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি সামান্তরিকের পরিসীমা একই : 14 সেমি।



চিত্র **8.6**

এখানে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হল $DP \times AB$ এবং এটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল থেকে ছোটো। অর্থাৎ, $AB \times AD$ কারণ $DP < AD$ । সাধারণত মিষ্টির দোকানদাররা 'বরফি' সামান্তরিক আকৃতির করে কাটে, যাতে ট্রেতে বেশি সংখ্যায় রাখা যায়। (পরবর্তী সময়ে তোমরা 'বরফি' খাওয়ায় আগে দেখবে!)

চলো, এখন আমরা পূর্বের শ্রেণিতে শেখা সামান্তরিকের ধর্মগুলো পুনরায় আয়ত্ত করি।

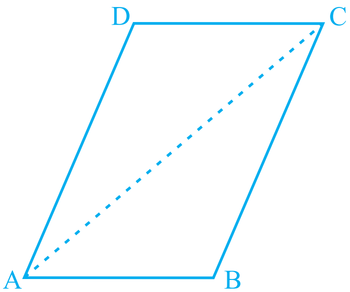
8.4 সামান্তরিকের ধর্মাবলী : (Properties of a Parallelogram) :

চলো এখন একটি কার্যকলাপ সম্পাদন করি।

একটি কাগজের সিট থেকে একটি সামান্তরিক কেটে নাও। এবার কর্ণ বরাবর এটিকে কাটো। (চিত্র 8.7 দেখো)। তোমরা দুটি ত্রিভুজ পাবে। এই ত্রিভুজগুলো সম্পর্কে তোমরা কি বলবে?

একটি ত্রিভুজের উপর অপর ত্রিভুজটি স্থাপন করো, প্রয়োজনে একটু ঘুরিয়ে দাও, তোমরা কি লক্ষ করলে?

লক্ষ করো যে, ত্রিভুজ দুটি একে অপরের সহিত সর্বসম, আরো সামান্তরিক নিয়ে কার্যকলাপটি সম্পন্ন করো।



চিত্র **8.7**

প্রত্যেকবার তোমরা লক্ষ করবে যে, সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

চলো এখন আমরা এই ফলাফলটিকে প্রমাণ করি।

উপপাদ্য 8.1 : *সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।*

প্রমাণ : মনে করো ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC একটি কর্ণ (চিত্র 8.8 দেখো)। লক্ষ করো যে, কর্ণ AC সামান্তরিক ABCD কে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে, যথা ΔABC এবং ΔCDA। এখন প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

লক্ষ করো যে, Δ ABC এবং Δ CDA এর BC || AD এবং AC ছেদক।

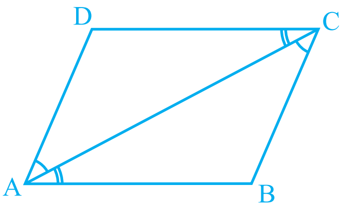
সুতরাং, $\angle BCA = \angle DAC$ (একান্তর কোণ)

আবার, AB || DC এবং AC ছেদক

সুতরাং, $\angle BAC = \angle DCA$ (একান্তর কোণ)

এবং $AC = CA$ (সাধারণ)

সুতরাং, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (ASA শর্তে)



চিত্র **8.8**

অর্থাৎ, AC কর্ণ সামান্তরিক ABCD কে দুটি সর্বসম ত্রিভুজ ABC এবং CDA তে বিভক্ত করে।

এখন ABCD সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরিমাপ করো তোমরা কী লক্ষ করছ?

তোমরা পাবে যে, AB = DC এবং AD = BC।

এটি সামান্তরিকের অপর একটি ধর্ম যা নিচে বিবৃত করা হল:

উপপাদ্য 8.2 : *সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।*

ইতিপূর্বে তোমরা প্রমাণ করেছ যে সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। সুতরাং, অনুরূপ অংশ যেমন অনুরূপ বাহু সম্পর্কে তোমরা কী বলতে পারো? এগুলো সমান।

সুতরাং, AB = DC এবং AD = BC।

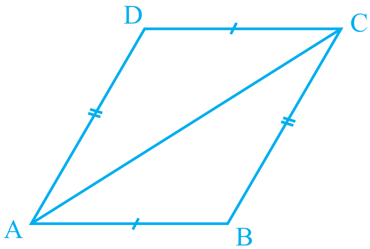
এখন এই ফলাফলের বিপরীত ফলাফলটি কী? তোমরা ইতিমধ্যে জেনেছ যে উপপাদ্যে যা দেওয়া থাকে, বিপরীতক্রমে তা-ই প্রমাণিত হয় এবং উপপাদ্যে যা প্রমাণিত হয় তা-ই বিপরীতক্রমে দেওয়া থাকে। তাহলে উপপাদ্য 8.2 কে নিম্নলিখিতভাবে বিবৃত করা যায় :

যদি একটি চতুর্ভুজ একটি সামান্তরিক হয়, তাহলে তাহার বিপরীত বাহুগুলোর প্রতিটি যুগল সমান হয়। সুতরাং, এটির বিপরীত ক্রমটি হল :

উপপাদ্য 8.3 : *যদি একটি চতুর্ভুজের প্রতিজোড়া বিপরীত বাহু সমান হয়, তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হয়।*

তোমরা কি কারণ খুঁজে বের করতে পারো?

মনে করো, ABCD চতুর্ভুজের AB এবং CD সমান, আবার AD = BC (চিত্র 8.9 দেখো), কর্ণ AC অঙ্কন করা হল।



চিত্র 8.9

স্পষ্টতই, Δ ABC $\cong$ Δ CDA (কেন?)

সুতরাং, $\angle$ BAC = $\angle$ DCA

এবং $\angle$ BCA = $\angle$ DAC (কেন?)

এখন কি তোমরা বলতে পারো ABCD একটি সামান্তরিক? কেন?

এইমাত্র তোমরা দেখেছ যে, সামান্তরিকের প্রতি জোড়া বিপরীত বাহু সমান এবং বিপরীতক্রমে যদি কোনো চতুর্ভুজের প্রতিজোড়া বিপরীত বাহু সমান হয় তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হয়। প্রতিজোড়া বিপরীত কোণের ক্ষেত্রে, আমরা কি একই সিদ্ধান্তে পৌঁছতে পারি?

একটি সামান্তরিক অঙ্কন করো এবং কোণগুলো পরিমাপ করো, তোমরা কি লক্ষ করলে?

প্রতিজোড়া বিপরীত কোণ সমান।

আরো সামান্তরিক নিয়ে কাজটি পুনরায় করো। আমরা নিচে দেওয়া আরেকটি সিদ্ধান্তে উপনীত হলাম।

উপপাদ্য 8.4 : *সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলো সমান।*

এখন এই ফলাফলের বিপরীত ক্রমও কি সত্য? হ্যাঁ, চতুর্ভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম এবং সমান্তরাল রেখা সকলকে ছেদকের ছেদ করার ফলাফল প্রয়োগ করে আমরা দেখতে পারি যে, বিপরীত ক্রমটিও সত্য। সুতরাং, আমরা নিচের উপপাদ্যটি পাই :

উপপাদ্য 8.5 : *যদি কোনো চতুর্ভুজে প্রতিজোড়া বিপরীত কোণগুলো সমান হয় তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।*

তথাপি সামান্তরিকের অপর একটি ধর্ম আছে। চলো আমরা সামান্তরিকের ধর্মটি নিয়ে কিছু কাজ করি। ABCD একটি সামান্তরিক আঁকো এবং কর্ণ দুটি অঙ্কন করো যারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 8.10 দেখো)

OA, OB, OC এবং OD এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো।

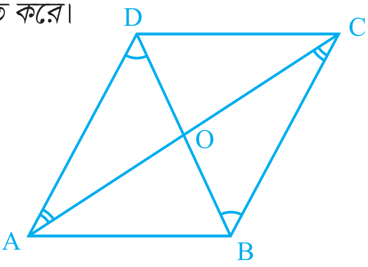
তোমরা কী লক্ষ করলে? তোমরা লক্ষ করবে যে—

$$OA = OC \quad \text{এবং} \quad OB = OD.$$

অথবা, O হল উভয় কর্ণের মধবিন্দু।

এই কার্যকলাপটি আরো সামান্তরিক নিয়ে পুনরায় করো, প্রত্যেকবার তোমরা লক্ষ করবে যে, O হবে কর্ণ দুটির মধ্যবিন্দু। সুতরাং, আমরা নিচের উপপাদ্যটি পাই :

উপপাদ্য 8.6 : *সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।*



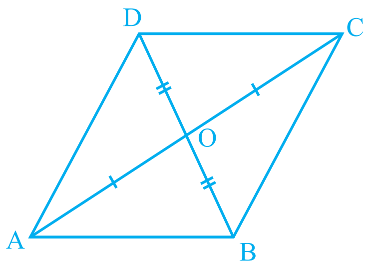
চিত্র **8.10**

এখন কি ঘটবে, যদি চতুর্ভুজের কর্ণগুলো পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে? এটি কি একটি সামান্তরিক? প্রকৃত পক্ষে এটি সত্য।

এই ফলাফল উপপাদ্য 8.6 এর ফলাফলের বিপরীতক্রম, এটি নিচে দেওয়া হল।

উপপাদ্য 8.7 : *যদি কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হবে।*

তোমরা এই ফলাফলের কারণ নিম্নলিখিত ভাবে বলতে পারো:



চিত্র **8.11**

চিত্র 8.11-এ লক্ষ করো, দেওয়া আছে OA = OC এবং OB = OD।

সুতরাং, $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$ (কেন?)

অতএব, $\angle\ ABO = \angle\ CDO$ (কেন?)

এ থেকে আমরা পাই, $AB \parallel CD$

অনুরূপে, $BC \parallel AD$

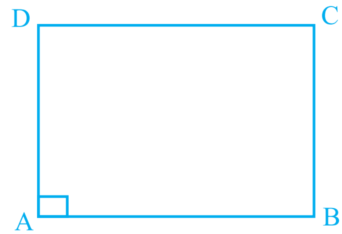
সুতরাং, ABCD একটি সামান্তরিক।

চলো, এখন কিছু উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 1 : দেখাও যে আয়তক্ষেত্রের প্রতিটি কোণ হল একটি সমকোণ।

সমাধান : চলো, আমরা পুনরায় দেখি আয়তক্ষেত্র কি?

আয়তক্ষেত্র হল একটি সামান্তরিক যার একটি কোণ হল সমকোণ।



চিত্র **8.12**

মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ যার $\angle A = 90°$

আমরা দেখাব যে $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$

আমরা পাই, AD || BC এবং AB হল একটি ছেদক (চিত্র 8.12 দেখো)

সুতরাং, $\angle A + \angle B = 180°$

(ছেদকের একই পাশে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ)

কিন্তু, $\angle A = 90°$

সুতরাং, $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$

এখন, $\angle C = \angle A$ এবং $\angle D = \angle B$

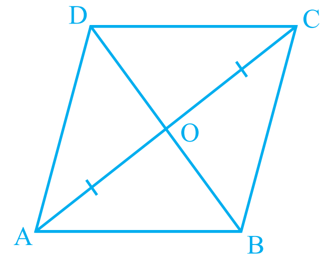
(সামান্তরিকের বিপরীত কোণ)

সুতরাং, $\angle C = 90°$ এবং $\angle D = 90°$.

অতএব, আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেকটি কোণ হল সমকোণ।

উদাহরণ 2 : দেখাও যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

সমাধান : মনে করো ABCD একটি রম্বস (চিত্র 8.13 দেখো)



চিত্র **8.13**

তোমরা জানো যে, AB = BC = CD = DA (কেন?)

এখন Δ AOD এবং Δ COD এর

OA = OC (সামান্তরিকের কর্ণগুলো পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে)

OD = OD (সাধারণ)

AD = CD

সুতরাং, $\Delta AOD \cong \Delta COD$

(বাহু-বাহু-বাহু সর্বসমতার শর্তানুসারে)

এ থেকে পাই, $\angle AOD = \angle COD$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ (CPCT))

কিন্তু, $\angle AOD + \angle COD = 180°$ (রৈখিক যুগল)

সুতরাং, $2\angle AOD = 180°$

বা, $\angle AOD = 90°$

সুতরাং, একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

উদাহরণ 3 : ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB = AC। বহিঃস্থ কোণ PAC কে AD সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং CD || AB (চিত্র 8.14 দেখো), দেখাও যে,

(i) $\angle$ DAC = $\angle$ BCA এবং (ii) ABCD একটি সামান্তরিক।

সমাধান : (i) Δ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যেখানে AB = AC (দেওয়া আছে)

সুতরাং, $\angle$ ABC = $\angle$ ACB (সমান বাহুর বিপরীত কোণ)

আবার, $\angle$ PAC = $\angle$ ABC + $\angle$ ACB

(ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ)

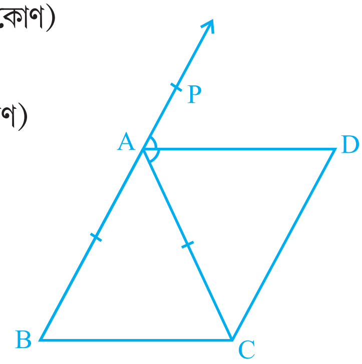
বা, $\angle$ PAC = 2$\angle$ ACB (1)

এখন, AD হল $\angle$ PAC. এর সমদ্বিখণ্ডক,

সুতরাং, $\angle$ PAC = 2$\angle$ DAC (2)

অতএব, 2$\angle$ DAC = 2$\angle$ ACB [(1) এবং (2) হতে]

বা, $\angle$ DAC = $\angle$ ACB



চিত্র **8.14**

(ii) এখন, এই সমান কোণ দুটি, এক জোড়া একান্তর কোণ গঠন করে যখন BC এবং AD রেখাংশ দুটি AC ছেদক দ্বারা ছেদিত হয়।

সুতরাং, BC || AD

আবার, BA || CD (দেওয়া আছে)

এখন, ABCD চতুর্ভুজের দুই জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল।

সুতরাং, ABCD একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 4 : দুটি সমান্তরাল রেখা l এবং m কে, ছেদক p ছেদ করে (চিত্র 8.15 দেখো), দেখাও যে, অন্তঃস্থ কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

সমাধান : এখানে দেওয়া আছে যে PS || QR এবং ছেদক p তাদেরকে যথাক্রমে A এবং C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\angle$ PAC এবং $\angle$ ACQ কোণ দুটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করে, এবং $\angle$ACR এবং $\angle$ SAC এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

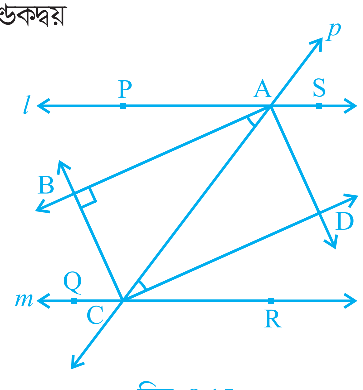
প্রমাণ করতে হবে যে ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

এখন, $\angle$ PAC = $\angle$ ACR

(একান্তরকোণ, যেহেতু l ও m সমান্তরাল এবং p ছেদক)

সুতরাং, $\frac{1}{2}\angle$ PAC = $\frac{1}{2}\angle$ ACR

অর্থাৎ, $\angle$ BAC = $\angle$ ACD



চিত্র **8.15**

AB এবং DC রেখা দুটির সাথে AC এর ছেদের ফলে এই এক জোড়া একান্তর কোণ তৈরি হয়, আবার এদুটি সমানও।

সুতরাং, $AB \parallel DC$

অনুরূপে, $BC \parallel AD$ ($\angle ACB$ এবং $\angle CAD$ এর সাপেক্ষে)

সুতরাং, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

আবার, $\angle PAC + \angle CAS = 180°$ (রৈখিক যুগল)

সুতরাং, $\frac{1}{2} \angle PAC + \frac{1}{2} \angle CAS = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

বা, $\angle BAC + \angle CAD = 90°$

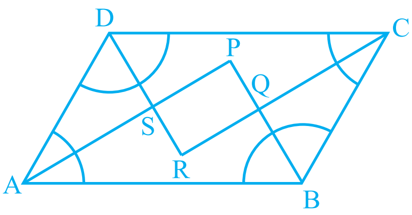
বা, $\angle BAD = 90°$

সুতরাং, ABCD একটি সামান্তরিক যার একটি কোণ 90°।

অতএব, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

উদাহরণ 5 : দেখাও যে, সামান্তরিকের কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলো একটি আয়তক্ষেত্র গঠন করে।

সমাধান : মনে করো, সামান্তরিক ABCD এর $\angle A$ ও $\angle B$, $\angle B$ ও $\angle C$, $\angle C$ ও $\angle D$, এবং $\angle D$ ও $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদ বিন্দু হলো যথাক্রমে P, Q, R এবং S (চিত্র 8.16 দেখো)



চিত্র **8.16**

Δ ASD এর মধ্যে তোমরা কি লক্ষ করছ?

যেহেতু DS, $\angle D$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং AS, $\angle A$এর সমদ্বিখণ্ডক। অতএব,

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D$$

$$= \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

$$= \frac{1}{2} \times 180°$$ ($\angle A$ এবং $\angle D$ ছেদকের একই পাশে অবস্থিত অন্তঃস্থ কোণ)

$$= 90°$$

আবার, $\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180°$ (ত্রিভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম)

বা $90° + \angle DSA = 180°$

বা $\angle DSA = 90°$

সুতরাং, $\angle PSR = 90°$ (যেহেতু $\angle DSA$ এর বিপ্রতীপ কোণ হল $\angle PSR$)

অনুরূপে, দেখানো যায় যে, $\angle$ APB = 90° বা $\angle$ SPQ = 90° ($\angle$ DSA এর ক্ষেত্রে এটি দেখানো হয়েছিল)। অনুরূপে, $\angle$ PQR = 90° এবং $\angle$ SRQ = 90°।

সুতরাং, PQRS হল একটি চতুর্ভুজ যার সবগুলো কোণ হল সমকোণ।

আমরা কি এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে এটি একটি আয়তক্ষেত্র। চলো আমরা পরীক্ষা করি। আমরা আগেই দেখিয়েছি যে, $\angle$ PSR = $\angle$ PQR = 90° এবং $\angle$ SPQ = $\angle$ SRQ = 90°।

সুতরাং, উভয় জোড়া বিপরীত কোণ সমান।

অতএব, PQRS হল একটি সামান্তরিক যার একটি কোণ (যদিও সব কোণই) হল 90°।

সুতরাং, PQRS হল একটি আয়তক্ষেত্র।

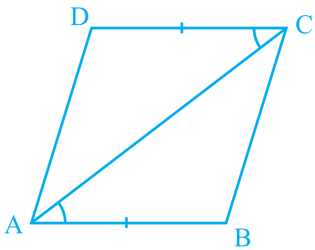
8.5 একটি চতুর্ভুজের সামান্তরিক হওয়ার অপর একটি শর্ত

এই অধ্যায়ে তোমরা, সামান্তরিকের অনেকগুলো ধর্ম জেনেছ এবং এই ধর্মগুলোর কোনো একটা চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে সিদ্ধ হলে চতুর্ভুজটির সামান্তরিক হবে, এটিও তোমরা যাচাই করেছ।

এখন আমরা অন্য একটি শর্ত জানাব যা একটি চতুর্ভুজ, একটি সামান্তরিক হওয়ার ক্ষেত্রে ন্যূনতম প্রয়োজনীয় শর্ত।

নিচে উপপাদ্যের আকারে এটি বিবৃত করা হলে :

উপপাদ্য 8.8 : *যদি একটি চতুর্ভুজের একজোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হয় তবে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হবে।*



চিত্র **8.17**

চিত্র 8.17 এর দিকে তাকাও, যেখানে AB = CD এবং AB || CD। AC কর্ণ অঙ্কন করা হল। বাহু-কোণ-বাহু সর্বসমতার শর্তের সাহায্যে তোমরা দেখতে পারো যে Δ ABC ≅ Δ CDA।

সুতরাং, BC || AD (কেন?)

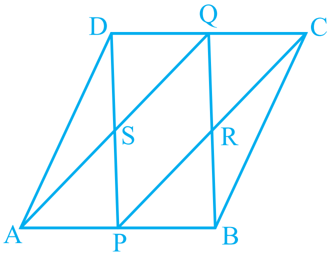
চলো, সামান্তরিকের এই ধর্ম প্রয়োগ করার জন্য এখন আমরা একটি উদাহরণ নিই।

উদাহরণ 6 : ABCD হল একটি সামান্তরিক, যেখানে P এবং Q হল বিপরীত বাহু AB এবং CD এর মধ্যবিন্দু (চিত্র 8.18 দেখো)। যদি AQ, DP কে S বিন্দুতে ছেদ করে, এবং BQ, CP কে R বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে,

(i) APCQ হল একটি সামান্তরিক।

(ii) DPBQ হল একটি সামান্তরিক।

(iii) PSQR হল একটি সামান্তরিক।



চিত্র **8.18**

সমাধান : (i) চতুর্ভুজ APCQ এর

$$AP \parallel QC \qquad (\text{যেহেতু } AB \parallel CD) \qquad (1)$$

$$AP = \frac{1}{2} AB, \quad CQ = \frac{1}{2} CD \qquad (\text{প্রদত্ত})$$

আবার, $AB = CD$ (কেন?)

সুতরাং, $AP = QC$ (2)

অতএব, APCQ হল একটি সামান্তরিক [(1) ও (2) এবং উপপাদ্য 8.8 হতে]

(ii) অনুরূপে, চতুর্ভুজ DPBQ হল একটি সামান্তরিক, কারণ

$$DQ \parallel PB \text{ এবং } DQ = PB$$

(iii) চতুর্ভুজ PSQR এর

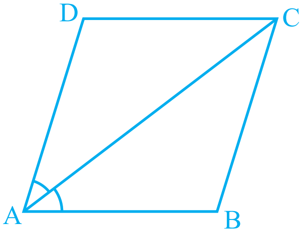
$SP \parallel QR$ (SP হল DP এর অংশ এবং QR হল QB এর অংশ)

অনুরূপে, $SQ \parallel PR$

অতএব, PSQR হল একটি সামন্তরিক।

অনুশীলনী 8.1

1. একটি চতুর্ভুজের কোণগুলোর অনুপাত 3 : 5 : 9 : 13, চতুর্ভুজটির কোণগুলো নির্ণয় করো।
2. প্রমাণ করো যে, কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হলে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হবে।
3. প্রমাণ করো যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করলে চতুর্ভুজটি একটি রম্বস হবে।
4. প্রমাণ করো যে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
5. প্রমাণ করো যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান এবং পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হলে চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র হবে।
6. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ, $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডি করে (চিত্র 8.19 দেখো) দেখাও যে,
   (i) কর্ণটি $\angle C$ কেও সমদ্বিখণ্ডিত করে।
   (ii) ABCD একটি রম্বস।



চিত্র **8.19**

7. ABCD একটি রম্বস, দেখাও যে, AC কর্ণ, $\angle A$ ও $\angle C$ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং BD কর্ণ $\angle B$ ও $\angle D$ উভয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
8. ABCD আয়তক্ষেত্রের AC কর্ণ $\angle A$ এবং $\angle C$ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করে, দেখাও যে-
   (i) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র (ii) BD কর্ণ $\angle B$ ও $\angle D$ উভয়কেই সমদ্বিখণ্ডিত করে।

9. ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণের উপর P, Q এরূপ দুটি বিন্দু যে, DP= BQ (চিত্র 8.20 দেখো) দেখাও যে,

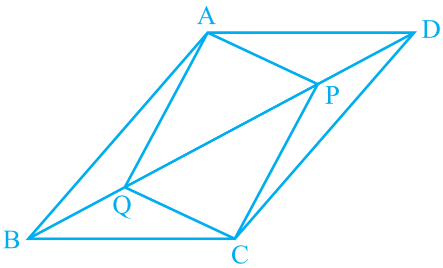
(i) $\Delta APD \cong \Delta CQB$

(ii) $AP = CQ$

(iii) $\Delta AQB \cong \Delta CPD$

(iv) $AQ = CP$

(v) APCQ একটি সামান্তরিক।

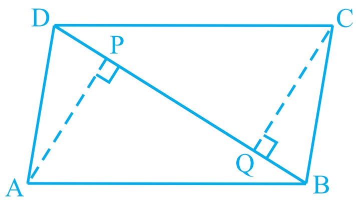


চিত্র **8.20**

10. ABCD সামান্তরিকের A এবং C শীর্ষবিন্দুদ্বয় থেকে BD কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে AP এবং CQ (চিত্র 8.21 দেখো) দেখাও যে :

(i) $\Delta APB \cong \Delta CQD$

(ii) $AP = CQ$



চিত্র **8.21**

11. ΔABC ও ΔDEF এর $AB = DE$, $AB \parallel DE$, $BC = EF$ এবং $BC \parallel EF$ । A, B এবং C শীর্ষবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E এবং F শীর্ষবিন্দুগুলোর সাথে যুক্ত করা হল (চিত্র 8.22 দেখো) দেখাও যে,

(i) ABED চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

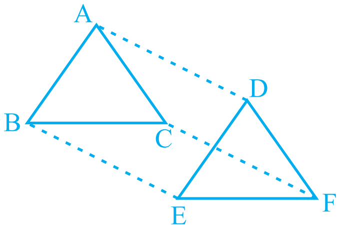
(ii) BEFC চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

(iii) $AD \parallel CF$ এবং $AD = CF$

(iv) ACFD একটি সামান্তরিক

(v) $AC = DF$

(vi) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



চিত্র **8.22**

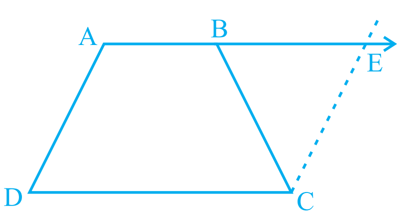
12. ABCD ট্রাপিজিয়ামে $AB \parallel CD$ এবং $AD = BC$ (চিত্র 8.23 দেখো), দেখাও যে

(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$

(iv) কর্ণ AC = কর্ণ BD



চিত্র **8.23**

[ইঙ্গিত (*Hint*) : AB কে বর্ধিত করো এবং C বিন্দু দিয়ে DA এর সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করো যা বর্ধিত AB কে E বিন্দুতে ছেদ করে।]

8.6 মধ্যবিন্দু সংক্রান্ত উপপাদ্য (The Mid-point Theorem)

তোমরা চতুর্ভুজের পাশাপাশি ত্রিভুজের ও অনেকগুলো ধর্ম সম্পর্কে জেনেছ। তথাপি আমরা অন্য একটি ফলাফল নিয়ে আলোচনা করব যা ত্রিভুজের বাহুর মধ্যবিন্দু সম্পর্কিত। নিচের কার্যকলাপটি সম্পাদন করো।

একটি ত্রিভুজ আঁকো এবং ত্রিভুজটির দুই বাহুর মধ্যবিন্দু E এবং F দ্বারা চিহ্নিত করো। E এবং F বিন্দু দুটি যুক্ত করো (চিত্র 8.24 দেখো)

EF এবং BC পরিমাপ করো। AEF এবং $\angle$ ABC পরিমাপ করো। তোমরা কী লক্ষ করছ? তোমরা পাবে যে,

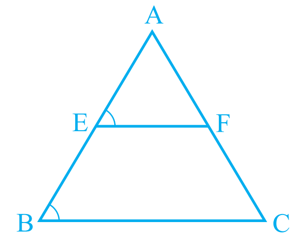


Fig. 8.24

$EF = \frac{1}{2} BC$ এবং $\angle AEF = \angle ABC$

সুতরাং, $EF \parallel BC$

আরো কতগুলো ত্রিভুজ নিয়ে কার্যকলাপটি পুনরায় করো।

অতএব, তোমরা নিচের উপপাদ্যে উপনীত হবে :

উপপাদ্য 8.9 : *কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুর মধ্য বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।*

তোমরা নিচের সমাধান সূত্রটি ব্যবহার করে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারো :

চিত্র 8.25 লক্ষ করো, যেখানে E এবং F হল যথাক্রমে AB এবং AC এর মধ্যবিন্দু এবং $CD \parallel BA$।

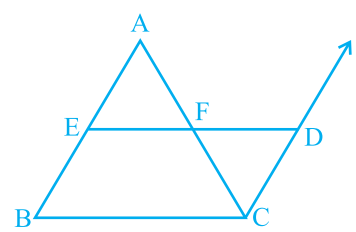


Fig. 8.25

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (কোণ-বাহু-কোণ শর্তানুসারে)

সুতরাং, $EF = DF$ এবং $BE = AE = DC$ (কেন?)

অতএব, BCDE হল একটি সামান্তরিক (কেন?)

এ থেকে পাওয়া যায় $EF \parallel BC$

এই ক্ষেত্রে, আরো লক্ষ্য করো যে, $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$

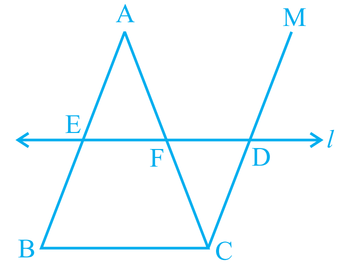
তোমরা কি 8.9 উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য বিবৃত করতে পারো? বিপরীত ক্রমও কি সত্য?

তোমরা দেখতে পাবে যে, উপরের উপপাদ্যের বিপরীত ক্রমও সত্য যা নিচে বিবৃত করা হল :

উপপাদ্য 8.10 : *ত্রিভুজের কোনো একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত অন্য একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।*

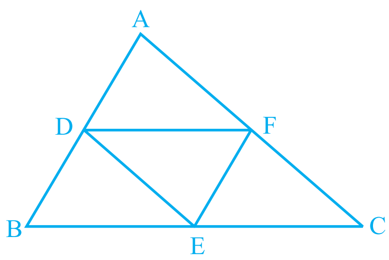
চিত্র 8.26 এ, লক্ষ করো যে E, AB এর মধ্যবিন্দু, l রেখাটি E বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল এবং CM || BA।

Δ AEF এবং Δ CDF এ সর্বসমতার শর্ত ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে, AF = CF



চিত্র **8.26**

উদাহরণ 7 : Δ ABC এর, AB, BC এবং CA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E এবং F (চিত্র 8.27 দেখো) D, E এবং F যুক্ত করে দেখাও যে Δ ABC, চারটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত।



চিত্র **8.27**

সমাধান : যেহেতু D এবং E, যথাক্রমে Δ ABC এর AB এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু, তাই উপপাদ্য 8.9 অনুসারে

DE || AC

অনুরূপে, DF || BC এবং EF || AB

সুতরাং, ADEF, BDFE এবং DFCE সবগুলো হল সামান্তরিক।

এখন, DE হল সামান্তরিক BDFE এর কর্ণ।

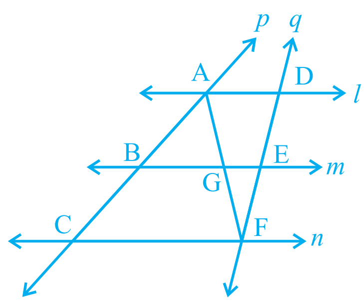
সুতরাং, Δ BDE ≅ Δ FED

অনুরূপে, Δ DAF ≅ Δ FED

এবং Δ EFC ≅ Δ FED

সুতরাং, চারটি ত্রিভুজই পরস্পর সর্বসম।

উদাহরণ 8 : l, m এবং n সমান্তরাল সরলরেখা তিনটি p এবং q ভেদক দ্বারা ছিন্ন হয়েছে, যেখানে l, m এবং n দ্বারা ছিন্ন p ভেদকের অংশ AB এবং BC পরস্পর সমান (চিত্র 8.28 দেখো)। দেখাও যে l, m এবং n দ্বারা ছিন্ন q ভেদকের অংশ DE এবং EF সমান।



চিত্র **8.28**

সমাধান : আমরা পাই যে, AB = BC এবং প্রমাণ করতে হবে যে, DE = EF

চলো আমরা A, F যুক্ত কর, যা m সরলরেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

ACFD ট্রাপিজিয়ামটি দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত হয়েছে, যথা Δ ACF এবং Δ AFD ।

Δ ACF এর ক্ষেত্রে দেওয়া আছে, B, AC এর মধ্যবিন্দু (AB = BC)

এবং $BG \parallel CF$ (যেহেতু $m \parallel n$)

সুতরাং, G হল AF এর মধ্যবিন্দু (উপপাদ্য 8.10 ব্যবহার করে)

$GE \parallel AD$ এবং এজন্য উপপাদ্য 8.10 অনুসারে E হল DF এর মধ্যবিন্দু।

এখন Δ AFD এর ক্ষেত্রে আমরা একই যুক্তি প্রয়োগ করে পাই G, AF এর মধ্যবিন্দু।

অর্থাৎ, DE = EF.

অন্যভাবে বলা যায়, l, m এবং n দ্বারা ছিন্ন q ভেদকের অংশগুলিও সমান।

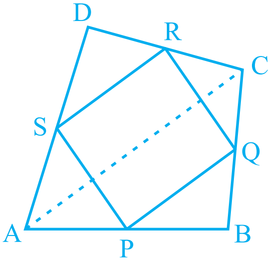
অনুশীলনী 8.2

1. ABCD একটি চতুর্ভুজ যার AB, BC, CD এবং DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S (চিত্র 8.29 দেখো), AC একটি কর্ণ, দেখাও যে,

   (i) $SR \parallel AC$ এবং $SR = \frac{1}{2} AC$

   (ii) PQ = SR

   (iii) PQRS একটি সামান্তরিক।

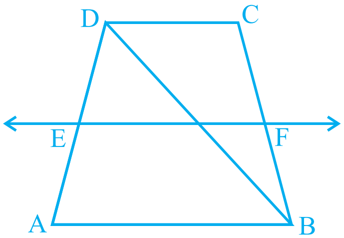


চিত্র 8.29

2. ABCD রম্বসের AB, BC, CD এবং DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S । দেখাও যে, PQRS চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

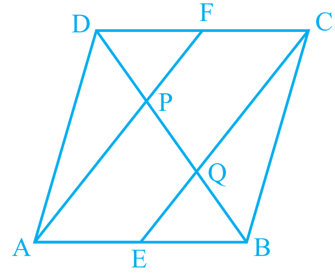
3. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD এবং DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S । দেখাও যে, PQRS চতুর্ভুজটি একটি রম্বস।

4. ABCD ট্রাপিজিয়ামে $AB \parallel DC$, BD একটি কর্ণ এবং E হল AD এর মধ্যবিন্দু। E বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করা হল যা BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 8.30 দেখো), দেখাও যে, F হল BC এর মধ্যবিন্দু।



চিত্র 8.30

5. ABCD সামান্তরিকের AB এবং CD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E এবং F (চিত্র 8.31 দেখো) দেখাও যে AF এবং EC রেখাংশ দুটি BD কর্ণকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করে।



চিত্র **8.31**

6. দেখাও যে, একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশগুলো পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. ABC একটি ত্রিভুজ, যার $\angle$ C হল সমকোণ। অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু M দিয়ে BC এর সমান্তরাল একটি রেখা AC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে,

(i) AC এর মধ্যবিন্দু D (ii) $MD \perp AC$ (iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

8.7 সারসংক্ষেপ :

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো জেনেছ :

1. চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমষ্টি 360°।

2. সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিক কে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

3. সামান্তরিকের

(i) বিপরীত বাহুগুলো সমান (ii) বিপরীত কোণগুলো সমান

(iii) কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে

4. একটি চতুর্ভুজ একটি সামান্তরিক হবে, যদি—

(i) বিপরীত বাহুগুলো সমান হয় অথবা (ii) বিপরীত কোণগুলো সমান হয়

অথবা (iii) কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে

অথবা (iv) এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল।

5. আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান এবং পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং এটি বিপরীতভাবেও সত্য।

6. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং এটি বিপরীত ক্রমেও প্রযোজ্য।

7. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, এটি বিপরীতক্রমেও সত্য।

8. ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা, তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

9. ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অন্য বাহুর সমান্তরাল রেখা, তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো ক্রমান্বয়ে যুক্ত করলে একটি সামান্তরিক গঠিত হয়।

অধ্যায়-9

সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Areas of Parallelograms and Triangles)

9.1 ভূমিকা :

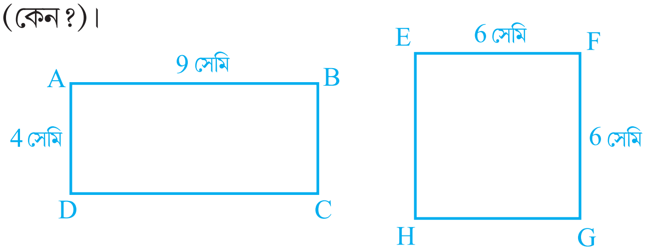
পঞ্চম অধ্যায়ে তোমরা দেখেছ কীভাবে পৃথিবী (ভূমি) র পরিমাপ নির্ধারণ, মাঠের সীমানা পুনর্গঠন এবং সঠিকভাবে এদের ভাগ করা ইত্যাদির জন্য জ্যামিতিক জ্ঞানের বিকাশ হয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, বুধুরাই নামে একজন কৃষকের একটি ত্রিভুজাকৃতি জমি ছিল এবং এই জমি তার দুই মেয়ে এবং এক ছেলের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দেওয়ার জন্য মনস্থির করেছিল। প্রকৃতপক্ষে জমিটি না মেপে ত্রিভুজাকার মাঠের একটি বাহুকে তিনটি সমান ভাগ করে এবং প্রতি ভাগের দুটো বিন্দু বিপরীত শীর্ষ বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করেছিল। এভাবে ত্রিভুজটিকে তিনটি ভাগে বিভক্ত করে তিন সন্তানকে দিয়েছিল। তুমি কি মনে কর জমিটি সমান তিনটি ভাগ হয়েছিল? এই ধরনের প্রশ্নের উত্তর এবং এই সম্বন্ধীয় সমস্যা সমাধান করার জন্য সমতল আকৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ধারণা যা তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে শিখেছ তা আলোচনা করা প্রয়োজন।

তোমরা মনে করতে পারো যে, একটি সরল আবদ্ধ সামতলিক চিত্রের অংশকে ঐ চিত্রের সামতলিক অঞ্চল (*planar region*) বলা হয়। এই সামতলিক অঞ্চলের পরিমাপ বা পরিমাণকে ক্ষেত্রফল বলে। এই পরিমাপকে সর্বদা একটি সংখ্যা (যে-কোনো এককে) যেমন, 5 সেমি^{2}, 8 মি^{2}, 3 হেক্টর ইত্যাদি দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, কোনো একটি আকৃতির ক্ষেত্রফল একটি সংখ্যা (যে কোনো এককে) যা ঐ আকৃতি দিয়ে আবদ্ধ তলের অংশ হয়।

আমরা সর্বসম চিত্রের ধারণা পূর্বের শ্রেণিতে এবং সপ্তম অধ্যায়ে পেয়েছি। দুটি চিত্র সর্বসম হবে যদি তারা একই আকার এবং একই আকৃতির হয়। অন্যভাবে বলা যায় যে, যদি দুটি আকৃতি A এবং B (চিত্র 9.1 দেখো) সর্বসম হয়, তবে ট্রেসিং কাগজ ব্যবহার করে একটির উপর আর একটি

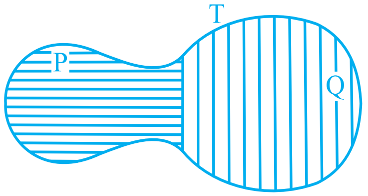
চিত্র 9.1

এরূপে বসাতে পারো যে একটি অপরটিকে সম্পূর্ণ রূপে ঢেকে ফেলবে। সুতরাং যদি দুটি আকৃতি A এবং B সর্বসম হয় তবে তাদের ক্ষেত্রফল অবশ্যই সমান হবে। কিন্তু এটির বিপরীত উক্তিটি সত্য নয়। অন্য ভাবে বলা যায়, সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি আকৃতি সর্বসম নাও হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, চিত্র 9.2 তে দুটি আয়তক্ষেত্র ABCD এবং EFGH এর ক্ষেত্রফল সমান (9×4 সেমি^{2} এবং 6×6 সেমি^{2}), কিন্তু এরা সর্বসম নয় (কেন?)।



চিত্র **9.2**

এখন চলো নিচের চিত্র 9.3 লক্ষ করি :



চিত্র **9.3**

তোমরা দেখতে পারো যে T আকৃতিটি দুটি সামতলিক অঞ্চল যা আকৃতি P এবং Q দিয়ে তৈরি হয়েছে। তোমরা সহজেই দেখতে পাও যে—

T আকৃতির ক্ষেত্রফল = P আকৃতির ক্ষেত্রফল + Q আকৃতির ক্ষেত্রফল।

তোমরা আকৃতি A এর ক্ষেত্রফলকে ক্ষেত্রফল (A), আকৃতি B এর ক্ষেত্রফলকে ক্ষেত্রফল (B), এবং T আকৃতির ক্ষেত্রফলকে ক্ষেত্রফল (T) দিয়ে চিহ্নিত করতে পার। এখন তোমরা বলতে পার যে, একটি আকৃতির ক্ষেত্রফল হল একটি সংখ্যা (কোনো এককে) যা আকৃতিটি দ্বারা আবদ্ধ অংশের সাথে সম্পর্কিত নিম্নলিখিত দুটি ধর্ম মেনে চলে—

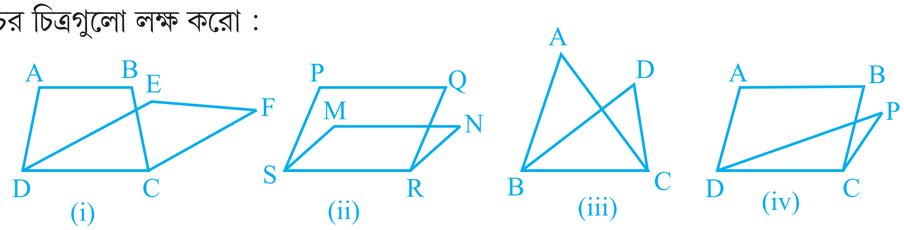
(1) যদি A এবং B দুটি সর্বসম আকৃতি হয়, তাহলে ক্ষেত্রফল (A) = ক্ষেত্রফল (B) হবে। এবং (2) যদি T আকৃতি এর সামতলিক অঞ্চলটি যা দুটি সমপাতিত না হওয়া সামতলিক অঞ্চল আকৃতি P এবং Q দিয়ে গঠিত হয়, তাহলে ক্ষেত্রফল (T) = ক্ষেত্রফল (P) + ক্ষেত্রফল (Q) হবে।

তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে আরও জেনেছ, বিভিন্ন আকৃতি যেমন, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, সামান্তরিক, ত্রিভুজ ইত্যাদির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা, কিছু সূত্র প্রয়োগের সাহায্যে। আমরা এই অধ্যায়ে, এই জামিতিক আকৃতিগুলো যা একই ভূমির উপর এবং সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত তাদের ক্ষেত্রফল

সম্বন্ধীয় সূত্রগুলো সম্পর্কে জ্ঞান অর্জনের জন্য সচেষ্ট হবো। ‘ত্রিভুজের সদৃশতা’-র কিছু ফলাফল সম্পর্কে উপলব্ধি করতেও এই অধ্যয়ন সাহায্য করবে।

9.2 একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত আকৃতিসমূহ (Figures on the Same Base and Between the Same Parallels) :

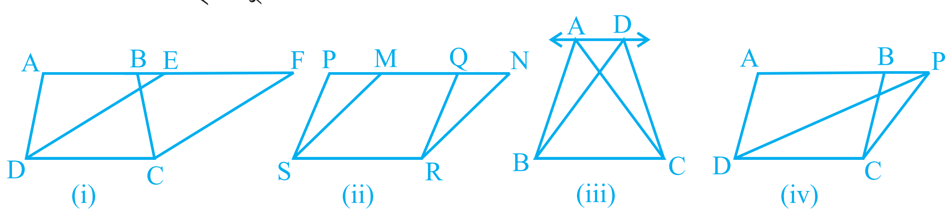
নিচের চিত্রগুলো লক্ষ করো :



চিত্র **9.4**

চিত্র 9.4(i) তে ট্রাপিজিয়াম ABCD এবং সামান্তরিক EFCD -এর সাধারণ বাহু DC। আমরা বলতে পারি, ট্রাপিজিয়াম ABCD এবং সামান্তরিক EFCD একই ভূমি DC এর ওপর অবস্থিত। অনুরূপে, চিত্র 9.4 (ii) তে সামান্তরিক PQRS এবং MNRS একই ভূমি SR এর ওপর, চিত্র 9.4(iii) তে ত্রিভুজ ABC এবং DBC একই ভূমি BC এর ওপর এবং চিত্র 9.4(iv) তে সামান্তরিক ABCD এবং ত্রিভুজ PDC একই ভূমি DC ওপর অবস্থিত।

এখন নিচের আকৃতিগুলো লক্ষ করো :

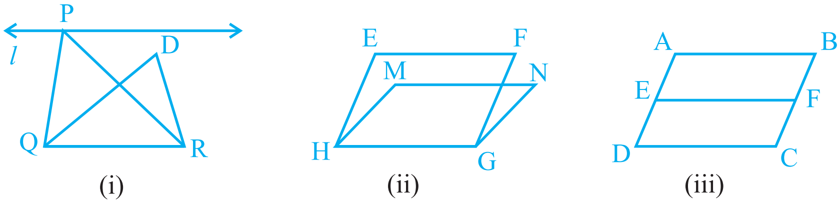


চিত্র **9.5**

চিত্র 9.5(i) তে স্পষ্টতই ট্রাপিজিয়াম ABCD এবং সামান্তরিক EFCD একই ভূমি -DC এর ওপর অবস্থিত। এ ছাড়া আরও দেখা যায় যে, ABCD ট্রাপিজিয়মের ভূমি DC এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু A ও B এবং EFCD সামান্তরিকের ভূমি DC এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু , E ও F একই রেখা AF ওপর অবস্থিত যা DC এর সমান্তরাল। আমরা বলি যে, ট্রাপিজিয়াম ABCD এবং সামান্তরিক EFCD একই ভূমি DC এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় AF ও DC এর মধ্যে অবস্থিত। অনুরূপভাবে সামান্তরিক PQRS এবং MNRS একই ভূমি SR এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয় PN এবং SR (চিত্র 9.5 (ii) দেখো) এর মধ্যে অবস্থিত। যেহেতু , PN||SR, PQRS সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু P ও Q এবং MNRS সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু M এবং N, PN বাহুর ওপর অবস্থিত। অনুরূপে ABC এবং DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল যুগল AD এবং BC এর মধ্যে অবস্থিত (চিত্র 9.5 (iii) দেখো)। চিত্র 9.5 (iv)-তে ABCD সামান্তরিক এবং PCD ত্রিভুজ একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল AP এবং DC এর মধ্যে অবস্থিত।

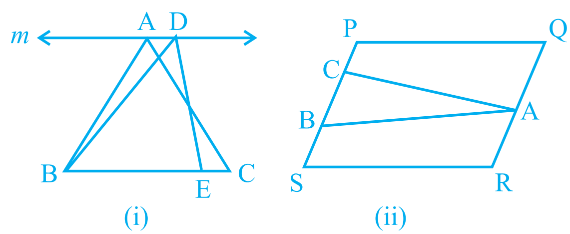
সুতরাং, দুটি আকৃতি একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে থাকবে, যদি তাদের ভূমি (বাহু) সাধারণ হয় এবং সাধারণ ভূমির বিপরীত শীর্ষবিন্দুগুলো (বা বিন্দুটি) ভূমির সমান্তরাল বাহুর উপর অবস্থিত হয়।

উপরে উল্লিখিত বিবৃতি অনুযায়ী, তুমি বলতে পার না যে, চিত্র 9.6(i) - তে Δ PQR এবং Δ DQR একই সমান্তরাল যুগল *l* এবং QR এর মধ্যে অবস্থিত।



চিত্র **9.6**

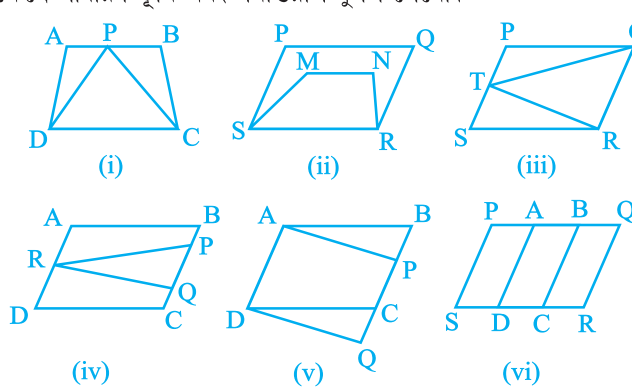
অনুরূপভাবে, তোমরা বলতে পার না যে, সামান্তরিক EFGH এবং MNGH একই সমান্তরাল যুগল EF ও HG এর মধ্যে অবস্থিত (চিত্র 9.6(ii) দেখো) এবং 9.6(iii)-তে সামান্তরিক ABCD ও EFCD একই সমান্তরাল যুগল AB ও DC এর মধ্যে অবস্থিত (যদিও তাদের সাধারণ ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের AD এবং BC এর মধ্যে অবস্থিত)। সুতরাং, এটি স্পষ্টই লক্ষ করা যায় যে, দুটি সমান্তরাল রেখার মধ্যে একটি রেখা অবশ্যই সাধারণ ভূমি হতে হবে। চিত্র 9.7(i)-তে লক্ষ করো Δ ABC এবং Δ DBE একই ভূমির উপর অবস্থিত নয়। অনুরূপে, Δ ABC এবং সামান্তরিক PQRS , চিত্র 9.7(ii) -তে একই ভূমির উপর অবস্থিত নয়।



চিত্র **9.7**

অনুশীলনী 9.1

1. নিচে প্রদত্ত আকৃতিগুলোর মধ্যে কোনগুলো একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত? এরূপ প্রতি ক্ষেত্রে সাধারণ ভূমি এবং সমান্তরাল যুগল লেখো।

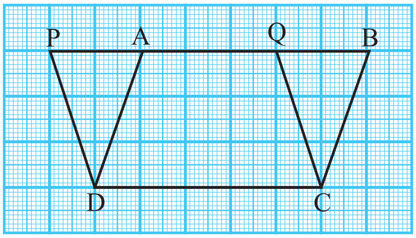


চিত্র **9.8**

9.3 একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক সমূহ (Parallelograms on the same Base and Between the same Parallels) :

যদি দুটি সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হয়, তাহলে তাদের ক্ষেত্রফলের সম্পর্ক নির্ণয় করতে এখন আমরা চেষ্টা করব। এই সম্পর্ক স্থাপনের জন্য নিচে দেওয়া কার্যকলাপ করব :

কার্যকলাপ 1 : একটি ছক কাগজে দুটি সামান্তরিক ABCD এবং PQCD অঙ্কন করো (চিত্র 9.9 দেখো)

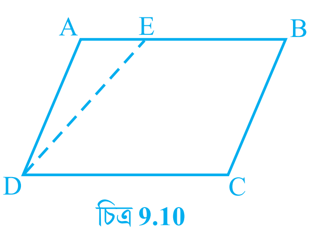


চিত্র 9.9

উপরে অঙ্কিত সামান্তরিক দুটি একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল PB এবং DC এর মধ্যে অবস্থিত। বর্গক্ষেত্রগুলো গণনা করে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি তোমরা মনে করতে পারো।

এই পদ্ধতিতে ছক কাগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সময় নির্দিষ্ট আকৃতিটি যে কয়েকটি সম্পূর্ণ বর্গ, কয়েকটি অর্ধবর্গ থেকে বেশি জায়গা আবৃত করে রাখে তাদের সংখ্যা গণনা করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হয়। অর্ধবর্গ থেকে কম আবৃত করে রাখা অঞ্চল বাদ দিতে হবে। উপরে উল্লেখিত করা পদ্ধতি ব্যবহার করে দুটো সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল প্রায় 15সেমি^{2} পাওয়া যাবে। ছক কাগজে ব্যবহার করে কয়েক জোড়া সামন্তরিক অঙ্কন করে উপরের *কার্যকলাপটি সম্পন্ন করো। তোমরা কী লক্ষ করলে? দুটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কী সমান না অসমান? বস্তুতপক্ষে তাদের ক্ষেত্রফল সমান। সুতরাং আমরা একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে, একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলোর ক্ষেত্রফল সমান।

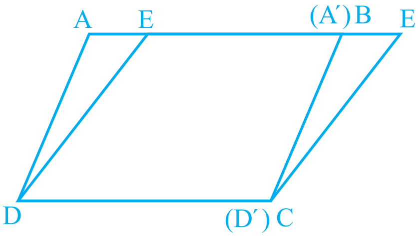
কার্যকলাপ 2 : একটি মোটা কাগজে বা কার্ডবোর্ডে একটি সামান্তরিক ABCD অঙ্কন করো। এখন চিত্র 9.10 এর অনুরূপ রেখাংশ DE অঙ্কন করো।



চিত্র 9.10

* এই কার্যকলাপটি জিওবোর্ড (Geoboard) ব্যবহার করেও করা যেতে পারে।

একটি পৃথক কাগজ থেকে ΔADE -এর সর্বসম আর একটি ত্রিভুজ $A'\ D'\ E'$ কেঁটে নাও (ট্রেসিং কাগজের সাহায্যে) এবং $\Delta\ A'D'E'$ কে চিত্রতে এমনভাবে স্থাপন করো যাতে, $A'D'$, BC-এর সাথে মিলে যায় (চিত্র 9.11 দেখো)। চিত্র 9.11 তে লক্ষ করো যে ABCD এবং $EE'CD$ সামন্তরিক দুটি একই ভূমি DC -এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AE' এবং DC এর মধ্যে অবস্থিত। তাদের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে তোমরা এখন কী মন্তব্য করবে?



চিত্র 9.11

$\therefore$ $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল (ADE) = ক্ষেত্রফল $(A'D'E')$

আবার, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (ADE) + ক্ষেত্রফল (EBCD)

= ক্ষেত্রফল $(A'D'E')$ + ক্ষেত্রফল (EBCD)

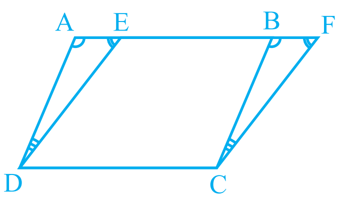
= ক্ষেত্রফল $(EE'CD)$

সুতরাং, দুটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।

এখন আমরা এ ধরনের দুটি সামান্তরিকের মধ্যে সম্পর্কটি প্রমাণ করতে চেষ্টা করব।

উপাপাদ্য 9.1 : *একই ভূমি এবং একই সামান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলোর ক্ষেত্রফল সমান।*

প্রমাণ : ধরা যাক. সামান্তরিক ABCD ও EFCD একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল AF ও DC-এর মধ্যে অবস্থিত (চিত্র 9.12 দেখো)



চিত্র 9.12

প্রমাণ করতে হবে যে, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (EFCD)

$\triangle ADE$ এবং $\triangle BCF$ এর মধ্যে

$\angle DAE = \angle CBF$ (অনুরূপ কোণ, যেখানে $AD \parallel BC$ এবং ভেদক AF) (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (অনুরূপ কোণ, যেখানে $ED \parallel FC$ এবং ভেদক AF) (2)

সুতরাং, $\angle ADE = \angle BCF$ (ত্রিভুজের কোণের সমষ্টি ধর্ম অনুযায়ী) (3)

এবং $AD = BC$ (সামান্তরিক ABCD -এর বিপরীত বাহু) (4)

অতএব $\Delta\ ADE \cong \Delta\ BCF$ [কোণ-বাহু-কোণ অনুযায়ী, (1), (3) ও (4) ব্যবহার করে]

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ADE) = ক্ষেত্রফল (BCF) (সর্বসম আকৃতির ক্ষেত্রফল সমান) (5)

এখন, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (ADE) + ক্ষেত্রফল (EDCB) ক্ষেত্রফল

= ক্ষেত্রফল (BCF) + ক্ষেত্রফল (EDCB) [(5) হতে]

= ক্ষেত্রফল (EFCD)

সুতরাং, সামান্তরিক ABCD এবং EFCD এর ক্ষেত্রফল সমান।

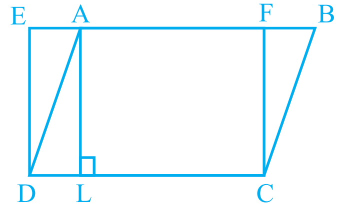
চলো এখন কিছু উদাহরণ দেখি যেখানে উপরোক্ত উপপাদ্যটি প্রয়োগ করা হয়েছে।

উদাহরণ 1 : চিত্র 9.13 তে ABCD একটি সামান্তরিক এবং EFCD একটি আয়তক্ষেত্র। এছাড়াও AL ⊥ DC

প্রমাণ করো যে,

(i) ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (EFCD)

(ii) ক্ষেত্রফল (ABCD) = DC × AL



চিত্র 9.13

সমাধান : (i) যেহেতু একটি আয়তক্ষেত্রকে একটি সামান্তরিকও বলা যায়,

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (EFCD) (উপাপাদ্য 9.1)

(ii) উপরের ফলাফল থেকে,

ক্ষেত্রফল (ABCD) = DC × FC (আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) (1)

যেহেতু, AL ⊥ DC, সুতরাং, AFCLও একটি আয়তক্ষেত্র।

অতএব, AL = FC (2)

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ABCD) = DC × AL [(1) ও (2) থেকে]

ফলাফল (ii) থেকে তোমরা কী দেখতে পাচ্ছ যে, *একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হল তার যে কোনো বাহু এবং তার অনুরূপ উচ্চতার গুণফলের সমান।* সপ্তম শ্রেণিতে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সময় এই সূত্রটি পেয়েছ। উপরের সূত্রের ভিত্তিতে উপপাদ্য 9.1 কে পুনরায় লেখা যায় যে, *একই ভূমি বা সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলোর ক্ষেত্রফল সমান।*

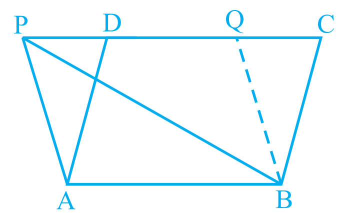
উপরের বিবৃতিটির বিপরীত বিবৃতি তোমরা লিখতে পারবে কি? এটি এইরূপ : *একই ভূমি (বা সমান ভূমি) এবং একই ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিকগুলো একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।* বিপরীত বিবৃতিটি কি সত্য? এখন, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সূত্র প্রয়োগ করে এই বিপরীত বিবৃতিটি প্রমাণ করো।

উদাহরণ 2 : একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এক একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে প্রমাণ করো যে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।

সমাধান : ধরো, Δ ABP ও ABCD সামান্তরিক একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল যুগল AB ও PC এর মধ্যে অবস্থিত (চিত্র 9.14 দেখো)।

প্রমাণ করতে হবে যে,

ক্ষেত্রফল (PAB) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD)



চিত্র 9.14

সামান্তরিক ABQP পাওয়ার জন্য BQ || AP অঙ্কন করো। এখন সামান্তরিক ABQP এবং ABCD একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AB এবং PC এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ABQP) = ক্ষেত্রফল (ABCD) (উপপাদ্য 9.1 অনুযায়ী) (1)

কিন্তু Δ PAB $\cong$ Δ BQP (কর্ণ PB সামান্তরিক ABQP কে দুটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে)

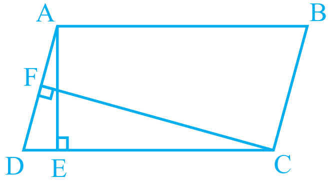
সুতরাং, ক্ষেত্রফল (PAB) = ক্ষেত্রফল (BQP) (2)

অতএব, ক্ষেত্রফল (PAB) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABQP) [(2) থেকে] (3)

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (PAB) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD) [(1) ও (3) থেকে]

অনুশীলনী 9.2

1. চিত্র 9.15 তে ABCD একটি সামান্তরিক। AE $\perp$ DC এবং CF $\perp$ AD । যদি AB = 16 সেমি, AE = 8 সেমি এবং CF = 10 সেমি হয়, তাহলে AD নির্ণয় করো।



চিত্র **9.15**

2. যদি E,F,G এবং H যথাক্রমে ABCD সামান্তরিকের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু হয়, তাহলে দেখাও যে

ক্ষেত্রফল (EFGH) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD) ।

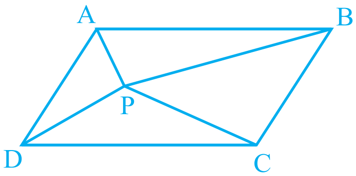
3. ABCD সামান্তরিকের DC ও AD বাহুর উপর অবস্থিত P ও Q যে কোনো দুটি বিন্দু। প্রমাণ করো যে, ক্ষেত্রফল (APB) = ক্ষেত্রফল (BQC)।

4. চিত্র 9.16-তে সামান্তরিক ABCD এর অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু P হলে দেখাও যে,

(i) ক্ষেত্রফল (APB) + ক্ষেত্রফল (PCD) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD)

(ii) ক্ষেত্রফল (APD) + ক্ষেত্রফল (PBC) = ক্ষেত্রফল (APB) + ক্ষেত্রফল (PCD)

(ইঙ্গিত: P বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করো)



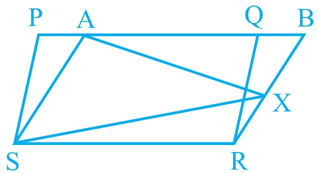
চিত্র **9.16**

5. চিত্র 9.17 তে PQRS এবং ABRS দুটি সমান্তরিক এবং BR বাহুর উপর X যে কোনো একটি বিন্দু।

দেখাও যে,

(i) ক্ষেত্রফল (PQRS) = ক্ষেত্রফল (ABRS)

(ii) ক্ষেত্রফল (AX S) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (PQRS)

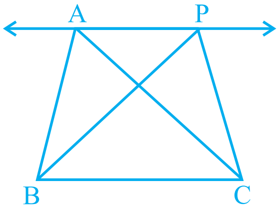


চিত্র **9.17**

6. একজন কৃষকের PQRS সামান্তরিক আকৃতির একটি মাঠ ছিল। সে RS-এর উপর A বিন্দু নিয়ে P এবং Q এর সাথে যুক্ত করলো। সে মাঠটিকে কয়টি ভাগ করেছে? এই অংশগুলোর আকৃতি কিরূপ হবে? কৃষক মাঠটির সমান অংশে আলাদাভাবে ধান ও ডাল লাগাতে চায়। সে এই কাজটি কীভাবে করবে?

9.4 একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজ সমূহ (Triangles on the same Base and between the same Parallels)

চিত্র 9.18 লক্ষ করো। এটিতে দেখা যায় যে একই ভূমি BC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল BC ও AP এর মধ্যে ত্রিভুজ ABC এবং PBC অবস্থিত। এই ধরনের ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফলের বিষয়ে তোমরা কী বলতে পার? এই প্রশ্নের উত্তরের জন্য তোমাদের একটি কার্যকলাপ করতে হবে, যেখানে ছক কাগজের ওপর একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে কয়েক জোড়া ত্রিভুজ অঙ্কন করে ছোটো বর্গক্ষেত্রগুলো গণনা করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

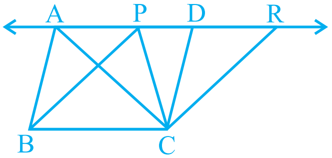


চিত্র 9.18

প্রতি ক্ষেত্রেই তোমরা প্রত্যেক জোড়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল প্রায় সমান পাবে। এই প্রক্রিয়াটি তোমরা জিয়োবোর্ড (geoboard) ব্যবহার করেও করতে পারে। এই ক্ষেত্রেও তোমরা প্রতি জোড়া ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল প্রায় সমান পাবে।

উপরের প্রশ্নটির যুক্তিসঙ্গাত উত্তর পেতে হলে, তোমরা নিম্নরূপে অগ্রসর হতে পারো :

চিত্র 9.18-তে CD || BA এবং CR || BP এইভাবে অঙ্কন করো যেখানে D এবং R বিন্দু দুটি AP রেখার ওপর থাকে (চিত্র 9.19 দেখো)



চিত্র 9.19

এখানে তোমরা দেখতে পাচ্ছ সামান্তরিক PBCR এবং সামান্তরিক ABCD একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল যুগল BC এবং AR এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (PBCR) (কেন?)

এখন, Δ ABC $\cong$ Δ CDA এবং Δ PBC $\cong$ Δ CRP (কেন?)

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ABC) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD) এবং

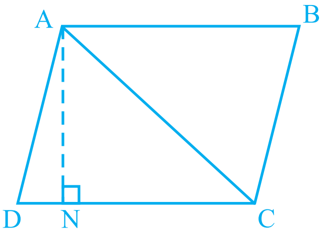
ক্ষেত্রফল (PBC) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (PBCR) (কেন?)

অতএব, ক্ষেত্রফল (ABC) = ক্ষেত্রফল (PBC)

এইভাবে তোমরা নিচের উপপাদ্যে উপনীত হবে:

উপপাদ্য 9.2 : *একই ভূমি (বা সমান ভূমি) এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।*

এখন, ধর ABCD একটি সামান্তরিক যার একটি কর্ণ AC (চিত্র 9.20 দেখো)। মনে করো AN⊥ DC। লক্ষ করো



চিত্র 9.20

$$\Delta\, ADC \cong \Delta\, CBA \qquad \text{(কেন?)}$$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল (ADC) = ক্ষেত্রফল (CBA) (কেন?)

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (ADC) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABCD)

$= \frac{1}{2}$ (DC × AN) (কেন?)

অতএব, Δ ADC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি DC × অনুরূপ উচ্চতা AN।

অন্য কথায় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হল, *ত্রিভুজের ভূমি (বা একটি বাহু) এবং অনুরূপ উচ্চতা (বা উন্নতি) -এর গুণফলের অর্ধেকের সমান*। তোমাদের মনে আছে তোমরা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এই সূত্রটি সপ্তম শ্রেণিতে শিখেছ? এই সূত্র থেকে তোমরা দেখছ যে, *একই ভূমির (বা সমান ভূমির) উপর অবস্থিত এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজ সমান অনুরূপ উচ্চতা বিশিষ্ট হবে*।

অনুরূপ সমান উচ্চতা পাওয়ার জন্য ত্রিভুজগুলোকে অবশ্যই একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে থাকতে হবে। এটি থেকে আমরা উপপাদ্য 9.2 এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপে পাই।

উপপাদ্য 9.3 : *সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুটি ত্রিভুজ যদি একই ভূমির (সমান ভূমির) উপর এবং ভূমির একই দিকে দণ্ডায়মান হয়, তাহলে ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবিস্থত হবে।*

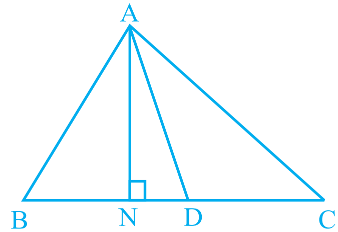
এখন চল কিছু উদাহরণ দেখি যেখানে এই ফলাফলটি ব্যবহার করা হয়েছে।

উদাহরণ 3 : দেখাও যে, একটি মধ্যমা, একটি ত্রিভুজকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

সমাধান : ধর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং AD হল তার একটি মধ্যমা (চিত্র 9.21 দেখো) তুমি দেখাতে চাও যে,

ক্ষেত্রফল (ABD) = ক্ষেত্রফল (ACD)

যেহেতু ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্রে উচ্চতা প্রয়োজন, তাই AN ⊥ BC অঙ্কন করি।



চিত্র 9.21

এখন, ক্ষেত্রফল (ABD) = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা (Δ ABD এর)

$= \frac{1}{2} \times BD \times AN$

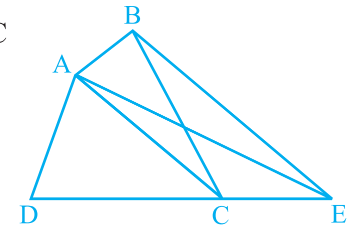
$$= \frac{1}{2} \times CD \times AN \qquad (\because BD = CD)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} \qquad (\Delta\ ACD \text{ এর})$$

$$= \text{ক্ষেত্রফল } (ACD)$$

উদাহরণ 4 : চিত্র 9.22 তে ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং $BE \parallel AC$ এবং BE রেখা DC এর বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

দেখাও যে, Δ ADE এর ক্ষেত্রফল, চতুর্ভুজ ABCD এর ক্ষেত্রফলের সমান।



চিত্র 9.22

সমাধান : চিত্রটি ভালভাবে লক্ষ করো,

Δ BAC এবং Δ EAC একই ভূমি AC এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগল AC এবং BE এর মধ্যে অবস্থিত।

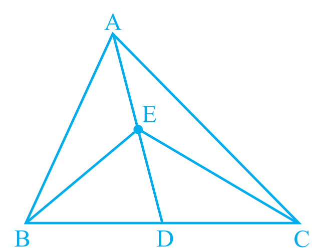
$\therefore$ ক্ষেত্রফল (BAC) = ক্ষেত্রফল (EAC) (উপাপাদ্য 9.2 অনুযায়ী)

সুতরাং, ক্ষেত্রফল (BAC) + ক্ষেত্রফল (ADC) = ক্ষেত্রফল (EAC) + ক্ষেত্রফল (ADC) (উভয়পক্ষে সমান ক্ষেত্রফল যোগ করে)

অথবা, ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (ADE)

অনুশীলনী 9.3

1. চিত্র 9.23 তে Δ ABC এর মধ্যমা AD এর উপর E যে কোনো বিন্দু। দেখাও যে, ক্ষেত্রফল (ABE) = ক্ষেত্রফল (ACE)।



চিত্র 9.23

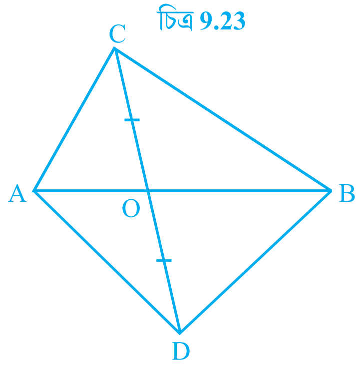
2. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E। দেখাও যে,

ক্ষেত্রফল (BED) = $\frac{1}{4}$ ক্ষেত্রফল (ABC)।

3. দেখাও যে, সামান্তরিকের কর্ণগুলো সামান্তরিককে চারটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

4. চিত্র 9.24 তে একই ভূমি AB-এর উপর অবস্থিত দুটি ত্রিভুজ ABC এবং ABD। যদি AB রেখাংশ CD রেখাংশকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে দেখাও যে,

ক্ষেত্রফল (ABC) = ক্ষেত্রফল (ABD)।



চিত্র 9.24

5. Δ ABC এর BC, CA এবং AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D,E, এবং F । দেখাও যে,

(i) BDEF একটি সামান্তরিক (ii) ক্ষেত্রফল (DEF) = $\frac{1}{4}$ ক্ষেত্রফল (ABC)

(iii) ক্ষেত্রফল (BDEF) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ABC)

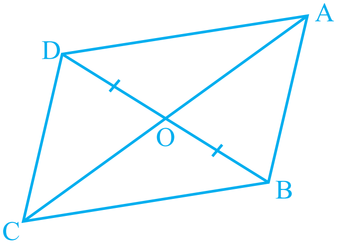
6. চিত্র 9.25 তে ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয AC ও BD এমনভাবে ছেদ করে যাতে OB = OD হয়। যদি AB = CD হয়, তাহলে দেখাও যে

(i) ক্ষেত্রফল (DOC) = ক্ষেত্রফল (AOB)

(ii) ক্ষেত্রফল (DCB) = ক্ষেত্রফল (ACB)

(iii) DA || CB অথবা ABCD একটি সামান্তরিক ।

(*ইঙ্গিত* : D এবং B থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কন করো)



চিত্র **9.25**

7. Δ ABC এর AB এবং AC এর উপর D এবং E এইরূপ দুটি বিন্দু যাতে ক্ষেত্রফল (DBC) = ক্ষেত্রফল (EBC) হয়। প্রমাণ করো যে DE || BC।

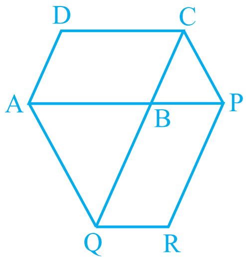
8. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা XY। যদি BE || AC এবং CF || AB হয় যেগুলো XY তে যথাক্রমে E এবং F বিন্দুতে মিলিত হয়। দেখাও যে,

ক্ষেত্রফল (ABE) = ক্ষেত্রফল (ACF)

9. সামান্তরিক ABCD এর AB কে P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। A বিন্দু থেকে CP এর সমান্তরাল AQ অঙ্কন করা হল যা CB এর বর্ধিতাংশকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। এবার সামান্তরিক PBQR সম্পূর্ণ করা হল (চিত্র 9.26 দেখো)। দেখাও যে,

ক্ষেত্রফল (ABCD) = ক্ষেত্রফল (PBQR)।

[ইঙ্গিত : AC এবং PQ যোগ করো। এবার ক্ষেত্রফল (ACQ) এবং ক্ষেত্রফল (APQ) তুলনা করো]



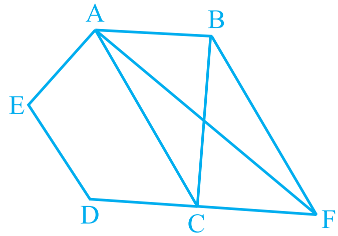
চিত্র **9.26**

10. ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB || DC এবং কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে ক্ষেত্রফল (AOD) = ক্ষেত্রফল (BOC)।

11. চিত্র 9.27 তে ABCDE একটি পঞ্চভুজ। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AC এর সমান্তরাল সরলরেখা বর্ধিত DC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে,

(i) ক্ষেত্রফল (ACB) = ক্ষেত্রফল (ACF)

(ii) ক্ষেত্রফল (AEDF) = ক্ষেত্রফল (ABCDE)

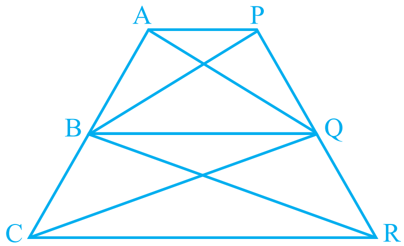


চিত্র **9.27**

12. সুরেন্দ্র নামে গ্রামবাসীর চতুর্ভুজাকার একটি ভূমিখণ্ড আছে। গ্রামে স্বাস্থ্যকেন্দ্র নির্মাণ করার জন্য গ্রাম পঞ্চায়েত তার ভূমিখণ্ডের একটি কোণা থেকে কিছুটা জায়গা নেবার সিদ্ধান্ত নিল। সুরেন্দ্র এই প্রস্তাবটি এই শর্তে মেনে নিল যে গ্রাম পঞ্চায়েত, তার জমি সংলগ্ন জমি থেকে সমপরিমাণ জমি এমনভাবে দেবে যাতে তার জমিখণ্ডটি ত্রিভুজাকৃতি হয়। এই প্রস্তাবটি কীভাবে কার্যকর করা যায় তা ব্যাখ্যা করো।

13. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার AB || DC। AC এর সমান্তরাল সরলরেখা AB কে X বিন্দুতে এবং BC কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে,
ক্ষেত্রফল (ADX) = ক্ষেত্রফল (ACY) ।
[*ইঙ্গিত* : CX যুক্ত করো]

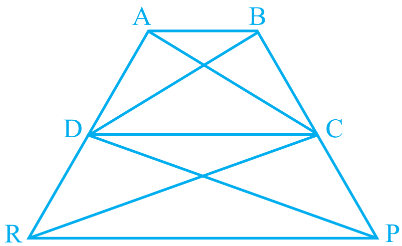
14. চিত্র 9.28,তে AP || BQ || CR প্রমাণ করো যে,
ক্ষেত্রফল (AQC) = ক্ষেত্রফল (PBR)



চিত্র 9.28

15. চতুর্ভুজ ABCD -এর কর্ণদ্বয় AC ও BD এমনভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে যে, ক্ষেত্রফল (AOD)= ক্ষেত্রফল (BOC) হয়। প্রমাণ করো যে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম।

16. চিত্র 9.29 তে ক্ষেত্রফল (DRC) = ক্ষেত্রফল (DPC) এবং ক্ষেত্রফল (BDP) = ক্ষেত্রফল (ARC)। দেখাও যে, চতুর্ভুজ ABCD এবং DCPR উভয়েই ট্রাপিজিয়াম।

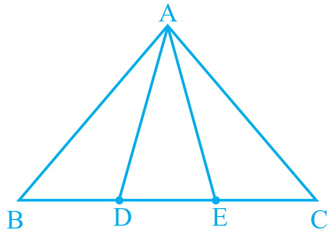


চিত্র 9.29

অনুশীলনী 9.4 ঐচ্ছিক (Optional)*

1. সামান্তরিক ABCD এবং আয়তক্ষেত্র ABEF এর একই ভূমি AB এবং তাদের ক্ষেত্রফল সমান। দেখাও যে সামান্তরিকের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা থেকে বৃহত্তর।

2. 9.30 চিত্রে BC বাহুর উপর D এবং E এইরূপ দুটি বিন্দু যে BD = DE = EC দেখাও যে,
ক্ষেত্রফল (ABD) = ক্ষেত্রফল (ADE) = ক্ষেত্রফল (AEC)
তোমরা কী এখন অধ্যায়ের ভূমিকায় ছেড়ে আসা প্রশ্নটির উত্তর দিতে পারো যেখানে *বুধুরাই*-এর জমিটি প্রকৃতপক্ষে সমান তিনটি ভাগ হয়েছিল কি না?



চিত্র 9.30

* এই অনুশীলটি পরীক্ষার দৃষ্টিকোণ থেকে বিবেচিত নয়।

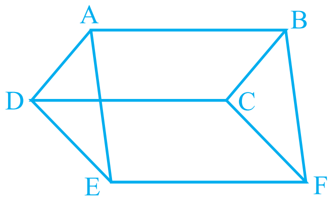
(**মন্তব্য :** লক্ষ করো যে, BD = DE = EC ধরে ABC ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট তিনটি ত্রিভুজ ABD, ADE এবং AEC -তে বিভক্ত করা হয়েছে। অনুরূপভাবে BC বাহুকে n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করে এবং BC বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সঙ্গো প্রতিটি অংশের বিন্দুগুলো যুক্ত করে ΔABC -কে n সংখ্যক সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে ভাগ করা যায়।)

3. চিত্র 9.31-তে ABCD, DCFE এবং ABFE হল তিনটি সামান্তরিক। প্রমাণ করো যে,

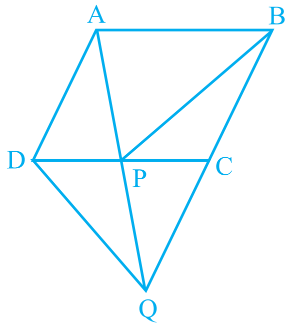
ক্ষেত্রফল (ADE) = ক্ষেত্রফল (BCF)

4. চিত্র 9.32 তে ABCD একটি সামান্তরিক এবং BC কে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যাতে AD=CQ হয়। যদি AQ, DC কে P বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে, ক্ষেত্রফল (BPC) = ক্ষেত্রফল (DPQ)

[*ইঙ্গিত* : AC যুক্ত করো]



চিত্র **9.31**



চিত্র **9.32**

5. চিত্র 9.33 তে ABC এবং BDE দুটি সমবাহু ত্রিভুজ যাতে BC এর মধ্যবিন্দু D , যদি AE, BC কে F বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে দেখাও যে,

(i) ক্ষেত্রফল (BDE) = $\frac{1}{4}$ ক্ষেত্রফল (ABC)

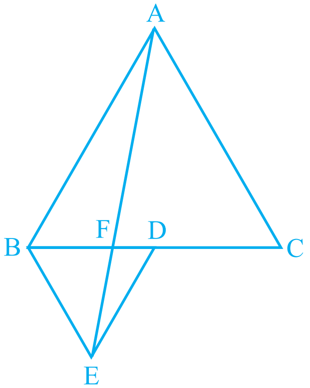
(ii) ক্ষেত্রফল (BDE) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (BAE)

(iii) ক্ষেত্রফল (ABC) = 2 ক্ষেত্রফল (BEC)

(iv) ক্ষেত্রফল (BFE) = ক্ষেত্রফল (AFD)

(v) ক্ষেত্রফল (BFE) = 2 ক্ষেত্রফল (FED)

(vi) ক্ষেত্রফল (FED) = $\frac{1}{8}$ ক্ষেত্রফল (AFC)



চিত্র **9.33**

(*ইঙ্গিত* : EC এবং AD যুক্ত করো। দেখাও যে, BE || AC এবং DE || AB ইত্যাদি)

6. চতুর্ভুজ ABCD এর কর্ণদ্বয় AC এবং BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে,

ক্ষেত্রফল (APB) × ক্ষেত্রফল (CPD) = ক্ষেত্রফল (APD) × ক্ষেত্রফল (BPC).

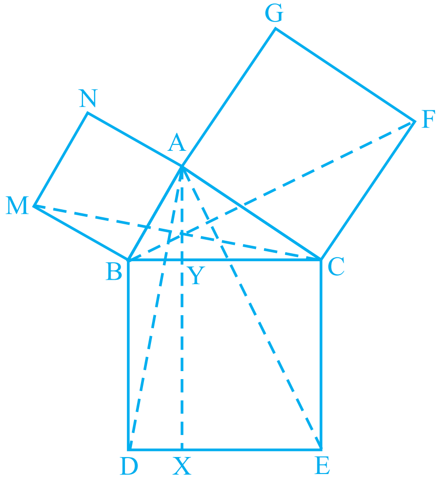
[*ইঙ্গিত* : A এবং C থেকে BD এর উপর লম্ব অঙ্কন করো]

7. ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q । R হল AP এর মধ্যবিন্দু। দেখাও যে,

(i) ক্ষেত্রফল (PRQ) = $\frac{1}{2}$ ক্ষেত্রফল (ARC) (ii) ক্ষেত্রফল (RQC) = $\frac{3}{8}$ ক্ষেত্রফল (ABC)

(iii) ক্ষেত্রফল (PBQ) = ক্ষেত্রফল (ARC)

8. চিত্র 9.34 তে সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর $\angle$ A সমকোণ। BC, CA এবং AB বাহু তিনটির উপর তিনটি বর্গক্ষেত্র যথাক্রমে BCED, ACFG এবং ABMN । রেখাংশ AX $\perp$ DE যা BC কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে,



চিত্র **9.34**

(i) Δ MBC $\cong$ ΔABD

(ii) ক্ষেত্রফল (BYXD) = 2 ক্ষেত্রফল (MBC)

(iii) ক্ষেত্রফল (BYXD) = ক্ষেত্রফল (ABMN)

(iv) Δ FCB $\cong$ Δ ACE

(v) ক্ষেত্রফল (CYXE) = 2 ক্ষেত্রফল (FCB)

vi) ক্ষেত্রফল (CYXE) = ক্ষেত্রফল (ACFG)

(vii) ক্ষেত্রফল (BCED) = ক্ষেত্রফল (ABMN) + ক্ষেত্রফল (ACFG)

মন্তব্য : ফলাফল (vii) হল বিখ্যাত *পিথাগোরাসের উপপাদ্য*। এই উপপাদ্যটির একটি সহজ প্রমাণ তোমরা দশম শ্রেণিতে শিখবে।

9.5 সারসংক্ষেপ (Summary)

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নের বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একটি আকৃতির ক্ষেত্রফল একটি সংখ্যা (কোনও এককে) যা আকৃতিটি দ্বারা আবদ্ধ ঐ তলের অংশটির সঙ্গে সম্পর্কিত।
2. দুটি সর্বসম আকৃতির ক্ষেত্রফল সমান কিন্তু এই উক্তির বিপরীত উক্তিটি সত্য নাও হতে পারে।
3. যদি আকৃতি T এর সামতলিক অঞ্চলটি দুটি ছেদ করে না এরূপ সামতলিক অঞ্চল। যদি আকৃতি P ও আকৃতি Q দ্বারা গঠিত হয়, তাহলে ক্ষেত্রফল (T) = ক্ষেত্রফল (P) + ক্ষেত্রফল (Q) হবে।
4. দুটি আকৃতি একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে থাকবে, যদি তাদের ভূমি (বাহু) সাধারণ হয় এবং সাধারণ ভূমির বিপরীত শীর্ষবিন্দুগুলো (অথবা শীর্ষবিন্দুটি) ভূমির সমান্তরাল বাহুর উপর অবস্থিত হয়।
5. একই ভূমির (বা সমান ভূমির) উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলোর ক্ষেত্রফল সমান।
6. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হল তার ভূমি এবং অনুরূপ উচ্চতার গুণফল।
7. একই ভূমির (বা সমান ভূমির) উপর এবং একই ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট সামান্তরিকগুলো একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।
8. যদি একটি সামান্তরিক এবং একটি ত্রিভুজ একই ভূমির এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হয় তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হয়।
9. একই ভূমির (বা সমান ভূমির) উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল সমান।
10. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হল তার ভূমি ও অনুরূপ উচ্চতার গুণফলের অর্ধেক।
11. একই ভূমির (বা সমান ভূমির) উপর অবস্থিত এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলো একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।
12. ত্রিভুজের একটি মধ্যমা ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

অধ্যায়-10

বৃত্ত (CIRCLES)

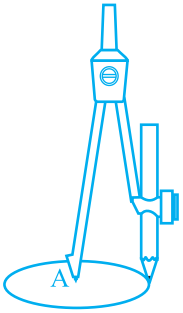
10.1 ভূমিকা

তোমরা দৈনন্দিন জীবনে অনেক বস্তু দেখেছ, যেগুলি গোলাকৃতি, যেমন-একটি যানবাহনের চাকা, চুড়ি, বিভিন্ন ঘড়ির ডায়েল (dials), 50 পয়সা, 1 টাকা, 5 টাকার মুদ্রা, চাবির রিং, শার্টের বোতাম ইত্যাদি (চিত্র 10.1দেখ)। ঘড়িতে তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ যে, সেকেন্ডের কাঁটা ডায়েলের চারদিকে দ্রুত ঘোরে এবং সরু আগা গোলাকার পথে অগ্রসর হয়। সেকেন্ডের কাঁটার সরু আগা দ্বারা চিহ্নিত পথকে বৃত্ত বলা হয়। এ অধ্যায়ে তোমরা বৃত্ত, বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন অংশ এবং বৃত্তের ধর্মাবলী সম্পর্কে জানবে।

চিত্র 10.1

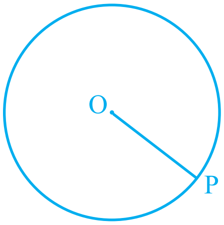
10.2 বৃত্ত এবং বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন পদ : একটি পর্যালোচনা (Circles and Its Related Terms: A Review)

একটি কম্পাস নাও এবং ইহাতে পেনসিল যুক্ত করো। একটি কাগজের সিটের উপর একটি বিন্দুতে কম্পাসটির কাঁটাযুক্ত বাহুটি রাখো। কিছুটা দূরত্ব বজায় রেখে অপর বাহুটি বিস্তৃত (Open) কর। কাঁটাযুক্ত বাহু পূর্বের বিন্দুতে রেখে অপর বাহুকে ঘোরাও যেন একটা পূর্ণ আবর্তন হয়। কাগজের উপর পেনসিল দ্বারা চিহ্নিত বন্ধ চিত্রটি কি? তোমরা জান, এটি হল একটি বৃত্ত (চিত্র 10.2 দেখো)। কিভাবে তোমরা একটা বৃত্ত পেয়েছিলে? তোমরা একটা বিন্দু স্থির রেখে (A চিত্র 10.2) ঐ স্থির বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে অন্য সব বিন্দুগুলি এঁকে ছিলে। এ থেকে নিচের সংজ্ঞা পাওয়া যায়:



চিত্র 10.2

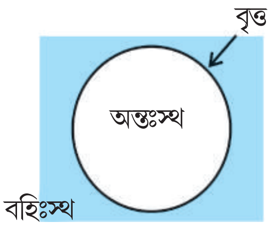
একটি সমতলে, একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে সমতলের সবগুলো বিন্দুর সংগ্রহকে বলা হয় বৃত্ত। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় বৃত্তের কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট দূরত্বকে বলা হয়, বৃত্তের ব্যাসার্ধ (চিত্র 10.3 দেখো), O হল বৃত্তের কেন্দ্র এবং OP দৈর্ঘ্য হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ।



চিত্র 10.3

মন্তব্য : লক্ষ করো, বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ, অর্থাৎ 'ব্যাসার্ধ' দুটি অর্থে ব্যবহৃত হয়— রেখাংশ এবং অপরটি এটির দৈর্ঘ্যকে বোঝায়।

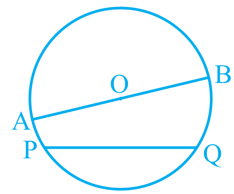
ষষ্ঠ শ্রেণিতে তোমরা নিচের ধারণাগুলি সম্পর্কে পরিচিত হয়েছ, আমরা এগুলি পুনরায় আয়ত্ত করছি। একটি বৃত্ত যে তলে অবস্থিত, সেই তলকে বৃত্তটি তিনটি অংশে বিভক্ত করে। সেগুলি হলো (i) বৃত্তের ভিতরের অংশ, যাকে বৃত্তের অন্তঃস্থ অংশও বলা হয়। (ii) বৃত্তটি (iii) বৃত্তের বাইরের অংশ, যাকে বৃত্তের বহিঃস্থ অংশও বলা হয় (চিত্র 10.4 দেখো)। বৃত্তটি এবং এটার অন্তঃস্থ অংশ বৃত্তাকার অঞ্চল তৈরি করে।



চিত্র 10.4

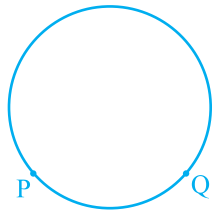
যদি তোমরা বৃত্তের উপর দুটি বিন্দু P এবং Q নাও, তাহলে PQ রেখাংশকে বলা হয় বৃত্তের জ্যা (চিত্র 10.5 দেখো)। বৃত্তের কেন্দ্রগামী জ্যাকে বলা হয় বৃত্তের ব্যাস। ব্যাসার্ধের মতো ব্যাসও দুটি অর্থে ব্যবহৃত হয়, অর্থাৎ একটি রেখাংশ এবং অপরটি এটির দৈর্ঘ্য। তোমরা কী বৃত্তের মধ্যে ব্যাসের চেয়ে বড় অন্য কোনো জ্যা খুঁজে পেয়েছে? না। তোমরা লক্ষ্য করো, ব্যাস হচ্ছে দীর্ঘতম জ্যা এবং সবগুলি ব্যাস সমদৈর্ঘ্যের যা দুটি ব্যাসার্ধের সমান।

চিত্র 10.5-এ AOB হল বৃত্তের ব্যাস। একটি বৃত্তে কতগুলো ব্যাস আছে? একটি বৃত্ত অংকন করো এবং কতগুলো ব্যাস, তোমরা খুঁজে দেখ।



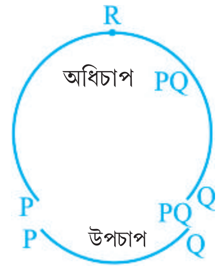
চিত্র 10.5

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী বৃত্তের একটি অংশকে চাপ বলে, চিত্র 10.6 এ P এবং Q দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী বৃত্তের অংশটি দেখ। তোমরা দেখবে যে, এখানে দুটি অংশ একটি বৃহত্তর এবং অন্যটি ক্ষুদ্রতর (চিত্র 10.7 দেখো)। বৃহত্তর অংশটিকে বলা হয় অধিচাপ PQ এবং ক্ষুদ্রতর অংশটিকে বলা হয় উপচাপ PQ। উপচাপ PQ কে $\overset{\frown}{PQ}$ দ্বারা এবং অধিচাপ PQ কে $\overset{\frown}{PQR}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। যেখানে R বিন্দুটি P এবং Q এর মাঝে অবস্থিত যে কোন একটি বিন্দু। যদি না উল্লেখ থাকে চাপ PQ অথবা $\overset{\frown}{PQ}$ বলতে উপচাপ PQ কেই বোঝায়। P এবং Q যখন ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হয়, তখন উভয় চাপই সমান হয় তখন প্রত্যেকটাকেই অর্ধবৃত্ত বলা হয়।



চিত্র 10.6

সম্পূর্ণ বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে বলা হয় এটির পরিধি। একটি জ্যা এবং বৃত্তচাপ দুটির যে কোনো একটির মধ্যবর্তী অঞ্চলকে বৃত্তাকার অঞ্চলের বৃত্তাংশ অথবা শুধু বৃত্তের বৃত্তাংশ বলা হয়। তোমরা লক্ষ করবে যে বৃত্তাংশও দুই ধরনের, একটি উপবৃত্তাংশ এবং অপরটি অধিবৃত্তাংশ (চিত্র 10.8 দেখো)। একটি বৃত্তচাপ এবং চাপের প্রান্তবিন্দুতে দুটি ব্যাসার্ধ দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলকে বৃত্তকলা বলা হয়। বৃত্তাংশের মতো, তোমরা পাবে উপচাপের অনুরূপ উপবৃত্তকলা এবং অধিচাপের অনুরূপ অধিবৃত্তকলা।



চিত্র 10.7

চিত্র 10.9 এ OPQ অঞ্চলটি হল উপবৃত্তকলা। বৃত্তাকার অঞ্চলের অপর অংশটি হল অধিবৃত্তকলা, যখন বৃত্তচাপ দুটি সমান অর্থাৎ প্রত্যেকটি অর্ধবৃত্ত তখন উভয় বৃত্তাংশ এবং উভয় বৃত্তকলা এক হবে এবং প্রত্যেকটি অর্ধবৃত্তাকার অঞ্চল হিসাবে পরিচিত।

চিত্র 10.8

চিত্র 10.9

অনুশীলনী 10.1

1. শূন্যস্থান পূরণ করো :

(i) বৃত্তের কেন্দ্র, বৃত্তের ______________ অবস্থিত। (বাইরে / ভিতরে)

(ii) কেন্দ্র থেকে একটি বিন্দুর দূরত্ব, বৃত্তের ব্যাসার্ধের অধিক হলে, বিন্দুটির অবস্থান বৃত্তের ______________ (বাইরে / ভিতরে)

(iii) বৃত্তের দীর্ঘতম জ্যা হল বৃত্তের ______________ ।

(iv) একটি বৃত্তচাপ হল ______________ , যখন উহার প্রান্তবিন্দু হল ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

(v) বৃত্তের বৃত্তাংশ হল, বৃত্তচাপ এবং বৃত্তের ______________ এর মধ্যবর্তী অঞ্চল।

(vi) একটি সমতলস্থ বৃত্ত, সমতলটিকে ______________অংশে ভাগ করে।

2. সত্য অথবা মিথ্যা লিখ। উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও :

(i) কেন্দ্র এবং বৃত্তের উপর অবস্থিত কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ হল বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

(ii) একটি বৃত্তের শুধুমাত্র নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান জ্যা আছে।

(iii) একটি বৃত্তকে তিনটি সমান বৃত্তচাপে ভাগ করলে, প্রত্যেকটি ভাগ হল অধিচাপ।

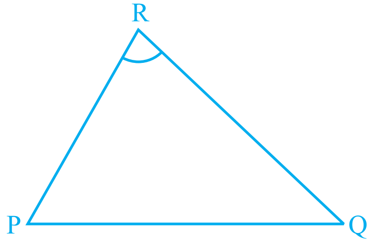
(iv) বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ একটি জ্যা হল বৃত্তের ব্যাস।

(v) বৃত্তাংশ হল জ্যা এবং অনুরূপ বৃত্তচাপের মধ্যবর্তী অঞ্চল।

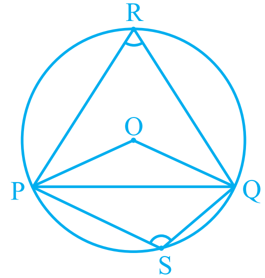
(vi) বৃত্ত হল একটি সামতলিক চিত্র।

10.3 একটি জ্যা দিয়ে একটি বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ (Angle Subtended by a Chord at a Point)

PQ একটি রেখাংশ এবং PQ এর উপর অবস্থিত নয় এরূপ একটি বিন্দু হল R, PR এবং QR যুক্ত করা হল (চিত্র 10.10 দেখ)। তাহলে R বিন্দুতে PQ রেখাংশ দ্বারা গঠিত কোণটি হল $\angle$ PRQ। চিত্র 10.11 এর মধ্যে $\angle$ POQ, $\angle$ PRQ এবং $\angle$ PSQ কী ধরনের কোণ? O কেন্দ্রে PQ জ্যা দ্বারা গঠিত কোণটি হল $\angle$ POQ, অধিচাপ এবং উপচাপ PQ এর উপর R এবং S বিন্দুতে, PQ দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলো হল যথাক্রমে $\angle$ PRQ এবং $\angle$ PSQ।



চিত্র 10.10

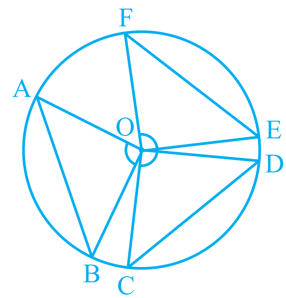


চিত্র 10.11

চলো, এখন জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং কেন্দ্রে জ্যা দ্বারা উৎপন্ন কোণের মধ্যে সম্পর্ক পরীক্ষা করি। তোমরা লক্ষ করেছ যে, বৃত্তের বিভিন্ন জ্যা এবং তাদের দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণগুলির মধ্যে

দীর্ঘতর জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন করে। যদি তোমরা সমান দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা নাও তবে কি ঘটবে? কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণগুলি কি সমান, না সমান নয়?

দুই বা ততোধিক সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা নাও এবং কেন্দ্রে জ্যাগুলি দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলি পরিমাপ কর (চিত্র 10.12)। তোমরা দেখবে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণগুলি সমান। চল, এ ঘটনা প্রমাণ করি।



চিত্র **10.12**

উপপাদ্য 10.1 : *কোনো বৃত্তের সমান জ্যা সমূহ কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।*

প্রমাণ : তোমাদের দেওয়া আছে O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে দুইটি সমান জ্যা AB এবং CD (চিত্র 10.13 দেখো) প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle$ AOB = $\angle$ COD.

Δ AOB এবং Δ COD এর মধ্যে

OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

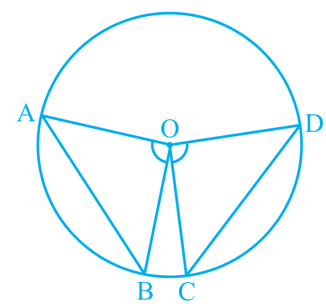
OB = OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

AB = CD (দেওয়া আছে)

সুতরাং, Δ AOB $\cong$ Δ COD (বাহু-বাহু-বাহু নিয়মে)

এ থেকে পাওয়া যায়, $\angle$ AOB = $\angle$ COD

(সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

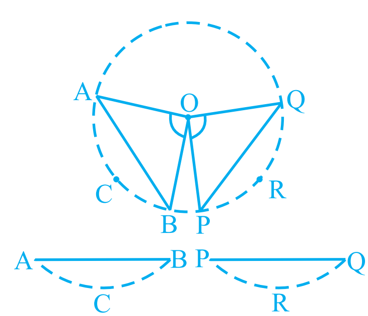


চিত্র **10.13**

মন্তব্য : সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশের পরিবর্তে, প্রয়োগের সুবিধার্থে সংক্ষেপে CPCT ব্যবহার করা হবে, কারণ তোমরা দেখবে, আমরা এটা বারবার ব্যবহার করছি।

এখন, যদি দুটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তখন তোমরা জ্যা-গুলো সম্পর্কে কি বলবে? জ্যাগুলো কি সমান, না সমান নয়? চলো, নিচের কার্যকলাপের সাহায্যে এটা পরীক্ষা করি।

একটি ট্রেসিং পেপার নিয়ে তার উপর একটি বৃত্ত অংকন কর। বৃত্ত বরাবর কেটে নাও, যাতে একটি চাকতি (disc) পাওয়া যায়। O কেন্দ্রে কোণ AOB অংকন কর, যেখানে A,B বৃত্তের উপর অবস্থিত বিন্দু। $\angle$ AOB এর সমান করে কেন্দ্রে অপর একটি কোণ POQ আঁকা হলো। AB এবং PQ বরাবর চাকতি কাঁট, (চিত্র 10.14 দেখ)। তোমরা বৃত্তের দুটি বৃত্তাংশ ACB এবং PRQ পাবে। যদি একটিকে অপরটির উপর স্থাপন কর, তোমরা কি লক্ষ করবে? এগুলি পরস্পরকে আবৃত্ত করে, অর্থাৎ এগুলো সর্বসম। তাহলে AB = PQ।



চিত্র **10.14**

যদিও তোমরা দেখেছ, এটি একটি বিশেষ ক্ষেত্রে সত্য। এরূপ আরো সমান কোণ নিয়ে চেষ্টা করো। নিম্নের প্রদত্ত উপপাদ্যের জন্য সকল জ্যা-ই সমান হবে।

উপপাদ্য 10.2 : যদি বৃত্তের কেন্দ্রে জ্যা দ্বারা উৎপন্ন কোণগুলো সমান হয় তবে, তার জ্যা-গুলোও সমান হয়।

উপরোক্ত উপপাদ্যটি 10.1 উপপাদ্যের বিপরীত। লক্ষ করো যে, 10.13 চিত্রে যদি $\angle$ AOB = $\angle$COD ধরা হয়, তবে

Δ AOB $\cong$ Δ COD (কেন?)

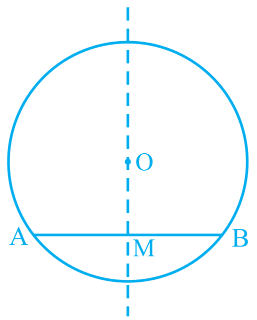
তোমরা কি এখন দেখতে পাচ্ছ যে AB = CD ?

অনুশীলনী 10.2

1. স্মরণ কর যে, সমান ব্যাসার্ধযুক্ত দুটি বৃত্ত সর্বসম। প্রমাণ কর যে সর্বসম বৃত্তের সমান জ্যাগুলো বৃত্তটির কেন্দ্রে সমমাপের কোণ উৎপন্ন করে।
2. প্রমাণ কর যে, সর্বসম বৃত্তের জ্যা-গুলোর দ্বারা যদি তাদের কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে জ্যা-গুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

10.4 কেন্দ্র থেকে কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব

কার্যকলাপ : ট্রেসিং পেপারে একটি বৃত্ত আঁকো যার কেন্দ্র বিন্দু O, AB একটি জ্যা। এখন কাগজটিকে 'O' বিন্দুগামী একটি রেখা বরাবর ভাঁজ করো, যাতে জ্যা এর একটি অংশ অপর অংশের উপর আপতিত হয়। মনে করো এই ভাঁজ AB কে M বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle$OMA = $\angle$ OMB = 90° অথবা OM, AB এর উপর লম্ব। B বিন্দুটি কি A এর সহিত সমাপতিত (coincide) (চিত্র 10.15 দেখো)?



চিত্র 10.15

হ্যাঁ, সমাপতিত হবে, সুতরাং MA = MB।

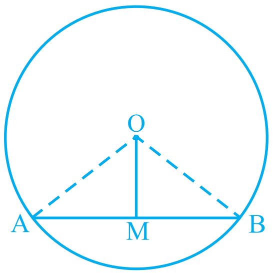
OA এবং OB যুক্ত করে তোমরা একটা প্রমাণ দাও এবং প্রমাণ কর যে, OMA এবং OMB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। এই প্রমাণটি নিম্নোক্ত উপপাদ্যটির একটি বিশেষ উদাহরণ মাত্র:

উপপাদ্য 10.3 : *কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে যে কোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।*

এই উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যটি কী? এটা লিখতে গেলে প্রথমে জানা দরকার 10.3 নং উপপাদ্যে স্বীকার্য বিষয় কী এবং কী প্রমাণ করা হয়েছিল। এখানে প্রদত্ত যে বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে যে কোনো একটি জ্যা এর উপর লম্ব আঁকা হয়েছে এবং প্রমাণ করতে হবে যে, এই লম্বটি জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাহলে বিপরীত অনুমানটি হল 'যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে অঙ্কিত রেখা, বৃত্তটির কোনো জ্যাকে সম দ্বিখণ্ডিত করে,' তবে প্রমাণ করতে হবে যে 'রেখাটি জ্যা এর উপর লম্ব।' অতএব বিপরীত উপপাদ্যটি হল—

উপপাদ্য 10.4 : *কোনো বৃত্তের কেন্দ্রগামী রেখা কোনো জ্যা এর সমদ্বিখণ্ডক হলে, রেখাটি জ্যা এর উপর লম্ব।*

এটা কি সত্য? ভিন্ন ভিন্ন ভাবে চেষ্টা করো এবং দেখ। তোমরা দেখবে যে এটা প্রকৃতপক্ষে সত্য। নিচের অনুশীলনীটি সমাধান করে দেখ। এটি সাধারণভাবে সত্য কি না। কারণসহ প্রতিটি ধাপ উল্লেখ করো।



চিত্র **10.16**

মনে কর, O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB যে কোন একটি জ্যা। M, AB এর মধ্যবিন্দু এবং O, M যুক্ত করো। প্রমাণ করতে হবে যে, $OM \perp AB$। O, A এবং O,B যুক্ত করো।

(চিত্র 10.16 দেখ) OAM এবং OBM ত্রিভুজদ্বয়ে,

$OA = OB$ (কেন?)

$AM = BM$ (কেন?)

$OM = OM$ (সাধারণ বাহু)

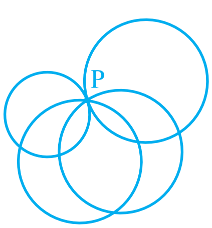
সুতরাং, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (কিভাবে?)

এ থেকে পাই, $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (কেন?)

10.5 তিনটি বিন্দুগামী বৃত্ত : (Circle through Three Points)

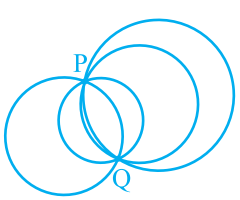
তোমরা ষষ্ঠ অধ্যায়ে শিখেছ যে, একটি রেখা অঙ্কনের জন্য দুটি বিন্দুই যথেষ্ট। অর্থাৎ দুটি বিন্দুগামী একটি এবং কেবলমাত্র একটি রেখা অঙ্কন করা যায়। স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন জাগে যে, কোনো সমতলে একটি বৃত্ত অঙ্কনের জন্য ন্যূনতম কতগুলো বিন্দুর প্রয়োজন?

যে কোনো একটি বিন্দু P নাও। এই বিন্দু দিয়ে কতগুলি বৃত্ত অংকন করা যায়? দেখবে যে এই বিন্দু দিয়ে যত খুশি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় ।(চিত্র 10.17(i) দেখো) এখন দুটি বিন্দু P এবং Q নাও। তোমরা পুনরায় দেখবে যে P এবং Q বিন্দু দিয়ে অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব (চিত্র 10.17(ii) দেখো)। যদি তিনটি বিন্দু A, B এবং C নেওয়া হয় তবে কত সংখ্যক বৃত্ত আঁকা যাবে? তিনটি সমরেখ বিন্দু দিয়ে তোমরা কি একটি বৃত্ত অংকন করতে পারো।



(i)

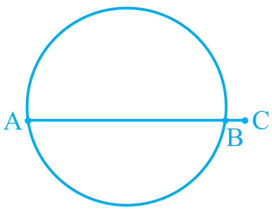
চিত্র **10.17**



(ii)

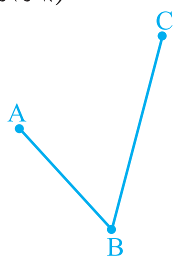
চিত্র **10.18**

না, যদি বিন্দুগুলো একটি রেখার উপর অবস্থিত হয়, তবে তৃতীয় বিন্দুটি, দুটি বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের ভিতরে অথবা বাইরে অবস্থিত হবে (চিত্র 10.18 দেখো)।

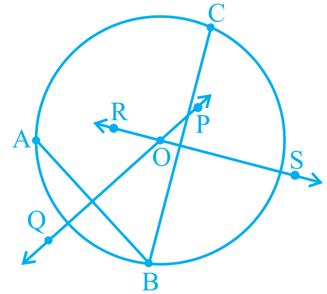


চিত্র **10.18**

অতএব, একই রেখায় অবস্থান করে না এরূপ তিনটি বিন্দু A, B এবং C নেওয়া হল। অথবা অন্যভাবে, বিন্দু তিনটি অসমরেখ (চিত্র 10.19(i) দেখো)। AB এবং BC এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ এবং RS অংকন করা হল। মনে কর, এই লম্ব সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। (লক্ষ কর যে PQ এবং RS পরস্পরকে ছেদ করবে, কারণ এরা সমান্তরাল নয় (চিত্র 10.19(ii) দেখো)



(i)



(ii)

চিত্র **10.19**

এখন, AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ এর উপর O অবস্থিত। সুতরাং OA=OB, যেহেতু কোনো রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকে অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু, রেখাংশটির প্রান্তবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী যা সপ্তম অধ্যায়ে প্রমাণিত।

অনুরূপভাবে, BC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক RS এর উপর O বিন্দুটি অবস্থিত,

সুতরাং OB=OC

সুতরাং, OA = OB = OC অর্থাৎ O বিন্দু থেকে A, B এবং C সমদূরবর্তী। অতএব, যদি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তবে বৃত্তটি B এবং C বিন্দু দিয়েও যাবে। এটা প্রমাণ করে যে, A, B, C তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা সম্ভব। তোমরা জান যে, দুটি রেখা (লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়) একটি মাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করতে পারে। সুতরাং, OA ব্যাসার্থ যুক্ত একটি মাত্র বৃত্ত অংকন করা সম্ভব। অন্যভাবে বললে, A, B, C বিন্দুগামী স্বতন্ত্র (Unique) বৃত্ত আঁকা যায়। তোমরা নিচের উপপাদ্যটি প্রমাণ করেছ :

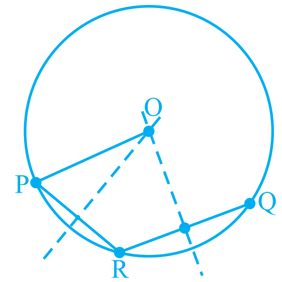
উপপাদ্য 10.5 : *তিনটি প্রদত্ত অসমরেখ বিন্দু দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অংকন করা যায়।*

মন্তব্য : যদি ABC একটি ত্রিভুজ হয়, তবে 10.5 নং উপপাদ্য অনুসারে, A,B এবং C শীর্ষবিন্দুত্রয় গামী একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অংকন করা সম্ভব। এই বৃত্তটিকে Δ ABC এর পরিবৃত্ত বলা হয়। *বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধকে যথাক্রমে ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র এবং পরিব্যাসার্ধ বলা হয়।*

উদাহরণ 1: একটি বৃত্তের একটি চাপ দেওয়া আছে, বৃত্তটি সম্পন্ন করো।

সমাধান : মনে কর, একটি বৃত্তের PQ চাপ দেওয়া আছে। আমাদেরকে বৃত্তটি সম্পন্ন করতে হবে অর্থাৎ বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে। চাপটির উপর যে কোনো বিন্দু R নাও, P, R এবং Q, R যুক্ত করো। কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করার জন্য 10.5 উপপাদ্য প্রমাণার্থে ব্যবহৃত গঠন পদ্ধতি অনুসরণ করো।

প্রাপ্ত কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নিয়ে আমরা বৃত্তটি সম্পন্ন করতে পারি (চিত্র 10.20 দেখো)।



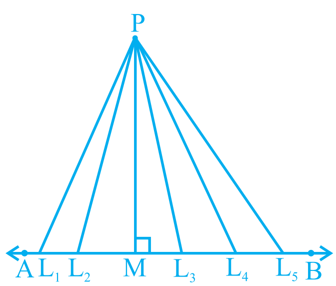
চিত্র 10.20

অনুশীলনী 10.3

1. বিভিন্ন ধরনের যুগল বৃত্ত অংকন করো। প্রতি যুগল বৃত্তে কতগুলো সাধারণ বিন্দু আছে? সাধারণ বিন্দুর সর্বাধিক সংখ্যা কত?
2. মনে করো একটা বৃত্ত দেওয়া আছে। বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয়ে চিত্র অংকন করো।
3. যদি দুটি বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করো যে, এদের কেন্দ্রদ্বয় সাধারণ জ্যা এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

10.6 সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা এবং কেন্দ্র থেকে এদের দূরত্ব : (Equal Chords and Their Distances from the Centre)

মনে করো AB একটি রেখা এবং P একটি বিন্দু, যেহেতু একটি রেখা অসংখ্য বিন্দুর সমষ্টি, এই রেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলোকে যদি তোমরা P বিন্দুর সাথে যুক্ত করো তবে অসংখ্য রেখাংশ যেমন PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 ইত্যাদি পাবে। এদের কোনটি P বিন্দু থেকে AB এর দূরত্ব বুঝায়? একটু ভাবলেই উত্তরটি পাবে। এই রেখাংশ সমূহের যে কোনো একটি P বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব, স্পষ্টত চিত্র 10.21 এ PM, AB এর উপর লম্ব এবং অন্যগুলোর তুলনায় ছোট। গণিতে, এই ন্যূনতম দূরত্ব PM কে P বিন্দু থেকে AB এর দূরত্ব বলা হয়। অতএব তোমরা বলতে পার যে, একটি বিন্দু থেকে কোনো রেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে সেই বিন্দু থেকে রেখাটির দূরত্ব বলে।

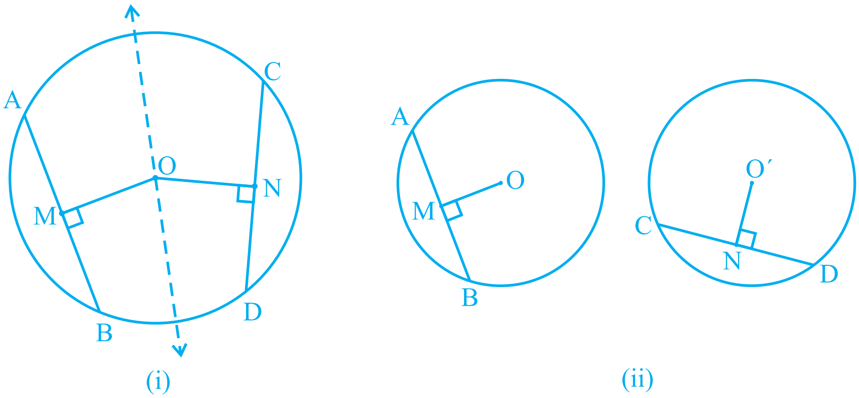


চিত্র 10.21

লক্ষ কর যে, যদি বিন্দুটি রেখাটির উপর অবস্থান করে, তবে দূরত্ব শূন্য।

একটি বৃত্তে অসংখ্য জ্যা থাকতে পারে। বৃত্তের জ্যা অংকনের মাধ্যমে তোমরা হয়তো লক্ষ

করবে যে, একটি বৃত্তের কেন্দ্রের নিকটবর্তী জ্যা এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী যে কোন জ্যা এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বেশি। একাধিক বৃত্তে বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের জ্যা অঙ্কন করে কেন্দ্র থেকে তাদের দূরত্ব পরিমাপ করে তোমরা তা দেখতে পার। কেন্দ্র থেকে কোনো বৃত্তের দীর্ঘতম জ্যা, অর্থাৎ ব্যাসের দূরত্ব কত? যেহেতু কেন্দ্রটি ব্যাসের উপর অবস্থিত, তাই দূরত্ব শূন্য। জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং কেন্দ্র থেকে তার দূরত্বের মধ্যে কোনো সম্পর্ক থাকতে পারে বলে তোমরা মনে কর কি? চল দেখি এমন কোনো সম্পর্ক আছে কি না।

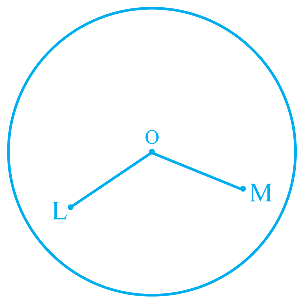


চিত্র **10.22**

কার্যকলাপ : ট্রেসিং কাগজে যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তটির দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা, AB ও CD অঙ্কন করো। এবং কেন্দ্র ‘O’ থেকে এদের উপর OM এবং ON লম্বদ্বয় অংকন করো। চিত্রটাকে এমনভাবে ভাঁজ করো, যেন D,B এর উপর এবং C, A এর উপর পতিত হয় (চিত্র 10.22 (i) দেখো)। তোমরা সম্ভবত লক্ষ করেছ যে, O ভাঁজ রেখার উপর এবং N, M এর উপর পতিত হয়। অতএব, OM = ON । O এবং O′ কে কেন্দ্র করে দুটি সর্বসম বৃত্ত অঙ্কন করে, দুইটি সমান জ্যা AB এবং CD এঁকে পুনরায় কার্যকলাপটি করতে পারো। জ্যা-দ্বয়ের উপর যথাক্রমে OM এবং O′N লম্ব অঙ্কন কর (চিত্র 1.22 (ii) দেখো) কাঁচির সাহায্যে কেঁটে নিয়ে একটি বৃত্তকে অপরটির উপর এমনভাবে স্থাপন কর যাতে AB জ্যা CD এর সঙ্গে মিলে। এই অবস্থায় দেখবে যে O বিন্দুটি O′ এর সঙ্গে এবং M, N এর সাথে মিলবে। এভাবে তোমরা নিম্নে প্রদত্ত বিষয়টির সত্যতা প্রতিপাদন করেছ :

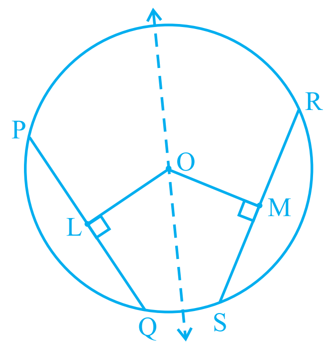
উপপাদ্য 10.6 : *কোনো বৃত্তের (বা সর্বসম বৃত্তের) সমান জ্যা-গুলো বৃত্তটির কেন্দ্র (বা বৃত্তগুলির কেন্দ্র) থেকে সমদূরবর্তী।*

এখন, এই উপপাদ্যটির বিপরীত উপপাদ্যটি সত্য কিনা দেখা যাক। এর জন্য একটি O কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁক। O কেন্দ্র থেকে বৃত্তটির ভিতর সমান দৈর্ঘ্যের দুটি রেখাংশ OL এবং OM অঙ্কন কর (চিত্র 10.23(i) দেখো), PQ এবং RS দুটি এমনভাবে আঁক যাতে OL ⊥ PQ এবং OM ⊥ RS হয়। (চিত্র 10.23(ii) দেখো), PQ এবং RS এর দৈর্ঘ্য পরিমাপ কর। এরা কি ভিন্ন দৈর্ঘ্যের? না, দুটিই সমান। সমান দৈর্ঘ্যের রেখাংশ এবং তাদের উপর লম্ব এঁকে এই কার্যকলাপটি পুনরাবৃত্তি



(i)

চিত্র **10.22**



(ii)

চিত্র **10.23**

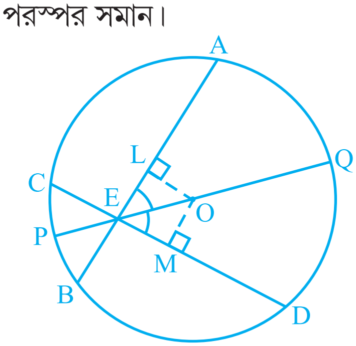
করতে পার। এটি 10.6 নং উপপাদ্যের বিপরীতক্রমে সত্যতা প্রতিপাদন করে। যা নিচে বিবৃত করা হল।

উপপাদ্য 10.7 : *কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমান দূরত্বের জ্যাগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।*

উপরের ফলাফলকে ব্যাখ্যা করার জন্য নিচের উদাহরণটি নাও :

উদাহরণ 2 : কোনো বৃত্তের পরস্পরছেদী দুটি জ্যা যদি তাদের কেন্দ্রবিন্দুগামী ব্যাসের সঙ্গে সমান পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ করো যে, জ্যা দুটি পরস্পর সমান।

সমাধান : মনে করো O কেন্দ্রীয় বৃত্তে AB এবং CD জ্যা দুটি পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। PQ, E বিন্দুগামী এমন ব্যাস, যেখানে $\angle$ AEQ = $\angle$ DEQ (চিত্র 10.24 দেখো)। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = CD। AB এবং CD এর উপর যথাক্রমে OL এবং OM লম্ব অংকন করো। এখন



চিত্র **10.24**

$\angle$ LOE = 180° – 90° – $\angle$ LEO = 90° – $\angle$ LEO

(ত্রিভুজের কোণ সমষ্টির ধর্ম)

= 90° – $\angle$ AEQ = 90° – $\angle$ DEQ

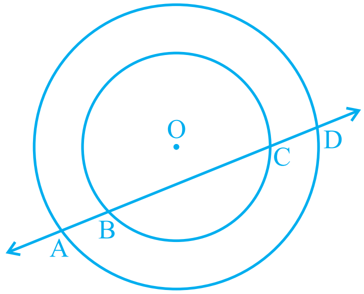
= 90° – $\angle$ MEO = $\angle$ MOE

OLE এবং OME ত্রিভুজে

	$\angle$ LEO = $\angle$ MEO	(কেন ?)
	$\angle$ LOE = $\angle$ MOE	(পূর্বে প্রমাণিত)
	EO = EO	(সাধারণ)
অতএব,	Δ OLE $\cong$ Δ OME	(কেন ?)
এ থেকে পাওয়া যায়,	OL = OM	(সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)
সুতরাং,	AB = CD	(কেন ?)

অনুশীলনী 10.4

1. 5 সেমি এবং 3 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত পরস্পরকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 4 সেমি। সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
2. যদি কোনো বৃত্তের সমান দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা বৃত্তটির অভ্যন্তরে একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করো যে জ্যা দুটির অনুরূপ ছিন্ন অংশদ্বয় পরস্পর সমান।
3. যদি কোনো বৃত্তের দুটি সমান দৈর্ঘ্যের জ্যা বৃত্তটির অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ করো যে, বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ঐ বিন্দুর সংযোজক রেখা জ্যা দুটির সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে।
4. যদি কোনো রেখা, O -কেন্দ্রীয় দুটি বৃত্তকে A, B, C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করো যে, AB = CD (চিত্র 10.25 দেখো)।
5. একটি পার্কে 5 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অংকন করে তার উপর দাঁড়িয়ে তিনজন বালিকা রেশমা, সালমা এবং মনদীপ খেলা করছে। একটি বল রেশমা সালমাকে, সালমা মনদীপকে, মনদীপ রেশমাকে ছুঁড়ে। যদি রেশমা ও সালমা এবং সালমা ও মনদীপ প্রত্যেকের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 মিটার হয় তবে রেশমা এবং মনদীপের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?



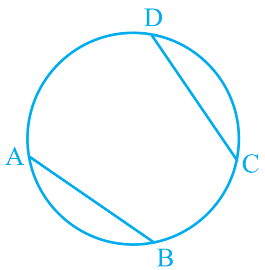
চিত্র 10.25

6. একটি কলোনিতে 20 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পার্ক অবস্থিত। তিনজন বালক অঙ্কুর, সৈয়দ এবং ডেভিড পার্কের সীমানার উপর সমদূরত্বে, পরস্পরের সাথে কথা বলার জন্য প্রত্যেকে হাতে খেলনার টেলিফোন নিয়ে বসে আছে। প্রতিটি টেলিফোনের সংযুক্ত তারটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

10.7 একটি বৃত্তের বৃত্তচাপ দিয়ে উৎপন্ন কোণ : (Angle Subtended by an Arc of a Circle)

তোমরা দেখেছ যে ব্যাস নয় এমন যে কোন জ্যা এর প্রান্ত বিন্দু দুটি, বৃত্তটিকে দুটি বৃত্ত চাপে বিভক্ত করে— অধিচাপ এবং উপচাপ। যদি তোমরা দুটি সমান জ্যা নাও, তবে চাপগুলোর আকার সম্পর্কে তোমরা কি বলবে? প্রথম জ্যা-টির দ্বারা উৎপন্ন চাপগুলো কি দ্বিতীয়টির দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ চাপগুলোর সমান? প্রকৃতপক্ষে এদের দৈর্ঘ্য সমান হওয়ার পরেও আরো কিছু ধর্ম পাওয়া যায়। অনুরূপ চাপগুলো না বাঁকিয়ে অথবা না পাকিয়ে একটিকে অপরটির উপর স্থাপন করলে সম্পূর্ণ ভাবে পরস্পর মিলে যায়। এ অর্থে এদেরকে সর্বসম বলা যায়।

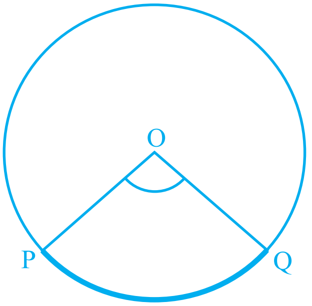
কাঁচির সাহায্যে CD জ্যা দিয়ে তৈরি CD চাপকে কেটে নিয়ে AB জ্যা দ্বারা তৈরি অনুরূপ চাপের উপর স্থাপন করে এই সত্যতার প্রমাণ তোমরা নিজেরা করতে পারো। এভাবে স্থাপন করে দেখতে পাবে যে CD চাপটি AB চাপের সঙ্গে সম্পূর্ণভাবে মিলে গেছে (চিত্র 10.26 দেখো)। অর্থাৎ প্রমাণিত হয় যে কোনো বৃত্তের সমান মাপের জ্যা দ্বারা উৎপন্ন চাপগুলো সর্বসম। বিপরীতক্রমে সর্বসম চাপের সঙ্গে যুক্ত জ্যা-গুলো সমান। এটাকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।



চিত্র 10.26

যদি কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা সমান হয় তবে তাদের দ্বারা উৎপন্ন চাপগুলি সর্বসম। বিপরীতক্রমে, যদি দুটি চাপ সর্বসম হয়, তবে তাদের অনুরূপ জ্যাগুলি সমান।

কোনো চাপ দ্বারা বৃত্তটির কেন্দ্রে গঠিত কোণকে অনুরূপ জ্যা দিয়ে বৃত্তটির কেন্দ্রে গঠিত কোণ বলা হয়। এক্ষেত্রে উপচাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণ এবং পরে অধিচাপ দ্বারা কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে। অতএব 10.27 চিত্রে PQ উপচাপ দ্বারা O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ হল $\angle POQ$ এবং PQ অধিচাপ দ্বারা O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ হল প্রবৃদ্ধ কোণ POQ।



চিত্র **10.27**

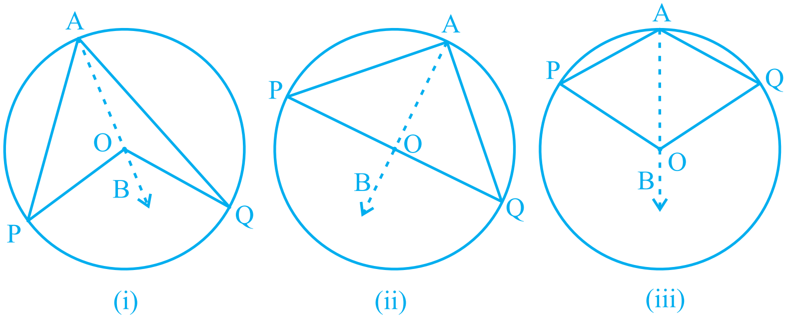
উপরোক্ত ধর্ম এবং 10.1 উপপাদ্য অনুসারে নিম্নে প্রদত্ত সিদ্ধান্তটি সত্য:

কোনো বৃত্তের সর্বসম অথবা সমান চাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণগুলো সমান।

সুতরাং, কোনো বৃত্তে একটি জ্যা দ্বারা বৃত্তটির কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, অনুরূপ উপচাপটি দিয়ে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণটির সমান। নিম্ন প্রদত্ত উপপাদ্যটি বৃত্তের কোনো একটি চাপ দ্বারা তার কেন্দ্রে এবং বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুতে উৎপন্ন কোণগুলোর মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে।

উপপাদ্য 10.8 : কোনো বৃত্তের একটি চাপ দ্বারা কেন্দ্রে গঠিত কোণ, বৃত্তের অবশিষ্ট অংশের উপরিস্থিত যে কোনো বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের দ্বিগুণ হয়।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, কোনো বৃত্তের PQ চাপ কেন্দ্র O বিন্দুতে কোণ POQ এবং বৃত্তের অবশিষ্ট অংশের উপর অবস্থিত A বিন্দুতে কোণ PAQ গঠন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POQ = 2 \angle PAQ$.



চিত্র **10.28**

চিত্র 10.28 এ প্রদর্শিত তিনটি ভিন্ন ভিন্ন ক্ষেত্র দেখো। 10.28 (i) নং চিত্রে চাপ PQ একটি উপচাপ (ii) নং চিত্রে চাপ PQ একটি অর্ধবৃত্ত এবং (iii) নং চিত্রে চাপ PQ একটি অধিচাপ। A, O যুক্ত B করে বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল।

প্রতিটি ক্ষেত্রে, $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

কারণ, কোন ত্রিভুজের একটি বহিঃস্থ কোণ, ত্রিভুজটির বিপরীত অন্তঃকোণ দুটির সমষ্টির সমান।

আবার, Δ OAQ, এর ক্ষেত্রে

$$OA = OQ \quad \text{(একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)}$$

সুতরাং, $\angle OAQ = \angle OQA$ (উপপাদ্য 7.5)

এটি থেকে পাই $\angle BOQ = 2 \angle OAQ$ (1)

একইভাবে $\angle BOP = 2 \angle OAP$ (2)

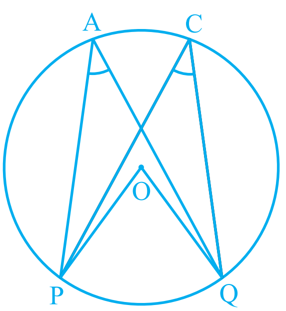
(1) এবং (2) হতে $\angle BOP + \angle BOQ = 2 (\angle OAP + \angle OAQ)$

অর্থাৎ, $\angle POQ = 2 \angle PAQ$ (3)

(iii) নং ক্ষেত্রে, অর্থাৎ PQ অধিচাপের ক্ষেত্রে (3) নং সম্পর্কটি নিম্নে প্রদত্ত রূপে প্রতিস্থাপন করা যায়— প্রবৃদ্ধ কোণ $POQ = 2 \angle PAQ$

মন্তব্য : মনে করো পূর্ববর্তী চিত্রে P এবং Q যুক্ত করে PQ জ্যা আঁকা হল। তাহলে $\angle PAQ$ কে PAQP বৃত্তাংশের উৎপন্ন কোণ বলা হবে।

10.8 নং উপপাদ্যে A বিন্দুটি অবশিষ্ট বৃত্তাংশের যে কোনো একটি বিন্দু হতে পারে। অতএব যদি বৃত্তাংশটিতে অপর একটি বিন্দু C নেওয়া হয় (চিত্র 10.29 দেখো), তবে আমরা পাই— $\angle POQ = 2 \angle PCQ = 2 \angle PAQ$



চিত্র **10.29**

সুতরাং, $\angle PCQ = \angle PAQ$

এটি নিচের উপপাদ্যটির প্রমাণে সাহায্য করে।

উপপাদ্য 10.9 : *কোনো বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।*

উপপাদ্য 10.8 এর (ii) ক্ষেত্রটি আলাদাভাবে আবার আলোচনা করা যাক। এখানে $\angle PAQ$ একটি বৃত্তাংশস্থ কোণ যা একটি অর্ধবৃত্ত আবার, $\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

যদি অর্ধবৃত্তটির উপর তোমরা অন্য যে কোন একটি বিন্দু C নাও, তবে পুনরায় পাবে যে,

$$\angle PCQ = 90°$$

সুতরাং, তোমরা বৃত্ত সম্পর্কিত আরেকটি ধর্ম পাবে।

ধর্মটি হল এরূপ— অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ

10.9 নং উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যটিও সত্য। এ উপপাদ্যটি নিম্নরূপ :

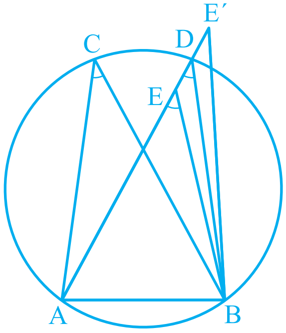
উপপাদ্য 10.10 : *দুইটি বিন্দুর যোজক রেখাংশ তার একই পাশে অবস্থিত অপর দুটি বিন্দুতে দুটি সমান কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি একই বৃত্তে অবস্থিত (অর্থাৎ বিন্দু চারটি সমবৃত্তস্থ) হবে।*

এই ফলাফলের সত্যতা তোমরা নিম্নলিখিত ভাবে দেখতে পারো।

10.30 নং চিত্রে AB রেখাংশ দ্বারা C এবং D বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন হয়েছে অর্থাৎ

$$\angle ACB = \angle ADB$$

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C এবং D বিন্দু চারটি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত। চলো, A,C এবং B বিন্দুত্রয়গামী একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করো, বৃত্তটি D বিন্দুগামী নয়। তাহলে বৃত্তটি AD (অথবা বর্ধিত AD) কে E (অথবা E′) বিন্দুতে ছেদ করবে।



চিত্র **10.30**

যদি A, C, E এবং B বিন্দুগুলি একই বৃত্তে অবস্থিত হয় তবে

$$\angle ACB = \angle AEB \qquad \text{(কেন?)}$$

কিন্তু দেওয়া আছে, $\angle ACB = \angle ADB$.

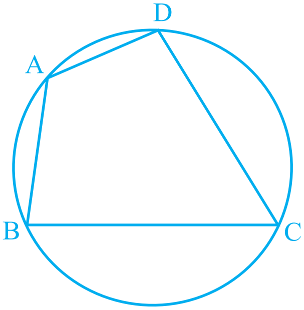
সুতরাং, $\angle AEB = \angle ADB$.

কিন্তু E এবং D বিন্দুদ্বয় সমাপতিত (coincides) না হলে এটি অসম্ভব। (কেন?)

একইভাবে, E′ বিন্দুটি D এর সাথে সমাপতিত হবে।

10.8 বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

চতুর্ভুজ ABCD কে বৃত্তস্থ বলা হয় যদি যখন এর চারটি শীর্ষবিন্দুই একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হয় (চিত্র 10.31 দেখো)। তোমরা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ গুলোর একটা বিশেষ ধর্ম পাবে। ABCD এর ন্যায় বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের বাহু বিশিষ্ট কয়েকটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আঁকো এবং নাম দাও। (বিভিন্ন ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ভিন্ন ভিন্ন বৃত্ত এঁকে তাদের প্রতিটির উপর অবস্থিত চারটি বিন্দু সংযুক্ত করে অতি সহজেই এমন চতুর্ভুজ আঁকা যায়।) প্রতিক্ষেত্রে এই চতুর্ভুজগুলোর বিপরীত কোণগুলি মাপ এবং তোমাদের পর্যবেক্ষণ নিম্নে প্রদত্ত সারণিতে লিপিবদ্ধ করো।



চিত্র **10.31**

চতুর্ভুজের ক্রমিক নং	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

এই সারণির সাহায্যে তোমরা কি সিদ্ধান্তে পৌঁছুতে পারো?

পরিমাপের ত্রুটি অগ্রাহ্য করে তোমরা লক্ষ কর যে, $\angle A + \angle C = 180°$ এবং $\angle B + \angle D = 180°$।
এটা নিম্নোক্ত উপপাদ্যের সত্যতা প্রতিপাদন করে :

উপপাদ্য 10.11 : *বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের প্রতিজোড়া বিপরীত কোণগুলোর সমষ্টি* 180°।

প্রকৃতপক্ষে, এ উপপাদ্যটির বিপরীত উপপাদ্যটিও সত্য এবং এটি নিম্নরূপ।

উপপাদ্য 10.12 : *কোনো চতুর্ভুজের যে কোনো এক জোড়া বিপরীত কোণের সমষ্টি* 180° *হলে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হবে।*

এ উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণার্থে তোমরা 10.10 উপপাদ্যটি প্রমাণের জন্য ব্যবহৃত পদ্ধতি অবলম্বন করতে পারো।

উদাহরণ 3 : 10.32 চিত্রে, AB একটি বৃত্তের ব্যাস, CD জ্যা এর দৈর্ঘ্য বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান। AC এবং BD কে বর্ধিত করলে পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle AEB = 60°$

সমাধান : O, C; O, D এবং B, C যুক্ত করা হল।

ODC একটি সমবাহু ত্রিভুজ (কেন?)

সুতরাং, $\angle COD = 60°$

এখন $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (উপপাদ্য 10.8)

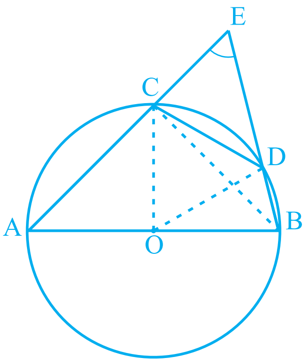
এ থেকে পাই, $\angle CBD = 30°$

আবার, $\angle ACB = 90°$ (কেন?)

অতএব $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

সুতরাং, $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$,

অর্থাৎ, $\angle AEB = 60°$



চিত্র **10.32**

উদাহরণ 4: 10.33 চিত্রে ABCD একটি বৃত্তস্থ চুতুর্ভুজ যার AC এবং BD দুটি কর্ণ। যদি $\angle DBC = 55°$ এবং $\angle BAC = 45°$ তবে $\angle BCD$ নির্ণয় করো?

সমাধান : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$

(একই বৃত্তাংস্থ কোণ)

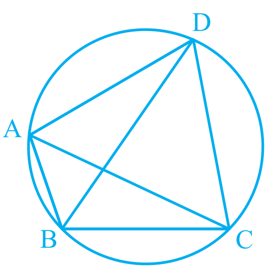
সুতরাং, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

কিন্তু $\angle DAB + \angle BCD = 180°$

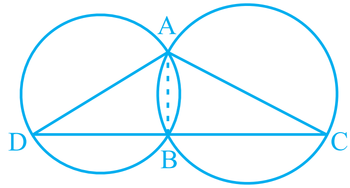
(বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ)

সুতরাং, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$



চিত্র **10.33**

উদাহরণ 5 : দুটি বৃত্ত পরস্পরকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। AD এবং AC বৃত্ত দুটির ব্যাস (চিত্র 10.34 দেখো)। প্রমাণ কর যে, B বিন্দুটি DC রেখাংশের উপর অবস্থিত।



চিত্র 10.34

সমাধান : A,B যুক্ত করো।

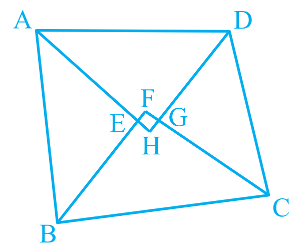
$\angle ABD = 90°$ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

$\angle ABC = 90°$ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

সুতরাং, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

অতএব, DBC একটি সরলরেখা অর্থাৎ B বিন্দুটি DC রেখাংশের উপর অবস্থিত।

উদাহরণ 6 : প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের অন্তঃকোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকগুলোর দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটি (যদি সম্ভব হয়), বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।



চিত্র 10.35

সমাধান : 10.35 চিত্রে, ABCD একটি চতুর্ভুজ। AH, BF, CF এবং DH যথাক্রমে $\angle A, \angle B, \angle C$ এবং $\angle D$ এর সমদ্বিখণ্ডক। যেগুলি EFGH চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে।

এখন, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (কেন?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

এবং $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (কেন?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

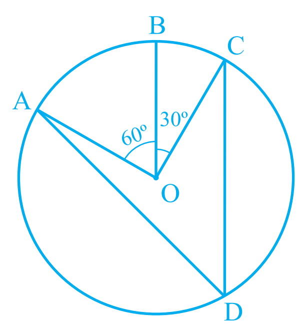
অতএব, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

অতএব, উপপাদ্য 10.12 অনুসারে চতুর্ভুজ EFGH হল বৃত্তস্থ চুতুর্ভুজ।

অনুশীলনী 10.5

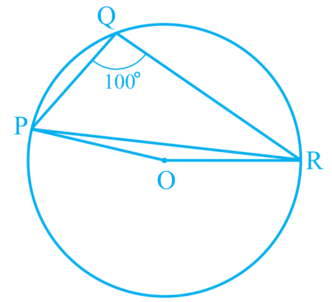


চিত্র 10.36

1. চিত্র 10.36 এ O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর A,B এবং C তিনিটি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যে, $\angle BOC = 30°$ এবং $\angle AOB = 60°$। যদি D একটি বৃত্তস্থ বিন্দু, যা ABC চাপের উপর নয়, তবে $\angle ADC$ এর মান নির্ণয় করো।

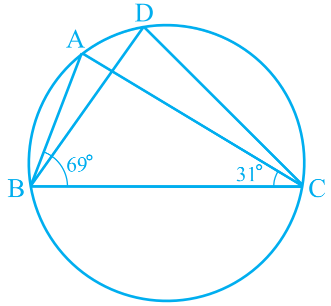
2. কোনো বৃত্তের একটি জ্যা এর দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান। জ্যা-টির দ্বারা বৃত্তটির উপচাপের উপর কোনো বিন্দুতে এবং অধিচাপের উপর কোনো বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের মান নির্ণয় করো।

3. 10.37 নং চিত্রে $\angle PQR = 100°$, যেখানে P, Q এবং R বিন্দু তিনটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অবস্থিত। $\angle OPR$ নির্ণয় করো।



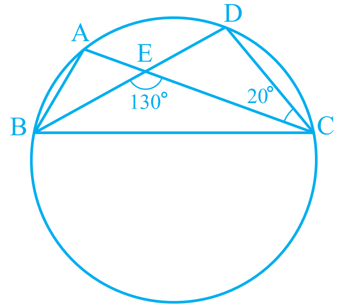
চিত্র **10.37**

4. 10.38 নং চিত্রে, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ হলে, $\angle BDC$ নির্ণয় করো।



চিত্র **10.38**

5. 10.39 নং চিত্রে A, B, C এবং D বিন্দু চারটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। AC এবং BD পরস্পরকে E বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করে যে, $\angle BEC = 130°$ এবং $\angle ECD = 20°$, $\angle BAC$ নির্ণয় করো।



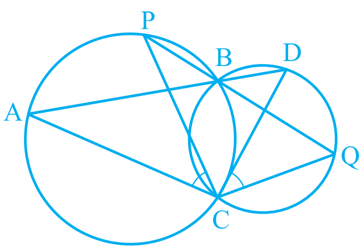
চিত্র **10.39**

6. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC=30°$ তবে $\angle BCD$ নির্ণয় করো। তদুপরি, যদি AB = BC, তবে $\angle ECD$ নির্ণয় করো।

7. যদি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় চতুর্ভুজটির শীর্ষ বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস হয় তবে, প্রমাণ করো যে, চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

8. যদি একটি ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামটি বৃত্তস্থ।

9. দুটি বৃত্ত পরস্পরকে B এবং C বিন্দুতে ছেদ করেছে। B বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত ABD এবং PBQ রেখাংশদ্বয় বৃত্তগুলোকে যথাক্রমে A, D এবং P,Q বিন্দুতে ছেদ করেছে (চিত্র 10.40 দেখো)। প্রমাণ করো যে $\angle ACP = \angle QCD$।



চিত্র **10.40**

10. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুকে ব্যাস হিসাবে নিয়ে যদি দুটি বৃত্ত আঁকা হয় তবে প্রমাণ করো যে, এই বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুটি ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর উপর অবস্থিত।

11. ABC এবং ADC সমকোণী ত্রিভুজ দুটির সাধারণ অতিভুজ AC। প্রমাণ করো যে, $\angle CAD = \angle CBD$.

12. প্রমাণ করো যে, বৃত্তস্থ সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক) *

1. প্রমাণ করো যে, পরস্পরছেদী দুটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযোগী রেখা, ছেদবিন্দুদ্বয়ের প্রতিটির সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

2. কোনো বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত দিকে অবস্থিত দুটি পরস্পর সমান্তরাল জ্যা এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5 সেমি এবং 11 সেমি, যদি AB এবং CD এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 সেমি হয়। তবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

3. একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল জ্যা -এর দৈর্ঘ্য 6 সেমি এবং 8 সেমি। যদি কেন্দ্র থেকে ছোট জ্যা এর দূরত্ব 4 সেমি হয় তবে কেন্দ্র থেকে অপর জ্যা এর দূরত্ব কত?

4. মনে করো, কোন ABC এর শীর্ষবিন্দুটি একটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত এবং মনে কর এই কোণ উৎপন্নকারী বাহুদ্বয় বৃত্তটিকে এমনভাবে বিভক্ত করেছে যাতে AD ও CE জ্যা-দ্বয় সমান হয়। প্রমাণ করো যে, $\angle ABC$ এর মান, AC এবং DE দ্বারা কেন্দ্রে গঠিত কোণদ্বয়ের পার্থক্যের অর্ধেক।

5. প্রমাণ করো যে, রম্বসের যে কোনো একটি বাহুকে ব্যাস হিসাবে নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত, রম্বসটির কর্ণ দুটির ছেদ বিন্দুগামী।

6. ABCD একটি সামান্তরিক। A, B এবং C বিন্দুগামী বৃত্তটি CD বাহুকে (বা প্রয়োজন সাপেক্ষে বর্ধিত CD কে) E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করো যে, AE=AD.

7. একটি বৃত্তের AC এবং BD জ্যাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ কর যে, (i) AC এবং BD উভয়ই বৃত্তটির এক একটি ব্যাস। (ii) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

8. ABC ত্রিভুজের $\angle A$, $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক ত্রয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, DEF ত্রিভুজের কোণগুলো হল $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, $90^\circ - \frac{1}{2}\angle B$ এবং $90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$।

---

* অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক) পরীক্ষার জন্য বিবেচিত নয়।

9. দুটি সর্বসম বৃত্ত পরস্পর A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু দিয়ে PAQ রেখাংশটি এমনভাবে আঁকা হল যাতে P এবং Q বৃত্ত দুটির উপর অবস্থিত হয়। প্রমাণ কর যে $BP = BQ$।

10. যদি ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং BC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, এই ছেদ বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর থাকবে।

10.9 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো শিখেছ :

1. একটি সমতলে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দু সমষ্টিকে বৃত্ত বলে।
2. একটি বৃত্তের (বা সর্বসম বৃত্তের) সমান জ্যাগুলি বৃত্তটির কেন্দ্রে সমমাপের কোণ তৈরি করে।
3. কোনো বৃত্তের (বা সর্বসম বৃত্তের) জ্যা-গুলো যদি বৃত্তটির (বৃত্তগুলোর) কেন্দ্রে সমমাপের কোণ উৎপন্ন করে তবে জ্যা-গুলোর দৈর্ঘ্য সমান।
4. কোনো বৃত্তের কেন্দ্র থেকে একটি জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব, জ্যাটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
5. বৃত্তের কোনো জ্যা এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাটি যদি কেন্দ্রগামী হয় তবে রেখাটি জ্যা এর উপর লম্ব।
6. কোনো সমতলস্থিত এক সমরেখ নয় এমন তিনটি বিন্দুগামী একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।
7. কোনো বৃত্তের (বা সর্বসম বৃত্তের) সমান জ্যা-গুলো বৃত্তটির (বা বৃত্তগুলির) কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।
8. কোনো বৃত্তের (বা সর্বসম বৃত্তের) কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী জ্যা-গুলো পরস্পর সমান।
9. কোনো বৃত্তের দুটি চাপ যদি সর্বসম হয়, তবে তাদের অনুরূপ জ্যা-গুলো সমান এবং বিপরীতক্রমে যদি কোনো বৃত্তের দুটি জ্যা সমান হয়, তবে তাদের অনুরূপ চাপগুলো (উপচাপ, অধিচাপ) সর্বসম হয়।
10. কোনো বৃত্তের সর্বসম চাপগুলো বৃত্তটির কেন্দ্রে সমমাপের কোণ উৎপন্ন করে।
11. বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা গঠিত কেন্দ্রস্থ কোণ, তার অবশিষ্ট চাপে গঠিত পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।
12. একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।
13. অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।
14. যদি কোনো সমতলস্থিত দুটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অবস্থিত অপর দুটি বিন্দুতে সমমাপের কোণ উৎপন্ন করে, তবে বিন্দু চারটি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত হবে।
15. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি $180°$।
16. যদি কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টি $180°$ হয় তবে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

অধ্যায়-11

অঙ্কন (CONSTRUCTIONS)

11.1 ভূমিকা

পূর্বের অধ্যায়গুলোতে উপপাদ্য অথবা অনুশীলনীর বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সঠিক চিত্রের প্রয়োজন ছিল না। এগুলো আঁকা হয়েছিল তোমাদের পরিস্থিতি সম্পর্কে একটি ধারণা দেওয়ার জন্য এবং সঠিক যুক্তি সহায়ক হিসেবে। তথাপি কোনো কোনো সময় সঠিক চিত্রের প্রয়োজন হয়। উদাহরণস্বরূপ— নির্মাণ করতে হবে এরকম দালানের খসড়া চিত্র, যন্ত্র এবং বিভিন্ন যন্ত্রাংশের নকশা, রাস্তার নকশা অঙ্কন ইত্যাদি। এই ধরনের চিত্র অঙ্কনে কিছু মৌলিক জ্যামিতিক যন্ত্রাংশের প্রয়োজন। তোমাদের কাছে অবশ্যই একটি জ্যামিতি-বাক্স আছে যাতে নিচের জিনিসগুলো বর্তমান।

(i) অংশাঙ্কিত মাপনী (graduated scale) যার একদিকে সেন্টিমিটার ও মিলিমিটার এবং অন্যদিকে ইঞ্চি এবং তার বিভিন্ন অংশ চিহ্নিত আছে।

(ii) একজোড়া ত্রিকোণ যার একটির কোণগুলো 90°, 60° এবং 30° অন্যটির কোণগুলো 90°, 45° এবং 45° ।

(iii) একজোড়া (অথবা একটি) নিয়ন্ত্রণ যোগ্য কাঁটা কম্পাস।

(iv) একজোড়া (অথবা একটি) পেনসিল কম্পাস, যার একপ্রান্তে পেনসিল যুক্ত করার ব্যবস্থা আছে।

(v) একটি চাঁদা (protractor)

সাধারণ জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের জন্য এই যন্ত্রাংশগুলোর প্রয়োজন হয়। যেমন প্রদত্ত পরিমাপের একটি ত্রিভুজ, একটি বৃত্ত, একটি চতুর্ভুজ ইত্যাদি অঙ্কনে। কিন্তু একটি জ্যামিতিক অঙ্কন একটি জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের পদ্ধতি যেখানে শুধু দুটি যন্ত্র ব্যবহার করা হয়— অংশাঙ্কিত নয় এমন মাপনী (*ungraduated ruler*) এটিকে সোজা ধারও (*straight edge*) বলা হয় এবং একটি কম্পাস। যে অঙ্কনে পরিমাপেরও প্রয়োজন সেখানে তোমরা অংশাঙ্কিত মাপনী এবং চাঁদাও ব্যবহার করতে পারো। এ অধ্যায়ে কিছু মৌলিক অঙ্কন নিয়ে বিবেচনা করা হবে। তারপর এগুলোকে বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ অঙ্কনে ব্যবহার করা হবে।

11.2 প্রাথমিক অঙ্কন (Basic Constructions)

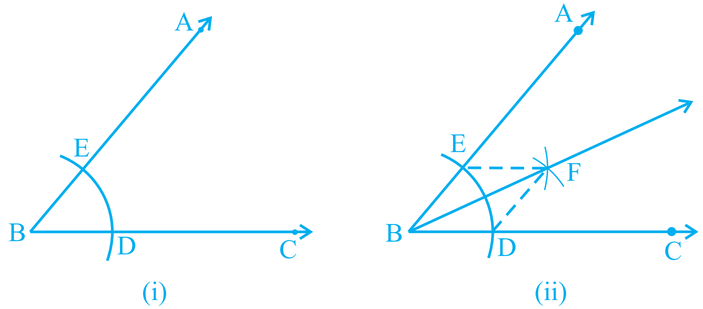
অঙ্কনের সত্যতা যাচাই ছাড়াই, তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণিতে একটি বৃত্ত, একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক 30°, 45°, 60°, 90° এবং 120° কোণগুলো এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমদ্বিখণ্ডক কীভাবে অঙ্কন করতে হয় তোমরা তা শিখেছ। এই অংশে, তোমরা এ অঙ্কনগুলোর কয়েকটি আবার আঁকবে এবং কেন অঙ্কনগুলো যুক্তিযুক্ত তা যাচাই করবে।

অঙ্কন 11.1 : *একটি প্রদত্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন :*

ABC একটি কোণ দেওয়া আছে, কোণটির সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. B কে কেন্দ্র করে যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল যা BA এবং BC রশ্মিকে যথাক্রমে E এবং D বিন্দুতে ছেদ করে, (চিত্র 11.1(i)] দেখো)
2. তারপর, D এবং E কে কেন্দ্র করে, DE এর অর্ধেকের বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল যেগুলো পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করে।
3. BF রশ্মি অঙ্কন করা হল (চিত্র 11.1(ii) দেখো)। এই BF রশ্মিই হল ABC কোণের নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্র 11.1

চলো, এবার দেখি, কীভাবে এই পদ্ধতিতে কোণের নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকটি পাওয়া যায়।

DF এবং EF যুক্ত করা হল।

BEF এবং BDF ত্রিভুজে

	BE = BD	(একই চাপের দুটি ব্যাসার্ধ)
	EF = DF	(একই ব্যাসার্ধের দুটি চাপ)
	BF = BF	(সাধারণ)
অতএব,	$\Delta BEF \cong \Delta BDF$	(বাহু-বাহু-বাহু শর্তানুসারে)

এ থেকে পাওয়া যায় $\angle EBF = \angle DBF$ (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

অঙ্কন 11.2 : *একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন।*

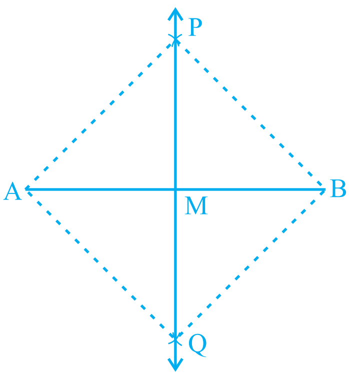
AB একটি প্রদত্ত রেখাংশ, এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. A এবং B কে কেন্দ্র করে, AB এর অর্ধেকের বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে, AB রেখাংশের উভয়দিকে (পরস্পরকে ছেদ করে) দুটি করে বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল।
2. মনে করো বৃত্তচাপগুলো পরস্পরকে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করে, PQ যুক্ত করা হল। (চিত্র 11.2 দেখো)
3. মনে করো PQ, AB কে M বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে PMQ রেখা হল AB এর নির্ণেয় লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

   চলো, এবার দেখি কীভাবে এ পদ্ধতিতে AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি পাওয়া যায়।

   A ও B এর সাথে P ও Q যুক্ত করা হল যেন



চিত্র 11.2

AP, AQ, BP এবং BQ পাওয়া যায়।

PAQ এবং PBQ ত্রিভুজে

AP = BP (সম ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ)

AQ = BQ (সম ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ)

PQ = PQ (সাধারণ)

অতএব, Δ PAQ $\cong$ Δ PBQ (বাহু-বাহু-বাহু শর্তানুসারে)

সুতরাং, $\angle$ APM = $\angle$ BPM (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

এখন, PMA এবং PMB ত্রিভুজে,

AP = BP (পূর্বের মতো)

PM = PM (সাধারণ)

$\angle$ APM = $\angle$ BPM (পূর্বে প্রমাণিত)

অতএব, Δ PMA $\cong$ Δ PMB (বাহু-বাহু-বাহু শর্তানুসারে)

সুতরাং, AM = BM এবং $\angle$PMA = $\angle$ PMB (সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ অংশ)

যেহেতু, $\angle$ PMA + $\angle$ PMB = 180° (স্বতঃসিদ্ধ রৈখিক যুগলের)

আমরা পাই, $\angle$ PMA = $\angle$ PMB = 90°.

অতএব, PM অর্থাৎ PMQ হল AB এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন 11.3 : *একটি প্রদত্ত রশ্মির প্রারম্ভিক বিন্দুতে 60° কোণ অঙ্কন।*

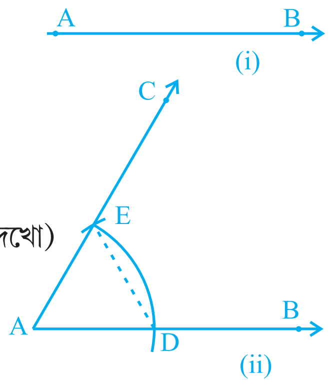
মনে করো AB একটি রশ্মি যার প্রারম্ভিক বিন্দু A (চিত্র 11.3 (i) দেখো)। AC এমন একটি রশ্মি অঙ্কন করতে হবে যেন $\angle$ CAB = 60° হয়। এরূপ করার একটি পদ্ধতি নিচে দেওয়া হল।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. A কে কেন্দ্র করে যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল যা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।
2. D কে কেন্দ্র করে পূর্বের ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হল যা আগের বৃত্তচাপকে E বিন্দুতে ছেদ করে।
3. E বিন্দু দিয়ে AC রশ্মি অঙ্কন করা হল (চিত্র 11.3 (ii) দেখো)

   তাহলে, $\angle$ CAB হল নির্ণেয় 60° কোণ। এখন দেখা যাক, কিভাবে এই পদ্ধতিতে নির্ণেয় কোণ পাওয়া যায়।

   D,E যুক্ত করা হল।



চিত্র 11.3

তাহলে, AE = AD = DE (অঙ্কনানুসারে)

অতএব, Δ EAD হল একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং $\angle$ EAD কোণটি $\angle$ CAB এর সমান যার পরিমাপ 60°।

অনুশীলনী 11.1

1. একটি প্রদত্ত রশ্মির প্রারম্ভিক বিন্দুতে 90° কোণ অঙ্কন করো এবং অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করো।

2. একটি প্রদত্ত রশ্মির প্রারম্ভিক বিন্দুতে 45°কোণ অঙ্কন করো এবং অঙ্কনের সত্যতা যাচাই করো।

3. নিম্নলিখিত কোণগুলো পরিমাপ অনুসারে অঙ্কন করো :

(i) 30° (ii) $22\frac{1}{2}^{\circ}$ (iii) 15°

4. নিম্নলিখিত কোণগুলোর অঙ্কন করো এবং চাঁদার সাহায্যে কোণগুলোর পরিমাপ করো :

(i) 75° (ii) 105° (iii) 135°

11.3 ত্রিভুজ সংক্রান্ত কিছু অঙ্কন :

এ পর্যন্ত কতগুলো প্রাথমিক অঙ্কন বিবেচনা করা হয়েছে। এখন, উপরের এবং পূর্বের শ্রেণির অঙ্কন ব্যবহার করে কয়েকটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা হবে। সপ্তম অধ্যায় থেকে তোমরা জেনেছ দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতার শর্তগুলো হল বাহু-কোণ-বাহু, বাহু-বাহু-বাহু, কোণ-বাহু-কোণ এবং সমকোণ-অতিভুজ-বাহু। অতএব, একটি ত্রিভুজ অনন্য (unique) হবে, যদি (i) দুটি বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকে (ii) তিনটি বাহু দেওয়া থাকে (iii) দুটি কোণ এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ

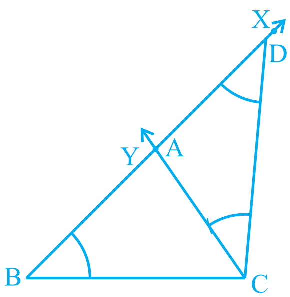
দেওয়া থাকে। (iv) সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, অতিভুজ এবং একটি বাহু দেওয়া থাকে। ইতিমধ্যে, সপ্তম শ্রেণিতে তোমরা জেনেছ, কিভাবে এ ধরনের ত্রিভুজগুলো অঙ্কন করতে হয়। এখন, আরো কিছু ত্রিভুজের অঙ্কন বিবেচনা করা হবে। তোমরা সম্ভবত লক্ষ্য করেছ যে, একটি ত্রিভুজ অঙ্কনের জন্য ন্যূনতম তিনটি অংশ দেওয়া থাকে কিন্তু তিনটি অংশের সবগুলোর সমন্বয় এক্ষেত্রে যথেষ্ট নয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি দুটি বাহু এবং একটি কোণ (অন্তর্ভুক্ত কোণ নয়) দেওয়া থাকে, তবে সবসময়ে ত্রিভুজটিকে অনন্যরূপে অঙ্কন করা সম্ভব হয় না।

অঙ্কন 11.4 : একটি ত্রিভুজের ভূমি, অপর দুই বাহুর সমষ্টি এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণের পরিমাপ দেওয়া আছে— ত্রিভুজটি অঙ্কন করো।

দেওয়া আছে ABC একটি ত্রিভুজ, যার ভূমি BC, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle B$ এবং দুটি বাহুর যোগফল $AB + AC$, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. ভূমি BC অঙ্কন করা হল এবং B বিন্দুতে কোণের সমান করে কোণ XBC অঙ্কন করা হল।
2. BX রশ্মি হতে $AB + AC$ এর সমান করে BD রেখাংশ কাটা হল।
3. DC যুক্ত করা হল এবং $\angle BDC$ এর সমান করে কোণ DCY অঙ্কন করা হল।
4. মনে করো CY, BX কে A বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 11.4 দেখো)



চিত্র **11.4**

তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

চলো এখন দেখা যাক, কিভাবে নির্ণেয় ত্রিভুজটি পাওয়া গেল।

প্রদত্ত শর্তে ভূমি BC এবং $\angle B$ অঙ্কন করা হল। এখন ACD ত্রিভুজে,

$\angle ACD = \angle ADC$ (অঙ্কনানুসারে)

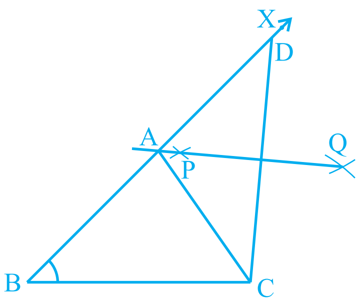
অতএব, $AC = AD$

তাহলে $AB = BD - AD = BD - AC$

$AB + AC = BD$

বিকল্প পদ্ধতি :

উপরের দুটি ধাপ অনুসরণ করো, তারপর CD এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অঙ্কন করো যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 11.5 দেখো)। AC যুক্ত করা হল। তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ। লক্ষ করো, A বিন্দুটি, CD এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। অতএব $AD = AC$।



চিত্র **11.5**

মন্তব্য : ত্রিভুজটির অঙ্কন করা সম্ভব নয়, যদি $AB + AC \leq BC$ হয়।

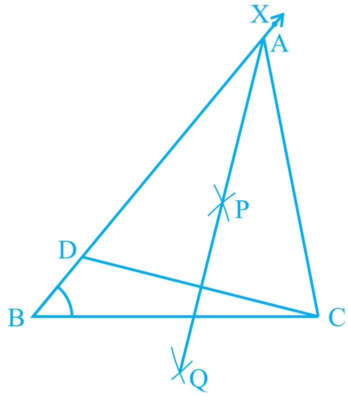
অঙ্কন 11.5 : *একটি ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তরফল দেওয়া আছে— ত্রিভুজটি অঙ্কন করো।*

দেওয়া আছে ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি BC, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ হলো $\angle B$, অপর দুই বাহুর অন্তরফল $AB - AC$ অথবা $AC - AB$, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে। স্পষ্টতই এখানে দুটি ক্ষেত্র।

ক্ষেত্র (i) : মনে করো $AB > AC$ অর্থাৎ $AB - AC$ প্রদত্ত ।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. ভূমি অঙ্কন করা হল, এবং বিন্দুতে প্রদত্ত কোণের সমান করে XBC কোণ অঙ্কন করা হল।
2. BX রশ্মি হতে AB–AC এর সমান করে BD রেখাংশটি কাটা হল।
3. D,C যুক্ত করা হল এবং DC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অঙ্কন করা হল।
4. মনে করো, PQ, BX কে A বিন্দুতে ছেদ করে, AC যুক্ত করা হল। (চিত্র 11.6 দেখো)।



চিত্র 11.6

তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

চলো এখন দেখা যাক, কীভাবে এই পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজটি পাওয়া যায়।

প্রদত্ত শর্তানুসারে ভূমি BC এবং $\angle B$ অঙ্কন করা হল। A বিন্দুটি DC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

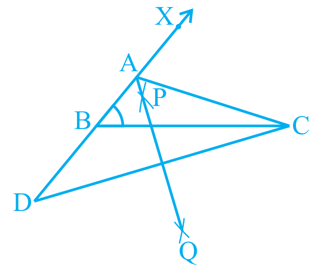
সুতরাং, $AD = AC$

অতএব, $BD = AB - AD = AB - AC.$

ক্ষেত্র (ii) : মনে করো, $AB < AC$ অর্থাৎ $AC - AB$ প্রদত্ত।

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. ক্ষেত্র (i) এর অনুরূপ।
2. BX থেকে AC– AB এর সমান করে BD রেখাংশ কাটা হল যা BC এর বিপরীত দিকে অবস্থিত।
3. D, C যুক্ত করা হল এবং DC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ অঙ্কন করা হল।
4. মনে করো, PQ, BX কে A বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত করা হল। (চিত্র 11.7 দেখো)



চিত্র 11.7

তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

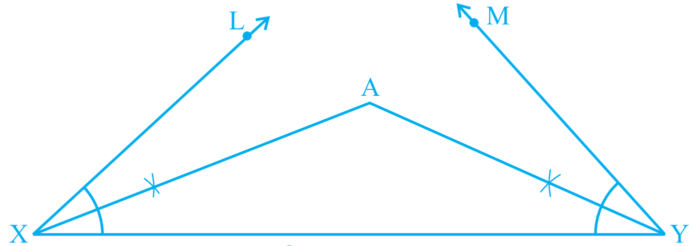
ক্ষেত্র (i) এর মত এ অঙ্কনের সত্যতা তোমরা যাচাই করতে পারো।

অঙ্কন 11.6 : *একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটি দেওয়া আছে— ত্রিভুজটি অঙ্কন করো।*

ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণ $\angle B$ ও $\angle C$ এবং $BC + CA + AB$ প্রদত্ত, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

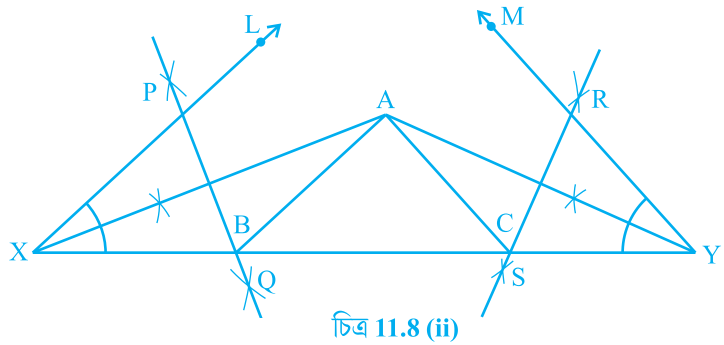
অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. $BC + CA + AB$ এর সমান করে XY এটি রেখাংশ অঙ্কন করা হল।
2. $\angle B$ এর সমান করে কোণ LXY এবং $\angle C$ এর সমান করে কোণ MYX অঙ্কন করা হল।
3. $\angle LXY$ এবং $\angle MYX$ এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা হল। মনে করো, সমদ্বিখণ্ডক দুটি পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র 11.8 (i) দেখো)



চিত্র **11.8 (i)**

4. AX এবং AY এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে PQ এবং RS অঙ্কন করা হল।
5. মনে করো, PQ, XY কে B বিন্দুতে এবং RS, XY কে C বিন্দুতে ছেদ করে, A,B এবং A,C যুক্ত করা হল (চিত্র 11.8 (ii) দেখো)।



চিত্র **11.8 (ii)**

তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ। অঙ্কনের সত্যতা যাচাই এর জন্য, তোমরা লক্ষ কর যে, B বিন্দুটি AX এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PQ এর উপর অবস্থিত।

অতএব, $XB = AB$ এবং অনুরূপে, $CY = AC$

এ থেকে পাওয়া যায়, $\quad BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY.$

আবার $\angle BAX = \angle AXB$ (ΔAXB এ $AB = XB$)

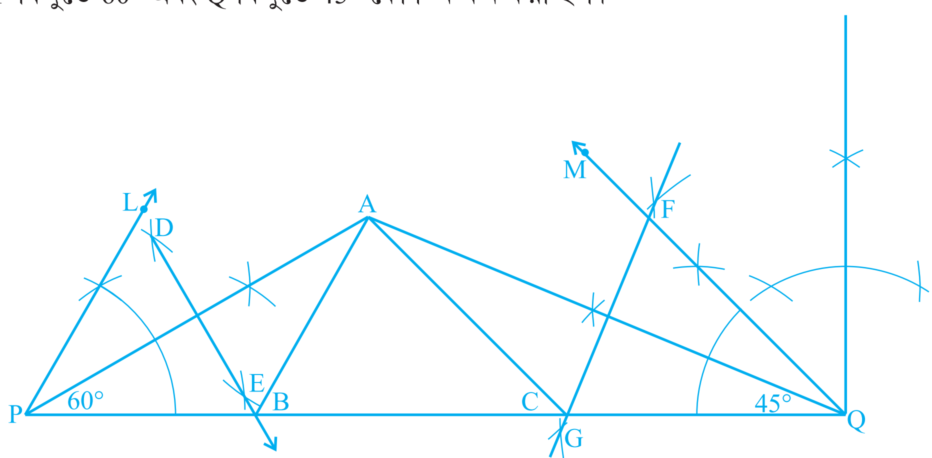
এবং $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\angle AXB = \angle LXY$

অনুরূপে, $\angle ACB = \angle MYX$

উদাহরণ 1 : ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো যেখানে, $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ এবং এবং $AB + BC + CA = 11$ সেমি

অঙ্কনের ধাপ সমূহ :

1. একটি রেখাংশ $PQ = 11$ সেমি ($= AB + BC + CA$) অঙ্কন করা হল।
2. P বিন্দুতে 60° এবং Q বিন্দুতে 45° কোণ অঙ্কন করা হল।



চিত্র 11.9

3. এই কোণগুলোকে সমদ্বিখণ্ডিত করা হল, মনে করি সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
4. AP এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক DE অঙ্কন করা হল যা PQ কে B বিন্দুতে ছেদ করে এবং AQ এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক FG যা PQ কে C বিন্দুতে ছেদ করে।
5. AB এবং AC যুক্ত করা হল (চিত্র 11.9 দেখো)

তাহলে, ABC হল নির্ণেয় ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 11.2

1. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো, যেখানে $BC = 7$ সেমি, $\angle B = 75°$ এবং $AB + AC = 13$ সেমি।

2. ABC একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো, যেখানে $BC = 8$ সেমি, $\angle B = 45°$ এবং $AB - AC = 3.5$ সেমি।

3. PQR একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো, যেখানে $QR = 6$ সেমি, $\angle Q = 60°$ এবং $PR - PQ = 2$ সেমি।

4. XYZ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করো, যেখানে $\angle Y = 30°$, $\angle Z = 90°$ এবং $XY + YZ + ZX = 11$ সেমি।

5. একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করো, যার ভূমি 12 সেমি এবং অতিভুজ ও অন্য বাহুর যোগফল 18 সেমি।

11.4 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে একটি মাপনী (স্কেল) এবং একটি কম্পাস ব্যবহার করে তোমরা নিচের অঙ্কনগুলো করেছ :

1. একটি প্রদত্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করা।
2. একটি প্রদত্ত রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করা।
3. 60°, ... এ ধরনের কোণ অঙ্কন করা।
4. একটি ত্রিভুজ যার ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর দুই বাহুর যোগফল দেওয়া আছে তা অঙ্কন করা।
5. একটি ত্রিভুজ যার ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তরফল প্রদত্ত তা অঙ্কন করা।
6. একটি ত্রিভুজ যার পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটি দেওয়া আছে তা অঙ্কন করা।

অধ্যায়-12

হেরনের সূত্র (HERON’S FORMULA)

12.1 ভূমিকা

তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে বিভিন্ন আকৃতির চিত্র যেমন বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র, ত্রিভুজ এবং চতুর্ভুজ সম্বন্ধে পড়েছ। তোমরা এর মধ্যে কিছু আকৃতি যেমন, বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদির পরিসীমা এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পেরেছ। উদাহরণস্বরূপ, তুমি ও তোমাদের শ্রেণিকক্ষের মেঝের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পার।

চলো আমরা মেঝের বাহু বরাবর হেঁটে একবার ঘুরে আসি, আমরা যে দূরত্ব হাঁটলাম তা হল মেঝের পরিসীমা। ঘরের মেঝের আকার (size) তার ক্ষেত্রফলকে বোঝায়।

সুতরাং, যদি তোমার শ্রেণিকক্ষটি আয়তাকার হয় যার দৈর্ঘ্য 10 মি এবং 8 মি প্রস্থ হয়, তাহলে তার পরিসীমা হবে 2(10 মি + 8 মি) = 36 মি এবং তার ক্ষেত্রফল হবে 10 মি× 8মি, অর্থাৎ 80 মি^{2}।

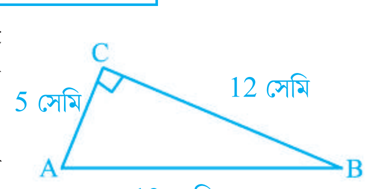
দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের পরিমাপের একক ধরা হয়েছে মিটার (মি) অথবা সেন্টিমিটার (সেমি) ইত্যাদি।

কোনো সামতলিক চিত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপের একক ধরা হয় বর্গমিটার (মি^{2}) বা বর্গ সেন্টিমিটার (সেমি^{2}) ইত্যাদি।

ধরে নাও, তুমি একটি ত্রিভুজাকৃতি বাগানে বসে আছ। কী করে এটির ক্ষেত্রফল বের করবে? অধ্যায় 9 এবং পূর্ববর্তী শ্রেণি থেকে তোমরা জানো যে,

$$\boxed{\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ ভূমি} \times \text{উচ্চতা}} \qquad \text{(I)}$$

আমরা দেখি যে, যখন ত্রিভুজটি সমকোণী (**right angled**) হয়, তখন আমরা সরাসরি সমকোণের ধারক বাহুদুটিকে ভূমি ও উচ্চতা ধরে এই সূত্র ব্যবহার করতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, ধর, সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর বাহুগুলো হল 5 সেমি, 12 সেমি এবং 13 সেমি; আমরা ধরব ভূমি 12 সেমি এবং উচ্চতা 5 সেমি (চিত্র 12.1 দেখো)



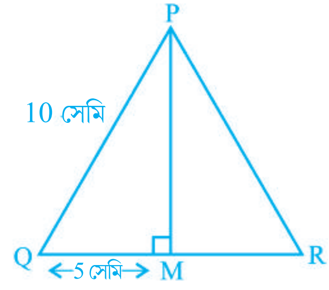
চিত্র **12.1**

অতএব, Δ ABC এর ক্ষেত্রফল হবে

$$\frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা} = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ সেমি}^2, \quad \text{অর্থাৎ } 30 \text{ সেমি}^2$$

লক্ষ করো, আমরা 5 সেমি কে ভূমি এবং 12 সেমি কে উচ্চতা হিসাবেও ধরতে পারি।

এখন ধরো আমরা 10 সেমি বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ PQR এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে চাই (চিত্র 12.2 দেখো)। এটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য আমাদের প্রয়োজন তার উচ্চতা। তুমি কি এই ত্রিভুজটির উচ্চতা নির্ণয় করতে পারবে?



চিত্র 12.2

চলো, আমরা স্মরণ করি, কী করে আমরা তার উচ্চতা নির্ণয় করব, যখন তার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য আমাদের জানা। এটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সম্ভব। QR এর মধ্যবিন্দু M ধর এবং PM যুক্ত করো। আমরা জানি, যে PMQ হল একটি সমকোণী ত্রিভুজ। সুতরাং, পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে আমরা PM এর দৈর্ঘ্য নিম্নরূপে নির্ণয় করতে পারি :

$$PQ^2 = PM^2 + QM^2$$

অর্থাৎ, $(10)^2 = PM^2 + (5)^2$, যেহেতু $QM = MR$.

সুতরাং, আমরা পাই $PM^2 = 75$

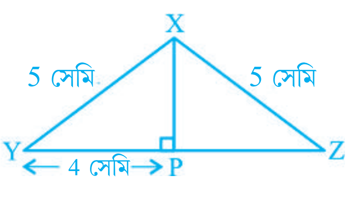
অর্থাৎ, $PM = \sqrt{75}$ সেমি $= 5\sqrt{3}$ সেমি

অতএব Δ PQR এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}$ সেমি^{2} $= 25\sqrt{3}$ সেমি^{2}

চলো এবার আমরা দেখি এই সূত্রটি ব্যবহার করে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় কি না। ধরি XYZ একটি ত্রিভুজ যার সমান দুটি বাহু XY এবং XZ , প্রতিটি 5 সেমি এবং অসমান বাহু YZ এর দৈর্ঘ্য 8 সেমি (চিত্র 12.3 দেখো)।

এই ক্ষেত্রেও আমরা ত্রিভুজটির উচ্চতা জানতে চাই। সুতরাং X থেকে YZ এর উপর XP লম্ব অঙ্কন করি। তোমরা দেখতে পার লম্ব XP, ত্রিভুজের ভূমি YZ কে দুটি সমান অংশে ভাগ করে।

সুতরাং, $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$ সেমি



চিত্র 12.3

অতএব পিথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করে আমরা পাই—

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

সুতরাং, $XP = 3$ সেমি

এখন Δ XYZ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি (YZ) $\times$ উচ্চতা (XP)

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \text{ সেমি}^2 = 12 \text{ সেমি}^2$$

এখন ধর, আমরা একটি বিষমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য জানি কিন্তু উচ্চতা জানি না। তুমি কি তার ক্ষেত্রফলও নির্ণয় করতে পারবে? উদাহরণস্বরূপ, তোমার একটি ত্রিভুজাকৃতি উদ্যান আছে যার বাহুগুলো হলো 40 মি, 32 মি, এবং 24 মি। কী করে তুমি তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবে? যদি তুমি এই সূত্রটি ব্যবহার করতে চাও, তা হলে অবশ্যই তোমার তার উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে। কিন্তু উচ্চতা নির্ণয় করার কোনো সূত্র আমাদের জানা নেই। তবুও চেষ্টা করো। যদি তুমি এটি নির্ণয় করতে অসফল হও তাহলে পরবর্তী অনুচ্ছেদে যাও।

12.2 হেরনের সূত্র প্রয়োগে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

হেরনর সম্ভবত 10 খ্রিস্টাব্দের মধ্যে মিশরের আলেকজান্ডিয়া নামক স্থানে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি ফলিত গণিত নিয়ে চর্চা করেছিলেন। গাণিতিক এবং প্রাকৃতিক বিষয়ের উপর তাঁর কাজ সমূহ এত বেশি এবং এত ভিন্ন ধরনের ছিল যে, তাঁকে এই সকল ক্ষেত্রে একজন বিশ্বকোষ সম্বন্ধীয় লেখক বলা হয়। পরিমিতির সমস্যাগুলো নিয়ে তিনি প্রধানত তিনটি বই-তে কাজ করেছেন। প্রথম বইটিতে তিনি আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, ট্রাপিজিয়াম এবং অন্যান্য বিশেষ প্রকার চতুর্ভুজ, ত্রিভুজ, সুষম বহুভুজ, বৃত্ত চোঙের পৃষ্ঠ, শঙ্কু, গোলক প্রভৃতির ক্ষেত্রফল নিয়ে কাজ করেছেন। এই বইটিতে হেরন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য সম্বলিত ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিখ্যাত সূত্রটি উল্লেখ করেছেন।

হেরন (10 খ্রি: - 75 খ্রি)

চিত্র 12.4

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত হেরনের বিখ্যাত সূত্রটিকে 'হিরোর সূত্র' (Heron's formula) নামেও অভিহিত করা হয়। এটি নিম্নরূপ :-

$$\boxed{\text{একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \qquad \text{(II)}$$

যেখানে a, b এবং c হল ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য এবং s = অর্ধ পরিসীমা, অর্থাৎ, ত্রিভুজের

পরিসীমার অর্ধেক $= \dfrac{a+b+c}{2}$

যে ত্রিভুজগুলোর উচ্চতা সহজে নির্ণয় করা যায় না, সেই সব ক্ষেত্রে এই সূত্রটি উপযোগী। চল আমরা উপরে দেওয়া (চিত্র 12.5 দেখ) ত্রিভুজাকৃতি উদ্যান ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য সূত্রটি প্রয়োগ করি।

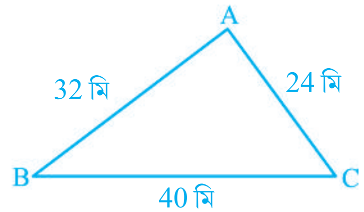
ধরি, $a = 40$ মি, $b = 24$ মি, $c = 32$ মি,

সুতরাং, আমরা পাই, $s = \dfrac{40+24+32}{2}$ মি $= 48$ মি।

$s - a = (48 - 40)$ মি $= 8$ মি,

$s - b = (48 - 24)$ মি $= 24$ মি,

$s - c = (48 - 32)$ মি $= 16$ মি.



চিত্র **12.5**

সুতরাং, ABC উদ্যানের ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16}$ বর্গ সেমি $= 384$ বর্গ সেমি

আমরা দেখি যে, $32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ । সুতরাং, উদ্যানের বাহুগুলো একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করেছে। বৃহত্তম বাহু, অর্থাৎ BC যেটি 40 মি হবে অতিভুজ এবং AB ও AC এর মধ্যবর্তী কোণ হবে 90° ।

সূত্র I প্রয়োগ করে আমরা যাচাই করতে পারি যে, উদ্যানটির ক্ষেত্রফল হল $\frac{1}{2} \times 32 \times 24$ মি^{2}

$= 384$ মি^{2}

আমরা দেখি যে, ক্ষেত্রফল আমরা পেয়েছি তা হেরনের সূত্র প্রয়োগে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের সমান।

এখন তোমরা হেরনের সূত্র প্রয়োগ করে পূর্বে আলোচিত অন্য ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে যাচাই করো যে তা আগের ক্ষেত্রফলের অনুরূপ হয় কি না,

(i) সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহু 10 সেমি।

(ii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার অসমান বাহু 8 সেমি এবং প্রতিটি সমান বাহু সেমি 5 সেমি।

তোমরা দেখবে যে,

(i) এর ক্ষেত্রে, আমরা পাই $s = \frac{10 + 10 + 10}{2}$ সেমি $= 15$ সেমি

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{15(15 - 10)(15 - 10)(15 - 10)}$ সেমি^{2}

$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5}$ সেমি$^2 = 25\sqrt{3}$ সেমি^{2}

(ii) এর ক্ষেত্রে আমরা পাই, $s = \frac{8 + 5 + 5}{2}$ 9 সেমি

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{9(9 - 8)(9 - 5)(9 - 5)}$ সেমি$^2 = \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4} = 12$ সেমি^{2}

চলো আমরা এখন আরো কিছু উদাহরণ সমাধান করি :

উদাহরণ 1 : একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি ও 11 সেমি এবং পরিসীমা হল 32 সেমি (চিত্র 12,6 দেখো)

সমাধান : এখানে আমরা পাই ত্রিভুজটির পরিসীমা = 32 সেমি , a = 8 সেমি এবং b = 11সেমি।

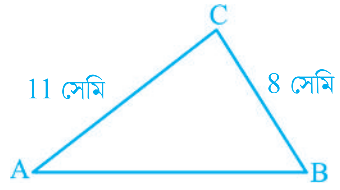
তৃতীয় বাহু c = 32 সেমি – (8 + 11) সেমি = 13 সেমি

সুতরাং, $2s = 32$, অর্থাৎ s = 16 সেমি

$s - a$ = (16 – 8) সেমি = 8 সেমি,

$s - b$ = (16 – 11) সেমি = 5 সেমি,

$s - c$ = (16 – 13) সেমি = 3 সেমি.



চিত্র **12.6**

অতএব, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ সেমি^{2} $= 8\sqrt{30}$ সেমি^{2}

উদাহরণ 2 : একটি ত্রিভুজাকৃতি উদ্যান ABC এর বাহুগুলো হল 120মি 80মি এবং 50মি (চিত্র 12.7 দেখো)। একজন মালী ধনীরাম এটির চারদিকে বেড়া দিতে এবং ভেতরে গাছ লাগাতে চায়। তাকে কতটুকু ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট জায়গায় গাছ লাগাতে হবে? একদিকে 3 মিটার চওড়া একটি দরজা বাদ দিয়ে প্রতি মিটার 20 টাকা দামে কাঁটাতারের বেড়া দিতে কত খরচ হবে তা নির্ণয় করো।

সমাধান : উদ্যানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য আমরা পাই

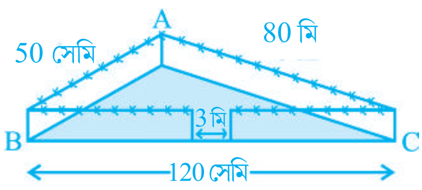
$2s$ = 50 মি + 80 মি + 120 মি = 250 মি।

সুতরাং, s = 125 মি

এখন, $s - a$ = (125 – 120) মি = 5 মি,

$s - b$ = (125 – 80) মি = 45 মি,

$s - c$ = (125 – 50) মি = 75 মি।



চিত্র **12.7**

অতএব, উদ্যানটির ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ সেমি^{2}

$= 375\sqrt{15}$ সেমি^{2}

আবার, উদ্যানটির পরিসীমা = AB + BC + CA = 250 মি

অতএব, বেড়া দেওয়ার জন্য তারের প্রয়োজনীয় দৈর্ঘ্য = 250 মি – 3 মি (দরজার জন্য বাদ)

= 247 মি

এবং তাই বেড়ার জন্য খরচ = ₹ 20 × 247 = ₹ 4940

উদাহরণ 3 : একটি ত্রিভুজাকৃতি জমির বাহুগুলোর অনুপাত 3 : 5 : 7 এবং তার পরিসীমা 300 মি। এটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

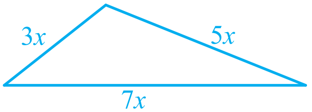
সমাধান : ধরো, মিটারে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য $3x$, $5x$ এবং $7x$ (চিত্র 12.8 দেখো)।

সুতরাং, আমরা জানি যে $3x + 5x + 7x = 300$ (ত্রিভুজটির পরিসীমা)

অতএব, $15x = 300$ যা থেকে পাওয়া যায় $x = 20$

সুতরাং ত্রিভুজের বাহুগুলো হল 3×20 মি, 5×20 মি এবং 7×20 মি

অর্থাৎ, 60 মি, 100 মি এবং 140 মি.



চিত্র 12.8

তোমরা কি এবার তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে (হেরনের সূত্র প্রয়োগ করে)?

আমরা পাই $= \dfrac{60 + 100 + 140}{2}$ মি $= 150$ মি,

এবং ক্ষেত্রফল হবে $\sqrt{150\,(150 - 60)\,(150 - 100)\,(150 - 140)}$ মি^{2}

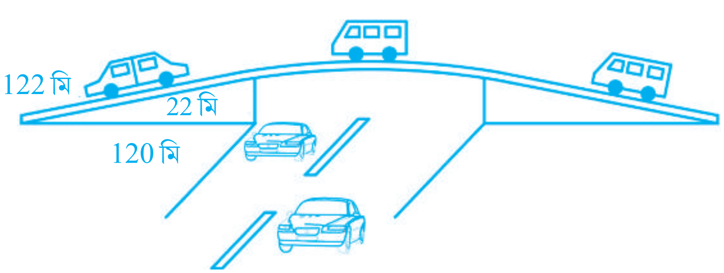
$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10)}$ মি^{2}

$= 1500\sqrt{3}$ মি^{2}

অনুশীলনী 12.1

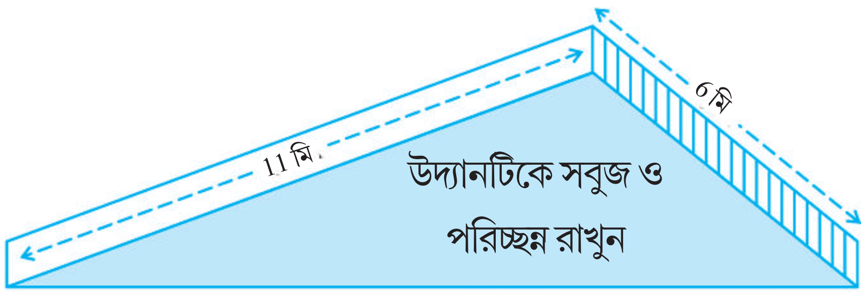
1. একটি যানবাহন সংকেত (traffic signal) বোর্ডে লেখা আছে 'সামনে বিদ্যালয়'। এটি একটি 'a' বাহু বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ। হেরনের সূত্র ব্যবহার করে সংকেত-বোর্ডটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। যদি তার পরিসীমা 180 সেমি হয়, তাহলে সংকেত বোর্ডটির ক্ষেত্রফল কত হবে?

2. একটি উড়াল সেতুর ত্রিভুজাকৃতি পার্শ্ব দেওয়ালগুলো বিজ্ঞাপনের জন্য ব্যবহৃত হয়। দেওয়ালের ধারগুলো (sides) 122 মি, 22 মি এবং 120 মি (চিত্র 12.9 দেখো) এ বিজ্ঞাপন থেকে প্রতি বছর 5000 টাকা প্রতি মি^{2} পাওয়া যায়। একটি সংস্থা 3 মাসের জন্য একটি দেওয়াল ভাড়া নিল। তাকে ভাড়া বাবদ কত দিতে হবে?



চিত্র 12.9

3. একটি উদ্যানে একটি হড়কানি (slide) আছে। তার এক পাশের দেওয়ালে বিভিন্ন রং দিয়ে একটি বার্তা লেখা আছে। "উদ্যানটিকে সবুজ ও পরিচ্ছন্ন রাখুন" (চিত্র 12.10 দেখো)। যদি দেওয়ালের ধারগুলো 15 মি, 11 মি এবং 6 মি হয় তবে রঙ করা দেওয়ালের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র **12.10**

4. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 18 সেমি এবং 10 সেমি এবং পরিসীমা 42 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

5. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 12 : 17 : 25 এবং পরিসীমা 540সেমি। ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

6. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 30 সেমি. এবং সমান দুটি বাহুর প্রতিটি 12 সেমি। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

12.3 চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে হেরনের সূত্রের প্রয়োগ

মনে করো, একজন কৃষকের কাছে চাষের জন্য একটি জমি আছে এবং সে এটি চাষ করার জন্য প্রতি বর্গমিটার চাষের মজুরি শর্ত হিসাবে কিছু শ্রমিক নিযুক্ত করেন। এটি সে কীভাবে করবে? অধিকাংশ ক্ষেত্রে এই জমিগুলোর আকার হয় চতুর্ভুজাকৃতি। আমাদের প্রয়োজন এই চতুর্ভুজকে ত্রিভুজাকৃতি অংশে বিভক্ত করা এবং সূত্রটি ব্যবহার করে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা। চলো আমরা এই সমস্যাটি অনুধাবন।

উদাহরণ 4 : বিমলার একটি ত্রিভুজাকৃতি জমি আছে যার বাহুগুলো হল 240 মি, 200 মি, 360 মি। তাতে সে ধান উৎপাদন করে। 240 , 320মি, 400 মি বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজাকৃতি পাশের জমিতে সে আলু ও পেঁয়াজ উৎপাদন করতে চায় (চিত্র 12.11 দেখো)। সে দীর্ঘতম বাহুটির মধ্যবিন্দুর সাথে বিপরীত শীর্ষবিন্দু যুক্ত করে জমিটিকে দুটি অংশে বিভক্ত করে এবং একটিতে আলু ও অন্য অংশে পেঁয়াজ উৎপাদন করেন। কত ক্ষেত্রফল (হেক্টর এককে) বিশিষ্ট জমি ধান, আলু এবং পেঁয়াজ উৎপাদনের জন্য ব্যবহৃত হয়েছে? (1 হেক্টর = 10000 মি^{2})

সমাধান : ধর, ABC জমিতে ধান উৎপন্ন হয়। আরোও ধরো, ACD হল সেই জমিটি যা AD এর মধ্যবিন্দু E এর সাথে C যুক্ত করে দুটি অংশে বিভক্ত করা হয়েছে। ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য, আমাদের আছে—

$$a = 200 \text{ মি}, b = 240 \text{ মি}, c = 360 \text{ মি}$$

সুতরাং, $s = \dfrac{200 + 240 + 360}{2}$ মি = 400 মি.

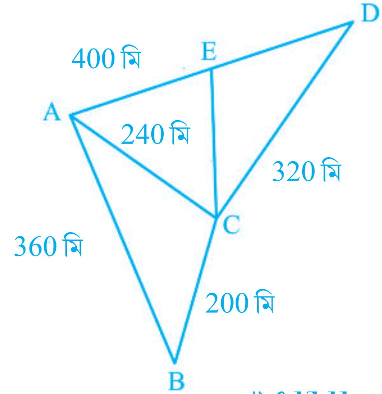
সুতরাং, ধান উৎপাদনের জমির ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{400\,(400 - 200)\,(400 - 240)\,(240 - 360)}$ মি^{2}

$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}$ মি^{2}

$= 1600\sqrt{2}$ মি^{2} $= 1.6 \times \sqrt{2}$ হেক্টর

$= 2.26$ হেক্টর (প্রায়)



চিত্র 12.11

চল, এখন আমরা ত্রিভুজ ACD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

এখানে, আমরা পাই $s = \frac{240 + 320 + 400}{2}$ মি $= 480$ মি।

সুতরাং, Δ ACD এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{480\,(480 - 240)\,480 - 320)\,(480 - 400)}$ মি^{2}

$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}$ মি^{2} $= 38400$ মি^{2} $= 3.84$ হেক্টর

আমরা লক্ষ করবো যে, AD এর মধ্যবিন্দু E এবং C এর সংযুক্ত রেখাংশটি ACD ত্রিভুজটিকে দুটি সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অংশে বিভক্ত করেছে। তোমরা কী এটির কারণ বলতে পারবে? বস্তুত এদের ভূমিদ্বয় AE এবং ED এর দৈর্ঘ্য সমান এবং অবশ্যই তাদের উচ্চতা সমান।

সুতরাং, আলু উৎপাদনের জমির ক্ষেত্রফল = পেঁয়াজ উৎপাদনের জমির ক্ষেত্রফল

$= (3.84 \div 2)$ হেক্টর $= 1.92$ হেক্টর।

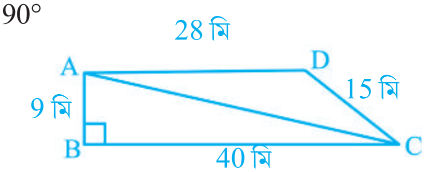
উদাহরণ 5 : একটি বিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীরা সাফাই অভিযানের প্রচারের জন্য সমবেত হল। তারা দুটি অংশে বিভক্ত হয়ে বিভিন্ন গলি রাস্তা দিয়ে হেঁটে অগ্রসর হলো। একটি দল গলি রাস্তা AB, BC এবং CA দিয়ে অগ্রসর হল এবং অন্য দলটি AC, CD এবং DA দিয়ে অগ্রসর হল (চিত্র 12.12 দেখো)। তারপর তারা তাদের গলি রাস্তার দ্বারা আবদ্ধ জায়গা সাফাই করে। যদি AB = 9মি, BC= 40মি, CD = 15 মি, DA = 28 মি এবং $\angle B = 90^\circ$ হয়, তাহলে কোন্ দলটি বেশি জায়গা সাফাই করেছে এবং কত বেশি? শিক্ষার্থীরা মোট কত ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট জায়গা সাফাই করেছে তা নির্ণয় করো। (গলি রাস্তার প্রস্থকে বাদ দিয়ে)

সমাধান : যেহেতু AB = 9 মি এবং BC = 40 মি, $\angle B = 90^\circ$

আমরা পাই AC $= \sqrt{9^2 + 40^2}$ মি

$= \sqrt{81 + 1600}$ মি

$= \sqrt{1681}$ মি $= 41$ মি



চিত্র 12.12

সুতরাং, প্রথম দলটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান সাফাই করেছে।

অতএব Δ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 40 \times 9$ মি^{2} $= 180$ মি^{2}

দ্বিতীয় দলটি Δ ACD এর ক্ষেত্রফলের সমান সাফাই, করেছে। যেটি 41 মি, 15 মি এবং 28 মি বাহু বিশিষ্ট বিষমবাহু ত্রিভুজ।

এখানে, $s = \dfrac{41 + 15 + 28}{2}$ মি = 42 মি

সুতরাং, Δ ACD এর ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$

= $\sqrt{42\,(42 - 41)\,(42 - 15)\,(42 - 28)}$ মি^{2}

= $\sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14}$ মি^{2} = 126 মি^{2}

সুতরাং, প্রথম দলটি 180 মি^{2} সাফাই করেছে, যেটি দ্বিতীয় দলটি থেকে (180 – 126) মি^{2} অর্থাৎ 54 মি^{2} বেশি সাফাই করেছে।

অতএব, সকল শিক্ষার্থীরা একত্রে মোট জায়গা সাফাই করে = (180 + 126) মি^{2} = 306 মি^{2}.

উদাহরণ 6 : রূপমতির কছে এক খণ্ড জমি আছে যা রম্বস আকৃতির (চিত্র12.13 দেখো) । সে চায় তার এক কন্যা ও এক পুত্র এই জমিতে কাজ করে বিভিন্ন শষ্য উৎপাদন করে। সে জমিটিকে দুটি সমান অংশে ভাগ করলেন। যদি জমিটির পরিসীমা 400 মি হয় এবং একটি কর্ণ 160 মি হয়, তবে প্রত্যেকে কত ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট জমি পাবে, তাদের শস্যের জন্য ?

সমাধান : ধরো, জমিটি হল ABCD

পরিসীমা = 400 মি

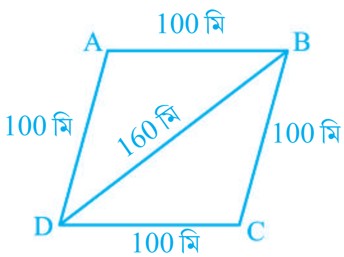
সুতরাং, প্রত্যেক বাহু = 400 মি ÷ 4 = 100 মি

অর্থাৎ, AB = AD = 100 মি।

ধরো, কর্ণ BD = 160 মি।

অতএব, Δ ABD অর্ধ পরিসীমা s হল

$s = \dfrac{100 + 100 + 160}{2}$ মি = 180 মি



চিত্র **12.13**

সুতরাং, Δ ABD এর ক্ষেত্রফল = $\sqrt{180\,(180 - 100)\,(180 - 100)\,(180 - 160)}$

= $\sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}$ মি^{2} = 4800 মি^{2}

অতএব, প্রত্যেকের জমির ক্ষেত্রফল হবে 4800 মি^{2}।

বিকল্প পদ্ধতি : CE ⊥ BD অঙ্কন করো। (চিত্র 12.14 দেখো)

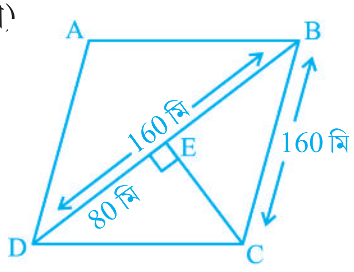
যেহেতু $BD = 160$ মি, ∴ আমরা পাই

$DE = 160$ মি $\div 2 = 80$ মি

এবং $DE^2 + CE^2 = DC^2$, যা থেকে পাওয়া যায়

$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2}$

অথবা $CE = \sqrt{100^2 - 80^2}$ মি^{2} $= 60$ মি

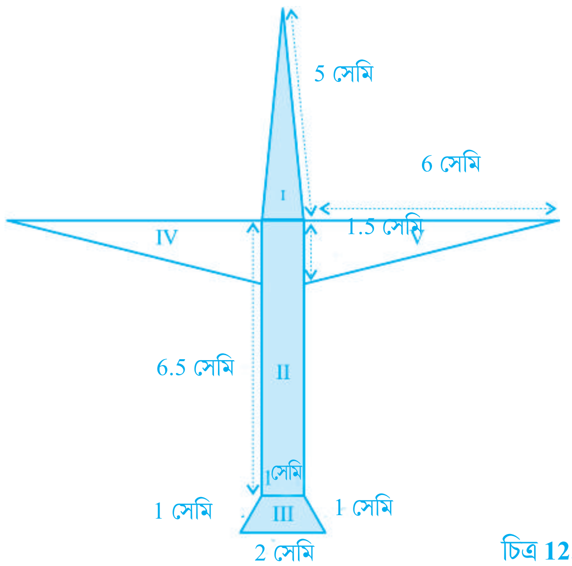


চিত্র 12.14

সুতরাং, Δ BCD ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60$ মি^{2} $= 4800$ মি^{2}

অনুশীলনী 12.2

1. একটি উদ্যান চতুর্ভুজ ABCD আকারের। যার $\angle C = 90^\circ$, $AB = 9$ মি, $BC = 12$ মি, $CD = 5$ মি এবং $AD = 8$ মি.। এটি কতটুকু জায়গা জুড়ে আছে?
2. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো যার $AB = 3$ সেমি, $BC = 4$ সেমি, $CD = 4$ সেমি, $DA = 5$ সেমিএবং $AC = 5$ সেমি.
3. রাধা রঙিন কাগজ দিয়ে একটি বিমানের ছবি তৈরি করলো যা চিত্র 12.15 -এ দেখানো হয়েছে। ব্যবহৃত কাগজের সম্পূর্ণ ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



চিত্র 12.15

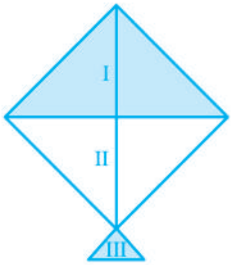
4. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিকের একই ভূমি। যদি ত্রিভুজের বাহুগুলো 26 সেমি, 28 সেমি এবং 30 সেমি হয় এবং 28 সেমি সামান্তরিকটি ভূমির উপর দণ্ডায়মান হয়, তবে সামান্তরিকটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

5. একটি রম্বসাকৃতি মাঠে 18 টি গরু চরানোর জন্য সবুজ ঘাস আছে। যদি রম্বসটির প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 30 মি এবং বড়ো কর্ণটি 48 মি হয়, তবে প্রত্যেকটি গরু চরার জন্য কত ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ঘাসের জমি পাবে?

6. দুটি ভিন্ন রঙের 10 টি ত্রিভুজাকৃতি কাপড়ের টুকরো দিয়ে একটি ছাতা তৈরি করা হয়েছে (চিত্র 12.16 দেখ)। যদি প্রত্যেকটি টুকরোর পরিমাপ 20 সেমি, 50 সেমি এবং 50 সেমি হয়, তবে প্রত্যেক রঙের কতটুকু কাপড়, ছাতার জন্য প্রয়োজন হয়েছে?

7. একটি ঘুড়ি তিনটি ভিন্ন ভিন্ন রঙের কাগজ দিয়ে বানানো হয়েছে। যা চিত্র 12.17 এ I, II এবং III তে দেখানো হয়েছে। ঘুড়িটির উপরের অংশ 32 সেমি কর্ণ বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র এবং নিচের অংশটি একটি 6 সেমি, 6 সেমি এবং 8 সেমি বাহু বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। ঘুড়িটি তৈরি করতে ভিন্ন ভিন্ন রঙের কতটুকু কাগজ ব্যবহার করা হয়েছে?

চিত্র 12.16



চিত্র 12.17

8. মেঝেতে একটি ফুলের নকশা 16 টি ত্রিভুজাকৃতি টালি দিয়ে বানানো হয়েছে, যেখানে প্রত্যেকটির বাহুগুলো 9 সেমি, 28 সেমি এবং 35 সেমি (চিত্র 12.18 দেখো)। 50 পয়সা প্রতি বর্গ সেন্টিমিটার হিসাবে এই টালিগুলো পালিস করতে মোট কত খরচ হবে?

9. একটি মাঠ ট্রাপিজিয়াম আকৃতির, যার সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্য 25 মি এবং 10 মি । অন্য বাহু দুটি 14 মি এবং 13মি মাপের। মাঠটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

চিত্র 12.18

12.4 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো a, b এবং c হলে হেরনের সূত্র অনুযায়ী তার ক্ষেত্রফল হবে—

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

যেখানে $$s = \frac{a+b+c}{2}$$

2. একটি চতুর্ভুজের বাহুগুলো ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে তাকে দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে হেরনের সূত্র প্রয়োগে সম্পূর্ণ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

অধ্যায়-13

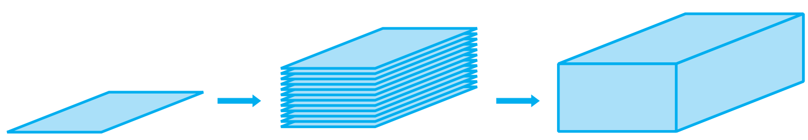
পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন (SURFACE AREAS AND VOLUMES)

13.1 ভূমিকা

আমরা যেদিকে তাকাই সাধারণত ঘনবস্তু দেখতে পাই। এ পর্যন্ত আমাদের অধ্যয়নে যে চিত্রগুলো নিয়ে আমরা আলোচনা করেছি সেগুলো সহজেই খাতা অথবা ব্ল্যাকবোর্ডে আঁকা যায়। এই চিত্রগুলোকে সামতলিক চিত্র বলে। আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, বৃত্ত ইত্যাদি বলতে কি বোঝায় এবং এগুলোর পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল কীভাবে নির্ণয় করতে হয় তা আমরা উপলব্ধি করেছি। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে এগুলো আমরা শিখেছি। এটি দেখতে মজার যে কী ঘটে যখন আমরা একটি কার্ডবোর্ড থেকে সম আকার ও আকৃতির বিভিন্ন সামতলিক চিত্রগুলি কেটে নিয়ে স্তুপাকারে উলম্ব স্তম্ভের আকারে সাজাই। এভাবে আমরা কতগুলো ঘনবস্তু (সংক্ষেপে এদের ঘন বলা হয়) পাব। যেমন আয়তঘন, চোঙ ইত্যাদি। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা ঘনক, আয়তঘন, চোঙ ইত্যাদির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করতে শিখেছ। এখন আমরা আয়তঘন ও চোঙের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন কিভাবে নির্ণয় করতে হয় তা বিশদভাবে জানব। এই ধারণার সাহায্যে আমরা আরো কিছু ঘনবস্তু যেমন শঙ্কু, গোলক ইত্যাদি সম্পর্কে জানবো।

13.2 আয়তঘন এবং ঘনকের ক্ষেত্রফল :

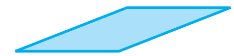
তোমরা কি কখনো কাগজের আঁটি (bundle) লক্ষ্য করেছ? এটা দেখতে কেমন? এটা কি দেখতে 13.1 নং চিত্রের ন্যায়?



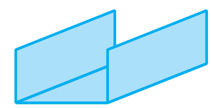
চিত্র 13.1

কাগজের এক একটি আঁটি এক একটি আয়তঘন সৃষ্টি করে। এই আয়তঘনটি মোড়াতে তোমাদের কতটুকু বাদামী কাগজের (brown) এর প্রয়োজন। চলো দেখা যাক :

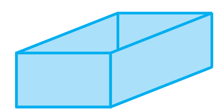
প্রথমত, কাগজের আঁটিটির নিচের দিকটি আবৃত করার জন্য, আয়তাকৃতির একখণ্ড কাগজের প্রয়োজন, যা 13.2 (a) নং চিত্রে প্রদর্শিত টুকরোর ন্যায়।


(a)

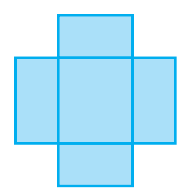
অতঃপর, লম্বা পার্শ্বদুটি আবৃত করার জন্য সমমাপের আয়তাকৃতির দুইখণ্ড কাগজের প্রয়োজন হবে। এখন এটিকে দেখতে চিত্র নং 13.2 (b) এর ন্যায় হবে।


(b)

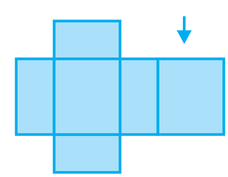
এখন সম্মুখ এবং পশ্চাদ দিক দুটি আবৃত করার জন্য আরো দুখণ্ড অন্য অথচ সমমাপের কাগজের প্রয়োজন। এই অবস্থায় নকশাটিকে চিত্র নং 13.2 (c) এর মতো দেখবে।


(c)

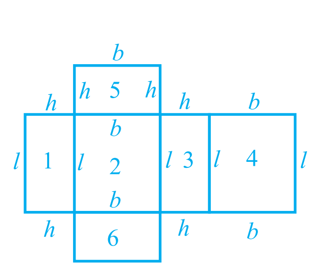
এই আকৃতি উন্মুক্ত করলে চিত্র 13.2 (d) এর মতো দেখাবে।


(d)

শেষে আঁটির উপরের তলকে আবৃত করার জন্য আরো একখণ্ড আয়তাকার কাগজের প্রয়োজন। এই কাগজটির মাপ, নিচের দিকটিকে আবৃত করার জন্য প্রয়োজনীয় কাগজের মাপের সমান। যা আমরা যদি ডানদিকে যুক্ত করি তবে আকৃতিটি দেখতে চিত্র 13.2 (e) এর ন্যায় হবে।


(e)

সুতরাং আয়তঘনাকৃতি আঁটির বহিঃপৃষ্ঠ সম্পূর্ণরূপে আবৃত করতে মোট ছয়টি আয়তাকৃতির কাগজের টুকরা ব্যবহার করা হয়েছে।



(f)

চিত্র **13.2**

এ থেকে আমরা পাই যে একটি আয়তঘনের বহিঃপৃষ্ঠ মোট ছয়টি আয়তক্ষেত্র দ্বারা গঠিত (প্রকৃতপক্ষে, আয়তাকার অঞ্চল, যাকে আয়তঘনের তল (faces) বলা হয়) যার প্রতিটি তলের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের গুণফল, আলাদা আলাদাভাবে নির্ণয় করে, 6 টি তলের ক্ষেত্রফল একসঙ্গে যোগ করে আয়তঘনটির মোট ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়।

এখন, যদি একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য l, প্রস্থ b এবং উচ্চতা h হয়, তবে এই মাত্রাগুলি যুক্ত আয়তঘনটি চিত্র 13.2(f) এর ন্যায় হবে।

সুতরাং, এই ছয়টি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি হবে—

1 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= l \times h)$

$+$

2 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= l \times b)$

$+$

3 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= l \times h)$

$+$

4 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= l \times b)$

$+$

5 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= b \times h)$

$+$

6 নং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(= b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

এ থেকে আমরা পাই—

আয়তঘনের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $\mathbf{2(lb + bh + hl)}$

এখানে l, b এবং h যথাক্রমে আয়তঘনটির তিনটি ধার (edges)

দ্রষ্টব্য: ক্ষেত্রফলের একক, বর্গ এককে নেওয়া হয়। কারণ এক একক বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র গণনা করে কোনো অঞ্চলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, যদি একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 15 সেমি, 10 সেমি, এবং 20 সেমি হয়, তবে এটির ক্ষেত্রফল হবে—

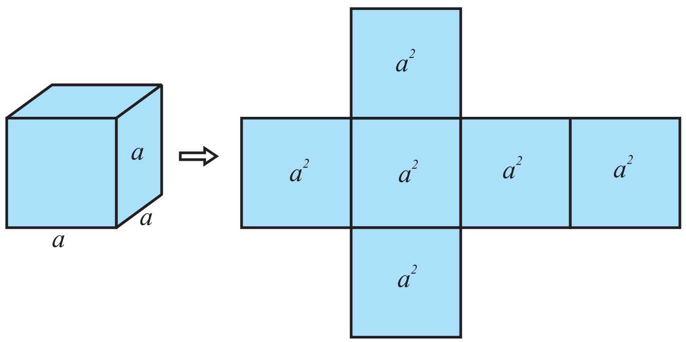
$$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)] \text{ সেমি}^2$$
$$= 2(150 + 200 + 300) \text{ সেমি}^2$$
$$= 2 \times 650 \text{ সেমি}^2$$
$$= 1300 \text{ সেমি}^2$$

যে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা সমান একে ঘনক বলে। যদি কোনো ঘনকের ধার (edge) a হয়, তাহলে ঘনকটির ক্ষেত্রফল হবে—

$2(a \times a + a \times a + a \times a)$ অর্থাৎ, $6a^2$ (চিত্র 13.3 দেখো)

সুতরাং, $\boxed{\textbf{ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল} = 6a^2}$

যেখানে, a ঘনকটির ধার।

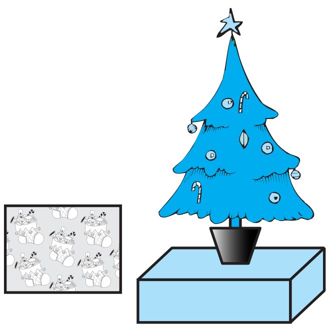


চিত্র **13.3**

মনে করো, একটি আয়তঘনের 6টি তলের মধ্যে উপর এবং নিচের তল দুইটি বাদে অন্য চারটি তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব। এই অবস্থায় এই চারটি তলের ক্ষেত্রফলকে আয়তঘনটির **পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল** বলে। সুতরাং, দৈর্ঘ্য l, প্রস্থ b এবং উচ্চতা h বিশিষ্ট একটি আয়তঘনের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হবে $2lh + 2bh$ বা $2(l+b)h$। একইভাবে a বাহু দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি ঘনকের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল হবে $4a^2$।

মনে রাখবে, কখনো কখনো আয়তঘন (অথবা ঘনক) এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল বলতে **সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলকে** বোঝায়।

উদাহরণ 1 : মেরি তার খ্রিস্টমাস গাছ (Christmas tree) সাজাতে চায়। সে এই গাছটি স্যানটাক্লজের (Santa Claus) ছবিযুক্ত রঙিন কাগজ দ্বারা মোড়ানো একটি কাঠের বাক্সের উপর রাখতে চায় (চিত্র 13.4 দেখো)। এজন্য কতটুকু কাগজ তাকে কিনতে হবে তা সঠিকভাবে জানতে হবে। যদি বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 80 সেমি, 40 সেমি এবং 20 সেমি হয় তবে 40 সেমি বাহুবিশিষ্ট বর্গাকৃতির কতগুলো কাগজের প্রয়োজন হবে?



চিত্র **13.4**

সমাধান : যেহেতু মেরিকে বাক্সটির বাইরের দিকটিতে রঙিন কাগজ আটকাতে হবে ফলে প্রয়োজনীয় কাগজের পরিমাণ, আয়তঘনাকৃতি বাক্সটির পৃষ্ঠতলগুলোর ক্ষেত্রফলের সমান হবে।

বাক্সটির মাত্রা : দৈর্ঘ্য = 80 সেমি, প্রস্থ = 40 সেমি, উচ্চতা = 20 সেমি।

বাক্সটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]$ সেমি^{2}

$= 2[3200 + 800 + 1600]$ সেমি^{2}

$= 2 \times 5600\ cm^2 = 11200$ সেমি^{2}

প্রতিটি কাগজের সিটের ক্ষেত্রফল $= 40 \times 40$ সেমি^{2}

$= 1600$ সেমি^{2}

অতএব, প্রয়োজনীয় কাগজের সিটের সংখ্যা $= \dfrac{\text{বাক্সের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল}}{\text{একটি কাগজের সিটের ক্ষেত্রফল}}$

$= \dfrac{11200}{1600} = 7$

সুতরাং, তার 7 টি সিটের প্রয়োজন হবে।

উদাহরণ 2 : হামিদ তার বাড়ির জন্য 1.5 মিটার লম্বা ধার (edge) বিশিষ্ট ঢাকনাযুক্ত একটি ঘনকাকৃতি জলের ট্যাঙ্ক নির্মাণ করেছে। সে 25 সেমি বাহু বিশিষ্ট বর্গাকার টালি (tiles) দিয়ে ভূমি বাদে ট্যাঙ্কটির বহিঃপৃষ্ঠ আচ্ছাদিত করেছে (চিত্র 13.5 দেখো)। যদি প্রতি ডজন টালির দাম 360 টাকা হয়, তবে টালির জন্য কত খরচ হয়েছে তা নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু, হামিদ ট্যাঙ্কের পাঁচটি তল টালি দিয়ে আচ্ছাদিত করেছে, ফলে টালির সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য ট্যাঙ্কের ক্ষেত্রফল জানা প্রয়োজন।

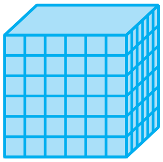
ঘনক আকৃতির ট্যাঙ্কের ধার = 1.5 মি = 150 সেমি $(= a)$

সুতরাং, ট্যাঙ্কটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 5 \times 150 \times 150$ সেমি^{2}

প্রতিটি বর্গাকার টালির ক্ষেত্রফল = বাহু $\times$ বাহু $= 25 \times 25$ সেমি^{2}

সুতরাং, নির্ণেয় টালির সংখ্যা $= \dfrac{\text{ট্যাঙ্কের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল}}{\text{প্রতিটি টালির ক্ষেত্রফল}}$

$= \dfrac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$



চিত্র **13.5**

1 ডজন অর্থাৎ 12 টি টালির দাম = 360 টাকা।

অতএব, 1 টি টালির দাম $= \dfrac{360}{12}$ টাকা = 30 টাকা।

সুতরাং, 180 টি টালির দাম $= 180 \times 30$ টাকা = 5400 টাকা।

অনুশীলনী 13.1

1. 1.5 মিটার দৈর্ঘ্য, 1.25 মিটার প্রস্থ এবং 65 সেমি গভীরতা বিশিষ্ট একটি প্লাস্টিক বাক্স বানাতে হবে। বাক্সটির উপরের দিকটি খোলা। প্লাস্টিক পাতের বেধ (thickness) উপেক্ষা করে নির্ণয় করো।

(i) বাক্সটি বানাতে প্রয়োজনীয় প্লাস্টিক পাতের ক্ষেত্রফল।

(ii) যদি প্রতি বর্গমিটার প্লাস্টিক পাতের মূল্য 20 টাকা হয়, তবে প্রয়োজনীয় প্লাস্টিক পাতের মূল্য।

2. একটি কক্ষের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 5 মি, 4 মি এবং 3 মি। যদি প্রতি বর্গমিটার চুনকামের জন্য 7.50 টাকা ব্যয় হয়, তবে সম্পূর্ণ কক্ষের চুনকামের জন্য কত টাকা খরচ হবে, নির্ণয় করো।

3. একটি হল ঘরের আয়তাকৃতির মেঝের পরিসীমা 250 মি, যদি প্রতি বর্গমিটার 10 টাকা হিসাবে চার দেওয়াল রং করতে মোট 15000 টাকা ব্যয় হয়, তবে হল ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় করো?

[**ইঙ্গিত :** চারটি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল]

4. একটি নির্দিষ্ট পাত্রের রং দিয়ে 9.375 মি^{2} ক্ষেত্রফলে রং দেওয়া যায়। তাহলে এই পরিমাণ রং দিয়ে 22.5 সেমি × 10 সেমি × 7.5 সেমি মাপের কতগুলো ইট রং করা যাবে?

5. একটি ঘনাকৃতির বাক্সের প্রতিটি ধারের (edge) দৈর্ঘ্য 10 সেমি এবং আরেকটি আয়তঘনাকার বাক্সের দৈর্ঘ্য 12.5 সেমি, প্রস্থ 10 সেমি এবং উচ্চতা 8 সেমি।

(i) কোন বাক্সটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বেশি এবং কি পরিমাণ বেশি?

(ii) কোন বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কম এবং কি পরিমাণ কম?

6. একটি ছোট ইন্ডোর গ্রিন হাউস (herbarium) সম্পূর্ণরূপে (ভূমি সহ) কাচ ফলক দিয়ে তৈরি। কাচ ফলকগুলি ফিতার (tape) সাহায্যে একত্রিত। যদি এটির দৈর্ঘ্য 30 সেমি, প্রস্থ 25 সেমি এবং উচ্চতা 25 সেমি হয় তবে–

(i) সবগুলি কাচ ফলকের ক্ষেত্রফল কত?

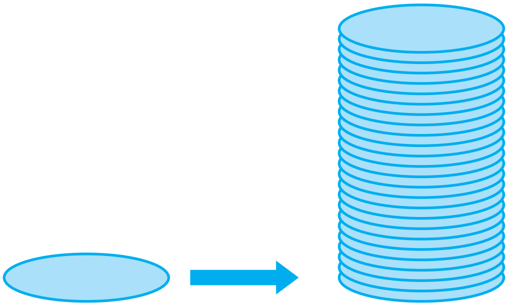
(ii) 12 টি ধারকে সংযোজিত করার জন্য কতটুকু ফিতার প্রয়োজন?

7. শান্তি মিষ্টান্ন ভান্ডার, মিষ্টি রাখার জন্য দুই আকারের কার্ডবোর্ডের বাক্সের বরাত (order) দিয়েছিল। বড় আকারের বাক্সের মাপ 25 সেমি × 20 সেমি × 5 সেমি এবং ছোট আকারের বাক্সের মাপ 15 সেমি × 12 সেমি × 5 সেমি। যদি অভিলেপন (overlaps) অংশের জন্য সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 5% অতিরিক্ত বোর্ডের প্রয়োজন হয় এবং প্রতি 1000 বর্গ সেমি কার্ডবোর্ডের মূল্য 4 টাকা হয়, তবে প্রতি প্রকারের 250 টি করে বাক্সের জন্য মোট খরচ নির্ণয় করো।

8. পারভিন তার গাড়িটি রাখার জন্য একটি বাক্স আকৃতি কাঠামোর উপরিতলসহ চারিদিক ত্রিপলের সাহায্যে আবৃত করে একটি অস্থায়ী ঘর বানাতে চায় (সামনের দিকে ত্রিপলটি এমনভাবে আলগা করে ঝুলানো থাকবে যাতে গুটিয়ে উপরে রাখা যায়)। সেলাই করার জন্য প্রয়োজনীয় মার্জিনের পরিমানকে অগ্রাহ্য করলে, 2.5 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট এবং 4 মি × 3 মি মাপের একটি ঘর বানাতে কি পরিমাণ ত্রিপলের প্রয়োজন হবে?

13.3 লম্বা বৃত্তাকার চোঙের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

ইতিপূর্বে আয়তাকৃতি কাগজের টুকরোকে আমরা যেভাবে স্তূপীকৃত করেছিলাম, যদি একইভাবে বৃত্তাকার কাগজের টুকরোকেও স্তূপে সাজাই, তবে আমরা কি আকৃতি পাবো? (চিত্র 13.6 দেখো)। যদি স্তূপটিকে উলম্বভাবে রাখা হয়, তবে আমরা একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ পাবো।

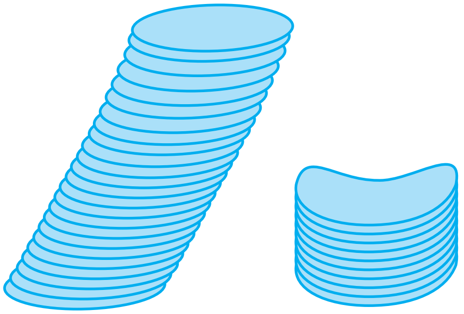


চিত্র 13.6

এ চোঙটিকে লম্ববৃত্তাকার চোঙ বলা হয়। কারণ সৃষ্ট আকৃতিটি ভূমির উপর সমকোণে রাখা হয়েছে এবং ভূমিটি বৃত্তাকার। তবে আমরা দেখবো, কোন প্রকারের চোঙ লম্ব বৃত্তাকার নয়।

13.7 (a) চিত্রে তোমরা দেখেছ যে চোঙটি বৃত্তাকার কিন্তু ভূমি সাপেক্ষে এটি সমকোণে অবস্থিত নয়। অতএব, আমরা এটিকে লম্ববৃত্তাকার চোঙ বলতে পারি না।

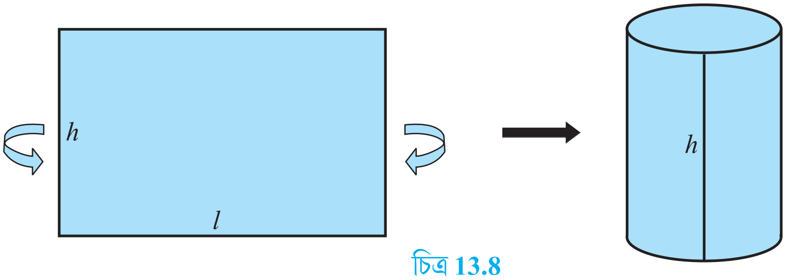
অপরদিকে 13.7 (b) চিত্রের ন্যায়, অবৃত্তাকার ভূমির উপর সমকোণে দণ্ডায়মান চোঙকে লম্ববৃত্তাকার চোঙ বলা যাবে না।



চিত্র 13.7

মন্তব্য : এখানে, আমরা শুধু লম্ববৃত্তাকার চোঙ সম্পর্কে আলোচনা করবো। অতএব, যদি বিশেষভাবে উল্লেখ করা না হয় তবে 'চোঙ' বলতে 'লম্ববৃত্তাকার চোঙ' বুঝতে হবে।

এখন একটি চোঙকে যদি রঙিন কাগজ দ্বারা আবৃত করতে হয়, তবে ন্যূনতম কি পরিমাণ কাগজ দ্বারা আমরা এই কাজটি সম্পন্ন করতে পারবো? প্রথমত, চোঙটিকে কোনোরকম ভাবে আবৃত করা যায় এমন দৈর্ঘ্য ও চোঙটির উচ্চতার সমান প্রস্থ বিশিষ্ট একখণ্ড আয়তাকৃতির কাগজ নাও (চিত্র13.8 দেখো)।



চিত্র 13.8

এই আয়তাকৃতি কাগজের ক্ষেত্রফল চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। লক্ষ করো যে, কাগজটির দৈর্ঘ্য, চোঙটির বৃত্তাকার ভূমির পরিধির সমান যা $2\pi r$ এর সমান।

সুতরাং চোঙটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল

= আয়তাকৃতির কাগজের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= চোঙটির ভূমির পরিসীমা × চোঙটির উচ্চতা।

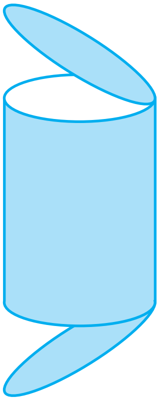
$= 2\pi r \times h$

সুতরাং, **চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$**

এখানে চোঙটির উচ্চতা h এবং ব্যাসার্ধ r।

মন্তব্য : চোঙের ক্ষেত্রে, 'চোঙের ব্যাসার্ধ' বলতে বোঝায় চোঙের ভূমির ব্যাসার্ধ, যদি বিশেষভাবে উল্লেখ না থাকে।

যদি চোঙের উপরিতল ও নিম্নতল উভয়ই আবৃত থাকে তবে আমাদের দুটি বৃত্তের প্রয়োজন (বস্তুত, বৃত্তীয় অঞ্চল) যাদের প্রতিটির ব্যাসার্ধ r এবং প্রতিটির ক্ষেত্রফল হবে πr^2 (চিত্র 13.9 দেখো)। যা থেকে আমরা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল পাই $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$।



চিত্র 13.9

সুতরাং, **চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$**

যেখানে h হল চোঙের উচ্চতা এবং r হল তার ব্যাসার্ধ।

মন্তব্য : প্রথম অধ্যায় থেকে স্মরণ করো যে, π একটি অমূলদ সংখ্যা। সুতরাং π এর মান একটি অসীম (non-terminating) ও অনাবৃত্ত (non-repeating) দশমিক সংখ্যা। কিন্তু হিসাবের সুবিধার্থে এটির মান প্রায় $\frac{22}{7}$ বা 3.14 বলে ধরা হয়।

উদাহরণ 3 : সাবিত্রীকে তার বিজ্ঞান কার্য পরিকল্পনার (science project) জন্য একটি চোঙাকৃতি কেলিডোস্কোপ (kaleidoscope) বানাতে হবে। সে কিলিডোস্কোপটির বক্রতলটি মোটা কাগজ দ্বারা বানাতে চায় (চিত্র 13.10 দেখো)। এই কাজের জন্য কতটুকু কাগজের প্রয়োজন হবে, যদি কেলিডোস্কোপটির দৈর্ঘ্য 25 সেমি এবং ব্যাসার্ধ 3.5 সেমি হয়? (তোমরা, $\pi = \frac{22}{7}$ বলে ধরতে পারো)।

সমাধান : চোঙাকৃতি কেলিডোস্কোপটির ভূমির বাসার্ধ (r) = 3.5 সেমি।

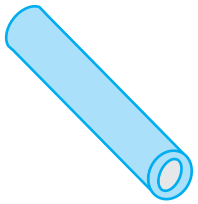
কেলিডোস্কোপটির উচ্চতা (দৈর্ঘ্য) (h) = 25 সেমি।

প্রয়োজনীয় কাগজের ক্ষেত্রফল = কেলিডোস্কোপটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25$ সেমি^{2}

$= 550$ সেমি^{2}



চিত্র 13.10

অনুশীলনী 13.2

(উল্লেখ না থাকলে, $\pi = \frac{22}{7}$ ধরবে)

1. 14 সেমি উচ্চতা বিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 সেমি^{2}। চোঙটির ভূমিতলের ব্যাস নির্ণয় করো?

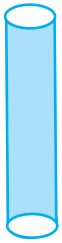
2. একটি ধাতবপাত থেকে 140 সেমি ব্যাস এবং 1 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একটি বন্ধ (closed) চোঙাকৃতি জলের ট্যাংক বানাতে হবে। এই কাজে কত বর্গমিটার পাতের প্রয়োজন হবে?

3. একটি ধাতব নলের দৈর্ঘ্য 77 সেমি। এটির প্রস্থচ্ছেদের অন্তঃব্যাস যদি 4 সেমি এবং বহিঃব্যাস 4.4 সেমি হয় (চিত্র 13.11 দেখ) তবে নির্ণয় করো—

(i) অন্তঃবক্রতলের ক্ষেত্রফল

(ii) বহিঃবক্রতলের ক্ষেত্রফলর

(iii) সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল



চিত্র 13.11

4. একটি রোলারের (roller) ব্যাস 84 সেমি এবং দৈর্ঘ্য 120 সেমি। একটি খেলার মাঠকে সমতল করতে রোলারটি 500 বার আবর্তন করে। মাঠটির ক্ষেত্রফল বর্গমিটার এককে নির্ণয় করো?

5. একটি চোঙাকৃতি স্তম্ভের ব্যাস 50 সেমি এবং উচ্চতা 3.5 মিটার। প্রতি বর্গমিটার 12.50 টাকা হিসাবে স্তম্ভটির বক্রতল রং করতে কত খরচ হবে?

6. একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 4.4 মি^{2}.। যদি চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ 0.7 মি হয় তবে চোঙটির উচ্চতা নির্ণয় করো।

7. একটি বৃত্তাকৃতি কূপের অন্তঃব্যাস 3.5 মিটার এবং গভীরতা 10 মি. তবে নির্ণয় করো—

(i) কূপটির অন্তঃবক্রতলের ক্ষেত্রফল।

(ii) প্রতি বর্গমিটার প্লাস্টারের খরচ 40 টাকা হারে এই পৃষ্ঠতলটি প্লাস্টার করতে কত টাকা খরচ হবে?

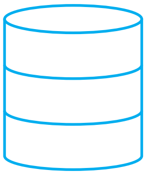
8. একটি জল উত্তাপক (water heating) ব্যবস্থায় 28 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 5 সেমি ব্যাসযুক্ত একটি নল (pipe) যুক্ত রয়েছে। ব্যবস্থাটির তাপ বিকিরণ পৃষ্ঠের (radiating surface) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

9. **নির্ণয় করো :**

(i) 4.5 মিটার উচ্চতা এবং 4.2 মিটার ব্যাসযুক্ত একটি বন্ধ চোঙাকৃতি পেট্রোল ট্যাংকের পার্শ্ব বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

(ii) কি পরিমাণ ইস্পাত প্রকৃতপক্ষে ব্যবহার করা হল, যদি প্রাত্রটি নির্মাণ কার্যে প্রকৃতপক্ষে ব্যবহৃত ইস্পাতের $\frac{1}{12}$ অংশ অপচয় হল।

10. 13.12 নং চিত্রে তোমরা একটি বাতির ঢাকনা এর কাঠামো দেখতে পাচ্ছো। এটিকে একটি সৌন্দর্যবর্ধক কাপড় দ্বারা আচ্ছাদিত করতে হবে। কাঠামোটির ভূমিতলের ব্যাস 20 সেমি এবং উচ্চতা 30 সেমি। উপর ও নিচের দিকে ভাঁজ করে দেওয়ার জন্য 2.5 সেমি করে অতিরিক্ত অংশ (মার্জিন) রাখতে হবে। এই আচ্ছাদন কার্যে কি পরিমাণ কাপড়ের প্রয়োজন হবে নির্ণয় করো।



চিত্র **13.12**

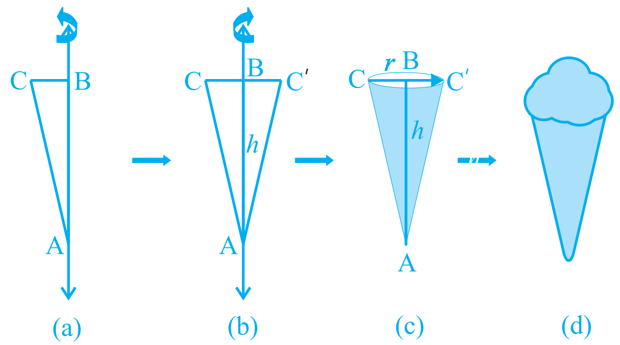
11. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রছাত্রীদেরকে কোনো একটি প্রতিযোগিতায় কার্ডবোর্ডের সাহায্যে ভূমি যুক্ত ও চোঙাকৃতি কলমদানি বানিয়ে অলংকৃত করতে বলা হয়েছিল। প্রতিটি কলমদানির ব্যাসার্ধ 3 সেমি এবং উচ্চতা 10.5 সেমি। প্রতিযোগীদেরকে প্রয়োজনীয় কার্ডবোর্ড বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের সরবরাহ করতে হবে। যদি প্রতিযোগীর সংখ্যা 35 হয়, তবে কি পরিমাণ কার্ডবোর্ড কিনতে হয়েছিল?

13.4 লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল :

এখন পর্যন্ত আমরা সমআকার ও আকৃতির বস্তুর স্তূপ দিয়ে ঘনবস্তু তৈরি করেছি। সাধারণত এই বস্তুগুলোকে প্রিজম বলা হয়। এখন আমরা প্রিজম নয় এমন অন্য প্রকার ঘনবস্তুর দিকে নজর দেব। এই ঘনবস্তুগুলোকে পিরামিড বলা হয়। চলো আমরা দেখি, এগুলো কিভাবে পাওয়া যায়।

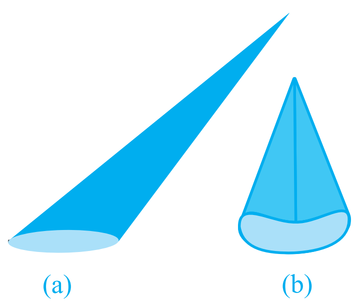
কার্য : শক্ত কাগজ থেকে একটি ত্রিভুজ ABC এমনভাবে কেঁটে নাও যাতে B বিন্দুতে সমকোণ হয়। একটি লম্বা এবং সামান্য মোটা একটি সুতা, সমকোণ উৎপন্নকারী বাহু দুটির যে কোন একটিতে, যেমন AB তে সংযুক্ত করে নাও (চিত্র 13.13(a) দেখো)। ত্রিভুজটির উভয়দিকে বর্ধিত সুতাকে দুহাতে ধর এবং ত্রিভুজটিকে

বেশ কয়েকপাক ঘুরিয়ে নাও। কি ঘটল ? ঘূর্ণনকালে ত্রিভুজটি কি আকৃতি উৎপন্ন করল তা চিনতে পেরেছ কি [চিত্র 13.13(b) দেখ] ? এই আকৃতিটি আইসক্রিমের পাত্রটির আকৃতির কথা মনে করিয়ে দেয় কি [চিত্র13.13 (c) এবং (d) দেখো] ?



চিত্র **13.13**

উক্ত আকৃতির বস্তুকে লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু বলে। চিত্র 13.13(c) হল একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু, যার শীর্ষবিন্দু A, উচ্চতা AB, ব্যাসার্ধ BC এবং তীর্যক উচ্চতা AC। এখানে B, শঙ্কুটির বৃত্তাকৃতি ভূমির কেন্দ্র। শঙ্কুর উচ্চতা, ব্যাসার্ধ এবং তীর্যক উচ্চতাকে যথাক্রমে h, r এবং l দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। আবার দেখে নেওয়া যাক কোন প্রকার শঙ্কু লম্ববৃত্তাকার নয়। এখনে চিত্র 13.14 দেখো। এ চিত্রগুলোতে কি দেখতে পেয়েছ ? এগুলো লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু নয়। কারণ (a) নং চিত্রে শঙ্কুটির শীর্ষবিন্দু এবং ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাটি ভূমির সঙ্গো সমকোণে নয়, (b) নং চিত্রে ভূমিতলটি বৃত্তাকার নয়।

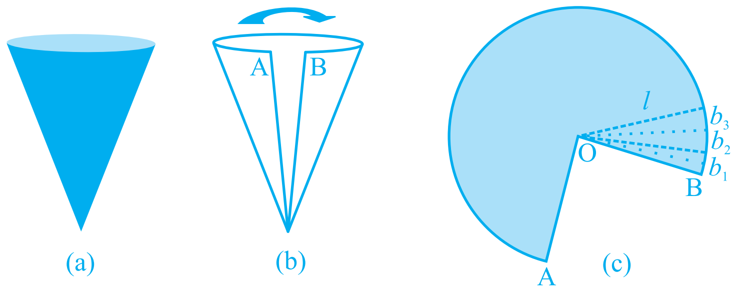


চিত্র **13.14**

চোঙের মতো, আমরা শুধু লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু নিয়ে অধ্যয়ন করবো। মনে রাখবে যে, এই অধ্যায়ে 'শঙ্কু' বলতে 'লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু' কে বোঝাবে।

কার্য : (i) শক্ত কাগজের সাহায্যে সুচারুভাবে নির্মিত অভিলেপন (overlapped) ছাড়া একটি শঙ্কুকে তার ভূমিতলের পরিধির উপর কোনো বিন্দুর ও শীর্ষবিন্দুর সংযোগী সরলরেখা বরাবর কাট (যে রেখায় শঙ্কুটিকে কাটবে সেটি তার তীর্যক উচ্চতা হবে, যাকে l দ্বারা বোঝানো হয়) এটি দেখতে একটি গোল 'কেক' এর অংশের মতো।

(ii) যদি A ও B চিহ্নিত বাহু দুটির প্রান্তগুলি একত্রিত কর তবে দেখবে যে বক্র অংশটি চিত্র 13.15 (c) শঙ্কুটির বৃত্তাকৃতি ভূমি উৎপন্ন করবে।



(a) (b) (c)

চিত্র **13.15**

(iii) যদি চিত্র 13.15 (c) এর মতো কাগজকে O বিন্দু হতে একটি রেখা বরাবর একশটি ছোট ছোট টুকরায় কাঁটা হয়, তবে প্রত্যেকটি টুকরা প্রায় এক একটা ছোট ত্রিভুজ হয়, যার উচ্চতা শঙ্কুর তীর্যক উচ্চতা l এর সমান।

(iv) এখন, প্রতিটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ প্রতিটি ত্রিভুজের ভূমি $\times\, l$ ।

সুতরাং সমগ্র কাগজের ক্ষেত্রফল

= সবগুলি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের যোগফল

$= \frac{1}{2} b_1 l + \frac{1}{2} b_2 l + \frac{1}{2} b_3 l + \ldots\ldots = \frac{1}{2} l(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots)$

$= \frac{1}{2} \times l \times$ সম্পূর্ণ বক্রাকার প্রান্তের সীমার দৈর্ঘ্য, চিত্র 13.15(c)।

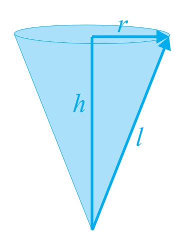
(যেহেতু $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ চিত্রের বক্র অংশ তৈরি করে যা সম্পূর্ণ কিনারার দৈর্ঘ্যের সমান।)

কিন্তু চিত্রের বক্র অংশ হল শঙ্কুর ভূমির পরিসীমা এবং শঙ্কুর ভূমির পরিসীমা $= 2\pi r$, যেখানে r হল শঙ্কুর ভূমির ব্যাসার্ধ।

সুতরাং, $\boxed{\textbf{শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l}$

যেখানে, r হল ভূমির ব্যাসার্ধ এবং l হল তীর্যক উচ্চতা।

লক্ষ্য কর, $l^2 = r^2 + h^2$ (চিত্র 13.16 দেখো), পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে। এখানে , h শঙ্কুর উচ্চতা।



চিত্র **13.16**

অতএব, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

এখন, যদি শঙ্কুর ভূমি বন্ধ হয়, তাহলে r ব্যাসার্ধের আরো একটা বৃত্তাকার কাগজের টুকরার প্রয়োজন যার ক্ষেত্রফল πr^2।

সুতরাং, $\boxed{\textbf{শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)}$

উদাহরণ 4 : 10 সেমি তীর্যক উচ্চতা এবং 7 সেমি ভূমি ব্যাসার্ধ যুক্ত একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ সেমি}^2$$

$$= 220 \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 5 : একটি শঙ্কুর উচ্চতা 16 সেমি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 12 সেমি। ইহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। $(\pi = 3.14)$

সমাধান : এখানে $h = 16$ সেমি এবং $r = 12$ সেমি

সুতরাং, $l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ সেমি, (যেহেতু $l^2 = h^2 + r^2$)

$= 20$ সেমি

সুতরাং, বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ সেমি}^2$$

$$= 753.6 \text{ সেমি}^2$$

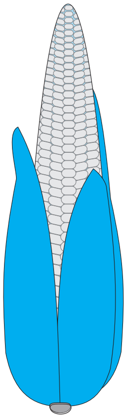
আবার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ সেমি}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ সেমি}^2$$

$$= 1205.76 \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 6 : প্রায় শঙ্কু আকৃতির একটি ভুট্টা-শিষের (corn cob) [চিত্র 13.17] সর্বাপেক্ষা প্রশস্থ অংশের ব্যাসার্ধ 2.1 সেমি এবং উচ্চতা 20 সেমি, যদি প্রতি বর্গ সেমি ক্ষেত্রফলে গড়ে চারটি করে দানা থাকে তবে সমগ্র অংশে কত সংখ্যক দানা থাকবে নির্ণয় করো।



চিত্র 13.17

সমাধান : যেহেতু ভুট্টা-শিষের কেবল বক্রতলেই দানা থাকে, তাই মোট দানার সংখ্যা নির্ণয়ের জন্য ভুট্টার বক্রতলের ক্ষেত্রফল জানা প্রয়োজন। প্রদত্ত প্রশ্নটিতে ভুট্টা-শিষের দৈর্ঘ্য (উচ্চতা) দেওয়া আছে। অতএব, ভুট্টা শিষের তীর্যক উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ সেমি

$= \sqrt{404.41}$ সেমি $= 20.11$ সেমি

সুতরাং, ভুট্টার শিষের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$

$= \dfrac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ সেমি^{2} $= 132.726$ সেমি^{2} $= 132.73$ সেমি^{2} (প্রায়)

1 সেমি^{2} ক্ষেত্রফলে থাকা দানার সংখ্যা $= 4$

সুতরাং 132.73 সেমি^{2} ক্ষেত্রফল থাকা দানার সংখ্যা হবে

$= 132.73 \times 4 = 530.92 = 531$ (প্রায়)

সুতরাং, ভুট্টার শিষটিতে প্রায় 531 টি দানা থাকবে।

অনুশীলনী 13.3

(বিশেষভাবে উল্লেখ করা না হলে $\pi = \dfrac{22}{7}$ ধরবে)

1. একটি শঙ্কুর ভূমির ব্যাস 10.5 সেমি এবং তির্যক উচ্চতা 10 সেমি। শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

2. যদি একটি শঙ্কুর তির্যক উচ্চতা 21 মিটার এবং ভূমির ব্যাস 24 মিটার হয়, তবে শঙ্কুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

3. একটি শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল এবং তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 308 সেমি^{2} এবং 14 সেমি, তাহলে শঙ্কুটির — (i) ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো। (ii) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

4. শঙ্কু আকৃতি একটি তাঁবুর উচ্চতা 10 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 24 মিটার, তাহলে নির্ণয় করো—

(i) তাঁবুটির তির্যক উচ্চতা

(ii) প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 70 টাকা হলে, তাবুটির জন্য প্রয়োজনীয় ক্যানভাসের মূল্য।

5. 8 মিটার উচ্চ এবং 6 মিটার ভূমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি তাঁবুর জন্য, 3 মিটার প্রস্থের কত মিটার ত্রিপলের প্রয়োজন হবে? মনে কর যে মার্জিন সেলাই এবং কাটা বাবদ অপচয়ের জন্য অতিরিক্ত 20 সেমি ত্রিপলের প্রয়োজন হবে (ধরে নাও, $\pi = 3.14$)।

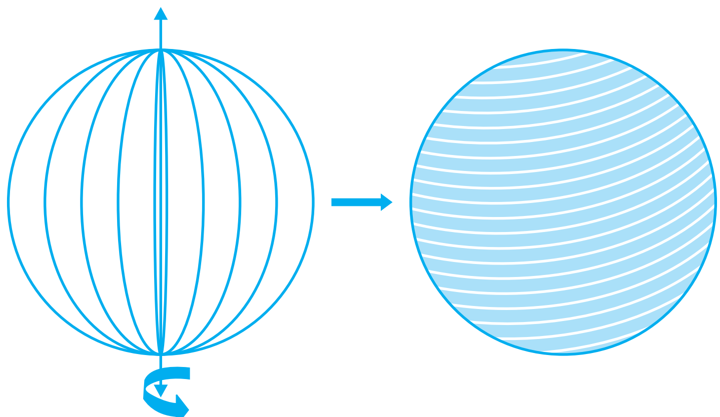
6. শঙ্কু আকৃতি একটি স্মৃতি স্তম্ভের তির্যক উচ্চতা এবং ভূমিতলের ব্যাস যথাক্রমে 25 মিটার এবং 14 মিটার। প্রতি 100 মি^{2} রং করতে 210 টাকা হারে স্তম্ভটির বক্রতলের রং করতে কত টাকা খরচ হবে নির্ণয় করো।

7. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর একটি ভাঁড় টুপি (joker's cap) এর ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 7 সেমি এবং 24 সেমি। এমন 10 টি টুপির জন্য প্রয়োজনীয় শক্ত কাগজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

8. পুনঃনবীকৃত কার্ডবোর্ড দ্বারা নির্মিত 50 টি ফাঁপা শঙ্কুর সাহায্যে প্রতিবন্ধক বেড়ার সৃষ্টি করে বাস থামার একটি স্থানকে মূল পথের অবশিষ্ট অংশ থেকে সংরক্ষিত করা হয়েছে। প্রতিটি শঙ্কুর ভূমি তলের ব্যাস 40 সেমি এবং উচ্চতা 1 মিটার। যদি প্রতি বর্গমিটার রং করতে 12 টাকা খরচ হয় এবং শঙ্কুগুলির বহিঃ বক্রতলের রং করতে হয়, তবে এই রং কার্যে মোট কত টাকা খরচ হবে? ($\pi = 3.14$ এবং $\sqrt{1.04} = 1.02$)

13.5 গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

গোলক কি? এটাও কি বৃত্তের মতো একইরকম? তোমরা কি কাগজের উপর একটা বৃত্ত অংকন করতে পারো? হ্যাঁ, তোমরা পারো, কারণ বৃত্ত হল সমতলস্থিত একটি বদ্ধচিত্র যার প্রত্যেকটি বিন্দু একটি স্থির বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে (ব্যাসার্ধ) অবস্থিত। স্থির বিন্দুটিকে বৃত্তের কেন্দ্র বলে। এখন একটি বৃত্তের ডিস্কের ব্যাস বরাবর একটা মোটা সুতা সংযুক্ত কর এবং সুতাটির দুটি প্রান্ত ধরে বস্তুটিকে ঘুরাও। যা তোমরা ইতিপূর্বে ত্রিভুজের ঘূর্ণনের ক্ষেত্রে করেছিলে। তোমরা একটা নতুন ঘনবস্তু পাবে (চিত্র 13.18 দেখো) এই ঘনবস্তুটি কিসের সদৃশ? একটি বলের মতো। হ্যাঁ, এটাকে বলা হয় গোলক।



চিত্র 13.18

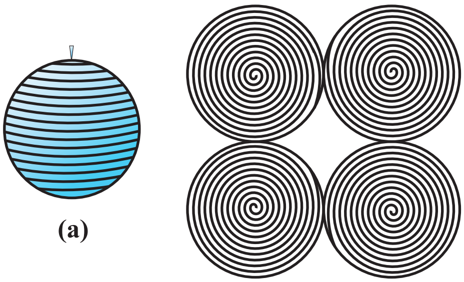
বৃত্তাকার বস্তুটির ঘূর্ণনের ফলে যখন একটি গোলকের সৃষ্টি হয়, তখন এর কেন্দ্রটি কি অবস্থায় থাকে তোমরা ধারণা করতে পারো কি? অবশ্যই, এটা গোলকের কেন্দ্রে পরিণত হবে। অতএব গোলক হল *একটি ত্রিমাত্রিক চিত্র (ঘনবস্তুর চিত্র), যা শূন্যে (space) অবস্থিত কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরবর্তী অসংখ্য বিন্দু দ্বারা গঠিত। এই নির্দিষ্ট দূরত্বকে গোলকের ব্যাসার্ধ এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে গোলকের কেন্দ্র বলা হয়।*

টীকা : একটি গোলক একটি বলের পৃষ্ঠতলের মতো দেখতে। নিরেট গোলক (*solid sphere*) শব্দটি এমন ঘনবস্তুর ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয় যার পৃষ্ঠভাগ গোলীয়।

কাজ : তোমরা কি কখনো লাটিম (top) দিয়ে খেলেছ অথবা লাটিম দিয়ে খেলতে দেখেছ? ছুঁড়ে মারার আগে লাটিমটির উপর কিভাবে একটি সরু দড়ি প্যাঁচিয়ে নিতে হয় তা তোমাদের নিশ্চয় জানা আছে। এখন একটা রাবার বল নাও এবং এর ভিতর একটা পেরেক (nail) ঢোকাও। পেরেককে অবলম্বন করে একটি দড়ি প্যাঁচিয়ে নাও। বলের সর্বাপেক্ষা স্ফিত অংশে পৌঁছে, পিনের সাহায্যে দড়িটিকে দৃঢ়ভাবে ধরে রাখার ব্যবস্থা করো এবং দড়ির প্রান্ত দুটি চিহ্নিত করো এবং ধীরে ধীরে প্যাঁচগুলো খোল (চিত্র 13.19(a) দেখো)।

এখন, শিক্ষকের সাহায্য নিয়ে বলের ব্যাস পরিমাপ করো যা থেকে তোমরা সহজেই ব্যাসার্ধ পাবে। তারপর কাগজের এক পৃষ্ঠে এই ব্যাসার্ধের চারটি বৃত্ত আঁক। এবার, দড়িটিকে বৃত্তাকৃতিতে সাজিয়ে বৃত্তগুলো

পূর্ণ করার চেষ্টা করো [চিত্র 13.19(b) দেখো)]


(a) (b)

চিত্র 13.19

এই কার্যটিতে তোমরা কি পেলে ?

যে দড়িটির সাহায্যে তোমরা সম্পূর্ণ বলটিকে আবৃত করেছিলে, সেই দড়িটির দ্বারা বলটির, সম ব্যাসার্ধের চারটি বৃত্তকে আচ্ছাদিত করা যায়। এর দ্বারা কি বুঝায় ? ইহা আভাষ দেয় যে, r ব্যাসার্ধযুক্ত একটি গোলকের ক্ষেত্রফল = r ব্যাসার্ধ যুক্ত একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফলের 4 গুণ।

$= 4 \times (\pi r^2)$

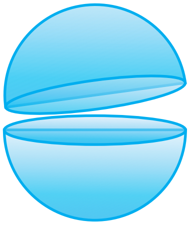
সুতরাং, **গোলকের পৃষ্টতলের ক্ষেত্রফল = $4 \pi r^2$**

যেখানে, r গোলকটির ব্যাসার্ধ।

একটি গোলক পৃষ্ঠে কতগুলি তল (faces) তোমরা দেখেছ ? গোলকে একটি মাত্র তল আছে যা বক্রতল।

এখন একটি নিরেট গোলক নাও এবং কেন্দ্রগামী একটি সমতল দিয়ে মাঝ বরাবর এটিকে সমান দুটি অংশে বিভক্ত করো। এর ফলে গোলকটির কি হল ?

হ্যাঁ, গোলকটি দুইটি সমান অংশে বিভক্ত হল (চিত্র 13.20 দেখো)। এই অর্ধেক অংশের প্রতিটিকে কি বলা হবে ? এদের প্রতিটিকে অর্ধগোলক (**hemisphere**) বলা হয়। (কারণ ‘hemi’ কথার অর্থ অর্ধেক)


চিত্র 13.20

অর্ধগোলকের তল সম্পর্কে কি বলবে ? অর্ধগোলকের কয়টি তল আছে ? দুটো ! একটি বক্রতল এবং আর একটি সমতল (ভূমি)।

অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল, গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক অর্থাৎ অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 \quad = \quad 2\pi r^2$

সুতরাং, **অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r^2$**

এখানে, r হল অর্ধগোলকটি যে গোলকের অংশ বিশেষ তার ব্যাসার্ধ। এখন, অর্ধগোলকটির দুটি তল একসঙ্গে নিলে সমগ্র পৃষ্টের ক্ষেত্রফল হবে $2\pi r^2 + \pi r^2$

সুতরাং, **অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3\pi r^2$**

উদাহরণ 7 : 7 সেমি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে গোলকটির ব্যাসার্ধ $r = 7$ সেমি

অতএব গোলকটির পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ সেমি^{2} $= 616$ সেমি^{2}

উদাহরণ 8 : একটি অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধ 21 সেমি হলে (i) বক্রতলের এবং (ii) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : (i) এখানে অর্ধগোলকটির ব্যাসার্ধ $r = 21$ সেমি

সুতরাং, ইহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল

$$= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ সেমি}^2 = 2772 \text{ সেমি}^2$$

(ii) অর্ধগোলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$$3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \text{ সেমি}^2 = 4158 \text{ সেমি}^2$$

উদাহরণ 9 : একটি সাকার্সে, মোটর সাইকেল চালকের দ্বারা তার বিভিন্ন কলা-কৌশল প্রত্যক্ষণের জন্য নির্মিত একটি ফাঁপা গোলকের ব্যাস 7 মি। গোলকটির যে অংশে চালক তার মোটর সাইকেলটি চালাতে পারবে, সেই অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : গোলকটির ব্যাস =7 মিটার। সুতরাং ব্যাসার্ধ হল 3.5 মিটার। অতএব, মোটর সাইকেল চালানোর জন্য ব্যবহার্য জায়গার ক্ষেত্রফল গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের সমান।

সুতরাং, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ মি^{2}

$= 154$ মি^{2}

উদাহরণ 10 : একটি অট্টালিকাস্থিত অর্ধগোলকাকৃতির গম্বুজ রং করতে হবে (চিত্র 13.21 দেখো)। যদি গম্বুজটির ভূমির পরিধি 17.6 মিটার হয়, তবে প্রতি 100 সেমি^{2} রং করতে 5 টাকা হিসাবে কত টাকা খরচ হবে, নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু গম্বুজটির কেবল বক্র (অর্ধ গোলাকৃতি) অংশের রং করতে হবে, ফলে অর্ধগোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। যাতে কি পরিমাণ জায়গা রং করতে হবে তা জানা যাবে।

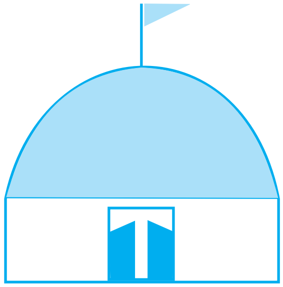
গম্বুজটির পরিধি $= 17.6$ মি। সুতরাং, $17.6 = 2\pi r$

সুতরাং গম্বুজটির ব্যাসার্ধ, $r = 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ মিটার = 2.8 মিটার

গম্বুজটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ মি^{2}

$= 49.28$ মি^{2}



চিত্র 13.21

এখন, 100 সেমি^{2} রং করতে ব্যয় হয় 5 টাকা।

সুতরাং, 1 মি^{2} রং করতে ব্যয় হবে 500 টাকা

অতএব, সমগ্র গম্বুজটি রং করতে ব্যয় হবে—

$= 49.28 \times 500$ টাকা

$= 24640$ টাকা

অনুশীলনী 13.4

(উল্লেখ না থাকলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরবে)

1. নিচের ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকগুলির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো :

(i) 10.5 সেমি (ii) 5.6 সেমি (iii) 14 সেমি

2. নিচের ব্যাস বিশিষ্ট গোলকগুলির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো :

(i) 14 সেমি (ii) 21 সেমি (iii) 3.5 মি

3. 10 সেমি ব্যাসার্ধের একটি অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। ($\pi = 3.14$)

4. একটি গোলাকাকৃতি বেলুনে বায়ু প্রবেশ করানোর ফলে ব্যাসার্ধ 7 সেমি থেকে 14 সেমিতে বৃদ্ধি পায়। এই দুইটি ক্ষেত্রে, বেলুনটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।

5. পিতল-নির্মিত একটি অর্ধগোলাকাকৃতি বাটির ভিতরের দিকের ব্যাস 10.5 সেমি। প্রতি 100 সেমি^{2} 16 টাকা হিসাবে বাটিটির ভিতরের দিকে টিনের প্রলেপ দিতে কত খরচ হবে, নির্ণয় করো?

6. একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 154 বর্গ সেমি। গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

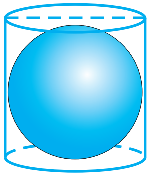
7. চাঁদের ব্যাস, পৃথিবীর ব্যাসের প্রায় এক-চতুর্থাংশ। চাঁদ ও পৃথিবীর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।

8. একটি অর্ধগোলাকার বাটির বেধ 0.25 সেমি, যদি বাটিটির ভিতরের ব্যাসার্ধ 5 সেমি হয় তবে বাটিটির বাইরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

9. r ব্যাসার্ধের একটি গোলক, একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভিতর আবদ্ধ (চিত্র 13.22 দেখো), নির্ণয় করো :

(i) গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল। (ii) চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

(iii) (i) এবং (ii) থেকে প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের অনুপাত।



চিত্র 13.22

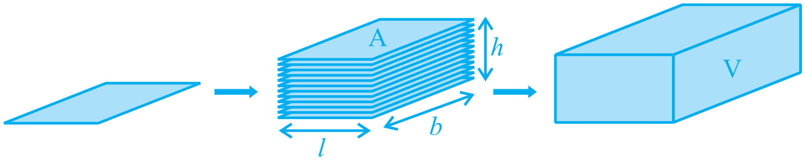
13.6 আয়তঘনের আয়তন :

ইতিমধ্যে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা বিভিন্ন বস্তুর আয়তন নির্ণয় করতে শিখেছ। স্মরণ কর যে, ঘনবস্তুগুলি কিছু পরিমাণ স্থান (space) দখল করে থাকে। এই দখলকৃত স্থানের পরিমাণকে বস্তুটির আয়তন বলে।

দ্রষ্টব্য : যদি একটি বস্তু ঘন হয়, তাহলে এরূপ বস্তু কিছু পরিমাণ স্থান দখল করে থাকে এবং এই স্থানের পরিমাপ নির্ণয় করা যায়, যাকে বস্তুটির আয়তন বলা হয়। অপরপক্ষে, যদি বস্তুটি ফাঁপা হয় তবে বায়ু বা অন্য কোনো তরল দ্বারা ভর্তি করা যেতে পারে যা পাত্রটির ফাঁপা অংশের আকৃতি ধারণ করবে। এক্ষেত্রে, পদার্থের যে আয়তন কোনো পাত্রের ভেতরের ফাঁপা অংশ পূর্ণ করতে করতে প্রয়োজন হয় তাকেই বলে প্রাত্রটির ধারণ ক্ষমতা (capacity)। সংক্ষেপে একটি বস্তু যে পরিমাণ স্থান দখল করে থাকে, তা বস্তুটির আয়তন (Volume) এবং তার ভিতরে থাকা ফাঁপা অংশের আয়তনকে ধারণ ক্ষমতা (capacity) বলে। অতএব, আয়তন এবং ধারণ ক্ষমতার একই একক অর্থাৎ ঘন একক।

সুতরাং, একটি আয়তঘনের আয়তন বলতে আমরা উহা দ্বারা দখলকৃত স্থানের পরিমাপকে বুঝবো।

অধিকন্তু ক্ষেত্রফল অথবা আয়তন কোনো স্থানের সাংখ্যমানকেই পরিমাপ করে। সুতরাং, সঠিকভাবে বললে, আমরা বৃত্তাকার অঞ্চলের ক্ষেত্রফল অথবা একটি আয়তঘন অঞ্চলের আয়তন অথবা গোলাকৃতি অঞ্চলের আয়তন ইত্যাদি নির্ণয় করব। কিন্তু সুবিধার্থে আমরা বলি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল, আয়তঘন বা গোলকের আয়তন নির্ণয় করো যা শুধু এগুলোর সীমারেখাকে বোঝায়।



চিত্র **13.23**

চিত্র 13.23 লক্ষ করো, মনে করো প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A , আয়তক্ষেত্রগুলো সাজানোর ফলে উৎপন্ন গাদাটির (stacked) উচ্চতা h এবং আয়তঘনটির আয়তন V, তাহলে V, A এবং h এর মধ্যে সম্পর্ক কি বলতে পারো ? প্রতিটি আয়তক্ষেত্র দ্বারা আবৃত সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা= আয়তঘন দ্বারা দখলকৃত স্থানের পরিমাণ।

সুতরাং, আমরা পাই, $\mathrm{A} \times h = \mathrm{V}$

অর্থাৎ, **আয়তঘনের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা**

অথবা $l \times b \times h$, যেখানে l, b এবং h যথাক্রমে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা।

দ্রষ্টব্য : আমরা যখন কোনো সীমিত ত্রিমাত্রিক অঞ্চল এর মান নির্ণয় করি অর্থাৎ ঘনবস্তুর দ্বারা দখল করা স্থানের পরিমাপ করি, তখন কত সংখ্যক একক দৈর্ঘ্যের ঘনক যথাযথ ভাবে স্থানটি দখল করে তা নির্ণয় করি।

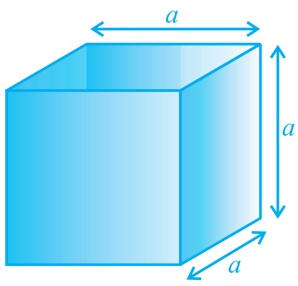
আবার, $\boxed{\textbf{ঘনকের আয়তন} = \textbf{বাহু} \times \textbf{বাহু} \times \textbf{বাহু} = a^3}$

এখানে ঘনকটির বাহুর দৈর্ঘ্য হল a (চিত্র 13.24 দেখো)।

যদি একটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি হয়, (চিত্র 13.24 দেখো)

তবে ঘনকটির আয়তন $= 12 \times 12 \times 12$ সেমি^{3}

$= 1728$ সেমি^{3}



চিত্র 13.24

স্মরণ কর যে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা এই সূত্র সমূহ শিখেছিলে। চলো, এখন এই সূত্রগুলোর ব্যবহারের জন্য কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি।

উদাহরণ 11 : 24 সেমি × 12 সেমি × 8 সেমি মাপের ইট ব্যবহার করে, একটি খোলা মাঠে 10 মি লম্বা একটি দেওয়াল নির্মাণ করা হয়েছিল। যদি দেওয়ালটির উচ্চতা 4 মিটার এবং বেধ 24 সেমি হয়, তবে এটিতে কতগুলো ইট ব্যবহার করা হয়েছিল নির্ণয় করো।

সমাধান : স্পষ্টত দেওয়ালটি আয়তঘন আকৃতির এবং তার আয়তন সেটিতে ব্যবহৃত সবগুলি ইটের আয়তনের সমান। সুতরাং দেওয়ালটির আয়তন নির্ণয় করতে হবে।

এখানে, দেওয়ালটির দৈর্ঘ্য $= 10$ মি $= 1000$ সেমি

বেধ $= 24$ সেমি

উচ্চতা $= 4$ মি. $= 400$ সেমি

সুতরাং, দেওয়ালটির আয়তন $= l \times b \times h$

$= 1000 \times 24 \times 400$ সেমি^{3}

এখন, প্রতিটি আয়তঘনাকৃতি ইটের দৈর্ঘ্য = 24 সেমি, প্রস্থ = 12 সেমি এবং উচ্চতা = 8 সেমি।

অতএব, প্রতিটি ইটের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

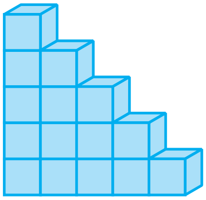
$= 24 \times 12 \times 8$ সেমি^{3}

সুতরাং ইটের সংখ্যা $= \dfrac{\text{দেওয়ালটির আয়তন}}{\text{প্রতিটি ইটের আয়তন}}$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$$

$= 4166.6$

সুতরাং, দেওয়ালের জন্য 4167 টি ইটের প্রয়োজন ।



চিত্র **13.25**

উদাহরণ 12 : একটি শিশু, ঘনকাকৃতির বিল্ডিং ব্লক নিয়ে একটি কাঠামো তৈরি করেছে চিত্র 13.25 নং এর ন্যায়। যদি প্রতিটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সেমি হয় তবে শিশুটির তৈরি কাঠামোটির আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রতিটি ঘনকের আয়তন = বাহু × বাহু × বাহু

= 3 × 3 × 3 সেমি^{3} = 27 সেমি^{3}

কাঠামোতে ঘনকের সংখ্যা = 15

সুতরাং কাঠামোটির আয়তন = 27 × 15 সেমি^{3}

= 405 সেমি^{3}

অনুশীলনী 13.5

1. একটি দেশলাই বাক্সের পরিমাপ 4 সেমি × 2.5 সেমি × 1.5 সেমি। এরূপ 12 টি বাক্স সমেত একটি প্যাকেটের আয়তন কত?
2. একটি আয়তঘনাকৃতি জলের ট্যাংক 6 মিটার লম্বা, 5 মিটার প্রশস্থ এবং 4.5 মিটার গভীর। এই ট্যাংকে কত লিটার জল ধরবে? (1 মি^{3} = 1000 লিটার)
3. একটি আয়তঘনাকৃতি পাত্র 10 মিটার লম্বা এবং 8 মিটার প্রশস্থ। পাত্রটির মধ্যে 380 ঘনমিটার তরল পদার্থ রাখতে হলে, পাত্রটির উচ্চতা কত হবে?
4. প্রতি ঘনমিটার খনন কার্য 30 টাকা হিসাবে, 8 মি লম্বা, 6 মি চওড়া এবং 3 মি গভীর একটি আয়ত ঘনাকৃতি গর্ত করতে কত খরচ হবে, নির্ণয় করো?
5. একটি আয়তঘনাকৃতি জলের ট্যাংকের ধারণ ক্ষমতা 50000 লিটার। যদি ট্যাংকটির দৈর্ঘ্য এবং গভীরতা যথাক্রমে 2.5 মিটার এবং 10 মিটার হয়, তবে ট্যাংকটির প্রস্থ নির্ণয় করো?
6. একটি গ্রামের লোকসংখ্যা 4000 জন, প্রতিদিন প্রতিজনের 150 লিটার জলের প্রয়োজন হয়। একটি ট্যাংকের পরিমাপ 20 মি × 15 মি × 6 মি। এই ট্যাংকের জল দিয়ে কত দিন চলবে?
7. একটি গুদামের পরিমাপ 40 মি × 25 মি × 15 মি । গুদামটিতে 1.5 মি × 1.25 মি × 0.5 মি পরিমাপের সর্বাধিক কত সংখ্যক কাঠের বাক্স মজুত করা যাবে।
8. 12 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি নিরেট ঘনক (solid cube) সম আয়তনের 8 টি ছোট ঘনকে বিভক্ত করা হল। নতুন ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য কত? তদোপরি, ঘনকগুলির (বড় এবং ছোট) পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করো।
9. 3 মিটার গভীর এবং 40 মিটার প্রস্থ বিশিষ্ট একটি নদীতে প্রতি ঘণ্টায় 2 কিমি হারে জল প্রবাহিত হয়। প্রতি মিনিটে কি পরিমাণ জল সমুদ্রে পরবে?

13.7 চোঙের আয়তন :

একই আকারের আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে যেমন আয়তঘন তৈরি করা যায়। ঠিক একইভাবে সমান আকারের বৃত্ত একটির উপর আরেকটি সাজিয়ে লম্ব বৃত্তাকার চোঙ তৈরি করা যায়। সুতরাং আয়তঘনের আয়তন

নিরূপণের অনুরূপ উপায়ে চোঙের আয়তন নিরূপণ করা যায়। অর্থাৎ

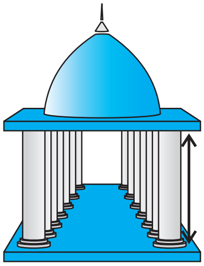
আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

= বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচতা = $\pi r^2 h$

সুতরাং, **চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h$**

এখানে, r এবং h যথাক্রমে ভূমির ব্যাসার্ধ এবং চোঙের উচ্চতা।

উদাহরণ 13 : একটি মন্দিরের স্তম্ভগুলি চোঙাকৃতির (চিত্র 13.26 দেখো)। যদি প্রতিটি স্তম্ভের ভূমির ব্যাসার্ধ 20 সেমি এবং উচ্চতা 10 মি. হয়, তবে এমন 14 টি স্তম্ভ নির্মাণের জন্য কি পরিমাণ কংক্রিট এর প্রয়োজন হবে?



চিত্র **13.26**

সমাধান : যেহেতু চোঙাকৃতি স্তম্ভগুলির মোট আয়তন, উহাতে ব্যবহৃত কংক্রিটের মিশ্রণের আয়তনের সমান, তাই আমাদেরকে এই চোঙগুলোর মোট আয়তন নির্ণয় করতে হবে।

প্রতিটি চোঙের ব্যাসার্ধ, $r = 20$ সেমি।

প্রতিটি চোঙের উচ্চতা, $h = 10$ মি $= 1000$ সেমি।

সুতরাং, প্রতিটি চোঙের আয়তন $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000 \text{ সেমি}^3$$

$$= \frac{8800000}{7} \text{ সেমি}^3$$

$$= \frac{8.8}{7} \text{ মি}^3 \quad (\text{যেহেতু} 1000000 \text{ সেমি}^3 = 1 \text{ মি}^3)$$

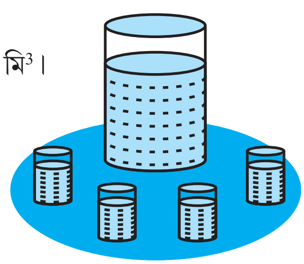
সুতরাং, 14 টি স্তম্ভের আয়তন = একটি চোঙের আয়তন $\times$ 14

$$= \frac{8.8}{7} \times 14 \text{ মি}^3$$

$$= 17.6 \text{ মি}^3$$

সুতরাং, 14 টি স্তম্ভ নির্মাণের জন্য প্রয়োজনীয় কংক্রিটের পরিমাণ 17.6 মি^{3}।

উদাহরণ 14 : পবিত্র রমজান উপলক্ষে আয়োজিত একটি রমজান মেলায় একজন খাদ্য বিক্রেতা তার খাবারের দোকানে 15 সেমি ভূমি ব্যাসার্ধ যুক্ত বড় চোঙাকৃতি একটি পাত্রে 32 সেমি উচ্চতা পর্যন্ত কমলার রস পূর্ণ করে রাখে (চিত্র 13.27 দেখো)। বিক্রির সময় 3 সেমি ভূমির ব্যাসার্ধ যুক্ত চোঙাকৃতি গ্লাসের 8 সেমি পূর্ণ করে গ্রাহককে দেয়। যদি প্রতি গ্লাসের মূল্য 15 টাকা হয়, তবে সম্পূর্ণ রস বিক্রয় করে, উক্ত বিক্রেতা কত টাকা পেল?



চিত্র **13.27**

সমাধান : পাত্রে কমলা রসের আয়তন

= চোঙাকৃতি পাত্রটির আয়তন

$= \pi R^2 H$

(যেখানে, R এবং H যথাক্রমে পাত্রটির ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32$ সেমি^{3}

একইভাবে, প্রতি গ্লাসে রসের আয়তন $= \pi r^2 h$

(এখানে r এবং h যথাক্রমে গ্লাসটির ব্যাসার্ধ এবং রসের উচ্চতা)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8$ সেমি^{3}

সুতরাং, রস বিক্রয় করা গ্লাসের সংখ্যা $= \dfrac{\text{পাত্রটির আয়তন}}{\text{গ্লাসের আয়তন}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

সুতরাং বিক্রয় করে পাওয়া টাকার পরিমাণ $= 15 \times 100$ টাকা

$= 1500$ টাকা।

অনুশীলনী 13.6

(বিশেষভাবে উল্লেখ করা না হলে $\pi = \dfrac{22}{7}$ ধরবে)

1. চোঙাকৃতি একটি পাত্রের ভূমির পরিধি 132 সেমি এবং উচ্চতা 25 সেমি। পাত্রটিতে কত লিটার জল ধরবে? (1000 সেমি^{3} = 1 লিটার)

2. চোঙাকৃতি একটি কাঠের নলের ভিতরের ব্যাস 24 সেমি এবং বাইরের দিকের ব্যাস 28 সেমি। নলটি 35 সেমি লম্বা। যদি প্রতি ঘন সেমি কাঠের ভর 0.6 গ্রাম হয়, তবে নলটির ভর নির্ণয় করো।

3. কোমল পানীয় (soft drink) দুরকম এর প্যাকেটে পাওয়া যায়— (i) 5 সেমি দৈর্ঘ্য এবং 4 সেমি প্রস্থের আয়তাকার ভূমি বিশিষ্ট 15 সেমি উচ্চতার টিনের পাতে এবং (ii) 7 সেমি ব্যাসের বৃত্তাকার ভূমি বিশিষ্ট এবং 10 সেমি উচ্চতার চোঙাকৃতি প্লাস্টিকের পাত্রে। কোন প্রকার পাত্রের ক্ষমতা বেশি এবং কি পরিমাণ বেশি?

4. যদি একটি চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 94.2 সেমি^{2} এবং উচ্চতা 5 সেমি হয়, তবে নির্ণয় কর : (i) চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ (ii) চোঙটির আয়তন (ধরে নাও $\pi = 3.14$)

5. 10 মিটার গভীর একটি চোঙাকৃতি পাত্রের ভিতরের বক্রতলের রং করতে 2200 টাকা খরচ হয়। যদি প্রতি বর্গমিটার রং করতে 20 টাকা খরচ হয়, তবে নির্ণয় করো :

(i) পাত্রটির ভিতরের বক্রতলের ক্ষেত্রফল (ii) ভূমির ব্যাসার্ধ (iii) পাত্রটির ধারণ ক্ষমতা

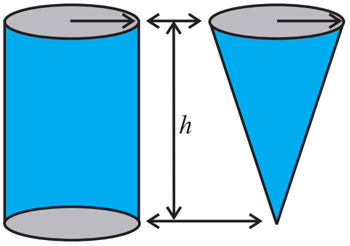
6. 1 মিটার উচ্চতা বিশিষ্ট একটি চোঙাকৃতি বন্ধ (closed) পাত্রের ধারণ ক্ষমতা 15.4 লিটার। পাত্রটি তৈরি করতে কত বর্গমিটার ধাতব সিটের প্রয়োজন?

7 একটি কাঠের চোঙে নিরেট চোঙাকৃতি গ্রাফাইট ঢুকিয়ে একটি সিস-পেন্সিল গঠন করা হয়েছে। পেন্সিলের ব্যাস 7 মিমি এবং গ্রাফাইটের ব্যাস 1 মিমি। যদি পেন্সিলের দৈর্ঘ্য 14 সেমি হয়, তবে পেন্সিলে ব্যবহৃত কাঠ ও গ্রাফাইটের আয়তন নির্ণয় করো।

8. একটি হাসপাতালে, একজন রোগীকে প্রতিদিন 7 সেমি ব্যাস বিশিষ্ট চোঙাকৃতি বাটিতে স্যুপ (soup) দেওয়া হয়। যদি বাটিটি স্যুপ দিয়ে 4 সেমি পর্যন্ত ভর্তি করা হয়, তবে 250 জন রোগীর জন্য হাসপাতাল কর্তৃপক্ষকে প্রতিদিন কি পরিমাণ স্যুপ প্রস্তুত করতে হবে?

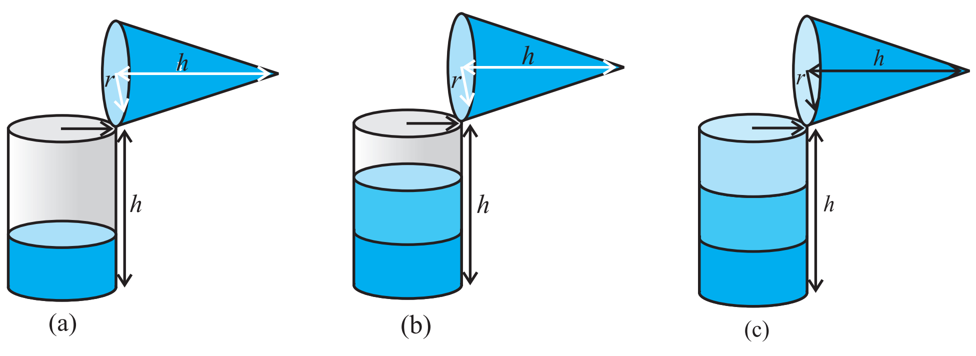
13.8 লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন :

13.28 নং চিত্রে, তোমরা কি একই ভূমি ব্যাসার্ধ ও একই উচ্চতার একটি লম্ববৃত্তাকার চোঙ এবং একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু দেখতে পাচ্ছো?



চিত্র **13.28**

কার্যকলাপ : একই ভূমি-ব্যাসার্ধ এবং একই উচ্চতা বিশিষ্ট একটি ফাঁপা চোঙ ও একটি ফাঁপা শঙ্কু বানানোর চেষ্টা করো (চিত্র 13.28 দেখ)। তারপর আমরা হাতে কলমে পরীক্ষার মাধ্যমে দেখব। একটি লম্ববৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন কত হতে পারে।



চিত্র **13.29**

আমরা নিম্নোক্ত ভাবে শুরু করি,

শঙ্কুটি কানায় কানায় বালি দিয়ে পূর্ণ করে, খালি চোঙে ঢাল। ইহা চোঙটির একটা অংশ পূর্ণ করে মাত্র [চিত্র 13.29(a) দেখো]।

পুনরায় শঙ্কুটি বালিপূর্ণ করে চোঙটিতে ঢাল। তখন দেখা গেল যে চোঙটি কানায় কানায় পূর্ণ হয়নি [চিত্র 13.29(b) দেখো]।

তৃতীয়বার যখন শঙ্কুটি পূর্ণ করে চোঙাটিতে ঢালা হল, তখন চোঙটি কানায় কানায় পূর্ণ হল [চিত্র 13.29(c) দেখ]।

এ থেকে আমরা নিশ্চিত সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, চোঙটির আয়তন শঙ্কুটির আয়তনের তিনগুণ। অর্থাৎ, একই ভূমি ব্যাসার্ধ এবং একই উচ্চতার একটি শঙ্কুর আয়তন, চোঙের আয়তনের এক তৃতীয়াংশ।

সুতরাং, $\boxed{\textbf{শঙ্কুর আয়তন} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

এখানে r এবং h যথাক্রমে শঙ্কুটির ভূমিতলের ব্যাসার্ধ এবং উচ্চতা।

উদাহরণ 15 : একটি শঙ্কুর উচ্চতা এবং তির্যক উচ্চতা যথাক্রমে 21 সেমি এবং 28 সেমি। শঙ্কুটির আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান : $l^2 = r^2 + h^2$, এর সাহায্যে আমরা পাই—

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ সেমি} = \sqrt{784 - 441} \text{ সেমি}$$

$$= 7\sqrt{7} \text{ সেমি}$$

সুতরাং, শঙ্কুটির আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ সেমি^{3}

$= 7546$ সেমি^{3}

উদাহরণ 16 : মনিকার কাছে 551 মি^{2} পরিমাণ ক্যানভাস আছে। এই ক্যানভাসের সাহায্যে সে 7 মিটার ভূমি ব্যাসার্ধের শঙ্কু আকৃতির একটি তাঁবু বানাল। যদি তাঁবুটির নির্মাণ কার্যে 1 মি^{2} পরিমাণ ক্যানভাসের অপচয় হয়, তবে নির্মিত তাঁবুটির আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু সমগ্র ক্যানভাসের ক্ষেত্রফল 551 মি^{2} এবং অপচয় 1 মি^{2}। সুতরাং, নির্মিত তাঁবুটিতে ব্যাবহৃত ক্যানভাসের ক্ষেত্রফল $(551 - 1)$ মি^{2} $= 550$ মি^{2}।

এখন, তাঁবুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 550$ মি^{2} এবং ভূমিতলের ব্যাসার্ধ $= 7$ মি।

লক্ষ করো যে, তাঁবুটি কেবলমাত্র বক্রতল দ্বারা গঠিত (যেহেতু ভূমি ক্যানভাস দ্বারা আবৃত করা হয়নি)।

সুতরাং, তাঁবুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল = 550 মি^{2}

অর্থাৎ, $\pi rl = 550$

বা, $\frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$

বা, $l = \frac{550}{22}$ মি $= 25$ মি

এখন $l^2 = r^2 + h^2$

সুতরাং, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2}$ মি $= \sqrt{625 - 49}$ মি $= \sqrt{576}$ মি

$= 24$ মি

সুতরাং, তাঁবুটির আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ মি^{3} $= 1232$ মি^{3}

অনুশীলনী 13.7

(বিশেষভাবে উল্লেখ করা না হলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরবে)

1. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুগুলোর আয়তন নির্ণয় করো, যখন

(i) ব্যাসার্ধ 6 সেমি, উচ্চতা 7 সেমি, (ii) ব্যাসার্ধ 3.5 সেমি, উচ্চতা 12 সেমি।

2. শঙ্কু আকৃতি পাত্রগুলোর ধারণ ক্ষমতা লিটারে নির্ণয় করে। যখন—

(i) ব্যাসার্ধ 7 সেমি, তির্যক উচ্চতা 25 সেমি।

(ii) উচ্চতা 12 সেমি, তির্যক উচ্চতা 13 সেমি।

3. একটি শঙ্কুর উচ্চতা 15 সেমি। যদি শঙ্কুটির আয়তন 1570 সেমি^{3} হয়, তবে ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো (ধরে নাও $\pi = 3.14$)।

4. 9 সেমি উচ্চতার একটি লম্ববৃত্তাকৃতির শঙ্কুর আয়তন 48π সেমি^{3}। শঙ্কুটির ব্যাস নির্ণয় করো।

5. শঙ্কু আকৃতি একটি গর্তের একেবারে উপরের অংশের ব্যাস 3.5 মি. এবং গভীরতা 12 মিটার। গর্তটির ধারণ ক্ষমতা কিলোলিটারে নির্ণয় করো।

6. একটি লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর আয়তন 9856 সেমি^{3}। যদি ভূমিতলের ব্যাস 28সেমি হয়, তবে নির্ণয় করো—

(i) শঙ্কুর উচ্চতা (ii) শঙ্কুটির তির্যক উচ্চতা (iii) শঙ্কুটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

7. 5 সেমি, 12 সেমি এবং 13 সেমি বাহু বিশিষ্ট ABC সমকোণী ত্রিভুজটিকে 12 সেমি বাহুর সাপেক্ষে ঘুরানো হল। এভাবে ঘুরানোর ফলে পাওয়া ঘন বস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো।

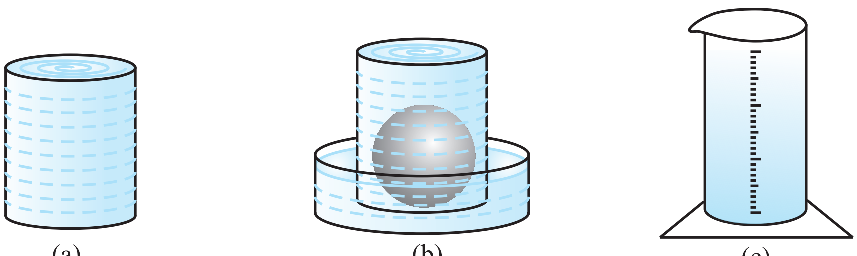
8. যদি 7 নং প্রশ্নের ABC ত্রিভুজটিকে 5 সেমি বাহুর সাপেক্ষে ঘুরানো হয়, তবে ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করো। 7 নং এবং 8 নং প্রশ্নে প্রাপ্ত ঘনবস্তু দুটির আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করো।

9. একটি শঙ্কু আকৃতির গমের স্তূপ যার ব্যাস 10.5 মি. এবং উচ্চতা 3 মি. হলে স্তূপটির আয়তন নির্ণয় করো। স্তূপটিকে বৃষ্টি থেকে রক্ষা করতে ক্যানভাস দিয়ে আবৃত করা হল। প্রয়োজনীয় ক্যানভাসের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

13.9 গোলকের আয়তন :

এখন, আমরা দেখবো কিভাবে গোলকের আয়তন পরিমাপ করা হয়। প্রথমত, ভিন্ন ব্যাসার্ধের দুই বা তিনটি গোলক নাও এবং একটি বড় পাত্র নাও যার মধ্যে প্রতিটি গোলক সহজেই রাখা যায়। তারপর আরো বড় একটা পাত্র নাও যেখানে আগের পাত্রটি রাখা যায়। তারপর পাত্রটিকে জল দিয়ে কানায় কানায় পূর্ণ করো [চিত্র 13.30(a) দেখ]।

এখন, সতর্কতার সহিত একটা গোলক পাত্রের মধ্যে রাখ। এর ফলে কিছু পরিমাণ জল বড় পাত্রটিতে উপচে পড়বে [চিত্র 13.30(b) দেখো]। উপচে পড়া এই জলকে একটি পরিমাপ চোঙে ঢাল (অর্থাৎ মাত্রাঙ্কিত চোঙ পাত্র) এবং উপচে পড়া জলের আয়তন পরিমাপ কর [চিত্র 13.30(c) দেখো]। মনে করো নিমজ্জিত গোলকের ব্যাসার্ধ r (তোমরা গোলাকটির ব্যাস পরিমাপ করে, তার সাহায্যে ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে পারো)। এরপর $\frac{4}{3}\pi r^3$ নির্ণয় করো। এই মান কি উপচে পড়া জলের আয়তনের প্রায় সমান।



চিত্র 13.30

অন্য আরেকটি গোলক নিয়ে এই একই পদ্ধতি পুনরাবৃত্তি করো। এই গোলকটির ব্যাসার্ধ R নির্ণয় করো, এরপর $\frac{4}{3}\pi R^3$ এর মান নির্ণয় করো। এবারও এই মান, গোলক দ্বারা অপসারিত (উপচে পড়া) জলের আয়তনের পরিমাপের কাছাকাছি। এ থেকে আমরা কি পাই? আমরা জানি যে, গোলকের আয়তন এবং গোলক দিয়ে অপসারিত জলের আয়তন সমান। বিভিন্ন ব্যাসার্ধের গোলক নিয়ে এই পরীক্ষাটি বার বার করে আমরা একই মান পাচ্ছি। অর্থাৎ গোলকের আয়তন, গোলকটির ব্যাসার্ধের ঘনের $\frac{4}{3}\pi$ গুণের সমান। এ থেকে আমরা পাই,

$$\boxed{\textbf{গোলকের আয়তন} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

যেখানে, r হল গোলকের ব্যাসার্ধ।

উপরের শ্রেণিতে এটি প্রমাণ করা যাবে। কিন্তু এখন এটাকে আমরা সত্য বলে ধরে নেবো।

যেহেতু, একটি অর্ধগোলক, একটি গোলকের অর্ধেক তাই, তোমরা ধারণা করতে পারো কি একটি অর্ধ-গোলকের আয়তন কত হবে? হ্যাঁ, ইহা $\frac{4}{3}\pi r^3$ এর $\frac{1}{2}$ অংশ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

তাহলে, $\boxed{\textbf{অর্ধগোলকের আয়তন} = \frac{2}{3}\pi r^3}$

যেখানে, r হল অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধ।

এই সূত্র সংক্রান্ত উদাহরণ লক্ষ করো :

উদাহরণ 17 : 11.2 সেমি ব্যাসার্ধের একটি গোলকের আয়তন নির্ণয় করো।

সমাধান : নির্ণেয় আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2 \text{ সেমি}^3 = 5887.32 \text{ সেমি}^3$$

উদাহরণ 18 : 4.9 সেমি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি ধাতব গোলাকৃতি শট্-পুট (shot-putt) আছে। শট্-পুটে ব্যবহৃত ধাতুর ঘনত্ব প্রতি সেমি^{3} এ 7.8 গ্রাম। শট্-পুটটির ভর নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু শট্-পুট একটি নিরেট ধাতব গোলক এবং শট্-পুটের ভর, আয়তন এবং ঘনত্বের গুণফলের সমান, ফলে আমাদের গোলকের আয়তন নির্ণয় করতে হবে।

এখন, গোলকটির আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9 \text{ সেমি}^3$$

$$= 493 \text{ সেমি}^3 \text{ (প্রায়)}$$

আবার, 1 সেমি^{3} পরিমাণ ধাতুর ভর 7.8 গ্রাম

সুতরাং, শট্-পুটটির ভর $= 7.8 \times 493$ গ্রাম

$$= 3845.44 \text{ গ্রাম} = 3.85 \text{ কিগ্রা (প্রায়)}$$

উদাহরণ 19 : অর্ধগোলাকার একটি বাটির ব্যাসার্ধ 3.5 সেমি। বাটিটি কত আয়তনের জল ধারণ করতে পারবে?

সমাধান : বাটিটি যতটুকু জল ধারণ করে তার আয়তন

$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 \text{ সেমি}^3 = 89.8 \text{ সেমি}^3$$

অনুশীলনী 13.8

(বিশেষভাবে উল্লেখ করা না হলে $\pi = \frac{22}{7}$ ধরবে)

1. নিম্নে প্রদত্ত ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকগুলোর আয়তন নির্ণয় করো।

(i) 7 সেমি (ii) 0.63 মি

2. নিম্নে প্রদত্ত ব্যাসযুক্ত নিরেট গোলক দ্বারা অপসারিত জলের পরিমাণ নির্ণয় করো।

(i) 28 সেমি (ii) 0.21 মি

3. একটি ধাতব বলের ব্যাস 4.2 সেমি। যদি ধাতুটির ঘনত্ব 8.9 গ্রাম প্রতি সেমি^{3} হয়, তবে বলটির ভর কত?

4. চাঁদের ব্যাস, পৃথিবীর ব্যাসের প্রায় এক-চতুর্থাংশ। চাঁদের আয়তন পৃথিবীর আয়তনের কত ভাগ?

5. 10.5 সেমি ব্যাসার্ধের অর্ধগালাকৃতির একটি বাটিতে কত লিটার দুধ ধরবে?

6. 1 সেমি বেধ যুক্ত লোহার পাতের সাহায্যে অর্ধগোলাকার একটি জলাধার বানানো হল। যদি এটির অন্তঃ-ব্যাসার্ধ 1 মি. হয়, তবে জলাধারটিতে ব্যবহৃত লোহার আয়তন নির্ণয় করো।

7. একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 154 সেমি^{2}। গোলকটির আয়তন নির্ণয় করো।

8. একটি অট্টালিকার গম্বুজটি অর্ধগোলক আকারে বানানো হল। 4989.60 টাকা খরচ করে এটির ভেতরের দিকটি রং করা হল। যদি প্রতি বর্গমিটার রং করতে 20 টাকা খরচ হয়, তবে নির্ণয় করো :

(i) গম্বুজটির ভিতরদিকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল। (ii) গম্বুজটির ভিতরে আবদ্ধ বায়ুর আয়তন।

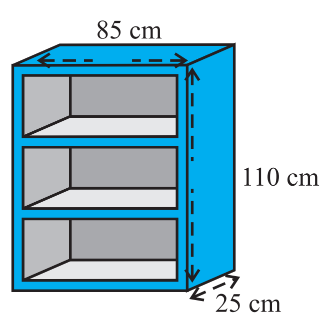
9. r ব্যাসার্ধ এবং S পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলযুক্ত 27 টি লোহার গোলক গলিয়ে 'S′' পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলযুক্ত আরেকটি নতুন গোলক বানানো হল। তাহলে—

(i) নতুন গোলকটির ব্যাসার্ধ r' নির্ণয় করো। (ii) S এবং S′ এর অনুপাত নির্ণয় করো।

10. গোলক আকৃতির একটি ঔষধের ক্যাপসুলের ব্যাস 3.5 মিমি। এই আকারের প্রতিটি ক্যাপসুল পূর্ণ করতে কী পরিমাণ ঔষধের (মিমি^{3}) প্রয়োজন?

অনুশীলনী 13.9 (ঐচ্ছিক)*

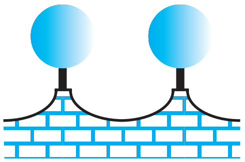
1. বই রাখার একটি কাঠের আলমারির বাইরের দিকের মাপ হলো : উচ্চতা = 110 সেমি, গভীরতা = 25 সেমি এবং প্রস্থ = 85 সেমি (চিত্র 13.31 দেখো)। ব্যবহৃত তক্তার বেধ 5 সেমি। আলমারির বাইরের দিক মসৃণ করতে এবং ভিতরের দিক রং করতে হবে। যদি প্রতি সেমি^{2} মসৃণ করতে 20 পয়সা এবং প্রতি সেমি^{2} রং করতে 10 পয়সা খরচ হয়, তবে এই কাজে মোট কত খরচ হবে নির্ণয় করো।



চিত্র 13.31

* অনুশীলনী 13.9 (ঐচ্ছিক) পরীক্ষার জন্য বিবেচিত হবে না।

2. 13.32 নং চিত্রে প্রদর্শিত, একটি অট্টালিকার সম্মুখ সীমার দেওয়ালটি 21 সেমি ব্যাসযুক্ত কাঠের গোলকের সাহায্যে সাজানো হয়েছে। এভাবে স্থাপিত 8 টি বলকে রূপালি রঙে রঞ্জিত করতে হবে। গোলকগুলোর প্রতিটির অবলম্বন (support) এক একটি চোঙ যেগুলোর প্রতিটির ব্যাসার্ধ 1.5 সেমি এবং উচ্চতা 7 সেমি। এই অবলম্বনগুলোকে কালো রং করতে হবে। যদি প্রতি সেমি^{2} রূপালি রং করতে 25 পয়সা এবং কালো রং করতে 5 পয়সা খরচ হয়, তবে এই কাজটিতে রং বাবদ মোট খরচ কত হবে নির্ণয় করো ।



চিত্র 13.32

3. একটি গোলকের ব্যাস 25% হ্রাস করা হয়েছে। এটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত শতাংশ হ্রাস পেল।

13.10 সারসংক্ষেপ (Summary)

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নোক্ত বিষয়গুলো শিখেছ :

1. আয়তঘনের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $2(lb + bh + hl)$
2. একটি ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $6a^2$
3. চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$
4. চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi r(r + h)$
5. শঙ্কুর বক্রতলের ক্ষেত্রফল = πrl
6. লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\pi rl + \pi r^2$, অর্থাৎ, $\pi r(l + r)$
7. r ব্যাসার্ধযুক্ত গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = $4\pi r^2$
8. r ব্যাসার্ধযুক্ত একটি অর্ধগোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi r^2$
9. একটি অর্ধগোলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $3\pi r^2$
10. আয়তঘনের আয়তন = $l \times b \times h$
11. ঘনকের আয়তন = a^3
12. চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h$
13. শঙ্কুর আয়তন = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. r ব্যাসার্ধযুক্ত গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$
15. অর্ধগোলকের আয়তন = $\frac{2}{3}\pi r^3$

[এখানে l, b, h, a, r ইত্যাদি ব্যবহৃত অক্ষরগুলো প্রসঙ্গানুযায়ী প্রচলিত অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে।]

অধ্যায়-14

রাশিবিজ্ঞান (STATISTICS)

14.1 ভূমিকা

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বহু ঘটনার তথ্য প্রকাশে সংখ্যাগত মান, তালিকা, লেখচিত্র ইত্যাদি ব্যবহার করে থাকি। এগুলো আমাদের কাছে পৌঁছায় সংবাদপত্র, টেলিভিশন, ম্যাগাজিন এবং অন্যান্য যোগাযোগের মাধ্যমের সাহায্যে। এই তথ্যগুলো ক্রিকেট খেলার ব্যাটিং অথবা বোলিং এর গড়, কোম্পানির লাভের হিসাব, শহরের তাপমাত্রা, পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনার বিভিন্ন খাতে ব্যয়ের হিসাব, নির্বাচনী ফলাফল ইত্যাদি বিভিন্ন বিষয়ের সাথে সম্পর্কিত। এসব ঘটনা বা বিষয়গুলো নির্দিষ্ট কোনো উদ্দেশ্যের সাপেক্ষে সংখ্যাগত মানে বা অন্য ভাবে সংগ্রহকে রাশি তথ্য (*data*) বলা হয়। Data শব্দটি হল *datum* শব্দের বহুবচন। *data* শব্দটি অবশ্য তোমাদের কাছে নতুন নয়। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা রাশিতথ্য এবং রাশিতথ্য সংকলন বিষয়ে অধ্যয়ন করেছ।

আমাদের বিশ্ব ক্রমশ অধিক তথ্য নির্ভর হয়ে উঠেছে। কোনো না কোনো প্রকারে আমাদের দৈনন্দিন জীবনের প্রতিটি মুহূর্তে তথ্যের ব্যবহার অনস্বীকার্য। অতএব, আমাদের এটি জানা খুবই প্রয়োজনীয় যে কীভাবে এ ধরনের রাশিতথ্য থেকে অর্থবহ তথ্য সংগ্রহ করা যায়। গণিতের যে শাখায় এ ধরনের অর্থবহ তথ্যের সংগ্রহ নিয়ে অধ্যয়ন করা হয় তাকে রাশিবিজ্ঞান (*Statistics*) বলে।

Statistics শব্দটির উৎপত্তি ল্যাটিন শব্দ 'status' থেকে, যার অর্থ 'a (political) state' অর্থাৎ 'একটি (রাজনৈতিক) রাষ্ট্র'। শুরুতে রাশিবিজ্ঞান শুধুমাত্র রাষ্ট্রের কল্যাণে, জনগণের প্রয়োজনে সংগৃহীত তথ্যকে বোঝাতো। যা হোক কালপ্রবাহে রাশিবিজ্ঞান কেবল তথ্য আহরণ ও উপস্থাপনের গণ্ডি ছাড়িয়ে, তথ্য-পর্যালোচনা ও সেই সম্পর্কে সিদ্ধান্তগ্রহণের ক্ষেত্রেও প্রসারিত হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে রাশিবিজ্ঞানের কাজ হল রাশিতথ্য-আহরণ (collection of data), রাশিতথ্য সংগঠন (organisation), রাশিতথ্য বিশ্লেষণ (analysis) এবং তার ব্যাখ্যাকরণ (interpretation)। 'statistics' শব্দটি বিভিন্ন প্রসঙ্গে, বিভিন্ন অর্থে ব্যবহৃত হয়। নিচের বাক্যগুলো লক্ষ করো :

'ভারতের শিক্ষাবিষয়ক পরিসংখ্যা'-এর সর্বশেষ সংস্করণ আমি কি পেতে পারি।

আমি 'পরিসংখ্যা' নিয়ে অধ্যায়ন করতে চাই কারণ দৈনন্দিন জীবনে এটি ব্যবহৃত হয়।

প্রথম বাক্যটিতে 'পরিসংখ্যা' শব্দটি সাংখ্যিক তথ্যবিষয়ক বহুবচনে ব্যবহৃত হয়েছে। এটির মধ্যে থাকতে পারে ভারতের কতগুলো শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের সংখ্যা এবং বিভিন্ন রাজ্যের শিক্ষিতের হার বা সাক্ষরতার হার

ইত্যাদি। দ্বিতীয় বাক্যটিতে 'পরিসংখ্যা' (statistics) শব্দটি একটি একবচন বিশেষ্য হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে। যা একটি বিষয়, যাতে রাশিতথ্য সংগ্রহ, রাশিতথ্য উপস্থাপন ও রাশিতথ্য বিশ্লেষণের মাধ্যমে অর্থপূর্ণ সিদ্ধান্ত নেওয়া ইত্যাদি সম্পর্কে অধ্যয়ন করা বোঝায়।

এই অধ্যায়ে, আমরা এইসব দৃষ্টিকোণ থেকে তথ্য সম্পর্কিত বিষয়সমূহ সংক্ষেপে আলোচনা করবো।

14.2 রাশিতথ্য সংগ্রহ (Collection of Data) :

চলো, আমরা নিচে প্রদত্ত কার্যকলাপের মধ্য দিয়ে রাশিতথ্য সংগ্রহের একটি অনুশীলন করি।

কার্যকলাপ 1 : তোমাদের শ্রেণির ছাত্রছাত্রীদের চারটি দলে ভাগ করো। প্রতিটি দলকে নিম্নলিখিত যে কোনো একটি তথ্য সংগ্রহ করার দায়িত্ব দাও :

(i) তোমাদের শ্রেণির 20 জন ছাত্রছাত্রীর উচ্চতা।

(ii) তোমাদের শ্রেণির এক মাসের প্রত্যেকদিনের অনুপস্থিতির সংখ্যা।

(iii) তোমাদের সহপাঠীদের পরিবারের সদস্য সংখ্যা।

(iv) তোমাদের বিদ্যালয়ের বা আশপাশের 15 টি বৃক্ষের উচ্চতা।

চলো দেখি, কী করে ছাত্রছাত্রীদের প্রত্যেক দল তথ্য সংগ্রহ করল ?

(i) তারা কী সংশ্লিষ্ট ছাত্রছাত্রী, তাদের পরিবার অথবা অন্য কোনো ব্যক্তির সঙ্গে দেখা করে তথ্য সংগ্রহ করেছিল ?

(ii) বিদ্যালয়ের কোনো নথিপত্র থেকে কি তারা তথ্য সংগ্রহ করেছিল ?

প্রথম ক্ষেত্রে, অনুসন্ধানকারী (ছাত্রছাত্রীরা) স্বয়ং একটি বিশেষ উদ্দেশ্যে রাশিতথ্য সংগ্রহ করেছিল। এই প্রকার তথ্যকে 'প্রাথমিক রাশিতথ্য' (*primary*) বলে।

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, যখন কোনো তথ্য পূর্বে সংগৃহীত তথ্য থেকে সংগ্রহ করা হয়ে থাকে তখন এ প্রকার সংগৃহীত রাশিতথ্যকে 'গৌন রাশিতথ্য' (*secondary data*) বলে। এরূপ রাশিতথ্য অপর কোনো উদ্দেশ্যে অন্য কোনো ব্যক্তির মাধ্যমে সংগ্রহের জন্য প্রয়োজন, উৎসটি যেন নির্ভরযোগ্য হয়, তা যত্ন সহকারে সুনিশ্চিত করা।

কীভাবে রাশিতথ্য সংগ্রহ করা হয় এবং প্রাথমিক ও গৌন রাশিতথ্য কী, তা তোমরা এখন জানতে পেরেছ।

অনুশীলনী 14.1

1. তোমাদের দৈনন্দিন জীবন থেকে সংগ্রহ করতে পারো এমন পাঁচটি রাশিতথ্যের উদাহরণ দাও।

2. উপরোক্ত 1 নং প্রশ্নের সংগৃহীত রাশিতথ্যকে প্রাথমিক এবং গৌণ রাশিতথ্য রূপে প্রকাশ করো।

14.3 রাশিতথ্য উপস্থাপন (Presentation of Data) :

তথ্য সংগ্রহ হয়ে যাওয়ার সাথে সাথে অনুসন্ধানকারীকে এই তথ্যের সংক্ষিপ্ত মুখ্য বৈশিষ্ট্যগুলোর অর্থপূর্ণ ও সহজ উপস্থাপনের উপায় সম্পর্কে ভাবতে হয়। এখন, উপস্থাপনের বিভিন্ন উপায়গুলো কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে স্মরণ করো।

উদাহরণ 1 : মনে করো একটি গণিত পরীক্ষায় 10 জন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর সমূহ নিম্নরূপ :

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

এই প্রকার তথ্যকে ‘কাঁচা তথ্য’ (*raw data*) বলে।

এই তথ্য-এর প্রদত্ত রূপ পর্যবেক্ষণ করে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন নম্বর দুটো তোমরা কী নির্ণয় করতে পারবে?

নিশ্চয়ই পেরেছ, কিন্তু এই নম্বর দুটি বের করতে তোমাদের একটু বেশি সময় লাগল কি? এটি করতে একটু কম সময় লাগবে কি, যদি এই নম্বরগুলোকে অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রমে সাজানো হয়? সুতরাং, নম্বরগুলোকে উর্ধ্বক্রম সাজিয়ে আমরা পাই—

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

এখন, আমরা স্পষ্টভাবে দেখছি যে, সর্বনিম্ন নম্বর 25 এবং সর্বোচ্চ নম্বর 95। তথ্যের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের পার্থ্যকে বলা হয় তথ্যের প্রসার (*range*)। সুতরাং, এই ক্ষেত্রে হল প্রসার $95 - 25 = 70$।

রাশিতথ্যকে অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রমে উপস্থাপন করার কাজটি খুবই সময় সাপেক্ষ, বিশেষ করে কোনও পরীক্ষায় পর্যবেক্ষণের সংখ্যা যখন অনেক বেশি হয়, যা পরবর্তী উদাহরণের অনুরূপ।

উদাহরণ 2 : নবম শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর (100 নম্বরের মধ্যে) ধরে নাও :

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

স্মরণ করে দেখো যে, কোনোও একটি বিশেষ নম্বর পাওয়া শিক্ষার্থীর সংখ্যাকে উক্ত নম্বরটির পরিসংখ্যা (*frequency*) বলে। যেমন— 4 জন শিক্ষার্থী 70 নম্বর করে পেয়েছে। সুতরাং 70 নম্বরটির পরিসংখ্যা ।

সহজে বোঝার জন্য আমরা এটিকে একটি সারণির মাধ্যমে প্রকাশ করি যা নিম্নরূপ:

সারণি 14.1

নম্বর	পরীক্ষার্থীর সংখ্যা (অর্থাৎ পরিসংখ্যা)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
মোট	30

সারণি 14.1 কে বলা হয় *সরল পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা* (*ungrouped frequency distribution table*) বা সহজভাবে *পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা* (*frequency distribution table*)।

উদাহরণ 3 : বনমহোৎসব উপলক্ষে 100 টি বিদ্যালয়ের প্রত্যেকটি, 100 টি করে গাছের চারা রোপণ করেছিল। এক মাস পর, জীবিত গাছগুলোর সংখ্যা নিম্নরূপে সংগৃহীত হয় :

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

এতবড় রাশিতথ্যকে এরূপে প্রকাশ করতে হবে যাতে ইহা পাঠকের সহজ বোধগম্য হয়। তারজন্য সংখ্যাগুলোকে 20-29, 30-39, . . ., 90-99 ইত্যাদি উপদলে সংক্ষিপ্তভাবে প্রকাশ করবে (যেহেতু তথ্যরাশি 23 থেকে 94 পর্যন্ত বিস্তৃত)। এই উপদলগুলোকে বলা হয় শ্রেণি (classes) বা শ্রেণি বিভাগ (class-intervals) এবং এদের প্রত্যেকটির বিস্তারকে বলা শ্রেণি-দৈর্ঘ্য বা শ্রেণি-বিস্তার (*class-size* বা *class width*)। এখানে প্রত্যেকটি শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 10। প্রত্যেকটি শ্রেণির সর্বনিম্ন মান কে বলা হয় নিম্নশ্রেণি সীমা (lower class limit) এবং সর্বোচ্চ মানটিকে বলা হয় উর্ধ্ব শ্রেণি সীমা (upper class limit)। উদাহরণস্বরূপ, 20-29 তে 20 হল নিম্নশ্রেণি সীমা এবং 29 হল উর্ধ্বশ্রেণি সীমা।

আরোও অনুস্মরণ করো, টালিমার্ক (tally marks) ব্যবহার করে উপরের রাশিতথ্য নিম্নের তালিকা আকারে সংক্ষিপ্ত (condensed) করা যায় :

সারণি 14.2

জীবিত গাছের সংখ্যা	টালি মার্ক	বিদ্যালয়ের সংখ্যা (পরিসংখ্যা)
20 - 29	|||	3
30 - 39	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
40 - 49	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
50 - 59	~~||||~~ |||	8
60 - 69	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	18
70 - 79	~~||||~~ ~~||||~~	10
80 - 89	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |||	23
90 - 99	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
মোট		100

এইভাবে রাশিতথ্যের সরল ও সংক্ষিপ্ত উপস্থাপনের ফলে রাশিতথ্যের বিশেষ বিশেষ বৈশিষ্ট্যগুলোর পর্যবেক্ষণ এক দৃষ্টিতেই সম্ভব হয়। এই পদ্ধতিকে *শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা* (*grouped frequency distribution table*) বলা হয়। এখানে আমরা সহজেই লক্ষ করি যে, $8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71$ টি বিদ্যালয়ে 50% বা তার চেয়ে বেশি গাছ জীবিত আছে।

আমরা লক্ষ করি যে, এই তালিকার শ্রেণি-বিভাগগুলো একটিকে আর একটি অধিক্রমণ করে না (non-overlapping)। আরও লক্ষ করো আমরা ছোটো শ্রেণি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বেশি সংখ্যক শ্রেণি বিভাগ অথবা বড় শ্রেণি দৈঘ্য বিশিষ্ট কমসংখ্যক শ্রেণিবিভাগ নিতে পারতাম। উদাহরণস্বরূপ, শ্রেণিবিভাগগুলো হতে পারত 22-26, 27-31 এবং এর অনুরূপ। সুতরাং, শ্রেণিগুলো একে অপরকে অধিক্রমণ করবে না, এই শর্ত ছাড়া অন্য কোনো বাধা-ধরা নিয়ম নেই।

উদাহরণ 4 : এখন নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি বিবেচনা করো, যেখানে একটি শ্রেণির 38 জন শিক্ষার্থীর ওজন দেওয়া আছে :

সারণি 14.3

ওজন (কেজিতে)	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
মোট	38

এখন, এবার যদি 35.5 কেজি এবং 40.5 কেজি ওজনের দুইজন শিক্ষার্থী এই শ্রেণিতে ভর্তি হয় তাহলে আমরা তাদের কোন্ শ্রেণি বিভাগে অন্তর্ভুক্ত করব ? আমরা তাদের 35 বা 40 উর্ধ্ব শ্রেণি সীমা যুক্ত শ্রেণি বিভাগের কোনটিতেই অন্তর্ভুক্ত করতে পারব না। কারণ এখানে পর পর দুটি শ্রেণির উর্ধ্ব এবং নিম্ন শ্রেণি সীমার মধ্যে ফাঁক (gap) রয়েছে। সুতরাং, পরপর দুটি শ্রেণি বিভাগের প্রথমটির উর্ধ্ব এবং দ্বিতীয়টির নিম্ন শ্রেণি সীমা যাতে একই হয় এইভাবে শ্রেণি-বিভাগগুলো গঠন করা প্রয়োজন। এটি করার জন্য আমরা একইভাবে পর পর দুটি শ্রেণির উর্ধ্ব এবং নিম্ন শ্রেণি সীমার পার্থক্য নির্ণয় করব। তারপর আমরা এই অন্তরের অর্ধেক, প্রত্যেক শ্রেণির উর্ধ্বসীমার সাথে যোগ করব এবং প্রত্যেক শ্রেণির নিম্নসীমা থেকে বিয়োগ করব।

উদাহরণস্বরূপ, 31 - 35 এবং 36 - 40 ধরে নাও,

36 - 40 এর নিম্নসীমা = 36

31 - 35 এর উর্ধ্বসীমা = 35

দুটির অন্তর = 36 – 35 = 1

সুতরাং, অন্তরের অর্ধেক $= \frac{1}{2} = 0.5$

অতএব, 31 - 35 এর নতুন শেণি বিভাগটি হবে (31 – 0.5) - (35 + 0.5), অর্থাৎ, 30.5 - 35.5.

অনুরূপে, 36 - 40 এর নতুন শ্রেণি বিভাগটি হবে (36 – 0.5) - (40 + 0.5), অর্থাৎ 35.5 - 40.5

এভাবে অগ্রসর হয়ে আমরা নিম্নরূপে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি গঠন করতে পারি :

30.5-35.5, 35.5-40.5, 40.5-45.5, 45.5-50.5, 50.5-55.5, 55.5-60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5.

এখন আমরা নতুন শিক্ষার্থীদের ওজন এই তালিকায় অন্তর্ভুক্ত করতে পারব। কিন্তু আরেকটি সমস্যা দেখা দিয়েছে, কারণ 30.5 - 35.5 এবং 35.5 - 40.5 শ্রেণি বিভাগের দুটিতেই 35.5 সংখ্যাটি রয়েছে। তাহলে কোন্ শ্রেণিতে এটিকে অন্তর্ভুক্ত করা উচিত বলে তুমি মনে করো?

যদি উভয় শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত করা হয় তাহলে এটিকে দুইবার গণনা করা হবে।

প্রচলিত নিয়মে আমরা 35.5 কে 35.5 - 40.5 শ্রেণিভুক্ত করব এবং 30.5 - 35.5 তে নয়। অনুরূপে 40.5 কে 40.5 - 45.5 শ্রেণিভুক্ত করব, 35.5 - 40.5 তে নয়।

সুতরাং, নতুন ওজন 35.5 কেজি এবং 40.5 কেজি কে আমরা অন্তর্ভুক্ত করব যথাক্রমে 35.5 - 40.5 এবং 40.5 - 45.5 শ্রেণিতে। এখন এই ধারণা অনুযায়ী নতুন পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাটি হবে নিম্নরূপ :

সারণি 14.4

ওজন (**kg** তে)	শিক্ষার্থীদের সংখ্যা
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
মোট	40

এখন চলো আমরা, তোমাদের সংগৃহীত রাশিতথ্য নিয়ে আলোচনা করি যেগুলো তোমরা কার্যকলাপ 1 এ সংগ্রহ করেছ। এবার তোমাদের বলব প্রাপ্ত রাশিতথ্যগুলোকে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার মাধ্যমে প্রকাশ করো।

কার্যকলাপ 2 : অনুরূপ চারটি দল নিয়ে অগ্রসর হয়ে পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকার রাশিতথ্য পরিবর্তন করো। রাশিতথ্যের বিস্তার এবং প্রকার মনে রেখে, সুবিধামতো শ্রেণিগুলো এবং শ্রেণিগুলোর দৈর্ঘ্য নিয়ে কার্যটি সম্পন্ন করো।

অনুশীলনী 14.2

1. অষ্টম শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর রক্তের গ্রুপ (blood group) নিম্নরূপ—

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

এই তথ্যকে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা আকারে প্রকাশ করো। কোন গ্রুপটি সবচেয়ে সাধারণ (common) এবং কোন্ গ্রুপটি বিরল(rare) ?

2. 40 জন ইঞ্জিনিয়ারের বাসভবন এবং কর্মস্থলের মধ্যবর্তী দূরত্ব (কিমি) নিম্নরূপ :

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

উপরের তথ্য নিয়ে, 0-5 (5 অন্তর্ভুক্ত নয়) কে প্রথম শ্রেণিবিভাগ ধরে, 5 শ্রেণি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো। এই তালিকাতে তুমি কী কী প্রধান বৈশিষ্ট্য লক্ষ করেছ ?

3. কোনো একটি শহরে 30 দিনে একটি মাসের দৈনিক আপেক্ষিক আর্দ্রতা (শতকরা হার) নিম্নরূপ :

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(ii) শ্রেণিবিভাগ 84-86, 86-88 ইত্যাদি নিয়ে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো।

(ii) এই তথ্যটি কোন মাস বা কোন ঋতুর বলে তোমার মনে হয় ?

(iii) এই রাশিতথ্যের প্রসার বা বিস্তার (range) কত ?

4. 50 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা যা নিকটতম সেমি -এ প্রদত্ত তা হল—

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) 160 - 165, 165 - 170 ইত্যাদি শ্রেণিবিভাগ নিয়ে উপরোক্ত রাশিতথ্যকে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকায় প্রকাশ করো।

(ii) এই তালিকা থেকে তাদের উচ্চতা সম্পর্কে তুমি কী সিদ্ধান্তে আসতে পার ?

5. একটি শহরে প্রতি মিলিয়ন ভাগে (ppm বা parts per million) সালফার ডাই-অক্সাইডের গাঢ়ত্বের

পরিমাণ নির্ণয় করার জন্য একটি সমীক্ষা করা হয়েছিল। 30 দিনের প্রাপ্ত রাশিতথ্য নিম্নরূপ :

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) 0.00 - 0.04, 0.04 - 0.08 ইত্যাদি শ্রেণিবিভাগ নিয়ে প্রদত্ত রাশিতথ্যের একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো।

(ii) সালফার ডাইঅক্সাইডের গাঢ়ত্বের পরিমাণ 0.11 ভাগ প্রতি মিলিয়ন (ppm) থেকে বেশি ছিল কতদিন ?

6. তিনটি মুদ্রাকে একই সময়ে 30 বার টস্ করা হয়েছিল। প্রতিবার টসের ফলে পাওয়া হেড (head) এর সংখ্যা নিম্নরূপ :

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

উপরোক্ত রাশিতথ্য নিয়ে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো।

7. π এর মান 50 দশমিক স্থান পর্যন্ত নিচে দেওয়া হল :

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) দশমিকের পরের 0 থেকে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলো নিয়ে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করো।

(ii) সবচেয়ে কম এবং সবচেয়ে বেশিবার পুনরাবৃত্ত অঙ্কগুলো কী কী ?

8. 30 জন শিশুদের জিজ্ঞাসা করা হয়েছিল তারা গত সপ্তাহে কে কত ঘণ্টা টেলিভিশনের অনুষ্ঠান দেখেছিল। যে ফলাফল পাওয়া গেল তা নিম্নরূপ :

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) শ্রেণি দৈর্ঘ্য 5 নিয়ে এবং 5 - 10 একটি শ্রেণি বিভাগ ধরে এই রাশিতথ্যগুলো নিয়ে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো।

(ii) এক সপ্তাহে 15 ঘণ্টা বা তার চেয়ে বেশি সময় টেলিভিশন দেখেছিল এমন শিশুর সংখ্যা কত ?

9. একটি কোম্পানি একটি বিশেষ প্রকারের গাড়ির ব্যাটারি তৈরি করে। এরকম 40 টি ব্যাটারির জীবনকাল (বছরে) নিম্নরূপ :

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

শ্রেণি দৈর্ঘ্য 0.5 নিয়ে, 2 - 2.5 শ্রেণি বিভাগ থেকে শুরু করে প্রদত্ত রাশিতথ্য নিয়ে একটি শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করো।

14.4 রাশিতথ্যের লৈখিক উপস্থাপন (Graphical Representation of Data) :

তালিকার মাধ্যমে রাশিতথ্যের উপস্থাপন সম্পর্কে ইতিমধ্যে আলোচনা করা হয়েছে। এখন চলো আমরা রাশিতথ্যকে অন্য ভাবে উপস্থাপনের দিকে নজর দেই এবং সেটি হল লৈখিক উপস্থাপন (Graphical Representation)। এটি বলা হয় যে, হাজার শব্দের তুলনায় একটি চিত্র উত্তম। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে স্বতন্ত্র বিষয়গুলোর (Individual items) তুলনা চিত্রলেখের সাহায্যে করাই সর্বোত্তম। প্রকৃত রাশিতথ্যের তুলনায় চিত্রলেখের সাহায্যে প্রকাশিত রাশিতথ্য বুঝতে বেশি সহজ হয়। এই অধ্যায়ে আমরা রাশিতথ্যের লৈখিক প্রকাশ সম্পর্কীয় নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করব।

(A) দণ্ডলেখ বা বার চিত্র (Bar graphs);

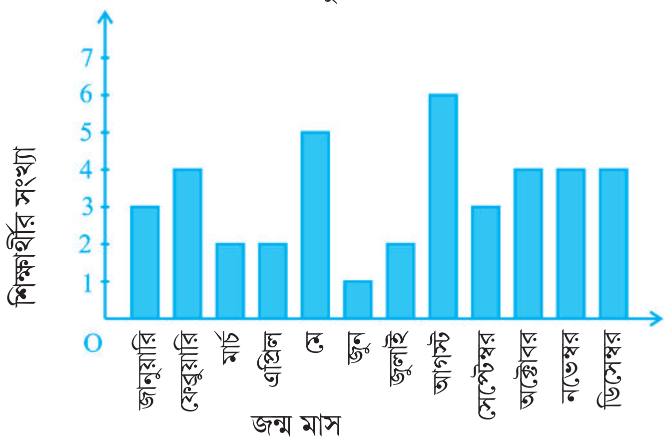
(B) সমপ্রস্থ বা বিষমপ্রস্থ বিশিষ্ট আয়তলেখ (Histograms of uniform width, and of varying widths);

(C) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency polygons)

(A) দণ্ডলেখ বা বার চিত্র (Bar graphs)

পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে তোমরা দণ্ডলেখ অঙ্কন সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছ। এখানে আমরা সে গুলোকেই আরও প্রচলিত পদ্ধতিতে আলোচনা করব। মনে করার চেষ্টা করো যে, দণ্ডলেখ হল পরস্পর সমব্যবধানে অবস্থিত এবং সমপ্রস্থ যুক্ত একাধিক দণ্ড বা স্তম্ভের দ্বারা প্রকাশিত কোনোও রাশিতথ্যের চিত্ররূপ। চিত্রটির কোনো একটি অক্ষ (ধরো x অক্ষ) দ্বারা রাশিতথ্যের চলক নির্দেশক দণ্ডগুলো এবং অপর অক্ষটি (y অক্ষ) দ্বারা চলকটির মান নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ 5 : নবম শ্রেণির একটি নির্দিষ্ট শাখার 40 জন শিক্ষার্থীর প্রত্যেককে তাদের জন্মমাস জিজ্ঞাসা করা হয়েছিল এবং প্রাপ্ত রাশিতথ্য অনুযায়ী নিম্নে প্রদত্ত লেখটি অঙ্কন করা হয়েছে :



চিত্র 14.1

উপরের দণ্ডলেখটি লক্ষ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :-

(i) নভেম্বর মাসে কতজন শিক্ষার্থীর জন্ম হয়েছিল ?

(ii) কোন্ মাসে সবচেয়ে বেশি সংখ্যক শিক্ষার্থীর জন্ম হয়েছিল ?

সমাধান : লক্ষ করো এখানে চলক হল 'জন্ম মাস' এবং চলকের মান হল 'জন্মগ্রহণ করা শিক্ষার্থীর সংখ্যা'।

(i) নভেম্বর মাসে 4 জন শিক্ষার্থী জন্মগ্রহণ করেছিল?

(ii) সবচেয়ে বেশি সংখ্যক শিক্ষার্থী জন্মগ্রহণ করেছিল আগস্ট মাসে।

চলো, এখন আমরা নিম্নের উদাহরণের সাহায্যে স্মরণ করার চেষ্টা করি, কী করে একটি দণ্ডলেখ অঙ্কন করা যায়।

উদাহরণ 6 : একটি পরিবারের মাসিক আয় 20,000 টাকা প্রতিমাসে বিভিন্ন খাতে ব্যয়ের হিসা নিম্নরূপ :

সারণি 14.5

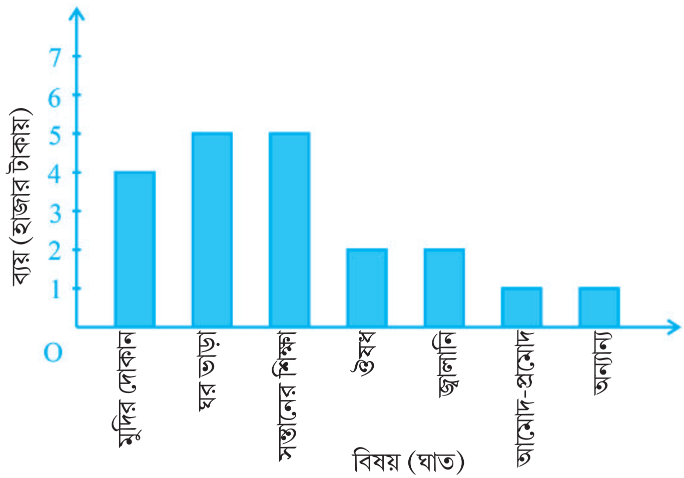
বিষয় বা খাত	ব্যয় (হাজার টাকা হিসাবে)
মুদির দোকান	4
ঘর ভাড়া	5
সন্তানের শিক্ষা	5
ঔষধ	2
জ্বালানি	2
আমোদ-প্রমোদ	1
অন্যান্য	1

উপরোক্ত রাশিতথ্যের জন্য একটি দণ্ডলেখ অঙ্কন করো।

সমাধান : নিম্নলিখিত ধাপগুলোর মাধ্যমে আমরা প্রদত্ত রাশিতথ্যের দণ্ডলেখ অঙ্কন করব। লক্ষ করো, এখানে দ্বিতীয় স্তম্ভের একক হল হাজার টাকা। সুতরাং, 'মুদির দোকানের' পাশের '4' টি বোঝাচ্ছে 4000 টাকা।

1. ব্যয়ের বিষয় (চলক) কে আমরা অনুভূমিক অক্ষে (x-অক্ষ) প্রকাশ করি। যেহেতু দণ্ড বা স্তম্ভগুলোর প্রস্থ বিবেচ্য নয়, তাই যে কোনও স্কেল (scale) বা মাপাঙ্ক অনুসারে এই স্তম্ভগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ধারণ করা হয়। কিন্তু পরিচ্ছন্নতার জন্য সব স্তম্ভগুলো সমপ্রস্থ বিশিষ্ট নেওয়া হয় এবং তাদের মধ্যে সমান দূরত্ব বজায় রাখা হয়। ধরে নাও একটি বিষয় হল একটি একক।
2. উল্লম্ব অক্ষ (y-অক্ষ) বরাবর আমরা ব্যয় (মূল্য)-এর পরিমাণকে উপস্থাপন করব। যেহেতু সর্বাধিক ব্যয় 5000 টাকা তাই স্কেল নির্বাচন করব 1 একক = 1000 টাকা।
3. প্রথম বিষয়টি উপস্থাপনের ক্ষেত্রে অর্থাৎ মুদির দোকানের ক্ষেত্রে আমরা 1 একক প্রস্থ এবং 4 একক উচ্চতা বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করব।
4. অনুরূপভাবে, অন্য বিষয়গুলো অঙ্কন করার সময় পর পর দুটি স্তম্ভের মধ্যে 1 একক ফাঁক রাখব।

   চিত্র 14.2 তে দণ্ডলেখ অঙ্কন করা হল—



চিত্র 14.2

এখানে, প্রদত্ত রাশিতথ্যের প্রত্যেক বিষয়ের তুলনামূলক বৈশিষ্ট্যগুলো অতি সহজ ও সংক্ষিপ্তরূপে এক দৃষ্টিতে তোমরা বুঝতে পারো। যেমন এখানে সন্তানের শিক্ষার জন্য ব্যয় ঔষধের জন্য ব্যয়ের দ্বিগুণের চেয়েও বেশি। অতএব, অনেক ক্ষেত্রেই রাশিতথ্যের তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশের তুলনায় দণ্ডচিত্র সহজবোধ্য ও অর্থপূর্ণ হয়।

কার্যকলাপ 3: কার্যকলাপ 1 এর চারটি দলের প্রাপ্ত রাশিতথ্যকে উপযুক্ত লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করো।

এখন আমরা অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি-বিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাকে কীভাবে লেখচিত্রে উপস্থাপন করা হয় তা দেখব।

(B) আয়তলেখ (Histogram)

এটির প্রকাশের রূপ অনেকটা দণ্ডলেখের অনুরূপ, কিন্তু এটি ব্যবহার করা হয় অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি-বিভাগের জন্য। উদাহরণস্বরূপ, সারণি 14.6 তে 36 জন শিক্ষার্থীর ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা ধরে নাও :

সারণি 14.6

ওজন (কেজিতে)	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
মোট	36

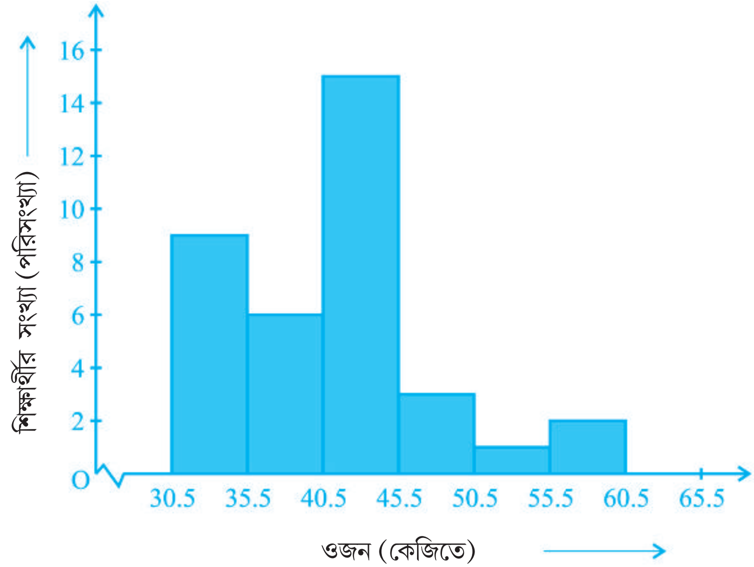
এবার আমরা উপরে প্রদত্ত রাশিতথ্যের লেখচিত্র নিম্নরূপ প্রকাশ করব :

(i) আমরা অনুভূমিক অক্ষে (x-অক্ষ) উপযুক্ত স্কেল নির্বাচন করতে ওজন-কে উপস্থাপন করব। এখানে 1 সেমি = 5 কেজি এই স্কেল নির্বাচন করতে পারি। আবার, যেহেতু প্রথম শ্রেণি বিভাগটি 30.5 (যা শূন্য নয়) থেকে শুরু হয়েছে, তাই অক্ষের উপর একটি গিঁট (*kink*) চিহ্ন বা ছিন্ন (*break*) অংশ দেখিয়ে এই বিষয়টি বোঝাতে পারি।

(ii) উপযুক্ত স্কেল নিয়ে উল্লম্ব অক্ষ (y-অক্ষ) বরাবর আমরা শিক্ষার্থীর সংখ্যা (পরিসংখ্যা) উপস্থাপন করব। যেহেতু সর্বাধিক পরিসংখ্যা 15 তাই আমরা স্কেল এমনভাবে নেব যাতে এই পরিসংখ্যাটিকে (উল্লম্ব অক্ষে) স্থাপন করা যায়।

(iii) এখন, শ্রেণি বিভাগের দৈর্ঘ্যকে (শ্রেণি দৈর্ঘ্য) প্রস্থ এবং পরিসংখ্যাকে দৈর্ঘ্য হিসাবে নিয়ে, নির্দিষ্ট শ্রেণি-বিভাগে এক একটি আয়তক্ষেত্র আঁকা হল। যেমন, 30.5 - 35.5 শ্রেণি বিভাগে আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ 1 সেমি এবং 4.5 সেমি হবে।

(iv) এভাবে আমরা চিত্র 14.3 তে প্রদর্শিত লেখচিত্র পাব।



চিত্র **14.3**

লক্ষ করো, যেহেতু পর পর আয়তক্ষেত্রগুলোর মাঝখানে কোনো ফাঁক নেই তাই সম্পূর্ণ লেখচিত্রটিকে একটি ঘন আকৃতির মত দেখায়। এটিকে বলা হয় আয়তলেখ (*histogram*), যা হল, অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিবিভাগ বিশিষ্ট, শ্রেণিবদ্ধ পরিংখ্যা বিভাজনের লৈখিক উপস্থাপন। এছাড়া, আয়তলেখের প্রতিটি স্তম্ভের প্রস্থ এখানে উল্লেখযোগ্য ভূমিকা পালন করে যা দণ্ডলেখে প্রয়োজন নেই।

এখানে প্রকৃতপক্ষে প্রতিটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ পরিসংখ্যার সমানুপাতি হয়। যাই হোক, যেহেতু এখানে সবগুলো আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ সমান, তাই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যগুলো পরিসংখ্যার সমানুপাতি। এই জন্য আমরা উপরের (iii) নং ধাপ অনুসারে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য অঙ্কন করি।

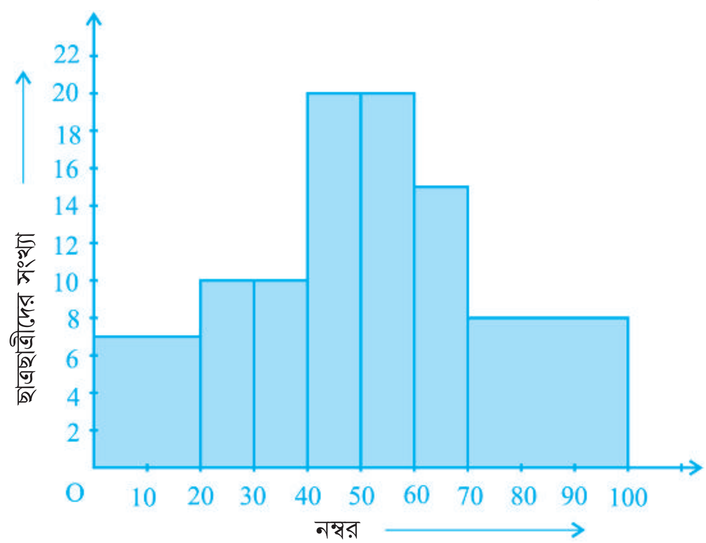
এখন, একটি অন্য প্রকারের পরিস্থিতি বিবেচনা করা যাক।

উদাহরণ 7 : এক জন শিক্ষিক 100 নম্বরের গণিত পরীক্ষায় দুটি শাখার ছাত্রছাত্রীদের পারদর্শিতার বিশ্লেষণ করতে চেয়েছিলেন। তাদের পারদর্শিতা বিচার করে তিনি দেখতে পেলেন অল্প সংখ্যক ছাত্রছাত্রী 20 নম্বর থেকে কম নম্বর পেয়েছে এবং অল্প সংখ্যক ছাত্রছাত্রী 70 বা তারচেয়ে বেশি নম্বর পেয়েছে। সুতরাং, তিনি সিদ্ধান্ত নিলেন যে তাদের তিনি ভিন্ন শ্রেণি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট দলে ভাগ করবেন, যা হল : 0 -20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100। তারপর তিনি নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করলেন:

সারণি 14.7

নম্বর	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - এর অধিক	8
মোট	90

একজন ছাত্র এই তালিকা থেকে চিত্র 14.4 এর অনুরূপ একটি আয়তলেখ প্রস্তুত করল।



চিত্র 14.4

এই লৈখিক উপস্থাপনাটি মনোযোগ দিয়ে পরীক্ষা করো। তুমি কী এটিকে রাশিতথ্যের সঠিক উপস্থাপনা বলে মনে করো ? না, প্রকৃতপক্ষে এই লেখচিত্রটি আমাদের ভুল চিত্র দেখাচ্ছে। আগেই আমরা উল্লেখ করেছি যে, আয়তলেখের আয়তক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল অনুরূপ পরিসংখ্যার সমানুপাতি হয়। পূর্বে এই সমস্যা দেখা দেয় নি, কারণ তখন সবগুলো আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ সমান ছিল। কিন্তু এখানে যেহেতু আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ অসমান তাই উপরের আয়তলেখটি রাশিতথ্যের সঠিক চিত্র প্রকাশ করে না। উদাহরণস্বরূপ, এই চিত্রে 60 - 70 শ্রেণি বিভাগের পরিসংখ্যার তুলনায় 70 - 100 শ্রেণির পরিসংখ্যা অধিক দেখাচ্ছে, যা এখানে ঠিক নয়।

সুতরাং, আয়তক্ষেত্র গুলোর দৈর্ঘ্যের কিছু পরিবর্তন করবো যাতে ক্ষেত্রফল এবং পরিসংখ্যা সমানুপাতি হয়।

করণীয় ধাপগুলো নিম্নরূপ :

1. সবচেয়ে ছোট শ্রেণিদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শ্রেণিটি নির্বাচন করো। উপরের উদাহরণে সবচেয়ে ছোটো শ্রেণি-দৈর্ঘ্য (class-size) হল 10।
2. তারপর শ্রেণিদৈর্ঘ্য 10 এর সমানুপাতে আয়তক্ষেত্রগুলোর দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করো।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, যখন শ্রেণিদৈর্ঘ্য 20 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 7। সুতরাং, যখন শ্রেণি-দৈর্ঘ্য 10 তখন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ ।

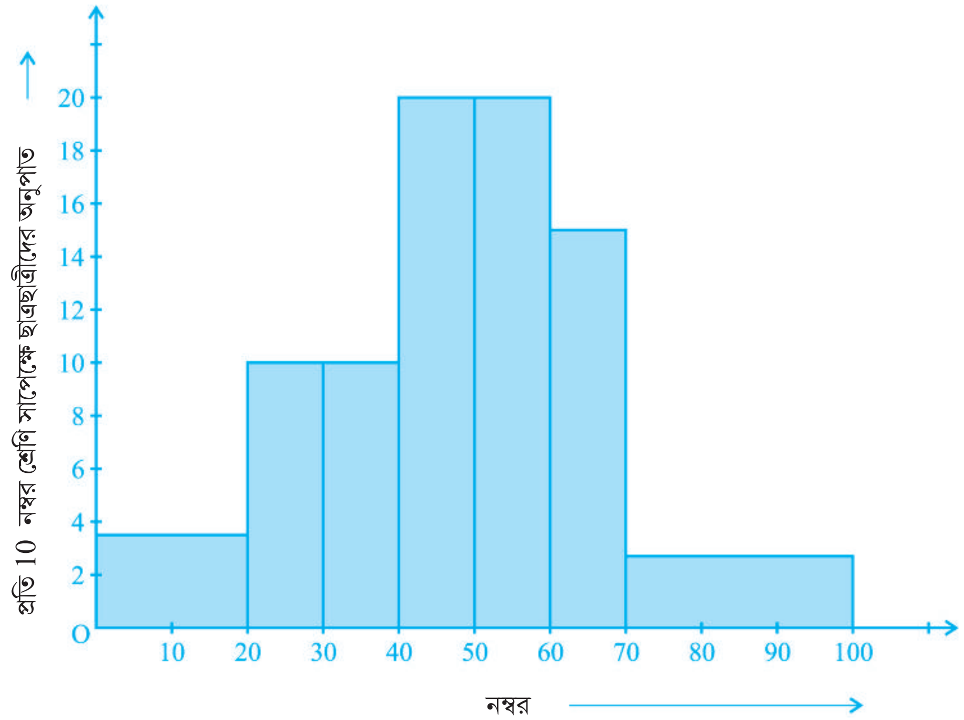
অনুরূপে অগ্রসর হয়ে আমরা নিম্নের তালিকাটি পাই—

সারণি 14.8

নম্বর	পরিসংখ্যা	শ্রেণিদৈর্ঘ্য	আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

যেহেতু আমরা প্রত্যেক ক্ষেত্রে আয়তক্ষেত্রগুলোর দৈর্ঘ্যকে 10 নম্বরের শ্রেণির সাপেক্ষে গণনা করেছি তাই এই দৈর্ঘ্যকে আমরা বলতে পারি "প্রতি 10 নম্বর শ্রেণির সাপেক্ষে ছাত্রছাত্রীর অনুপাত"।

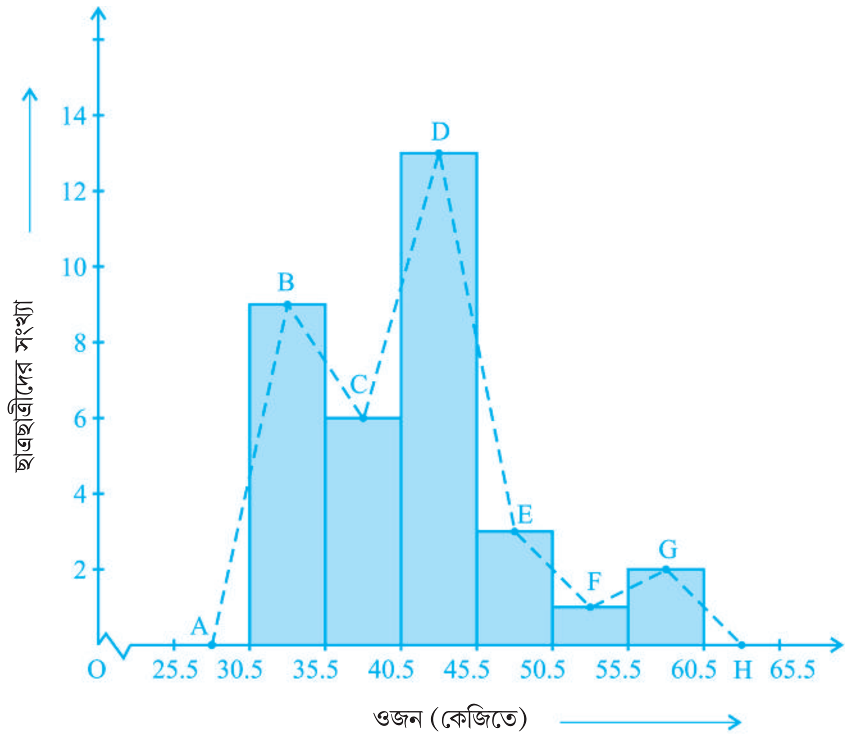
সুতরাং, ভিন্ন ভিন্ন শ্রেণি দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট শুদ্ধ আয়তলেখটি চিত্র 14.5 -এ দেওয়া হল।



চিত্র **14.5**

(C) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency polygon)

পরিমাণগত রশিতথ্য এবং তার পরিসংখ্যার উপস্থাপনের আরেককটি লৈখিক উপায় আছে। এটি হল বহুভুজ (*polygon*)। বোঝার সুবিধার জন্য 14.3 নং চিত্রে প্রদর্শিত আয়তলেখটি ধরে নাও। এটির সন্নিহিত আয়তক্ষেত্রগুলোর উপরের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলোকে রেখাংশের সাহায্যে যুক্ত করো। এই মধ্যবিন্দুগুলোর নাম দাও B, C, D, E, F এবং G। এই বিন্দুগুলোকে যুক্ত করে আমরা আকৃতি BCDEFG (চিত্র 14.6 দেখো) পাই। বহুভুজটি সম্পূর্ণ করার জন্য আমরা শূন্য পরিসংখ্যা বিশিষ্ট একটি শ্রেণি-বিভাগ 30.5 - 35.5 এর আগে এবং 55.5 - 60.5 এর পরে আরেকটি এ ধরনের শ্রেণি বিভাগ ধরব, যাদের মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে A এবং H। সুতরাং ABCDEFGH হল একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ যা চিত্র 14.3 তে প্রদর্শিত রাশিতথ্যের অনুরূপ। চিত্র 14.6 তে এই পরিসংখ্যা বহুভুজটি দেখান হল।



চিত্র **14.6**

যদিও সর্বনিম্ন শ্রেণি বিভাগের আগে এবং সর্বোচ্চ শ্রেণিবিভাগের পরে শূন্য পরিসংখ্যা বিশিষ্ট কোনও শ্রেণি বিভাগ নেই, তবুও এই দুটি শ্রেণি বিভাগের যাদের পরিসংখ্যা শূন্য, সংযুক্তির ফলে উৎপন্ন বহুভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তলেখের ক্ষেত্রফলের সমান হয়। কেন এটি হবে? (ইঙ্গিত : ত্রিভুজের সর্বসমতার ধর্ম ব্যবহার করো।)

এখন প্রশ্ন হল, যখন প্রথম শ্রেণি বিভাগের আগে কোনো শ্রেণি বিভাগ নেই, সে ক্ষেত্রে কী করে আমরা বহুভুজটি সম্পূর্ণ করব? চলো, এমন একটি পরিস্থিতি বিচার করি।

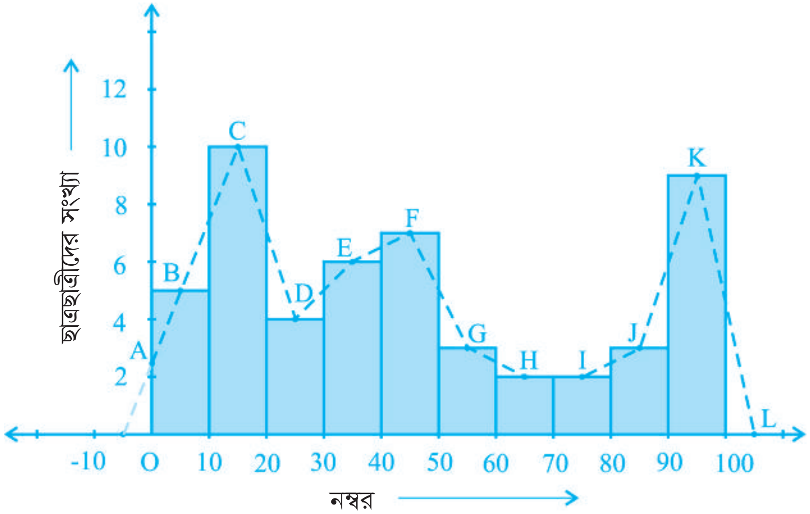
উদাহরণ 8 : ধরো, একটি শ্রেণির 51 জন ছাত্রছাত্রীর 100 নম্বরের একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর নিম্নের সারণি 14.9 তে দেওয়া হয়েছে।

সারণি 14.9

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
মোট	51

পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা অনুসারে একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো।

সমাধান : চলো, এই রাশি তথ্য দিয়ে আমরা প্রথমে একটি আয়লেখ অঙ্কন করি এবং আয়তক্ষেত্রগুলোর উপরের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলোকে যথাক্রমে B, C, D, E, F, G, H, I, J এবং K দিয়ে চিহ্নিত করি। এখানে, প্রথম শ্রেণিবিভাগটি 0-10। সুতরাং, 0-10 শ্রেণির আগের শ্রেণিটি পাওয়ার জন্য আমরা অনুভূমিক অক্ষটিকে তার ঋণাত্মক দিকে প্রসারিত করে (–10) - 0 কাল্পনিক শ্রেণিবিভাগটির মধ্যবিন্দুটিকে চিহ্নিত করি। প্রথম মধ্যবিন্দুটি অর্থাৎ B কে, ঋণাত্মক দিকে প্রসারিত অনুভূমিক অক্ষের শূন্য পরিসংখ্যা যুক্ত এই মধ্যবিন্দুটির সঙ্গে যুক্ত করি। এই রেখাখণ্ডটি উল্লম্ব অক্ষটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করেছে তাকে A বলে চিহ্নিত করি। মনে করো, শেষ শ্রেণিবিভাগটির পরের শ্রেণিবিভাগের মধ্যবিন্দু L। তাহলে OABCDEFGHIJKL বহুভুজটিই আমাদের নির্ণেয় পরিসংখ্যা বহুভুজ, যা 14.7 নং চিত্রে দেখানো হয়েছে।



চিত্র 14.7

আয়তলেখ অঙ্কন না করেও স্বতন্ত্র ভাবে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা যায়। এর জন্য রাশিতথ্যে ব্যবহৃত শ্রেণি-বিভাগগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো জানা প্রয়োজন। শ্রেণিবিভাগের এই মধ্যবিন্দুগুলোকে শ্রেণি-মধ্যমান (class-marks) বলে।

কোনও একটি শ্রেণি-বিভাগের শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয়ের জন্য, আমরা শ্রেণিটির উর্ধ্ব-সীমা ও নিম্ন-সীমার সমষ্টি বের করে একে 2 দ্বারা ভাগ করি। তাহলে,

$$\textbf{শ্রেণি-মধ্যমান} = \frac{\textbf{উর্ধ্বসীমা} + \textbf{নিম্নসীমা}}{\mathbf{2}}$$

চলো, একটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ 9 : কোনও একটি শহরে, জীবনযাত্রার খরচের সূচক (cost of living index) বিষয়ক একটি অধ্যয়নে পাওয়া সাপ্তাহিক পর্যবেক্ষণ নিচের তালিকায় দেওয়া হল :

সারণি 14.10

জীবন-যাত্রার খরচের সূচক	সপ্তাহের সংখা
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
মোট	52

উপরের রাশিতথ্য দিয়ে একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো (আয়তলেখ অঙ্কন না করে)।

সমাধান : যেহেতু, আয়তলেখ অঙ্কন না করে আমরা একটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করতে চাই, তাই আমাদের প্রথমে প্রদত্ত শ্রেণিবিভাগগুলোর অর্থাৎ, 140 - 150, 150 - 160,.... ইত্যাদির শ্রেণি-মধ্যমান বের করতে হবে।

140 - 150 শ্রেণিবিভাগটিতে, উর্ধ্বসীমা = 150, এবং নিম্নসীমা = 140

সুতরাং, শ্রেণি মধ্যমান $= \dfrac{150 + 140}{2} = \dfrac{290}{2} = 145.$

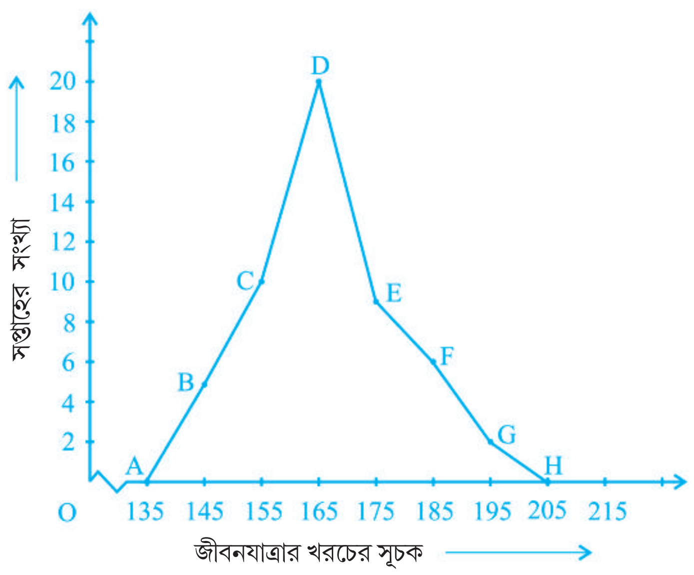
এইভাবে অগ্রসর হয়ে, আমরা বাকি শ্রেণিবিভাগগুলোরও শ্রেণি মধ্যমান বের করতে পারি।

এভাবে প্রাপ্ত রাশিতথ্য নিচের তালিকাতে দেখানো হল :

সারণি 14.11

শ্রেণি	শ্রেণি মধ্যমান	পরিসংখ্যা
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
মোট		52

আমরা এখন অনুভূমিক অক্ষ বরাবর শ্রেণি মধ্যমান এবং উল্লম্ব অক্ষ বরাবর পরিসংখ্যা নিয়ে B(145,5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) এবং G(195, 2) বিন্দুগুলো সংস্থাপিত করি এবং সরল রেখাংশ দ্বারা এদের যুক্ত করে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করতে পারি। আমরা 130 - 140 শ্রেণিবিভাগ (140 - 150 শ্রেণির ঠিক আগের শ্রেণিটি) এর শ্রেণি মধ্যমান ও শূন্য পরিসংখ্যাযুক্ত বিন্দুটি অর্থাৎ A(135, 0) এবং G(195, 2) বিন্দুর ঠিক পরের বিন্দুটি অর্থাৎ H (205, 0) সংস্থাপিত করতে ভুলব না। তাহলে, ABCDEFGH হল উদ্দিষ্ট পরিসংখ্যা বহুভুজ (চিত্র 14.8) দেখো)



চিত্র 14.8

রাশিতথ্য যখন অবিচ্ছিন্ন এবং খুব বড়ো আকারের হয়, তখন পরিসংখ্যা বহুভুজ ব্যবহৃত হয়। একই প্রকৃতির দুটি ভিন্ন তথ্যের তুলনা করতে এটি খুবই উপযোগী। উদাহরণস্বরূপ, একই শ্রেণির দুটি ভিন্ন শাখার ছাত্রছাত্রীদের পারদর্শিতার অধ্যয়ন করতে পরিসংখ্যা বহুভুজ বিশেষ সহায়ক।

অনুশীলনী 14.3

1. একটি সংস্থা দ্বারা পরিচালিত, 15 - 44 বৎসর বয়সসীমার স্ত্রীলোকদের অসুস্থতা ও মৃত্যুর কারণ বিষয়ক বিশ্বব্যাপী একটি জরিপে নিচের তথ্যগুলো (শতকরা হিসেবে) পাওয়া গেল :

ক্রমিক নং	কারণ	মহিলার মৃত্যর হার (%)
1.	প্রজনন স্বাস্থ্যজনিত অবস্থা	31.8
2.	স্নায়ু-মানসিক অবস্থা	25.4
3.	আঘাত	12.4
4.	হৃদসংবহন জনিত অবস্থা	4.3
5.	শ্বাসতন্ত্র বিষয়ক অবস্থা	4.1
6.	অন্যান্য কারণ	22.0

(i) উপরের তথ্যকে লৈখিকভাবে উপস্থাপন করো।

(ii) কোন অবস্থাটি বিশ্বব্যাপী স্ত্রীলোকদের অসুস্থতা ও মৃত্যুর প্রধান কারণ ?

(iii) শিক্ষকের সাহায্যে উপরের (ii) নং প্রশ্নে প্রধান কারণ হিসেবে পাওয়া অবস্থার জন্য দায়ী যে কোনও দুটি কারণ নির্ণয় করো।

2. ভারতীয় সমাজের বিভিন্ন শ্রেণিতে প্রতি হাজার ছেলের সাপেক্ষে মেয়ের (নিকটতম 10 এর গুণিতকে) বিষয়ক তথ্য নিচে দেওয়া হল :

শ্রেণি	প্রতি হাজার ছেলের সাপেক্ষে মেয়ের সংখ্যা
তপশিলি জাতি (SC)	940
তপশিলি উপজাতি (ST)	970
অ-তপশিলি জাতি / উপজাতি	920
অনগ্রসর জেলা	950
অনগ্রসর নয় এমন জেলা	920
গ্রাম্য অঞ্চল	930
শহর বা পৌর অঞ্চল	910

(i) উপরের রাশিতথ্যকে একটি দণ্ডলেখ দ্বারা উপস্থাপন করো।

(ii) প্রদত্ত দণ্ডলেখটি থেকে কী কী সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যায় তা শ্রেণিকক্ষে আলোচনা করো।

3. একটি রাজ্যের বিধানসভা নির্বাচনের ভোটগ্রহণ ফলাফলে বিভিন্ন রাজনৈতিক দল দ্বারা জয়লাভ করা আসন সংখ্যা নিম্নরূপ :

রাজনৈতিক দল	A	B	C	D	E	F
জয়লাভ করা আসন সংখ্যা	75	55	37	29	10	37

(i) ভোটের ফলাফল প্রদর্শনের জন্য একটি দণ্ডলেখ অঙ্কন করো।

(ii) কোন রাজনৈতিক দল সর্বাধিক আসনে জয়লাভ করেছে?

4. একটি গাছের 40 টি পাতার দৈর্ঘ্য (নিকটতম 1মি.মি.) মাপা হল এবং প্রাপ্ত তথ্য নিচের তালিকায় প্রকাশ করা হল :

দৈর্ঘ্য (মিমি)	পাতার সংখ্যা
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) প্রদত্ত রাশিতথ্যকে উপস্থাপন করার জন্য একটি আয়তলেখ (histogram) অঙ্কন করো [ইঙ্গিত: প্রথমে শ্রেণি বিভাগগুলোকে অবিচ্ছন্ন (continuous) করে নাও]।

(ii) এই রাশিতথ্য উপস্থাপনের জন্য সুবিধাজনক অন্য কোনও লৈখিক উপায় আছে কি?

(iii) "বেশিরভাগ পাতা 153 মিমি লম্বা" এই সিদ্ধান্ত কয়টি শুদ্ধ হবে কি? কেন?

5. নিচের তালিকাটিতে 400 নিয়ন বাতির (neon lamps) জীবনকাল দেওয়া আছে :

জীবনকাল (ঘণ্টায়)	বাতির সংখ্যা
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) প্রদত্ত রাশিতথ্যকে একটি আয়তলেখের সাহায্যে উপস্থাপন করো।

(ii) কত সংখ্যক বাতির জীবনকাল 700 ঘণ্টার অধিক?

6. নিচের তালিকায়, দুটি শাখার ছাত্রছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বর অনুযায়ী তাদের বিভাজন হল :

ক-শাখা		খ-শাখা	
নম্বর	পরিসংখ্যা	নম্বর	পরিসংখ্যা
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

একই অক্ষ ও একক নিয়ে, একই লেখ কাগজে দুটি পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করে, দুটি শাখার ছাত্রছাত্রীদের দ্বারা প্রাপ্ত নম্বর উপস্থাপন করো। বহুভুজ দুটির সাহায্যে, শাখা দুটির ছাত্রছাত্রীদের পারদর্শিতার তুলনা করো।

7. একটি ক্রিকেট খেলায় প্রথম 60 বল থেকে **A** এবং **B** দল দুটির অর্জিত রানের হিসেব নীচের তালিকায় দেখানো হল :

বলের সংখ্যা	A দল	B দল
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

একই অক্ষ ও একক ব্যবহার করে একই লেখ কাগজে পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করে উভয় দলের তথ্য প্রকাশ করো।

[**ইঙ্গিত :** প্রথমে শ্রেণিবিভাগ গুলোকে অবিচ্ছিন্ন (continuous) করে নাও]

8. একটি উদ্যানে খেলাধুলা করা বিভিন্ন বয়ঃসীমা ছেলেমেয়েদের উপর যথেচ্ছভাবে করা একটি জরিপে নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য পাওয়া গেল :

বয়স (বছর হিসেবে)	শিশুর সংখ্যা
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

উপরের রাশিতথ্যকে প্রকাশ করার জন্য একটি আয়তলেখ অঙ্কন করো।

9. একটি স্থানীয় দূরভাষ নির্দেশক (telephone directory) থেকে যথেচ্ছভাবে 100 টি পদবি নেওয়া হল এবং পদবির ইংরেজি বর্ণমালার অক্ষরগুলোর সংখ্যার একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা নিচে দেওয়া হল:

বয়স (বছর হিসেবে)	শিশুর সংখ্যা
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) প্রদত্ত রাশিতথ্যকে ব্যবহার করে একটি আয়তলেখ অঙ্কন করো।

(ii) যে শ্রেণিবিভাগে সর্বাধিক সংখ্যক পদবি আছে সেটি লেখো।

14.5 কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measures of Central Tendency)

এই অধ্যায়ের শুরুতে, আমরা কোনো রাশিতথ্যকে পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা, দণ্ডলেখ, আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজ দ্বারা উপস্থাপন করেছি। এখন, প্রশ্ন হল যে, ধারণা গড়ার জন্য আমাদের কোনো রাশিতথ্যের সম্পূর্ণটিকেই অধ্যয়ন করতে হবে, নাকি রাশিতথ্যের বিশেষ কয়েকটি প্রতিনিধিত্বমূলক মান (representatives) নিয়ে আমরা এটির কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা করতে পারি। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ বা গড়মান নির্ণয়ের সাহায্যে এটি সম্ভব।

মেরি এবং হ্যারি নামে দুজন শিক্ষার্থী তাদের পরীক্ষার উত্তরপত্র হাতে পাওয়ার মুহূর্তটি বিবেচনা করো। পরীক্ষাটিতে 10 নম্বরের পাঁচটি প্রশ্ন ছিল। তাদের প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ :

প্রশ্ন নং	1	2	3	4	5
মেরির প্রাপ্ত নম্বর	10	8	9	8	7
হ্যারির প্রাপ্ত নম্বর	4	7	10	10	10

উত্তরপত্র হাতে পাওয়ার পর, দুজনেই নিম্নোক্ত উপায়ে তাদের প্রাপ্ত গড় নম্বর বের করল :

মেরির গড় নম্বর = $\dfrac{42}{5} = 8.4$

হ্যারির গড় নম্বর = $\dfrac{41}{5} = 8.2$

যেহেতু মেরির গড় নম্বর হ্যারির গড় নম্বরের তুলনায় বেশি, তাই হ্যারির তুলনায় মেরির পারদর্শিতা ভালো বলে মেরি দাবি করলো, কিন্তু হ্যারি তা অস্বীকার করলো। সে (হ্যারি) তাদের প্রাপ্ত নম্বরগুলোকে উর্ধ্বক্রমে সাজালো এবং ঠিক মাঝখানের নম্বর দুটো নিম্নোক্ত ধরনের পেলো :

মেরির প্রাপ্ত নম্বর	7	8	8	9	10
হ্যারির প্রাপ্ত নম্বর	4	7	10	10	10

হ্যারি বলল যে যেহেতু তার নম্বরগুলোর ঠিক মাঝখানেরটি 10 এবং এটি মেরির মাঝখানের নম্বর 8-এর তুলনায় বেশি। তাই তার পারদর্শিতাকেই ভালো বলতে হবে।

কিন্তু মেরি এতে সম্মত হল না। মেরির বিশ্বাস অর্জনের জন্য, হ্যারি আরেকটি কৌশল করল। সে বলল যে, সে (হ্যারি) বেশি বার (3 বার) 10 নম্বর পেয়েছে এবং মেরি 10 নম্বর পেয়েছে মাত্র একবার। তাই তার পারদর্শিতাই তুলনামূলকভাবে ভালো।

হ্যারি এবং মেরির এই বিবাদ মেটানোর জন্য চলো আমরা তাদের দ্বারা গ্রহণ করা তিনটি পরিমাপকে দেখি।

প্রথম ঘটনাটিতে মেরি যে গড় নম্বর নির্ণয় করেছিল তা হল গড়মান বা মধ্যক (*mean*)। হ্যারি তার বক্তব্যের সমর্থনে যে মধ্যবর্তী (ঠিক মাঝখানের) নম্বরের কথা বলল, তা হল মধ্যমা (*median*)। হ্যারি তার দ্বিতীয় কৌশলে, সর্বাধিকবার যে নম্বরটি পাওয়ার কথা বলেছে তা হল সংখ্যাগুরু মান (*mode*)।

এখন, চলো আমরা প্রথমে মধ্যক বা গড়মান সম্পর্কে বিস্তৃত আলোচনা করি।

কিছু সংখ্যক পর্যবেক্ষণের মানগুলোর সমষ্টিকে পর্যবেক্ষণের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাই হল **মধ্যক বা গড়মান** (mean or average)। মধ্যককে $\bar{x}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে 'x bar' হিসেবে পড়া হয়।

একটি উদাহরণ নেওয়া যাক :

উদাহরণ 10 : 5 জন ব্যক্তিকে, সপ্তাহে তাদের নিজস্ব বাতাবরণের মধ্যে সমাজসেবায় অতিবাহিত করা সময় সম্পর্কে প্রশ্ন করা হয়েছিল। তাদের উত্তর ছিল যথাক্রমে 10, 7, 13, 20 এবং 15 ঘণ্টা। এক সপ্তাহে তাদের দ্বারা সমাজসেবায় অতিবাহিত করা সময়ের মধ্যক (বা গড়মান) নির্ণয় করো।

সমাধান : পূর্ববর্তী শ্রেণিতে ইতিমধ্যে আমরা পড়েছি যে, কিছু সংখ্যক পর্যবেক্ষণের গড়মান হল

$$= \frac{\text{পর্যবেক্ষণের মানের সমষ্টি}}{\text{পর্যবেক্ষণের মোট সংখ্যা}}$$

মধ্যক নির্ণয় করার কাজটিকে আরও সহজ করার জন্য আমরা i-তম পর্যবেক্ষণ বোঝাতে একটি চলক x_i ব্যবহার করতে পারি। এক্ষেত্রে, i-এর মান 1 থেকে 5 পর্যন্ত হতে পারে। সুতরাং, আমাদের প্রথম পর্যবেক্ষণ হল x_1 , দ্বিতীয়টি x_2 এবং একইভাবে পঞ্চমটি x_5।

এছাড়াও, $x_1 = 10$ এর অর্থ হল প্রথম পর্যবেক্ষণটির মান 10।

একইভাবে $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$ এবং $x_5 = 15$।

সুতরাং, মধ্যক, $$\bar{x} = \frac{\text{পর্যবেক্ষণের মানের সমষ্টি}}{\text{পর্যবেক্ষণের মোট সংখ্যা}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

সুতরাং, এই 5 জন ব্যক্তি প্রতি সপ্তাহে সমাজ সেবামূলক কাজে গড়ে 13 ঘণ্টা সময় অতিবাহিত করেন।

এখন, 30 জন লোকের সমাজসেবায় কাটানো সময়ের মধ্যক নির্ণয় করার ক্ষেত্রে $x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_{30}$ লেখা কাজটি অবশ্যই ক্লান্তিকর। যোগফল বোঝানোর জন্য আমরা গ্রিক চিহ্ন Σ (সিগমা অক্ষটির জন্য) ব্যবহার করি। $x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_{30}$, লেখার পরিবর্তে আমরা $\sum_{i=1}^{30} x_i$, লিখি, যাকে পড়া হয় x_i-এর যোগফল, i এর মান 1 থেকে 30 পর্যন্ত এভাবে।

সুতরাং, $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

একইভাবে, n সংখ্যক পর্যবেক্ষণের জন্য $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

উদাহরণ 10 : 2 নং উদাহরণে প্রদত্ত, একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির 30 জন ছাত্রছাত্রীদের প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যক (গড়মান) নির্ণয় করো।

সমাধান : এখন, $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{30}}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88$$
$$80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50$$
$$56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

সুতরাং, $$\bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

এই পদ্ধতিটি কি সময় অপচয়কারী ? আমরা এটিকে আরও সরল করতে পারি কি ? লক্ষ করো যে, আমরা এই তথ্যের জন্য একটি পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা প্রস্তুত করেছি (সারণি 14.1 দেখো)।

তালিকাটিতে দেখা যায় যে, 1 জন ছাত্র 10 নম্বর, 1 জন ছাত্র 20 নম্বর, 3 জন ছাত্র 36 নম্বর, 4 জন ছাত্র 40 নম্বর, 3 জন ছাত্র 50 নম্বর, 2 জন ছাত্র 56 নম্বর, 4 জন ছাত্র 60 নম্বর, 4 জন ছাত্র 70 নম্বর, 1 জন ছাত্র 72 নম্বর, 1 জন ছাত্র 80 নম্বর, 2 জন ছাত্র 88 নম্বর, 3 জন ছাত্র 92 নম্বর এবং 1 জন ছাত্র 95 নম্বর পেয়েছে।

সুতরাং, মোট প্রাপ্ত নম্বর $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56) + (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92) + (1 \times 95)$

$= f_1x_1 + \ldots + f_{13}x_{13}$, যেখানে f_i হল সারণির 14.1 এর i-তম পর্যবেক্ষণের পরিসংখ্যা।

সংক্ষেপে, এটিকে আমরা $\sum_{i=1}^{13} f_i x_i$ — এভাবে লিখি।

$$\text{সুতরাং, প্রাপ্ত মোট নম্বর} = \sum_{i=1}^{13} f_i x_i$$

$$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95$$

$$= 1779$$

এখন, মোট পর্যবেক্ষণের সংখ্যা

$$= \sum_{i=1}^{13} f_i$$

$$= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$$

$$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$$

$$= 30$$

সুতরাং, মধ্যক $\bar{x} = \dfrac{\text{পর্যবেক্ষণের মানের সমষ্টি}}{\text{পর্যবেক্ষণের মোট সংখ্যা}} = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{13} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i}\right)$

$$= \frac{1779}{30} = 59.3$$

এই প্রক্রিয়া নিম্নলিখিত সারণিতে দেখানো যেতে পারে, যা হল সারণি 14.1এর পরিবর্তিত রূপ।

সারণি 14.12

নম্বর (x_i)	ছাত্রসংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_i x_i = 1779$

সুতরাং, সরল (ungrouped) পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে মধ্যক নির্ণয়ের জন্য তোমরা

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

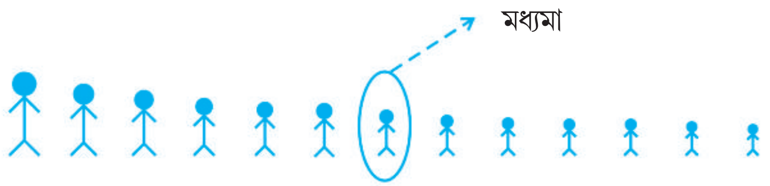
এই সূত্রটি প্রয়োগ করতে পারো।

চলো, আমরা আবার হ্যারি ও মেরির যুক্তি-তর্ক বিষয়ক পরিস্থিতিতে ফিরে যাই এবং দ্বিতীয় ঘটনাটিকে বিবেচনা করি, যেখানে হ্যারি ঠিক মাঝখানের নম্বরটি বের করে তার পারদর্শিতা বেশি ভালো বলে দাবি করেছিল। ইতিমধ্যে বলা হয়েছে যে, কেন্দ্রীয় প্রবণতার এই পরিমাপটিকে *মধ্যমা* বলা হয়।

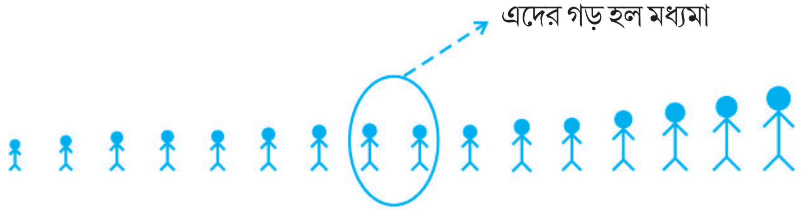
মধ্যমা হল প্রদত্ত পর্যবেক্ষণগুলোর সেই মান, যা সম্পূর্ণ বিভাজনটিকে ঠিক সমান দুটি ভাগে ভাগ করে। সুতরাং, যখন তথ্যগুলোকে উর্ধ্বক্রমে (বা অধঃক্রমে) সাজানো হয়, তখন সরল তথ্যের ক্ষেত্রে মধ্যমা নিম্নলিখিত রূপে নির্ণীত হয় :

(i) যখন পর্যবেক্ষণের সংখ্যা (n) অযুগ্ম হয়, তখন পর্যবেক্ষণের $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম মানটি মধ্যমা হয়। উদাহরণস্বরূপ, যদি $n = 13$ হয় তাহলে $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণের মানটি অর্থাৎ 7-তম পর্যবেক্ষণের মানটি মধ্যমা হবে (চিত্র 14.9 (i) দেখো)

(ii) যখন পর্যবেক্ষণের সংখ্যা (n) যুগ্ম হয়, তখন $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণের গড় মানটি মধ্যমা হবে। যেমন— $n = 16$ হলে $\left(\frac{16}{2}\right)$ তম এবং $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণের মান গুলোর অর্থাৎ 8 ম এবং 9 ম পর্যবেক্ষণের মানুগুলোর গড় মানটি মধ্যমা হবে (চিত্র 14.9 দেখো)।



(i)



(ii)

চিত্র 14.9

কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টিকে ব্যাখ্যা করা যাক।

উদাহরণ 12 : একটি শ্রেণির 9 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সেমি-এ) নিম্নরূপ :

155 160 145 149 150 147 152 144 148

এই রাশি তথ্যের মধ্যমা নির্ণয় করো :

সমাধান : প্রথমেই নিম্নরূপে প্রদত্ত রাশি তথ্যকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই—

144 145 147 148 149 150 152 155 160

যেহেতু শিক্ষার্থীর সংখ্যা 9, একটি অযুগ্ম সংখ্যা, তাই $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ তম = 5 তম শিক্ষার্থীর উচ্চতা, যেটি 149 সেমি হবে মধ্যমা।

সুতরাং, মধ্যমা অর্থাৎ মধ্যবর্তী উচ্চতা হল 149 সেমি।

উদাহরণ 13 : একটি কাবাডি দল পরপর কয়েকটি খেলায় নিম্নরূপ পয়েন্ট অর্জন করল :

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

দলটির অর্জিত পয়েন্টের মধ্যমা নির্ণয় করো।

সমাধান : দলটির অর্জিত পয়েন্টগুলোকে উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই—

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48।

এখানে 16টি পদ আছে। সুতরাং, এখানে দুটি মধ্যপদ আছে, অর্থাৎ $\frac{16}{2}$ তম এবং $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ তম অর্থাৎ, 8 তম ও 9 তম পদ।

সুতরাং, মধ্যমা হবে 8 তম ও 9 তম পদ দুটির গড় মান।

অর্থাৎ মধ্যমা $= \frac{10+14}{2} = 12$

সুতরাং, কাবাডি দলটির অর্জিত পয়েন্টের মধ্যবর্তী পয়েন্ট হল 12 ।

চলো, আবার আমরা মেরি ও হ্যারি -এর অমীমাংসিত সমস্যাটিতে ফিরে যাই।

হ্যারি গড় নির্ণয়ের তৃতীয় পদ্ধতি হিসাবে সংখ্যাগুরু মানকে (*mode*) ব্যবহার করেছিল।

সংখ্যাগুরু মান (*mode*) হল সেই পর্যবেক্ষণ যার পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ, অর্থাৎ যে পর্যবেক্ষণের পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ তাকেই সংখ্যাগুরু মান (*mode*) বলা হয়।

জুতো এবং রেডিমেইড পোষাক তৈরির কারখানায় কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয়ে সংখ্যাগুরু মান বা মোডের বিশেষ ব্যবহার রয়েছে। সংখ্যাগুরুমান নির্ণয়ের এই জ্ঞানকে কাজে লাগিয়ে এই কারখানাগুলো সিদ্ধান্ত নেয় কোন আকারের সামগ্রী বেশি পরিমাণে উৎপাদন করতে হবে।

একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি বিশ্লেষণ করা যাক—

উদাহরণ 14 : নিম্নলিখিত 20 জন ছাত্রছাত্রীদের নম্বরের (10 এর মধ্যে) সংখ্যাগুরু মান (mode) নির্ণয় করো:

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

সমাধান : রাশি তথ্যগুলোকে আমরা নিম্নরূপে সাজিয়ে পাই—

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

এখানে 9 এর পরিসংখ্যা সর্বোচ্চ অর্থাৎ 4 বার। সুতরাং, সংখ্যাগুরু মান 9।

উদাহরণ 15 : মনে করো, একটি কারখানার ছোট একটি বিভাগে একজন আধিকারিক ও 4 জন শ্রমিক , সহ 5 জন কর্মচারী রয়েছে। প্রত্যেক শ্রমিক মাসে 5000 টাকা এবং আধিকারিক মাসে 15000 টাকা বেতন পায়। এই বিভাগের সব কর্মচারীদের বেতনের গড় মান বা মধ্যক, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরু মান বা মোড নির্ণয় করো।

সমাধান : মধ্যক $= \dfrac{5000 + 5000 + 5000 + 5000 + 15000}{5} = \dfrac{35000}{5} = 7000$

সুতরাং, প্রতি মাসে গড় বেতন 7000 টাকা।

মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য আমরা বেতনগুলোকে উর্ধ্বক্রমে সাজিয়ে পাই—

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

যেহেতু, কারখানায় মোট শ্রমিক সংখ্যা 5, তাই মধ্যমা হবে $\left(\dfrac{5+1}{2}\right)$ তম $= \dfrac{6}{2}$ তম = 3-য় পর্যবেক্ষণটি। অতএব মধ্যমা হবে 5000 টাকা প্রতি মাস।

বেতনের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয়ের জন্য অর্থাৎ বেতনের মোডাল (modal salary) জন্য আমরা দেখছি 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 এই তথ্যের মধ্যে 5000 সর্বাধিক বার আছে। সুতরাং, বেতনের সংখ্যাগুরু মান বা মোড 5000 টাকা প্রতি মাস।

এখন উপরের উদাহরণে আলোচিত রাশি তথ্যের কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয়ের তিনটি পদ্ধতির মধ্যে তুলনা করো। তোমরা দেখতে পারো, এখানে গড় বেতন 7000 টাকা, কোনো একজন কর্মচারীর কাছাকাছি বেতনকেও প্রকাশ করে না, অপরদিকে মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরুমান 5000 টাকা যা রাশিতথ্যকে অধিক কার্যকরী ভাবে প্রকাশ করে।

চরম মান (extreme value) রাশিতথ্যের গড় মান বা মধ্যককে প্রভাবিত করে। এটি মধ্যকের দুর্বলতাগুলোর মধ্যে একটি। সুতরাং, যদি রাশিতথ্যের মধ্যে কিছু তথ্য, অন্য রাশিতথ্য থেকে অনেকটাই দূরে থাকে (যেমন, 1,7,8,9,9), তাহলে মধ্যক রাশিতথ্যের সঠিক প্রতিনিধিত্ব করে না। যেহেতু মধ্যমা রাশিতথ্যের সঠিক প্রতিনিধিত্ব করে না। যেহেতু মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরুমান রাশিতথ্যের চরম মানের দ্বারা প্রভাবিত হয় না তাই এরূপ ক্ষেত্রে এই দুটি পদ্ধতি অধিক গ্রহণযোগ্য হবে।

চলো, আমরা হ্যারি এবং মেরির সমস্যায় ফিরে যাই এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতার তিনটি পদ্ধতির তুলনা করি।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক	হ্যারি	মেরি
যৌগিক গড় বা মধ্যক	8.2	8.4
মধ্যমা	10	8
সংখ্যাগুরুমান	10	8

এই পরিমাপ তিনটি তুলনা করে আমরা বলতে পারি যে, এই পরিমাপগুলোর কোনটির সাহায্যেই বলা যায় না কোন ছাত্রটি বেশি ভাল। এ সম্পর্কে সিদ্ধান্তে আসার জন্য আমাদের আরও অনেক তথ্যের প্রয়োজন এবং এগুলোর সম্পর্কে তোমরা উপরের শ্রেণিতে অধ্যয়ন করবে।

অনুশীলনী 14.4

1. একটি দল 10 টি খেলায় নিম্নলিখিত সংখ্যক গোল করেছে :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

এই স্কোরগুলোর গড় মান বা মধ্যক, মধ্যমা এবং সংখ্যাগুরুমান নির্ণয় করো।

2. 100 নম্বরের একটি গণিত পরীক্ষায় 15 জন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

প্রদত্ত রাশিতথ্যের মধ্যক, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

3. প্রদত্ত পর্যবেক্ষণগুলো মানের উর্ধ্বক্রমে সাজানো আছে। যদি রাশিতথ্যের মধ্যমা 63 হয় তাহলে x এর মান নির্ণয় করো।

29, 32, 48, 50, x, $x+2$, 72, 78, 84, 95

4. 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 এর সংখ্যাগুরু মান বা মোড নির্ণয় করো।

5. নিচের তালিকাটি থেকে একটি কারখানার 60 জন কর্মচারীর বেতনের মধ্যক বা গড়মান নির্ণয় করো :

বেতন (টাকায়)	কর্মচারী সংখ্যা
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
মোট	60

6. এমন একটি অবস্থার উদাহরণ দাও যাতে —

(i) গড়মান বা মধ্যক, কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের যথার্থ পরিমাপক হয়।

(ii) গড় মান বা মধ্যক, কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের যথার্থ পরিমাপক নয়, কিন্তু মধ্যমা যথার্থ পরিমাপক।

14.6 সারসংক্ষেপ

এই অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ :

1. কোনও নির্দিষ্ট প্রয়োজনে সংগৃহীত সংখ্যা বা ঘটনাকে রাশিতথ্য (data) বলে।

2. রাশিতথ্যের আহরণ, সংগঠিতকরণ, বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যাকরণ ইত্যাদি বিষয়ক অধ্যয়নের ক্ষেত্রকে রাশিবিজ্ঞান বা পরিসংখ্যাবিদ্যা (Statistics) বলে।

3. দণ্ডলেখ, আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজ দ্বারা রাশিতথ্যকে লৈখিকরূপে প্রকাশ করা যায়।

4. সরল রাশিতথ্যের (ungrouped data) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক তিনটি হল :

(i) গড়মান বা মধ্যক (Mean) : পর্যবেক্ষণের মানের সমষ্টিকে পর্যবেক্ষণের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে মধ্যক (Mean) নির্ণয় করা হয়। মধ্যককে $\overline{x}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ একটি সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের জন্য $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

(ii) মধ্যমা (Median) : পর্যবেক্ষণের রাশিতথ্যের মধ্যস্থানবর্তী মানটি (মান গুলো)-কে মধ্যমা বলে।

যদি n অযুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে মধ্যমা = $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণের মান।

যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে মধ্যমা = $\left(\dfrac{n}{2}\right)$ তম এবং $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণ দুটির গড় (Mean) মান।

(iii) সংখ্যাগুরুমান বা মোড (mode) : সবচেয়ে বেশি পরিসংখ্যা বিশিষ্ট পর্যবেক্ষণটি হল সংখ্যাগুরুমান বা মোড (mode)।

অধ্যায়-15

সম্ভাবনা (PROBABILITY)

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge. ***—Pierre Simon Laplace***

15.1 ভূমিকা

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন উক্তি শুনি। যেমন—

(1) আজ **সম্ভবত** বৃষ্টি হবে।

(2) আমার **সন্দেহ** আছে যে, সে পরীক্ষায় পাশ করবে।

(3) এবার বার্ষিক পরীক্ষায়, **খুব সম্ভবত** কবিতা প্রথম হবে।

(4) ডিজেলের মূল্য বাড়ার যথেষ্ট **সম্ভাবনা** রয়েছে।

(5) আজকের খেলায় ভারতের টস (toss)-এ জেতার 50-50 সম্ভাবনা রয়েছে।

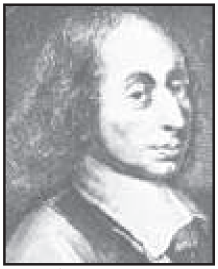
উপরের বিবৃতিগুলোতে ব্যবহৃত 'সম্ভবত', 'সন্দেহ', 'খুব সম্ভব', 'যথেষ্ট সম্ভাবনা' ইত্যাদি শব্দগুলোতে এক একটি অনিশ্চয়তা নিহিত রয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, (1) নং বাক্যে 'সম্ভবত বৃষ্টি হবে' এর দ্বারা বুঝায়, আজ বৃষ্টি হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। একই পরিস্থিতিতে পূর্বে বৃষ্টি হয়েছে কি না সেই অভিজ্ঞতার উপর ভিত্তি করে আমরা ভবিষ্যৎ বাণী করি। (2) নং এবং (5) নং বাক্যে একই ভবিষ্যৎ বাণী করা হয়েছে।

অনেক ক্ষেত্রে সম্ভবত অনিশ্চয়তা ইত্যাদির সাংখ্যিক মান পরিমাপ করা হয় সম্ভাবনার মাধ্যমে।

যদিও জুয়া খেলার মাধ্যমে সম্ভাবনার সূচনা হয়েছিল, বর্তমানে ভৌত বিজ্ঞান, জীববিজ্ঞান, বাণিজ্য, চিকিৎসা বিজ্ঞান, আবহাওয়ার পূর্বাভাস ইত্যাদি বিভিন্ন ক্ষেত্রে ইহা ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়।

15.2 সম্ভাবনা-এক পরীক্ষামূলক অভিগমন বা অধ্যয়ন (Probability – an Experimental Approach)

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা মুদ্রা টস্ বা পাশা নিক্ষেপণ সংক্রান্ত পরীক্ষা করে ও এর ফলাফল পর্যবেক্ষণ করে 'সম্ভাবনার' আভাস পেয়েছ। এখন একটি পরীক্ষার নির্দিষ্ট ফলাফল ঘটার সুযোগ পরিমাপ করা সম্পর্কে তোমরা শিখবে।



ব্লেইজ পাস্কেল
(1623–1662)
চিত্র **15.1**

সম্ভাবনার ধারণার সূত্রপাত অত্যন্ত আশ্চর্যজনক ভাবে ঘটেছিল। 1654 খ্রিস্টাব্দে 'চেভেলিয়ের ডি মেরে' নামক একজন জুয়াড়ি পাশা খেলা সংক্রান্ত কিছু সমস্যা নিয়ে সপ্তদশ শতাব্দীর বিখ্যাত ফরাসি দার্শনিক এবং গণিতজ্ঞ 'ব্লেইজ পাস্কেল' (Blaise Pascal) এর শরণাপন্ন হন। পাস্কেল এই সমস্যাগুলি নিয়ে কৌতূহলী হন এবং আরেকজন ফরাসি গণিতজ্ঞ 'পিয়ের ডি ফার্মেটের সঙ্গে আলোচনা করেন। পাস্কেল এবং ফার্মেটের এই সমস্যাগুলি স্বাধীনভাবে সমাধান করেন। এই গবেষণাই সম্ভাবনা তত্ত্বের সূচনা করে।

পিয়ের ডি ফার্মেট
(1601–1665)
চিত্র **15.2**

এই বিষয়ের উপর প্রথম গ্রন্থটি রচনা করেন ইটালির গণিতজ্ঞ জে. করেদাঁ (J.Cardan) (1501–1576)। 1663 খ্রিস্টাব্দে প্রকাশিত গ্রন্থটির শিরোনাম ছিল 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae)'। যে সকল গণিতজ্ঞের উল্লেখযোগ্য অবদান ছিল তারা হলেন— জে. বার্নুলী (J. Bernoulli) (1654–1705), পি. লাপ্লাস (P. Laplace) (1749–1827), এ.এ. মারকভ (A.A. Markov) (1856–1922) এবং এ. এন. কলমোগের'ভে (A.N. Kolmogorov) (জন্ম 1903)।

কার্যকলাপ 1: (i) একটি মুদ্রা (coin) নিয়ে দশবার টস করো এবং কতবার হেড (head) ও কতবার টেল (tail) উঠল তা লিপিবদ্ধ করো। এই পর্যবেক্ষণকে নিম্নে প্রদত্ত সারণিতে লিপিবদ্ধ করো।

সারণি 15.1

মুদ্রা (coin) টস্ করার সংখ্যা	হেড (head) উঠার সংখ্যা	টেল (tail) উঠার সংখ্যা
10	—	—

নিম্নের ভগ্নাংশগুলোর মান লেখ :

$$\frac{\text{হেড (Head) উঠার সংখ্যা}}{\text{মুদ্রাটি টস করা হয় তার মোট সংখ্যা}}$$

এবং

$$\frac{\text{টেল (Tail) উঠার সংখ্যা}}{\text{মুদ্রাটি টস করা হয় তার মোট সংখ্যা}}$$

(ii) মুদ্রাটিকে 20 বার টস্ করো এবং আগের মতো তোমাদের পর্যবেক্ষণ লিপিবদ্ধ করো। আবার, উপরে সংগৃহীত পর্যবেক্ষণগুলোর সাহায্যে ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করো।

(iii) টসের সংখ্যা বাড়িয়ে পরীক্ষাটি বারবার করো এবং হেড ও টেল পাওয়ার সংখ্যা লিপিবদ্ধ করো। তারপর উল্লিখিত ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করো।

তোমার দেখবে যে, টসের সংখ্যা বৃদ্ধির সাথে সাথে ভগ্নাংশগুলোর মান 0.5 এর নিকটবর্তী হয়। আরো বেশি টসের ক্ষেত্রে কি ঘটে, তা জানার জন্য নিম্নের কার্যকলাপটি দলবদ্ধভাবে করা যায় :

কার্যকলাপ 2 : তোমাদের শ্রেণির ছাত্রছাত্রীদের 2 জন বা 3 জনের ছোটো ছোটো দলে বিভক্ত করো। প্রতিটি দলের একজন একটি মুদ্রাকে 15 বার টস্ করবে এবং প্রতি দলের আরেকজন টসের ফলে পাওয়া হেড বা টেলের পর্যবেক্ষণের হিসাব লিপিবদ্ধ করবে (খেয়াল রাখতে হবে, প্রতিটি দল যেন একই ধরনের মুদ্রা ব্যবহার করে অর্থাৎ প্রতিটি দল একটি মুদ্রাকেই ব্যবহার করেছে বলে বিবেচিত হবে)।

এখন, ব্ল্যাকবোর্ডে 15.2 নং সারণির মতো একটি সারণি বানাও। প্রথমে 1 নম্বর দল পর্যবেক্ষণগুলো লিপিবদ্ধ করে লব্ধ ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করতে পারে। এরপর 2 নং দল পর্যবেক্ষণগুলো লিখবে, কিন্তু 1 নং ও 2 নং দলের সম্মিলিত রাশিতথ্যের ভিত্তিতে ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করবে। এভাবে অন্য দলগুলোও ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করবে। (আমরা এই ভগ্নাংশগুলোকে ক্রমযৌগিক ভগ্নাংশ বলতে পারি)। প্রথম তিনটি সারির পর্যবেক্ষণগুলো এবং ভগ্নাংশগুলোর নির্ণীত মানগুলো হল একদল শিক্ষার্থী সম্বন্ধীয় প্রদত্ত মান। এটি নিম্নলিখিত সারণিতে দেওয়া হল।

সারণি 15.2

দল (1)	হেডের সংখ্যা (2)	টেলের সংখ্যা (3)	$\frac{\text{হেড্ এর ক্রমযৌগিক সংখ্যা}}{\text{টসের মোট সংখ্যা}}$ (4)	$\frac{\text{টেলের ক্রমযৌগিক সংখ্যা}}{\text{টসের মোট সংখ্যা}}$ (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15} = \frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15} = \frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30} = \frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30} = \frac{28}{45}$
4	M	M	M	M

সারণিটিতে তোমরা কি লক্ষ্য করছো? তোমরা দেখতে পাবে মুদ্রার টসের সংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে (4) নং এবং (5) নং স্তম্ভের ভগ্নাংশের মানগুলো ক্রমান্বয়ে 0.5 এর নিকট হতে নিকটবর্তী হয়।

কার্যকলাপ 3 : (i) একটি * পাশাকে (die*) 20 বার নিক্ষেপ করো এবং 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাগুলো কতবার উঠে তা লিপিবদ্ধ করো।

* পাশা হলো একটি সুষম ঘনক যার ছয়টি তলের প্রতিটি 1 থেকে 6 পর্যন্ত সংখ্যা দ্বারা চিহ্নিত থাকে। কখনো সংখ্যার পরিবর্তে ডট (·) ব্যবহার করা হয়।

পর্যবেক্ষণে প্রাপ্ত ফলাফলকে সারণি 15.3 তে লিপিবদ্ধ করো।

সারণি 15.3

পাশাটি নিক্ষেপ করার সংখ্যা	পাশা থেকে প্রাপ্ত সংখ্যাগুলো পাওয়ার সংখ্যা					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
20						

নিম্নের ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করো :

$$\frac{\text{পাশাটিতে 1 পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{পাশাটির মোট নিক্ষেপের সংখ্যা}}$$

$$\frac{\text{পাশাটিতে 2 পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{পাশাটির মোট নিক্ষেপের সংখ্যা}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{পাশাটিতে 6 পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{পাশাটির মোট নিক্ষেপের সংখ্যা}}$$

(ii) এখন পাশাটিকে 40 বার নিক্ষেপ করে, পর্যবেক্ষণ লিপিবদ্ধ করো এবং (i) নং এর মত ভগ্নাংশগুলোর মান হিসেব করো।

তোমরা দেখবে পাশাটির নিক্ষেপ সংখ্যা বৃদ্ধির ফলে প্রতিটি ভগ্নাংশের মান (i) নং এবং (ii) নং এর প্রাপ্ত হিসেবের মত $\frac{1}{6}$ এর নিকট হতে নিকটবর্তী হয়।

এটি প্রমাণ করার জন্য দলবদ্ধভাবে, কার্যকলাপ 2 এর মত আরেকটি কাজ করতে পারো। তোমাদের শ্রেণির ছাত্রছাত্রীদের ছোটো ছোটো দলে বিভক্ত করো। প্রতিটি দলের একজন ছাত্র একটি পাশাকে 10 বার নিক্ষেপ করবে। প্রতিবারে প্রাপ্ত ফলগুলো পর্যবেক্ষণ করে ক্রমযৌগিক ভগ্নাংশগুলোর মান হিসেব করতে হবে।

পাশায় 1 পাওয়ার ভগ্নাংশগুলোর মান 15.4 সারণিতে লিপিবদ্ধ করতে হবে। এই সারণিটিকে অন্য সংখ্যাগুলোর ভগ্নাংশগুলোর লেখার জন্য বিস্তৃত করা যায় অথবা একইভাবে অন্য সংখ্যার জন্য এরূপ সারণি তৈরি করা যায়।

সারণি 15.4

দল (1)	দলবদ্ধভাবে একটি পাশাকে নিক্ষেপ করার মোট সংখ্যা (2)	$\dfrac{\text{1 পাওয়ার ক্রমযৌগিক সংখ্যা}}{\text{পাশাটিকে নিক্ষেপ করার মোট সংখ্যা}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

সব দল দ্বারা ব্যবহৃত পাশাগুলো যেন একই আকার এবং দেখতে একইরকম হয় তাহলে গণ্য করা হবে সবদল একই প্রকার পাশা নিক্ষেপ করেছে।

এই সারণিগুলোতে তোমরা কি লক্ষ্য করলে? তোমরা দেখবে যে পাশা নিক্ষেপের সংখ্যা বৃদ্ধির সঙ্গো সঙ্গো (3) নং স্তম্ভের ভগ্নাংশগুলোর মান $\frac{1}{6}$ এর নিকট হতে নিকটবর্তী হয়।

কার্যকলাপ 4 : (i) দুটি মুদ্রাকে একসঙ্গো 10 বার নিক্ষেপ কর এবং এর পর্যবেক্ষণগুলো নিম্নে প্রদত্ত সারণিতে লিপিবদ্ধ করো :

সারণি 15.5

মুদ্রা দুটিকে টস করার সংখ্যা	হেড্ না পাওয়ার সংখ্যা	1 বার হেড্ পাওয়ার সংখ্যা	2 বার হেড্ পাওয়ার সংখ্যা
10	—	—	—

নিম্নে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলো লেখো :

$$A = \frac{\text{হেড না পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{মুদ্রা দুটিকে একসঙ্গো টস করার সংখ্যা}}$$

$$B = \frac{\text{1 টি হেড পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{মুদ্রা দুটিকে একসঙ্গো টস করার সংখ্যা}}$$

$$C = \frac{\text{2 টি হেড পাওয়ার সংখ্যা}}{\text{মুদ্রা দুটিকে একসঙ্গো টস করার সংখ্যা}}$$

এই ভগ্নাংশগুলোর মান নির্ণয় করো :

এখন টসের সংখ্যা বৃদ্ধি কর (2 নং কার্যকলাপের মতো)। তোমরা দেখবে টস সংখ্যা বৃদ্ধি পাওয়ার সঙ্গো সঙ্গো A, B, C ভগ্নাংশগুলোর মান যথাক্রমে 0.25, 0.5, 0.25 এর নিকটবর্তী হয়।

1 নং কার্যকলাপে, মুদ্রাটিকে প্রতিবার টস করাকে বলা হয় 'প্রচেষ্টা' (*trial*)। অনুরূপে 3 নং কার্যকলাপে পাশার প্রতিবার নিক্ষেপ হল প্রচেষ্টা এবং 4 নং কার্যকলাপে মুদ্রা দুটিকে প্রতিবার একসঙ্গো নিক্ষেপ করা হল এক একটি প্রচেষ্টা।

তাহলে, প্রচেষ্টা হল একটি কাজ যার ফলাফল এক বা একাধিক। 1 নং কার্যকলাপের সম্ভাব্য ফলাফল ছিল হেড এবং টেল; পক্ষান্তরে 3 নং কার্যকলাপে সম্ভাব্য ফলাফল গুলো হল 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6 ।

1 নং কার্যকলাপে, একটি নির্দিষ্ট নিক্ষেপে হেড পাওয়া হল একটি ঘটনা অর্থাৎ ফলাফল হল 'হেড'। অনুরূপে টেল পাওয়ার ঘটনায় ফলাফল হল 'টেল'। 2 নং কার্যকলাপে, কোনো একটি বিশেষ সংখ্যা পাওয়া , ধর সংখ্যাটি 1, হল একটি ঘটনা যার ফলাফল হল 1।

যদি আমাদের পরীক্ষাটিতে একটি যুগ্ম সংখ্যা পাওয়ার জন্য পাশাটি নিক্ষেপ করা হয় তবে ঘটনাটির তিনটি ফলাফল হবে 2, 4 এবং 6।

সুতরাং, ঘটনা হলো কোন একটি পরীক্ষা দ্বারা প্রাপ্ত ফলাফলের সংগ্রহ। দশম শ্রেণিতে তোমরা 'ঘটনার' (*event*) প্রথাগত সংজ্ঞা জানবে।

তাহলে, 4 নং কার্যকলাপের ঘটনাগুলো কি তোমরা বলতে পারো ?

এই অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে চলো দেখি সম্ভাবনা মানে কী। কোন প্রচেষ্টা থেকে প্রত্যক্ষভাবে পাওয়া ফলাফলের ভিত্তিতে আমরা পরীক্ষালব্ধ বা পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা (*empirical* probability) পাই।

ধরি, n হল মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা। তাহলে E ঘটনাটির পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা P(E) হবে নিম্নরূপ :

$$P(E) = \frac{\text{E ঘটনাটির পক্ষে প্রাপ্ত প্রচেষ্টা সংখ্যা}}{\text{মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা}}$$

এই অধ্যায়ে আমরা প্রায়োগিক সম্ভাবনা নির্ণয় করব, যদিও আমরা সুবিধার জন্য 'সম্ভাবনা' শব্দটি ব্যবহার করব।

চলো, কিছু উদাহরণ নেওয়া যাক্। —কার্যকলাপ 2 এবং সারণি 15.2 থেকে আমরা শুরু করি। এই সারণির 4 নং স্তম্ভের ভগ্নাংশগুলো কিসের ভিত্তিতে হিসেব করেছিলে ? ইহা হেড পাওয়া ঘটনার প্রায়োগিক সম্ভাবনা ছাড়া আর কিছুই নয়। লক্ষ করো যে, এই প্রচেষ্টাগুলো থেকে হেড পাওয়ার ঘটনা সংখ্যা পরিবর্তনের সাথে সাথে সম্ভাবনার মান পরিবর্তিত হচ্ছে। অনুরূপে 15.2 নং সারণির 5 নং স্তম্ভের টেল পাওয়ার প্রায়োগিক সম্ভাবনা পাওয়া যায়। প্রথমে এর মান হয় $\frac{12}{15}$, তারপর ইহা হয় $\frac{2}{3}$, এরপর $\frac{28}{45}$ হয় ইত্যাদি।

অতএব, প্রায়োগিক সম্ভাবনার মান গৃহীত প্রচেষ্টা সংখ্যার উপর নির্ভর করে এবং আসন্ন প্রচেষ্টাগুলো থেকে প্রাপ্ত ইঙ্গিত ফলাফলের সংখ্যার উপরও নির্ভর করে।

কার্যকলাপ 5 : অগ্রসর হওয়ার পূর্বে 3 নং কার্যকলাপে তোমরা যে সারণিগুলো প্রস্তুত করেছ তা লক্ষ্য করো। একটি পাশাকে কয়েকবার নিক্ষেপ করে, '3' পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো। তাছাড়া দেখাও কিভাবে প্রচেষ্টা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে সম্ভাবনার পরিবর্তন ঘটে।

এখন আরও কিছু উদাহরণ লক্ষ করা যাক।

উদাহরণ 1 : একটি মুদ্রাকে 1000 বার টস করে নিম্নলিখিত ফলাফল পাওয়া যায় :

হেড্ : 455, টেল : 545

প্রতিটি ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : যেহেতু মুদ্রাটিকে 1000 বার টস করা হয়েছে তাই মোট প্রচেষ্টার সংখ্যা 1000 । ধরি, হেড্ পাওয়ার ঘটনা E এবং টেল পাওয়ার ঘটনা F। তাহলে E ঘটনা ঘটার সংখ্যা অর্থাৎ হেড্ উঠার সংখ্যা হল 455।

সুতরাং, E এর সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{হেড উঠার সংখ্যা}}{\text{মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা}}$

অর্থাৎ, $P(E) = \dfrac{455}{1000} = 0.455$

অনুরূপে, টেল ঘটনা পাওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{টেল উঠার সংখ্যা}}{\text{মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা}}$

অর্থাৎ, $P(F) = \dfrac{545}{1000} = 0.545$

উপরিউক্ত উদাহরণে লক্ষ কর, $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$ এবং প্রতি প্রচেষ্টার ফল হিসেবে একমাত্র E এবং F পাওয়াই সম্ভব।

উদাহরণ 2 : দুটি মুদ্রাকে একইসঙ্গে 500 বার টস করা হলে আমরা পাই,

দুটি হেড্ : 105 বার
একটি হেড্ : 275 বার
একটিও হেড্ না পাওয়া : 120 বার

এই ঘটনাগুলোর প্রতিটির সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করো, দুটি হেড্ পাওয়ার ঘটনা E_1, একটি হেড্ পাওয়ার ঘটনা E_2 এবং একটিও হেড্ না পাওয়ার ঘটনা হল E_3। তাহলে,

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

লক্ষ্য করো, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$। যেখানে E_1, E_2 এবং E_3 একটি প্রচেষ্টার সমস্ত ফলাফলকে প্রকাশ করে।

উদাহরণ 3 : একটি পাশাকে 1000 বার নিক্ষেপ করে, 1, 2, 3, 4, 5 এবং 6 পাওয়ার ফলাফলকে নিম্নের পরিসংখ্যা সারণিতে লিপিবদ্ধ করা হল—

সারণি 15.6

ফলাফল	1	2	3	4	5	6
পরিসংখ্যা	179	150	157	149	175	190

প্রতিটি ফলাফলের সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করো, প্রতিটি প্রচেষ্টার ফলে প্রাপ্ত ঘটনা E_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$। তাহলে

1 পাওয়ার সম্ভাবনা $= P(E_1) = \dfrac{\text{1 এর পরিসংখ্যা}}{\text{পাশাটির মোট নিক্ষেপ সংখ্যা}}$

$$= \frac{179}{1000} = 0.179$$

অনুরূপে, $P(E_2) = \dfrac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \dfrac{157}{1000} = 0.157$,

$$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149, \quad P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$$

এবং $P(E_6) = \dfrac{190}{1000} = 0.19$.

লক্ষ কর যে, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

আরো লক্ষ কর যে :

(i) প্রতিটি ঘটনার সম্ভাবনা 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী।

(ii) সবগুলো সম্ভাবনার সমষ্টি 1।

(iii) এ প্রচেষ্টার সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হল E_1, E_2, ... E_6।

উদাহরণ 4 : দূরভাষ নির্দেশিকার (telephone directory) একটি পৃষ্ঠায় 200 টি নম্বর রয়েছে। নম্বর গুলোর একক স্থানের (যেমন 25828573 এর একক স্থানীয় অঙ্ক 3) অঙ্কগুলো পাওয়ার পরিসংখ্যা নিম্নের 15.7 নং সারণিতে দেওয়া হল :

সারণি 15.7

অঙ্ক	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
পরিসংখ্যা	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

পৃষ্ঠাটির দিকে না তাকিয়ে এই নম্বরগুলোর যে কোনোটির উপর একটি পেন্সিল রাখা হল। একক স্থানে 6 হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : একক স্থানে 6 হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{6 এর পরিসংখ্যা}}{\text{মোট নির্বাচিত টেলিফোন নাম্বারের সংখ্যা}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

একইভাবে, বিভিন্ন সংখ্যার একক স্থানে থাকা অন্য অঙ্কগুলোর পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পার।

উদাহরণ 5 : একটি আবহাওয়া কেন্দ্রের (*weather station*) পূর্বাভাস অনুসারে পূর্ববর্তী 250 দিনের মধ্যে 175 দিনের পূর্বাভাস সঠিক ছিল।

(i) যে কোনো একটি দিনের পূর্বাভাস সঠিক হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ii) কোনো একটি দিনের পূর্বাভাস ভুল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : পূর্বাভাস করা মোট লিপিবদ্ধ দিনের সংখ্যা = 250

(i) P (পূর্বাভাস সঠিক হওয়ার সম্ভাবনা)

$$= \frac{\text{পূর্বাভাস সঠিক হওয়া দিনের সংখ্যা}}{\text{পূর্বাভাস পাওয়া মোট দিনের সংখ্যা}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) পূর্বাভাস সঠিক না হওয়া দিনের সংখ্যা = 250 – 175 = 75

সুতরাং, P (পূর্বাভাস সঠিক না হওয়ার সম্ভাবনা) $= \frac{75}{250} = 0.3$

লক্ষ্য করো,

P (পূর্বাভাস সঠিক হওয়ার সম্ভাবনা) + P (পূর্বাভাস সঠিক না হওয়ার সম্ভাবনা)

$$= 0.7 + 0.3 = 1$$

উদাহরণ 6 : একটি টায়ার প্রস্তুতকারী কোম্পানি টায়ারটি পরিবর্তন করার পূর্বে টায়ারটির অতিক্রান্ত দূরত্বের হিসাব লিপিবদ্ধ করেছিল। নিম্নের সারণিতে এমন 1000 টি পরিনাম দেওয়া হলো :

সারণি 15.8

দূরত্ব (কিলো মিটার)	4000 এর কম	4000 – 9000	9001 – 14000	14000 এর বেশি
পরিসংখ্যা	20	210	325	445

যদি তুমি এই কোম্পানির একটি টায়ার ক্রয় কর, তবে নিচের সম্ভাবনাগুলো কি হবে ?

(i) যখন টায়ারটি 4000 কিমি দূরত্ব অতিক্রমের পূর্বে পরিবর্তন করা প্রয়োজন।

(ii) যখন টায়ারটি 9000 কিমি-এর বেশি দূরত্ব অতিক্রম করেও স্থায়ী হয়।

(iii) যখন টায়ারটি 4000 কিমি এবং 14000 কিমি এর মধ্যবর্তী যে কোনো দূরত্ব অতিক্রম করার পর টায়ার পরিবর্তন করার প্রয়োজন।

সমাধান : (i) মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা =1000

4000 কিমি অতিক্রম করার পূর্বে পরিবর্তন করা প্রয়োজন, এমন টায়ারের সংখ্যা = 20 টি।

তাহলে, P (4000 কিমি দূরত্ব অতিক্রমের পূর্বে টায়ারের পরিবর্তন হবে) $= \dfrac{20}{1000} = 0.02$

(ii) 9000 কিমি এর বেশি দূরত্ব অতিক্রম করে এমন টায়ারের সংখ্যা $= 325 + 445 = 770$

তাহলে, P (9000 কিমি এর বেশি দূরত্ব অতিক্রম করবে) $= \dfrac{770}{1000} = 0.77$

(iii) 4000 কিমি এবং 14000 কিমি এর মধ্যবর্তী দূরত্বে পরিবর্তন করা টায়ারের সংখ্যা

$$= 210 + 325 = 535$$

সুতরাং, P (4000 কিমি থেকে 14000 কিমি এর মধ্যবর্তী দূরত্বে পরিবর্তন করা টায়ার)

$$= \frac{770}{1000} = 0.535$$

উদাহরণ 7 : একজন ছাত্রের মাসিক ইউনিট পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের শতকরা হার নিম্নে দেওয়া হল :

সারণি 15.9

ইউনিট পরীক্ষা	I	II	III	IV	V
প্রাপ্ত নম্বরের শতকরা হার	69	71	73	68	74

এই তথ্যের উপর ভিত্তি করে ছাত্রটির 70% এর বেশি নম্বর পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

সমাধান : মোট ইউনিট পরীক্ষার সংখ্যা = 5।

ছাত্রটি 70% এর বেশি নম্বর পায় এরূপ ইউনিট পরীক্ষার সংখ্যা = 3।

সুতরাং, P (70% এর বেশি নম্বর) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

উদাহরণ 8 : চালকের বয়স ও দুর্ঘটনা সংক্রান্ত সম্পর্ক নির্ণয় করার জন্য, একটি বিমা কোম্পানি একটি শহরে 2000 জন চালককে যদৃচ্ছভাবে নির্বাচিত করেছিল। প্রাপ্ত তথ্যগুলো নিম্নে সারণিতে দেওয়া হল—

সারণি 15.10

চালকের বয়স (বছর)	এক বছর সংগঠিত দুর্ঘটনার সংখ্যা				
	0	**1**	**2**	**3**	**3-এর বেশি**
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50 এর বেশি	360	45	35	15	9

এ শহরটি থেকে যদৃচ্ছভাবে নির্বাচিত একজন চালকের ক্ষেত্রে নিম্নের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করো:

(i) চালকের বয়স 18-19 বছর এবং 1 বছরে 3 টি দুর্ঘটনা সংগঠিত হয়েছে।

(ii) চালকের বয়স 30-35 বছর এবং 1 বছরে একটি বা তার অধিক দুর্ঘটনা হয়েছে।

(iii) 1 বছরে একটিও দুর্ঘটনা সংগঠিত হয়নি।

সমাধান : মোট চালকের সংখ্যা = 2000

(i) 18-29 বছর বয়স্ক এবং তিনটি দুর্ঘটনা সংগঠিত হয়েছে, এমন চালকের সংখ্যা = 61

সুতরাং, P (চালক 18-29 বছর বয়স্ক এবং 3 টি দুর্ঘটনা সংগঠিত হয়েছে) = $\frac{61}{2000}$

= 0.0305 ≈ 0.031

(ii) 30-35 বছর বয়স্ক এবং 1 বছরে একটি বা তার অধিক দুর্ঘটনা সংগঠিত হওয়া চালকের সংখ্যা

= 125 + 60 + 22 + 18 = 225

তাহলে, P (চালক 30-35 বছর বয়স্ক এবং বছরে একটি বা তার অধিক দুর্ঘটনা সংগঠিত

হয়েছে) = $\frac{225}{2000}$ = 0.1125 ≈ 0.113

(iii) একবছরে কোনো দুর্ঘটনা করেনি এরূপ চালকের সংখ্যা = 440 + 505 + 360

= 1305

সুতরাং, P (দুর্ঘটনা করেনি এরূপ চালক) $= \dfrac{1305}{2000} = 0.653$

উদাহরণ 9 : একটি শ্রেণির 38 জন বিদ্যার্থীর ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন সারণিটি (সারণি 14.3, উদাহরণ 4, অধ্যায় 14) বিবেচনা করো :

(i) একজন বিদ্যার্থীর ওজন 46-50 কেজি এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) এই প্রসঙ্গে সম্ভাবনা 0 (শূন্য) এবং সম্ভাবনা 1 হতে পারে এমন দুটি ঘটনার উল্লেখ করো।

সমাধান : (i) মোট বিদ্যার্থীর সংখ্যা $= 38$, 46-50 কেজি এর মধ্যে আছে এরূপ বিদ্যার্থীর সংখ্যা $= 3$

সুতরাং, P (একজন বিদ্যার্থীর ওজন 46-50 কেজি হওয়া) $= \dfrac{3}{38} = 0.079$

(ii) উদাহরণস্বরূপ 30 কেজি ওজনের বিদ্যার্থীদের কথা ভাবলে, সারণিতে এমন বিদ্যার্থী নেই সুতরাং, এমন ঘটনা পাওয়ার সম্ভাবনা শূন্য (0)। অনুরূপে 30 কেজি এর বেশি ওজনের বিদ্যার্থী হওয়ার সম্ভাবনা $= \dfrac{38}{38} = 1$

উদাহরণ 10 : 5 টি ব্যাগের প্রতিটি থেকে যদৃচ্ছভাবে 50 টি করে বীজ সংগ্রহ করে অঙ্কুরোদ্গমের জন্য অনুকূল পরিবেশে রাখা হয়েছে। 20 দিন পরে প্রতিটি সংগ্রহ থেকে অঙ্কুরিত বীজগুলো গণনা করে নিম্নে প্রদত্ত সারণিতে লিপিবদ্ধ করা হল :

সারণি 15.11

ব্যাগ	1	2	3	4	5
অঙ্কুরিত বীজের সংখ্যা	40	48	42	39	41

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলোতে অঙ্কুরোদ্গমের সম্ভাবনা কি হবে?

(i) যখন একটি ব্যাগে 40 টির বেশি বীজ থাকবে ।

(ii) যখন একটি ব্যাগে 49 টি বীজ থাকবে ।

(iii) যখন একটি ব্যাগে 35 টির বেশি বীজ থাকবে।

সমাধান : মোট ব্যাগের সংখ্যা $= 5$

(i) 50 টি বীজের 40 টির বেশি অঙ্কুরিত হওয়া ব্যাগের সংখ্যা 3 টি।

সুতরাং, P (একটি ব্যাগের 40 টির বেশি অঙ্কুরোদ্গম) $= \dfrac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 টি করে বীজ অঙ্কুরিত হয়েছে এরূপ ব্যাগের সংখ্যা = 0

P (একটি ব্যাগে 49 টি বীজের অঙ্কুরোদ্গম) $= \frac{0}{5} = 0$

(iii) 35 টির বেশি বীজের অঙ্কুরোদ্গম ঘটে, এমন ব্যাগের সংখ্যা = 5

সুতরাং, নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{5}{5} = 1$

মন্তব্য : উপরের উদাহরণগুলোতে তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ্য করেছো যে, কোন ঘটনার সম্ভাবনা 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী যে কোন ভগ্নাংশের সমান হতে পারে।

অনুশীলনী 15.1

1. একটি ক্রিকেট খেলায় একজন ব্যাটসম্যান 30 বল খেলে 6 টি বাউন্ডারি মারে। তার দ্বারা বাউন্ডারি না মারার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

2. 2 জন সন্তান আছে এরূপ 1500 টি পরিবারকে যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত করে নিম্নে প্রদত্ত রাশিতথ্য লিপিবদ্ধ করা হয় :

একটি পরিবারে মেয়ের সংখ্যা	2	1	0
পরিবারের সংখ্যা	475	814	211

যথেচ্ছভাবে নির্বাচন করা একটি পরিবারের ক্ষেত্রে

(i) 2 টি মেয়ে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো। (ii) 1 টি মেয়ে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(iii) মেয়ে না থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

তদুপরি এই সম্ভাবনাগুলোর যোগফল 1 হয় কি না যাচাই করো।

3. 14 নং অধ্যায়ের 14.4 বিভাগে উল্লেখিত 5 নং উদাহরণ দেখো এবং শ্রেণিটির 1 জন বিদ্যার্থীর জন্ম আগস্ট মাসে হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

4. 3টি মুদ্রাকে একইসঙ্গে 200 বার টস্ করা হয় এবং বিভিন্ন ফলাফলগুলোর পরিসংখ্যা নিম্নে দেওয়া হল—

ফলাফল	3 টি হেড্	2 টি হেড্	1 টি হেড্	হেড্ নয়
পরিসংখ্যা	23	72	77	28

যদি এই মুদ্রা তিনটিকে পুনরায় একই সঙ্গে টস্ করা হয় তবে 2 টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

5. একটি সংস্থা যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত 2400 টি পরিবারের প্রতিটির আয়ের সীমা এবং তাদের যানবাহনের

সংখ্যার বিষয়ে ব্যাপক পরীক্ষা চালিয়ে প্রাপ্ত তথ্য রাশিটিকে নিম্নে প্রদত্ত সারণিতে লিপিবদ্ধ করা হল :

মাসিক আয় (টাকায়)	পরিবার প্রতি যানবাহনের সংখ্যা			
	0	1	2	2 এর বেশি
7000 এর কম	10	160	25	0
7000 – 10000	0	305	27	2
10000 – 13000	1	535	29	1
13000 – 16000	2	469	59	25
16000 এর বেশি	1	579	82	88

ধরো, একটি পরিবারকে নির্বাচিত করা হল। এর সম্ভাবনা নির্ণয় করো, যদি নির্বাচিত পরিবারটির

(i) মাসিক আয় 10000 – 13000 টাকা এবং 2 টি যানবাহন থাকে।

(ii) মাসিক আয় 16000 টাকার বেশি এবং 1 টি যানবাহন থাকে।

(iii) মাসিক আয় 7000 টাকার কম এবং যানবাহন নেই।

(iv) মাসিক আয় 13000 – 16000 টাকা এবং 2 টির বেশি যানবাহন আছে।

(v) 1 টির বেশি যানবাহন নেই।

6. 14 নং অধ্যায়ের 14.7 নং সারণি দেখো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

(i) গণিত পরীক্ষায় একজন বিদ্যার্থীর 20% এর কম নম্বর পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

(ii) একজন বিদ্যার্থীর 60 বা তার বেশি নম্বর পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো ।

7. রাশিবিজ্ঞান বিষয়টির সম্পর্কে মতামত জানার জন্য 200 জন বিদ্যার্থীর মধ্যে সমীক্ষা চালানো হয়। প্রাপ্ত রাশিতথ্য নিম্নের সারণিতে প্রদত্ত।

মতামত	বিদ্যার্থীর সংখ্যা
পছন্দ	135
অপছন্দ	65

যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত একজন বিদ্যার্থীর নিম্নোক্ত সম্ভাবনা নির্ণয় করো :-

(i) রাশিবিজ্ঞান বিষয়টি পছন্দ করে। (ii) রাশিবিজ্ঞান বিষয়টি পছন্দ করে না।

8. 14.2 অনুশীলনীর 2 নং প্রশ্ন দেখ। পরীক্ষামূলক সম্ভাবনা কত হবে? যখন একজন ইঞ্জিনিয়ারের —

(i) কর্মস্থল থেকে বাসস্থানের দূরত্ব 7 কিমি এর কম হয়।

(ii) কর্মস্থল থেকে বাসস্থানের দূরত্ব 7 কিমি বা তার বেশি হয়।

(iii) কর্মস্থল থেকে বাসস্থানের দূরত্ব $\frac{1}{2}$ কিমি এর মধ্যে হয়।

9. কার্যকলাপ : তোমার বিদ্যালয়ের গেইটের সামনে দিয়ে, নির্দিষ্ট সময় পরপর অতিক্রম করা 2 চাকার, 3 চাকার এবং 4 চাকার গাড়ির সংখ্যা লিপিবদ্ধ করো। এই তথ্যের সাহায্যে মোট গাড়ির যে কোন একটি 2 চাকার হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

10. কার্যকলাপ : তোমরা শ্রেণির সকল ছাত্রছাত্রীদের একটি তিন অঙ্কের সংখ্যা লিখতে বল। শ্রেণি থেকে যথেচ্ছভবে একজনকে নির্বাচন করলে, তার লিখিত সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা কত? লক্ষ রাখবে, যে কোন সংখ্যার অঙ্কের সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, সংখ্যাটি 3 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

11. 5 কেজি ওজনের 11 টি আটার ব্যাগের প্রকৃত ওজন (কেজি হিসেবে) নিম্নে প্রদত্ত :

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

যথেচ্ছভাবে নির্বাচিত একটি ব্যাগে 5 কেজি এর বেশি আটা থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

12. 14.2 অনুশীলনীর, 5 নং প্রশ্নে, 130 দিনে কোনও একটি (নির্দিষ্ট) শহরের বায়ুতে প্রতি মিলিয়নের অংশ (ppm) এককে গাঢ়ত্ব হওয়া সালফার ডাইঅক্সাইডের সম্পর্কে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন সারণি প্রস্তুত করতে বলা হয়েছে। এই সারণির সাহায্যে কোন একদিনে 0.12 - 0.16 শ্রেণিতে সালফার ডাইঅক্সাইডের গাঢ়ত্বের সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

13. 14.2 অনুশীলনীর, 1 নং প্রশ্নে, একটি শ্রেণির 30 জন ছাত্রছাত্রীর রক্তের গ্রুপের বিষয়ে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন সারণি প্রস্তুত করো। এই রাশিতথ্য ব্যবহার করে যথেচ্ছভাবে বাছাই করা একজনের রক্তের গ্রুপ AB হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

15.3 সারসংক্ষেপ

এ অধ্যায়ে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো শিখেছ :

1. পরীক্ষা নির্ভর কোনো ঘটনা হল, উক্ত পরীক্ষালব্ধ কিছু সংখ্যক পরিনামের সংগ্রহ।

2. একটি ঘটনা P এর পরীক্ষামূলক (empirical) সম্ভাবনা P(E) নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়—

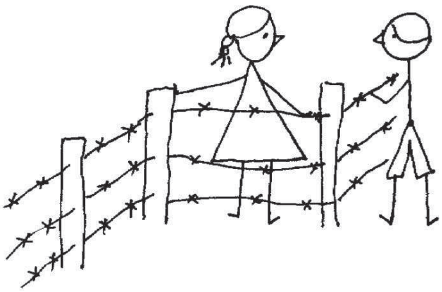
$$P(E) = \frac{\text{E এর অনুকুল প্রচেষ্টার সংখ্যা}}{\text{মোট প্রচেষ্টা সংখ্যা}}$$

3. কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী (0 এবং 1 অন্তর্ভুক্ত)

পরিশিষ্ট -1

গণিতে প্রমাণ (PROOFS IN MATHEMATICS)

A1.1 ভূমিকা: (Introduction)



মনে করো তোমাদের পরিবারের একখণ্ড জমি রয়েছে এবং এর চারিদিকের বেড়া নেই। তোমাদের প্রতিবেশী একদিন তার জমিতে বেড়া দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিলেন। তার জমি ঘেরার কাজ শেষ হয়ে যাওয়ার পর তুমি দেখলে যে, তোমাদের জমির কিছু অংশ বেড়া দিয়ে সীমাবদ্ধ হয়ে আছে। তোমাদের এই প্রতিবেশীকে তোমরা কীভাবে প্রমাণ দেবে যে, তিনি তোমাদের জমি দখল করার চেষ্টা করছেন? প্রথমত: তোমরা নিশ্চয়ই এই সীমা-বিবাদ মেটানোর জন্য পাড়ার বয়স্কদের সাহায্য চাইবে। কিন্তু, ধরো বয়স্কদের মধ্যেও ভিন্ন মত রয়েছে। কেউ কেউ ভাবছেন তোমরা ঠিক আবার অন্য কেউ কেউ ভাবছেন তোমাদের প্রতিবেশীই ঠিক। এখন তুমি কি করতে পারো? তোমার একমাত্র উপায় হল তোমার দাবী প্রতিষ্ঠা করার জন্য এমন একটি রাস্তা খুঁজে বের করো, যা সবার কাছে গ্রহণযোগ্য হয়। যেমন—সরকারের অনুমোদিত তোমাদের গ্রামের জরিপ মানচিত্র ব্যবহার করা যেতে পারে। তুমি যে সঠিক আর তোমার প্রতিবেশী যে সঠিক নয়—তা প্রমাণের জন্য প্রয়োজনে আদালতে আইনের সাহায্যও নিতে পারো।

চলো আমরা আরেকটি পরিস্থিতির কথা ভাবি। মনে করো, তোমাদের ঘরের, 2005 সনের, আগস্ট মাসের ইলেকট্রিক বিলের টাকা তোমার মা জমা দিয়েছেন। তা সত্বেও সেপ্টেম্বর মাসের বিলে, আগস্টমাসের বিলের টাকা দেওয়া হয়নি বলে দাবি করা হয়েছে। বিদ্যুত বিভাগের এই দাবি তুমি কিভাবে খণ্ডন করবে? প্রমাণের জন্য তোমার শুধু আগস্ট মাসের বিল প্রদানের রশিদ জমা দিলেই হবে।

তোমরা এতক্ষণ কিছু উদাহরণ দেখে বুঝতে পেরেছ যে, আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমাদের প্রায়ই কোনো বিবৃতি বা দাবি সত্য না মিথ্যা, তার প্রমাণ দিতে হয়। যাই হোক, মাথা না ঘামিয়ে প্রমাণ ছাড়াই আমরা অনেক বিবৃতি মেনে নেই। কিন্তু গণিতে আমরা কোনো বিবৃতিকে শুধুমাত্র সত্য বা মিথ্যা হিসেবে (কয়েকটি স্বত:সিদ্ধ ব্যতীত) গ্রহণ করি যা, গাণিতিক যুক্তি দিয়ে সত্য বা মিথ্যা বলে প্রমাণ করা যায়।

প্রকৃতপক্ষে, গণিতে প্রমাণ গুলো হাজার হাজার বছর ধরেই আছে এবং এগুলো গণিতের বিভিন্ন শাখার মূল বিষয়। আমাদের জ্ঞাত প্রথম গাণিতিক প্রমাণ, গ্রীক দার্শনিক এবং গণিতজ্ঞ থ্যালেস্ (Thales) দিয়েছিলেন বলে বিশ্বাস করা হয়। মেসোপট্যামিয়া, মিশর, চিন ও ভারতবর্ষ ইত্যাদি দেশের প্রাচীন সভ্যতার মূলে ছিল গণিত। আজকাল আমরা যে ভাবে গাণিতিক প্রমাণ করি, তাঁরা যে অনুরূপভাবেই গাণিতিক প্রমাণ করতেন— তার কোন স্পষ্ট প্রমাণ নেই।

এই অধ্যায়ে আমরা গাণিতিক বিবৃতি(statement) কি, গণিতে অন্তর্ভূক্ত যুক্তির ধরণ এবং গণিতে প্রমানের ভিত্তি গুলো কী— ইত্যাদি আলোচনা করব।

A1.2 গাণিতিকভাবে গ্রাহ্য বিবৃতি (Mathematically Acceptable Statements)

এ অধ্যায়ে আমরা গাণিতিকভাবে গ্রহনীয় বিবৃতির অর্থ ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করব। আদেশমূলক বা বিস্ময় সূচক নয় এমন বাক্যকে ‘বিবৃতি’ (statement) বলে এবং বিবৃতি অবশ্যই একটি প্রশ্ন নয়।

“তোমার চুলের রং কী?” এটি একটি বিবৃতি নয়, প্রশ্ন।

“দয়া করে যাও এবং আমার জন্য জল আন” এটি একটি বিবৃতি নয়, অনুরোধ বা আদেশ।

‘কী মনোরম সূর্যাস্ত!’ এটি একটি বিবৃতি নয়, বিস্ময় সূচক।

কিন্তু “তোমার চুলের রং কালো।” এটি একটি বিবৃতি।

সাধারণতঃ বিবৃতি নিম্নলিখিত প্রকারের যে কোনো এক প্রকারের হতে পারে:

- সর্বদা সত্য (*always true*)
- সর্বদা মিথ্যা (*always false*) এবং
- অস্পষ্ট (*ambiguous*)

অস্পষ্ট কথাটির একটু ব্যাখ্যার প্রয়োজন আছে। একটি বিবৃতি দুটো পরিস্থিতিতে অস্পষ্ট হতে পারে। প্রথমটি হল যখন আমরা কোনো বিবৃতি সর্বদা সত্য বা সর্বদা মিথ্যা এ ব্যাপারে সিদ্ধান্ত নিতে পারি না। উদাহরণস্বরূপ যেমন — “আগামীকাল বৃহস্পতিবার” একটি অস্পষ্ট বিবৃতি কারণ, এটি সত্য বা মিথ্যা বলে স্থির করার জন্য পর্যাপ্ত প্রাসঙ্গিক বর্ণনা নেই।

দ্বিতীয়টি হল, যখন বাক্যটি বিষয়াত্মক হয় (subjective) অর্থাৎ কিছু সংখ্যক লোকের জন্য এটি সত্য এবং কিছু সংখ্যক লোকের জন্য সত্য নয়। যেমন “কুকুর বুদ্ধিমান” একটি অস্পষ্ট বিবৃতি, কারণ কিছু সংখ্যক মানুষ এটিকে বিশ্বাস করে এবং কিছু সংখ্যক মানুষ এটিকে বিশ্বাস করে না।

উদাহরণ ১ : নিম্নলিখিত বিবৃতিগুলো সর্বদা সত্য, সর্বদা মিথ্যা বা অস্পষ্ট কিনা যুক্তি সহ বিবৃত করো।

(i) ৪ দিনে এক সপ্তাহ হয়।

(ii) এখানে বৃষ্টি হচ্ছে।

(iii) সূর্য পশ্চিম দিকে অস্ত যায়।

(iv) গৌরি দয়াবতী বালিকা।

(v) দুটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার গুণফল একটি যুগ্ম সংখ্যা।

(vi) দুটি স্বাভাবিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল যুগ্ম।

সমাধান:

(i) বিবৃতিটি সর্বদা মিথ্যা কারণ সপ্তাহে 7 দিন থাকে।

(ii) এই বিবৃতিটি অস্পষ্ট কারণ “এখানে” বলতে স্থানটির অবস্থান স্পষ্ট নয়।

(iii) বিবৃতিটি সর্বদা সত্য, কারণ আমরা যেখানেই থাকিনা কেন, সূর্য পশ্চিম দিকেই অস্ত যায়।

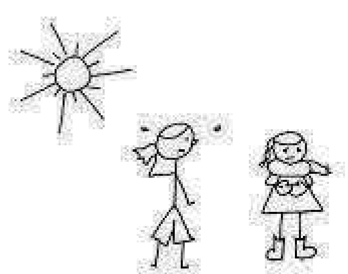
(iv) বিবৃতিটি অস্পষ্ট, কারণ বিবৃতিটি বিষয়াত্মক— গৌরী অনেকের প্রতি দয়াবতী হতে পারে এবং কারো কারো প্রতি নাও হতে পারে।

(v) বিবৃতিটি সর্বদা মিথ্যা, কারণ দুটি অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যার গুণফল সর্বদা অযুগ্ম।

(vi) বিবৃতিটি সর্বদা সত্য, যদিও এটি যে সত্য তা প্রমাণ করার জন্য আমাদের কিছু করতে হবে, যা A1.4 অনুচ্ছেদে দেখানো হবে।

ইতিপূর্বে উল্লেখ করা হয়েছিল, দৈনন্দিন জীবনে আমরা কোনও বিবৃতির গ্রহণযোগ্যতার বিষয়ে সচেতন নই।

উদাহরণ স্বরূপ — মনে করো তোমার বন্ধু বলল যে জুলাই মাসে কেরালার মানন্তওয়াড়িতে প্রতিদিন বৃষ্টি হয়। যথাসম্ভব, তুমি তার কথা বিশ্বাস করবেই, যদিও জুলাই মাসের দু-এক দিন সেখানে বৃষ্টি নাও হতে পারে। যদি তুমি উকিল না হও, তুমি হয়তো তার সাথে কোনো তর্কও করবেনা।



আরেকটি উদাহরণ হিসাবে, আমরা প্রায়ই একে অপরের সাথে কথা প্রসঙ্গে বলি, “আজ খুব গরম” অস্পষ্ট জেনেও এ ধরনের বিবৃতি আমরা মেনে নিই, ‘আজ খুব গরম’ মন্তব্যটির অর্থ বিভিন্ন জনের কাছে বিভিন্ন রকম, কারণ কুমায়ুনের একজন লোকের কাছে যা খুব গরম, চেন্নাইয়ের কোনো লোকের কাছে তা ততটা গরম নাও হতে পারে।

কিন্তু গাণিতিক বিবৃতি কখনও অস্পষ্ট হতে পারে না। “গণিতে, একটি বিবৃতি তখনই গ্রহণযোগ্য বা বৈধ হয়, যদি এটি সর্বদা সত্য বা সর্বদা মিথ্যা হয়” যদি বিবৃতিটি সর্বদা সত্য হয় তবে আমরা বলি বিবৃতিটি সত্য, অন্যথায় এটি মিথ্যা বিবৃতি (False statement)

উদাহরণস্বরূপ, $5 + 2 = 7$ সর্বদা সত্য। সুতরাং, ‘$5 + 2 = 7$’ একটি সত্য বিবৃতি এবং $5 + 3 = 7$, একটি মিথ্যা বিবৃতি।

উদাহরণ 2 : নিচের বিবৃতিগুলো সত্য না মিথ্যা বলো :

(i) ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলোর সমষ্টি $180°$ ।

(ii) 1 এর চেয়ে বড়ো প্রতিটি অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা।

(iii) যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য, $4x + x = 5x$ ।

(iv) যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য, $2x > x$ ।

(v) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য, $x^2 \geq x$ ।

(vi) যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু সমান হয়, তবে এটি বর্গক্ষেত্র।

সমাধান :

(i) বিবৃতিটি সত্য। ষষ্ঠ অধ্যায়ে তোমরা এই সত্যতার প্রমাণ করেছ।

(ii) এই বিবৃতিটি ভুল, কারণ 9 মৌলিক সংখ্যা নয়।

(iii) এই বিবৃতিটি সত্য।

(iv) এই বিবৃতিটি মিথ্যা, যেমন $2 \times (-1) = -2$ এবং -2 সংখ্যাটি -1 থেকে বড় নয়।

(v) এই বিবৃতিটি মিথ্যা, যেমন $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{4}$ সংখ্যাটি $\frac{1}{2}$ থেকে বড় নয়।

(vi) এই বিবৃতিটি মিথ্যা, কারণ রম্বসেরও চারটি বাহু সমান।

তোমরা নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ যে, গাণিতিক নিয়ম অনুযায়ী একটি বিবৃতিকে মিথ্যা প্রমাণ করার জন্য একটি মাত্র ঘটনা বা উদাহরণ দরকার যেখানে তার সত্যতা ব্যাহত হয়।

সুতরাং, (ii) নং বিবৃতিতে, যেহেতু 9 মৌলিক সংখ্যা নয়, তাই এই উদাহরণ থেকে বলতে পারি যে, " 1 এর চেয়ে বড় প্রতিটি অযুগ্ম সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা"— এই বিবৃতিটি সত্য নয়। এরূপ উদাহরণ যেগুলো একটি বিবৃতির বিরোধিতা করে তাকে বিপরীত -উদাহরণ(*counter-example*) A1.5 অনুচ্ছেদে আমরা বিপরীত -উদাহরণ সম্পর্কে বিস্তৃত আলোচনা করব।

তোমরা নিশ্চয়ই আরো লক্ষ্য করেছ যে, (iv), (v) এবং (vi) নং বিবৃতিগুলো মিথ্যা এবং এদেরকে কিছু শর্ত সংযোজন করে, সত্য বলে পুনঃ বিবৃত করা যায়।

উদাহরণ 3 : যথাযথ শর্ত সহযোগে, নিম্নে প্রদত্ত বিবৃতিগুলোকে পুনঃ বিবৃত করো যাতে এগুলো সত্য বিবৃতিতে পরিণত হয়।

(i) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $2x > x$ ।

(ii) প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $x^2 \geq x$ ।

(iii) একটি সংখ্যাকে যদি তুমি ওই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করো, তবে ফল হবে 1।

(iv) বৃত্তের কোনো জ্যা পরিধিস্থ কোনো বিন্দুতে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।

(v) যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু সমান হয়, তবে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হবে।

সমাধান:

(i) যদি $x > 0$ হয়, তবে $2x > x$

(ii) যদি $x \leq 0$ বা $x \geq 1$ হয় তবে $x^2 \geq x$ হবে

(iii) "0" ছাড়া যেকোনো সংখ্যাকে যদি তুমি সেই সংখ্যা দিয়ে ভাগ করো তবে ভাগফল হবে 1।

(iv) কোনো বৃত্তের ব্যাস দিয়ে বৃত্তের উপরিস্থ কোনো বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের মান $90°$।

(v) যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু সমান হয়, তবে এটি একটি বর্গক্ষেত্র।

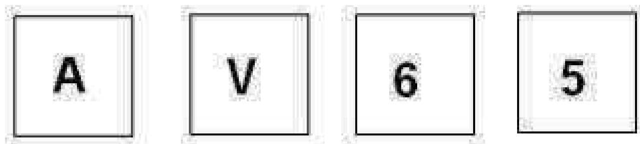
অনুশীলনী A1.1

1. নিচের বিবৃতিগুলো সর্বদা সত্য, সর্বদা মিথ্যা বা অস্পষ্ট কি না বলো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।
   (i) 13 মাসে এক বৎসর ।
   (ii) দীপাবলী উৎসব শুক্রবারে পড়ে।
   (iii) মাগাদির উষ্ণতা 26^0 C।
   (iv) পৃথিবীর একটি মাত্র চন্দ্র আছে।
   (v) কুকুর উড়তে পারে।
   (vi) ফেব্রুয়ারি মাসে মাত্র 28 দিন থাকে।
2. নিচের বিবৃতিগুলো সত্য না মিথ্যা বলো। তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও।
   (i) একটি চতুর্ভুজের অন্তঃস্থ কোণগুলোর সমষ্টি $350°$।
   (ii) যে কোনো একটি বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $x^2 \geq 0$
   (iii) রম্বস একটি সামান্তরিক।
   (iv) দুটি যুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি একটি যুগ্ম সংখ্যা হয়।
   (v) দুটি অযুগ্ম সংখ্যার সমষ্টি একটি অযুগ্ম সংখ্যা হয়।
3. যথোপযুক্ত শর্ত উল্লেখ করে নিম্নে প্রদত্ত বিবৃতিগুলো পুনঃ বিবৃত করো যাতে এগুলো সত্য হয়।
   (i) সকল মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম।
   (ii) কোনো বাস্তব সংখ্যার দ্বিগুণ সর্বদাই যুগ্ম সংখ্যা।
   (iii) যে কোনো x এর জন্য $3x + 1 > 4$ ।
   (iv) যে কোনো x এর জন্য $x^3 \geq 0$ ।
   (v) যে কোনো ত্রিভুজের একটি মধ্যমা (median) একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

A1.3 অবরোহী যুক্তি (Deductive Reasoning)

'অস্পষ্ট নয়' এমন বিবৃতির সত্যতা প্রতিপন্ন করার জন্য অবরোহী বিচারকে যুক্তিসম্মত হাতিয়ার হিসাবে গণ্য করা হয়। অবরোহী বিচার বোঝাতে চলো তোমাদের একটি ধাঁধা (*Puzzle*) সমাধানের মাধ্যমে শুরু করি।

মনে করো তোমাকে চারটি কার্ড (card) দেওয়া হয়েছে। এই কার্ডগুলোকে এক পৃষ্ঠে একটি সংখ্যা এবং অপর পৃষ্ঠে একটি অক্ষর মুদ্রিত আছে



ধরো, তোমাকে বলা হল এই কার্ডগুলো নিচের নিয়ম মেনে চলে:

"যদি কোনো কার্ডের এক পৃষ্ঠে যুগ্ম সংখ্যা থাকে, তবে অপর পৃষ্ঠে একটি স্বরবর্ণ থাকবে"

এই নিয়মটি সত্য কি না, তা পরীক্ষার জন্য তোমাকে ন্যূনতম (Minimum) কয়টি তাসকে উল্টিয়ে দেখার প্রয়োজন হবে?

অবশ্যই, তাসগুলির সব কয়টিকে উল্টিয়ে পরীক্ষা করার স্বাধীনতা তোমার আছে। কিন্তু তুমি কি এই কাজটি কম সংখ্যক কার্ড উল্টিয়ে করতে পারবে?

লক্ষ করো, বিবৃতিটিতে উল্লেখ আছে যে, একপৃষ্ঠে যুগ্ম সংখ্যা যুক্ত কার্ডের অপর পৃষ্ঠাতে একটি স্বরবর্ণ থাকবে। এখানে এটি বিবৃত হয় নি যে, কোনো কার্ডের এক পৃষ্ঠে স্বরবর্ণ থাকলে, তার অপর পৃষ্ঠে যুগ্ম সংখ্যা থাকবেই। যুগ্ম সংখ্যা থাকতেও পারে আবার নাও থাকতে পারে। নিয়মটি এমনভাবেও বিবৃত হয় নি যে কোন কার্ডের একপৃষ্ঠে অযুগ্ম সংখ্যা থাকলে অপর পৃষ্ঠে ব্যঞ্জনবর্ণ থাকবে। এটি এমনটি হতেও পারে, নাও হতে পারে।

সুতরাং 'A' তাসটিকে উল্টানোর প্রয়োজন আছে কি? না! উল্টোদিকে যুগ্ম সংখ্যা বা অযুগ্ম সংখ্যা যাই থাকুক না কেন নিয়মটি সত্য হবে।

'5' এর বেলায় কি হবে? এবারও তাসটি উল্টানোর প্রয়োজন হবে না, কারণ অপরপৃষ্ঠে স্বরবর্ণ বা ব্যঞ্জনবর্ণ যাই থাকুক, নিয়মটি সত্য হবে।

কিন্তু V এবং 6 কে উল্টানোর প্রয়োজন অবশ্যই আছে যদি এর অপরপৃষ্ঠের সংখ্যাটি যুগ্ম হয় তবে নিয়মটি মিথ্যা হবে তথা বিঘ্নিত হবে। অনুরূপে 6 এর অপর পৃষ্ঠে ব্যঞ্জনবর্ণ থাকলেও নিয়মটি মিথ্যা হবে।

উপরোক্ত ধাঁধাটির সমাধান খুঁজতে আমরা যে পদ্ধতি অনুসরণ করেছি তাকে অবরোহী যুক্তি বা বিচার (**deductive reasoning**) বলে। এটিকে অবরোহী (deductive) বলার কারণ, এই পদ্ধতিতে আমরা যুক্তির মাধ্যমে পূর্বে প্রমাণিত বিবৃতি থেকে একটি স্বত:সিদ্ধ বা সিদ্ধান্তে উপনীত হই। উদাহরণস্বরূপ, উপরিউক্ত ধাঁধাটি সমাধানের জন্য যুক্তির মাধ্যমে আমরা কেবল ওই কার্ডটিকে উল্টানোর সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলাম।

অবরোহী বিচার, কোনো একটি নির্দিষ্ট বিবৃতিকে সত্য বলে মন্তব্য করতে আমাদেরকে সাহায্য করে, কারণ এটি একটি জ্ঞাত সাধারণ সত্য বিবৃতির বিশেষ ক্ষেত্র। উদাহরণস্বরূপ, যদি আমরা একবার প্রমাণ করি যে দুটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল সর্বদাই অযুগ্ম, তবে সঙ্গে সঙ্গেই আমরা মন্তব্য করতে পারি (কোনো গণনা ছাড়াই) যে, 70001×134563 একটি অযুগ্ম সংখ্যা, কারণ 70001 ও 134563 প্রত্যেকেই অযুগ্ম।

অবরোহী বিচার শত শত বছর ধরে মানুষের চিন্তাধারার মধ্যে ছিল এবং দৈনন্দিন জীবনে এর ব্যবহার সবসময়ই ছিল। উদাহরণস্বরূপ ধরো "সূর্যমুখী ফুল তখনই ফোটে যদি আগের দিন সর্বোচ্চ তাপমাত্রা 28^0 C এর উপর হয়" এবং "2005 সনের 15 সেপ্টেম্বরে কাল্পনিক উপত্যকায় সূর্যমুখী ফুটেছিল" বিবৃতিটি সত্য। তাহলে অবরোহী বিচারের মাধ্যমে আমরা বলতে পারি যে, 2005 সালের 14 ই সেপ্টেম্বর কাল্পনিক উপত্যকায় সর্বাধিক তাপমাত্রা 28^0C এর বেশী ছিল।

দুর্ভাগ্যবশত দৈনন্দিন জীবনে আমরা সবসময় সঠিক বিচারের প্রয়োগ করি না। আমরা প্রায়ই ভুল বিচারের ফলে অনেক রকম সিদ্ধান্ত নিয়ে থাকি। উদাহরণস্বরূপ, যদি তোমার বন্ধু একদিন তোমাকে দেখেও না হাসে, তাহলে তুমি ভাবতেই পারো যে সে তোমার উপর রাগ করেছে। যদিও এটা সত্য হতে পারে যে "সে যদি আমার উপর রাগ করে থাকে, তবে সে আমাকে দেখে হাসবে না"। এটাও সত্য হতে পারে যে, "যদি তার খুব মাথাব্যাথা হয়, তবে সে আমাকে দেখেও হাসবে না।" তোমরা দৈনন্দিন জীবনে যে সকল সিদ্ধান্ত নিয়েছ, তা কেন পরীক্ষা করে দেখ না, সেগুলো বৈধ বা ভুল বিচারের ফলে প্রাপ্ত কিনা?

অনুশীলনী A1.2

1. অবরোহী বিচার প্রয়োগ করে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দাও:

(i) মানুষ স্তন্যপায়ী। সকল স্তন্যপায়ীই মেরুদণ্ডী। এই দুটি বিবৃতির উপর নির্ভর করে, মানুষ সম্পর্কে তুমি কী মন্তব্য করতে পার?

(ii) অ্যান্টনি একজন নাপিত। দীনেশ তার চুল কাটাল। তুমি কি এরূপ বলতে পারো যে, অ্যান্টনি দীনেশের চুল কেটেছে?

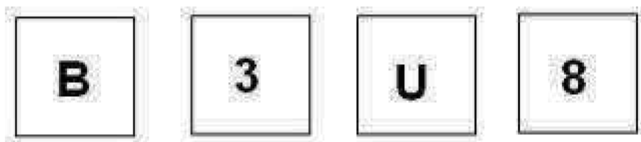
(iii) মঙ্গল গ্রহের অধিবাসীদের জিহ্বা লাল। গুলগ একজন মঙ্গল গ্রহবাসী। এই বিবৃতি দুটির উপর ভিত্তি করে গুলগ সম্পর্কে তুমি কি মন্তব্য করতে পার?

(iv) যদি কোনো বিশেষদিনে চার ঘন্টার বেশী বৃষ্টি হয়, তবে পরের দিন নর্দমাগুলি পরিস্কার করতে হয়। আজ 6 ঘন্টা বৃষ্টি হয়েছে। আগামীকাল নর্দমাগুলির অবস্থা সম্পর্কে আমরা কী মন্তব্য করতে পারি?

(v) নিচের ব্যঙ্গাচিত্রে গরুর যুক্তিতে ভ্রম কোথায়?

2. আবার তোমাকে চারটি কার্ড দেওয়া হয়েছে। প্রত্যেক কার্ডের একপৃষ্ঠে একটি সংখ্যা এবং অপরপৃষ্ঠে একটি অক্ষর মুদ্রিত আছে মাত্র কোন দুটি কার্ড উল্টিয়ে, নিম্নে প্রদত্ত নিয়মটি প্রযোজ্য কিনা তা পরীক্ষা করতে পারবে?

"যদি কোনো কার্ডের একপৃষ্ঠে ব্যঞ্জনবর্ণ থাকে, তবে তার অপর পৃষ্ঠে একটি অযুগ্ম সংখ্যা থাকবে"



A1.4 উপপাদ্য, অনুমান এবং স্বত:সিদ্ধ (Theorems, Conjectures and Axioms)

এতক্ষণ আমরা বিবৃতি এবং তাদের বৈধতার পরীক্ষা সম্পর্কে আলোচনা করেছি। এই বিভাগে, গণিতে ব্যবহৃত তিন প্রকার বিবৃতি যেমন, উপপাদ্য, অনুমান এবং স্বতঃসিদ্ধ এদের মধ্যে পার্থক্য কী সে বিষয়ে তোমরা অধ্যয়ন করবে।

ইতিমধ্যে তোমরা অনেক উপপাদ্য পেয়েছ। তবে উপপাদ্য কী? কোনো গাণিতিক বিবৃতি যার সত্যতা প্রতিপন্ন (প্রমাণিত) হয়েছে, তাকে উপপাদ্য বলে। উদাহরণস্বরূপ, নিম্নোক্ত বিবৃতিগুলো উপপাদ্য (তোমরা A1.5 নং বিভাগে পাবে।)

উপপাদ্য A1.1 : একটি ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলোর সমষ্টি 180^0

উপপাদ্য A1.2 : দুটো যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল একটি যুগ্ম সংখ্যা।

উপপাদ্য A1.3 : যে কোনও তিনটি ক্রমিক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল সর্বদাই 16 দ্বারা বিভাজ্য।

অনুমান হল একপ্রকার বিবৃতি যার সত্যতা গাণিতিক বোঝাপড়া এবং অভিজ্ঞতার ভিত্তিতে সত্য বলে বিশ্বাস করা হয়। অর্থাৎ অনুমান হল গাণিতিক স্বতঃসিদ্ধ (Mathematical Intuition) একটি অনুমান সত্য বা মিথ্যা বলে প্রমাণিত হতে পারে। যদি এটিকে প্রমাণ করতে পারি তবে, এটি একটি উপপাদ্য হবে। গণিতজ্ঞরা প্রায়ই নমুনা দেখে এবং বোধশক্তি সম্পন্ন গাণিতিক ধারণা থেকে অনুমান করেন, চলো আমরা নমুনা বা উদাহণ নেই এবং সেগুলি থেকে কী ধরণের বোধশক্তি সমন্ধ ধারণা করতে পারি।

উদাহরণ 4 : যে কোনো তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যা নাও এবং তাদেরকে যোগ করো। যেমন—

$2 + 4 + 6 = 12,\ 4 + 6 + 8 = 18,\ 6 + 8 + 10 = 24,\ 8 + 10 + 12 = 30,\ 20 + 22 + 24 = 66$

এখানে এই যোগগুলি দেখে তুমি কি কোনো ধরণ সম্পর্কে ধারণা করতে পারছো? এদের সম্বন্ধে তুমি কি অনুমান করতে পারো?

সমাধান: এমন একটি অনুমান হতে পারে

(i) তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার যোগফল যুগ্ম সংখ্যা

আরেকটি অনুমান হতে পারে—

(ii) তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার যোগফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

উদাহরণ 5 : "পাস্কেলের ত্রিভূজ" নামে পরিচিত নিচে প্রদত্ত সংখ্যার নমুনাটি লক্ষ করো।

সারি		সংখ্যাগুলোর সমষ্টি
1	1	1
2	1 1	2
3	1 2 1	4
4	1 3 3 1	8
5	1 4 6 4 1	16
6	1 5 10 10 5 1	32
7	: :	:
8	: :	:

7 ও 8 নং সারির সংখ্যাগুলোর যোগফল সম্পর্কে তোমরা কি অনুমান করতে পারো? 21 নং সারির সংখ্যাগুলোর যোগফল কী হবে? তোমরা কি কোনো ধরণ লক্ষ করেছ? n তম সারির যোগফল নির্ণয় করা যায় এমন একটি সূত্র অনুমান করো।

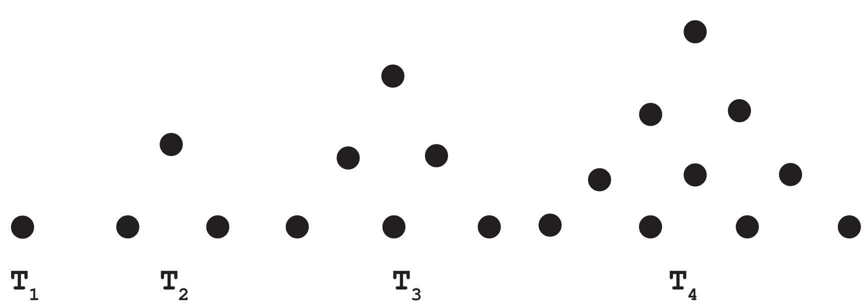
সমাধান : 7 নং সারির যোগফল $= 2 \times 32 = 64 = 2^6$

8 নং সারির যোগফল $= 2 \times 64 = 128 = 2^7$

21 নং সারির যোগফল $= 2^{20}$

n নং সারির যোগফল $= 2^{n-1}$

উদাহরণ 6 : নিচে তথাকথিত ত্রিভুজীয় সংখ্যা (Triangular number) T_n এর দিকে লক্ষ্য করো:

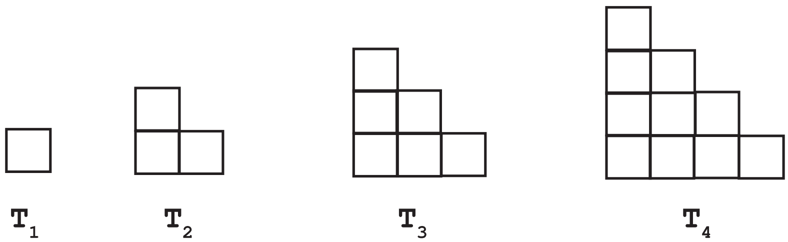


চিত্র A1.1

এখানে ডট (●) গুলোকে এমন ভাবে সাজানো হয়েছে যে, তারা একটি ত্রিভুজ গঠন করে। লক্ষ করো যে, $T_1 = 1, T_2 = 3, T_3 = 6, T_4 = 10$ ইত্যাদি। T_5 কত হবে, অনুমান করতে পার কি? T_6 কি? T_n কি?

T_n সম্পর্কে একটি অনুমান করো।

যদি তুমি নিচের মত চিত্র এঁকে নাও তবে এটি তোমার পক্ষে সহায়ক হবে



চিত্র A1.2

সমাধান : $T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = \dfrac{5 \times 6}{2}$

$$T_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \frac{6 \times 7}{2}$$

$$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

ক্রিশ্চিয়ান গোল্ডবেক (1690 – 1764) নামে এক গণিতজ্ঞের একটি জনপ্রিয় উদাহরণ রয়েছে যা একটি মুক্ত অনুমান (অর্থাৎ এটি সত্য বা মিথ্যা প্রমাণিত হয়নি) এবং এটিকে গোল্ডবেক অনুমান বলে। এই অনুমান অনুসারে "4 এর চেয়ে বড় প্রতিটি যুগ্ম অখন্ড সংখ্যাকে দুটো অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যার যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।" সম্ভবত তোমরা এটি অনুমানটিকে সত্য বা মিথ্যা প্রমাণ করতে পারবে এবং বিখ্যাত হবে।

তোমরা নিশ্চয়ই এটা ভেবে অবাক হয়েছ যে— গণিতে আমরা যা কিছুরই সম্মুখীন হই তার সবগুলোই কি প্রমাণ করতে হবে? যদি না, তবে কেন না?

এটা ঘটনা যে গণিতের প্রতিটি ক্ষেত্রই কিছু বিবৃতির উপর প্রতিষ্ঠিত, যেগুলোকে সত্য বলে ধরা হয় এবং প্রমাণ করা হয়নি। এগুলো 'স্ব-প্রত্যক্ষ সত্য' (self-evident truths) এবং প্রমাণ ছাড়াই আমরা সত্য বলে মেনে নেই। এই বিবৃতিগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ (*axioms*) বলা হয়। 5 নং অধ্যায়ে তোমরা হয়তো ইউক্লিডের স্বত:সিদ্ধ এবং স্বীকার্য সম্পর্কে অধ্যয়ন করেছ। (আজকাল আমরা স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্য এই দুটোর মধ্যে কোন ও পার্থক্য রাখি না।)

উদাহরণস্বরূপ, ইউক্লিডের প্রথম স্বীকার্য বিবৃত করে যে, "*যে কোনো একটি বিন্দুকে অন্য যে কোনো একটি বিন্দুর সঙ্গো যুক্ত করে একটি রেখা আঁকা যায়।*" এবং তৃতীয় স্বীকার্য অনুসারে, যে কোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে, যেকোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকা যায়।

এই বিবৃতিগুলোকে সম্পূর্ণ সত্য বলে মনে হয় এবং ইউক্লিড এগুলোকে সত্য বলে মেনে নিয়েছেন। কেন? কারণ আমরা সবকিছুই প্রমাণ করতে পারি না এবং আমাদের কোনো একটি স্থান থেকে শুরু করতে হয়। সত্য বলে মেনে নেয়েছি এমন কিছু বিবৃতির দরকার আমাদের আছে। এই সকল স্বতঃসিদ্ধগুলো যুক্তি নিয়মের উপর ভিত্তি করে আমরা আমাদের জ্ঞানকে সমৃদ্ধ করতে পারি।

তোমরা হয়তো, অবাক হচ্ছ যে, স্বতঃপ্রমাণিত বলে মনে হওয়া সব বিবৃতিকেই আমরা সত্য বলে গ্রহণ করি না কেন? এর অনেক কারণ আছে। প্রায়ই আমাদের স্বতঃলব্ধ জ্ঞান ভুল হতে পারে। ছবি বা ধরণ আমাদের প্রতারণা করতে পারে। কোন বিবৃতি সত্য বলে নিশ্চিত হওয়ার একমাত্র রাস্তা হচ্ছে এটাকে প্রমাণ কর। উদাহরণস্বরূপ, আমরা অনেকেই বিশ্বাস করি যে একটি সংখ্যাকে অন্য একটি সংখ্যাদ্বারা গুণ করলে, গুণফল সংখ্যা দুটির প্রতিটি অপেক্ষা বড় হয়। কিন্তু আমরা জানি যে, এটি সবক্ষেত্রে সঠিক নয়। যেমন $5 \times 0.2 = 1$, এটি 5 এর তুলনায় ছোটো।

A1.3 নং চিত্রটি লক্ষ করো। কোন রেখাংশটি বড়, AB না CD?

চিত্র A 1.3

যদিও AB রেখাংশটি CD এর তুলনায় ছোটো বলে মনে হয় কিন্তু প্রকৃতপক্ষে উভয়ই সমান দৈর্ঘ্যের।

স্বতঃসিদ্ধগুলোর বৈধতা নিয়ে তোমার মনে সংশয় জাগতে পারে। আমাদের স্বতঃলব্ধ জ্ঞানের দ্বারা বুঝতে পারা স্ব-প্রমাণিত বিবৃতিগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ বলে গ্রহণ করা হয়েছে। সুতরাং আমরা সেগুলোকে সত্য বলেই মেনে নিয়েছি।

যদিও পরে হয়তো কোনও একটি স্বতঃসিদ্ধ সত্য নয় বলে আবিস্কৃত হতে পারে। এমন সম্ভাবনার বিরুদ্ধে রক্ষাকবচ (safeguard) কী? আমরা নিম্নোক্ত পদক্ষেপগুলি অনুসরণ করি:

(i) কমসংখ্যক স্বতঃসিদ্ধ ব্যবহার করো। যেমন শুধুমাত্র ইউক্লিডের একটি মাত্র স্বতঃসিদ্ধ ও

পাঁচটি স্বীকার্য ব্যবহার করে আমরা শত শত উপপাদ্য আরোহন করতে পারি।

(ii) স্বতঃসিদ্ধগুলো সঙ্গাতিপূর্ণ বলে চিহ্নিত হওয়া। স্বতঃসিদ্ধগুলোকে সঙ্গাতিপূর্ণ বলা হবে না, যদি একটি স্বত:সিদ্ধ দ্বারা আরেকটি মিথ্যা বলে প্রমাণ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, নিম্ন লিখিত দুটি বিবৃতি বিবেচনা কর। আমরা দেখবো এগুলো সঙ্গাতিপূর্ণ নয়।
বিবৃতি 1 : কোনও পূর্ণ সংখ্যাই তার পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যাটির সমান।
বিবৃতি 2 : একটি পূর্ণ সংখ্যাকে 0 দিয়ে ভাগ করলে, ভাগফলটি একটি পূর্ণ সংখ্যা হয়। (মনে রাখবে, 0 দ্বারা ভাগ অসংজ্ঞায়িত হয়। কিন্তু, এক মুহূর্তের জন্য, আমরা এটাকে সম্ভব বলে ধরবো এবং লক্ষ করো কী হয়)

2 নং বিবৃতি থেকে, আমরা পাই $\frac{1}{0} = a$, যেখানে a একটি সমগ্র সংখ্যা। এর অর্থ হলো যে, $1 = 0$. কিন্তু এটি প্রমান করে যে 1 নং বিবৃতিটি মিথ্যা। অর্থাৎ কোনও পূর্ণ সংখ্যাই তার পরবর্তী পূর্ণ সংখ্যাটির সমান নয়।

(iii) একটি স্বত:সিদ্ধ মিথ্যা হলে, আগে পরে একদিন মতানৈক্য সৃষ্টি করবেই। *যখন আমরা এমন একটি বিবৃতি খুঁজে পাই যার জন্য ঐ বিবৃতি এবং তার না ক্রিয়া উভয়েই সত্য হয় তখন আমরা বলি যেখানে অসংঙ্গাতি আছে।* উদাহণস্বরূপ উপরোক্ত 1 নং এবং 2 নং বিবৃতি দুটিকে আবার বিবেচনা করো।
1 নং বিবৃতি থেকে আমরা যে সিদ্ধান্তে উপনীত হই তা হলো $2 \neq 1$. এখন $x^2 - x^2$ রাশিটি লক্ষ কর। আমরা এই রাশিটিকে দুটি ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করব।
(i) $x^2 - x^2 = x(x - x)$ এবং
(ii) $x^2 - x^2 = (x + x)(x - x)$
সুতরাং $x(x - x) = (x + x)(x - x)$.
2 নং বিবৃতির উভয় পার্শ্ব থেকে আমরা $x - x$ কে বাদ দিতে পারি। আমরা পাই
$x = 2x$, অর্থাৎ $2 = 1$.

সুতরাং, বিবৃতি $2 \neq 1$ এবং এর না ক্রিয়া $2 = 1$ উভয়েই সত্য। এই দুটি পরস্পর বিরোধী। এখানে পরস্পর বিরোধী বিবৃতির প্রধান কারণ হল ভুল স্বতঃসিদ্ধটি যা বিবৃত করে একটি পূর্ণ সংখ্যাকে 0 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ও পূর্ণসংখ্যা হয়।

সুতরাং, কোন বিবৃতিকে স্বতঃসিদ্ধ সিদ্ধান্ত হিসাবে গ্রহণ করার ক্ষেত্রে অনেক বেশী চিন্তা ও অন্ত দৃষ্টির প্রয়োজন। আমাদের নিশ্চিত হওয়া উচিত যাতে স্বতঃসিদ্ধ রূপে গৃহীত কোনও বিবৃতি অসংজ্ঞত এবং যুক্তি যুক্ত ভাবে স্ব-বিরোধী না হয়, তা সত্বেও স্বতঃসিদ্ধগুলো কোনও কোনও সময় আমাদের নতুন আবিস্কারের পথে নিয়ে যায়। 5 নং অধ্যায়ে তোমরা ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য এবং অ-ইউক্লিডীয় জ্যামিতির আবিস্কারের বিষয়ে জেনেছ। তোমরা দেখেছিলে যে গণিতজ্ঞদের বিশ্বাস পঞ্চম স্বীকার্যটি প্রকৃতপক্ষে স্বীকার্য নয়, এটি একটি উপপাদ্য। প্রথম চারটি স্বীকার্য দ্বারা এটিকে প্রমাণ করা যায়। আশ্চর্যজনক ভাবে এই প্রচেষ্টাগুলোই অ-ইউক্লিডিয় জ্যামিতির আবিস্কারের পথ

খুলেছিল।

আমরা স্বতঃসিদ্ধ, উপপাদ্য এবং অনুমান এগুলোর মধ্যে পারস্পরিক পার্থক্যের কথা আরেকবার স্মরণ করে এই অনুচ্ছেদের পরিসমাপ্তি ঘটাব, স্বতঃসিদ্ধ হলো এক প্রকার গাণিতিক বিবৃতি যেগুলোকে প্রমাণ ছাড়াই সত্য বলে মনে করা হয়; অনুমান হল গাণিতিক বিবৃতি যেগুলোকে সত্য বা মিথ্যা বলে প্রমাণ করতে হবে, এবং উপপাদ্য হল এমন একটি গাণিতিক বিবৃতি যেগুলোর সত্যতা যুক্তিপূর্ণভাবে প্রমাণিত হয়েছে।

অনুশীলনী A1.3

1. পরপর তিনটি যুগ্ম সংখ্যা নাও এবং তাদের গুণফল নির্ণয় করো, উদাহণস্বরূপ, $2 \times 4 \times 6 = 48$, $4 \times 6 \times 8 = 192$ ইত্যাদি। এই গুণফলগুলো সম্পর্কে তিনটি অনুমান লেখো।

2. পাস্কেল ত্রিভুজের কথা ভাবো:

সারি 1 : $1 = 11^0$

সারি 2 : $1 \ 1 = 11^1$

সারি 3 : $1 \ 2 \ 1 = 11^2$

4 ও 5 নং সারি সম্পর্কে অনুমান করো। তোমার অনুমানটি সত্য কি? তোমার অনুমানটি 6 নং সারির জন্যও সত্য কি?

3. ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যাগুলোর (চিত্র A1.2) দিকে লক্ষ করো। দুটি পরপর ত্রিভুজাকৃতি সংখ্যার সারি যোগ করো। উদাহরণ স্বরূপ $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$.

$T_4 + T_5$ কত? $T_{n-1} + T_n$ সম্বন্ধে একটি অনুমান তৈরী করো।

4. নিম্নে প্রদত্ত সজ্জাটি লক্ষ করো:

$$1^2 = 1$$
$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12321$$
$$1111^2 = 1234321$$
$$11111^2 = 123454321$$

এখন নিম্নে প্রদত্ত প্রতিটি সংখ্যার জন্য অনুমান তৈরি করো।

$$111111^2 =$$
$$1111111^2 =$$

তোমার অনুমান সত্য কিনা তা পরীক্ষা করো।

5. এ বইতে উল্লেখিত পাঁচটি স্বত:সিদ্ধ (স্বীকার্য)-এর তালিকা তৈরি করো।

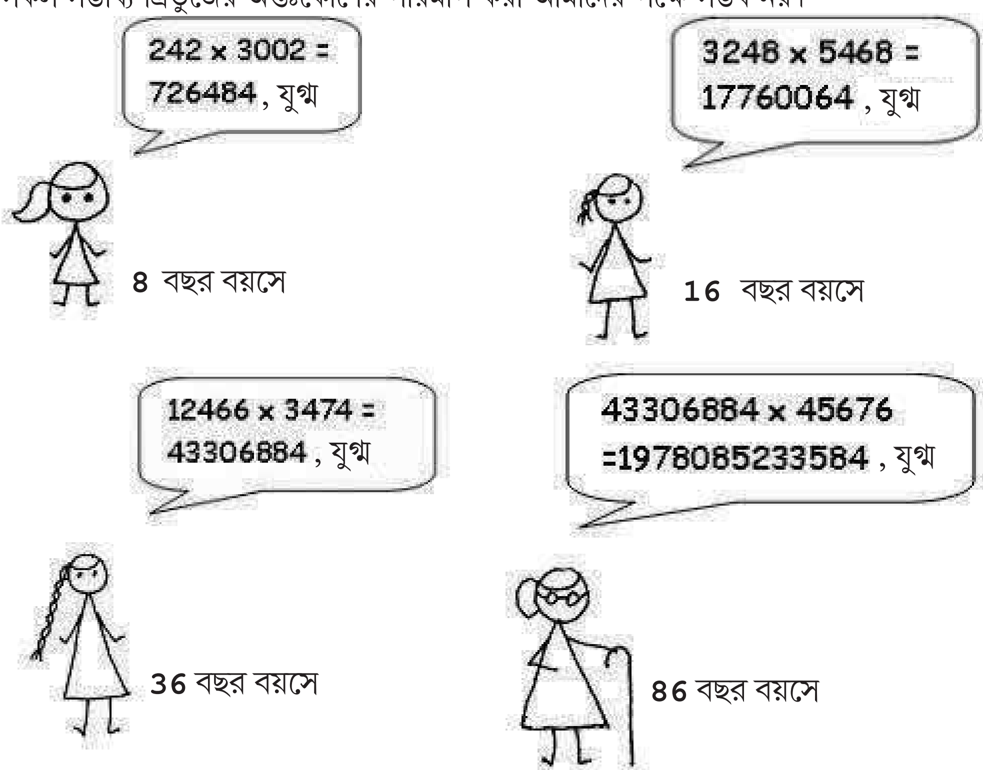
A1.5 গাণিতিক প্রমান (Mathematical Proof) কী ?

চলো আমরা প্রমাণের বিভিন্ন দিক লক্ষ করি। আমরা যাচাই (verification) ও প্রমাণের(proof) মধ্যে পার্থক্য বোঝার মধ্য দিয়ে শুরু করব। গাণিতিক প্রমাণ অধ্যয়ন করার পূর্বে তোমাদেরকে প্রধানত বিবৃতির সত্যতা যাচাই করতে বলা হয়েছিল।

উদাহরণস্বরূপ তোমাদের হয়তো উদাহরণ সহ যাচাই করতে বলা হয়েছিল যে, “দুটি যুগ্ম সংখ্যার গুণফল যুগ্ম”। এই জন্য তুমি হয়তো যথেচ্ছ ভাবে দুটি যুগ্ম সংখ্যা যেমন, 24 এবং 2006 নিয়ে $24 \times 2006 = 48144$ নির্ণয় করে দেখেছিলে যে গুণফল যুগ্ম। হয়তো আরও অনেক উদাহরণের ক্ষেত্রে তোমরা এমন করেছ।

আবার তোমাদেরকে হয়তো কাজ হিসাবে বলা হল যে, শ্রেণিকক্ষে বিভিন্ন রকমের কয়েকটি ত্রিভুজ আঁকো এবং প্রতিটির অন্ত:কোণগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করো। পরিমাপে ভুল থাকলেও তোমরা ত্রিভুজের তিনটি অন্ত:কোণের সমষ্টি $180°$ পেতে।

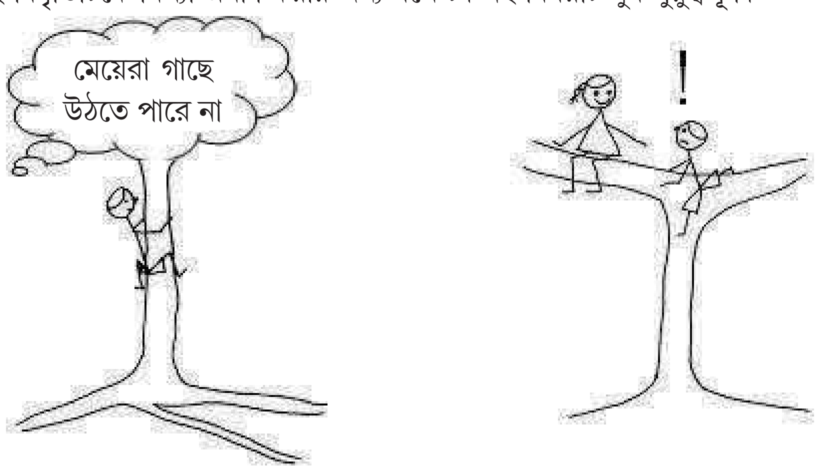
এই পদ্ধতিতে ত্রুটি কী? যাচাইয়ের এই পদ্ধতিতে বেশ কিছু সমস্যা আছে। যদিও এটি কোনও একটি বিবৃতিকে সত্য বলে গ্রহণ করতে তোমাকে সাহায্য করতে পারে, কিন্তু সবক্ষেত্রে তুমি এটিকে সত্য বলে নিশ্চিত হতে পার না। উদাহণস্বরূপ কয়েকজোড়া যুগ্ম সংখ্যার গুণফল নির্ণয় করে তো “দুটি যুগ্ম সংখ্যার গুণফল যুগ্ম”—এই বিষয়ে অনুমান করতে পারো। কিন্তু এ থেকে আমরা নিশ্চিত হতে পারি না যে সকল জোড়া যুগ্ম সংখ্যার গুণফল যুগ্ম। তুমি বাস্তবে সকল সম্ভাব্য যুগ্ম সংখ্যার জোড়ার গুণফল যাচাই করতে পারবে না। যদি এমন করো তবে তুমি ব্যাঙ্গাচিত্রের মেয়েটির মতো বাকি জীবন ধরে যুগ্ম সংখ্যার গুণফল নির্ণয় করতে থাকবে। অনুরূপে এমন অনেক ত্রিভুজই তুমি আঁকো নি এবং তাদের অন্তবর্তী কোণ গুলোর সমষ্টি যে $180°$ তা ও নির্ণয় করো নি। সকল সম্ভাব্য ত্রিভুজের অন্তঃকোণের পরিমাপ করা আমাদের পক্ষে সম্ভব নয়।



উপরন্তু যাচাই করণ প্রায়ই বিভ্রান্তিকর হতে পারে। উদাহরণস্বরূপ পাস্কেলের ত্রিভূজ (2 নং প্রশ্ন, অনুশীলনী A1.3) হতে প্রলোভিত হয়ে এবং আগের যাচাইয়ের উপর ভিত্তি করে আমরা বলতে পারি যে $11^5 = 15101051$ ।কিন্তু প্রকৃতপক্ষে $11^5 = 161051$ ।

অতএব তোমাদের অন্য একটি উপায়ের প্রয়োজনীয়তা আছে, যা মাত্র কয়েকটি ক্ষেত্রে যাচাইয়ের উপর নির্ভরশীল নয়। এই উপায়টিকে "বিবৃতির প্রমাণীকরণ" (*proving a statement*) বলা যায়। যে প্রক্রিয়ায় ন্যায়সঙ্গাত যুক্তির উপর ভিত্তি করে কোনো গাণিতিক বিবৃতির সত্যতা প্রতিপন্ন করা যায় তাকে "গাণিতিক প্রমান" (*mathematical proof*) বলে।

A1.2 বিভাগের 2 নং উদাহরণে তোমরা দেখেছ যে কোনও গাণিতিক বিবৃতিকে মিথ্যা বলে প্রমাণ করার জন্য একটি মাত্র বিপরীত উদাহরণই যথেষ্ট। সুতরাং, কোনও একটি গাণিতিক বিবৃতির সত্যতা প্রতিপন্ন করার জন্য হাজার হাজার উদাহরণ যথেষ্ট নয়, শুধুমাত্র একটি বিপরীত উদাহরণই বিবৃতিটিকে মিথ্যা প্রমাণ করার জন্য যথেষ্ট। এই বিষয়টি খুব গুরুত্বপূর্ণ।



কোনো একটি গাণিতিক বিবৃতিকে মিথ্যা প্রমাণের জন্য একটি মাত্র বিপরীত উদাহরণ যথেষ্ট। সুতরাং, $7 + 5 = 12$ উদাহরণটি, "দুটি অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল অযুগ্ম" এই বিবৃতিটির একটি বিপরীত উদাহরণ।

চলো আমরা গাণিতিক প্রমাণের জন্য মৌলিক উপাদানের তালিকাটি লক্ষ করি:

(i) কোনো একটি উপপাদ্য প্রমাণের জন্য কিভাবে অগ্রসর হওয়া উচিত তার একটি মোটামুটি ধারণা থাকা আবশ্যক।

(ii) কোনো উপপাদ্যে অর্থাৎ প্রকল্পে (hypothesis) প্রদত্ত তথ্যকে ভালভাবে বুঝতে ও ব্যবহার করতে হবে।

উদাহরণস্বরূপ A1.2 উপপাদ্যটিতে বলা হয়েছে যে দুটো যুগ্ম সংখ্যার গুণফল যুগ্ম এবং আমাদেরকে দুটো যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা দেওয়া আছে। সুতরাং সত্যতা যাচাইয়ের জন্য আমাদের এদের ধর্মগুলো ব্যবহার করতে হবে। গুণনীয়ক উপপাদ্যে (2 নং অধ্যায়) তোমাকে একটি বহুপদ $p(x)$ রাশিমালা দেওয়া আছে এবং বলা আছে $p(a) = 0$. এটিকে ব্যবহার করে তোমাকে দেখাতে হবে যে, $(x - a)$ রাশিটি $p(x)$ এর একটি উৎপাদক। অনুরূপে বিপরীত গুণনীয়ক উপপাদ্যটির জন্য, তোমাকে দেওয়া আছে রাশিটি এর একটি উৎপাদক এবংএই প্রতিজ্ঞাটি ব্যবহার করে তোমাকে প্রমাণ করতে হবে $p(a)$=0 ।

একটি উপপাদ্য প্রমাণ করার সময় তুমি অঙ্কনেরও সাহায্য নিতে পারো। উদাহরণস্বরূপ, একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি 180°, প্রমাণ করার জন্য আমরা ত্রিভুজটির একটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে বিপরীত বাহুটির সমান্তরাল ভাবে একটি রেখা এঁকে, সমান্তরাল রেখার ধর্ম প্রয়োগ করি।

(iii) গাণিতিক বিবৃতিগুলোকে ক্রমে ক্রমে সাজিয়ে একটি প্রমাণ সম্পন্ন করা হয়। গাণিতিক প্রমাণে প্রত্যেকটি বিবৃতিকে আগের বিবৃতি থেকে বা আগে প্রমাণিত কোন উপপাদ্য থেকে বা স্বত:সিদ্ধ বা কল্পনার সাহায্যে যুক্তিসংঙ্গাত উপায়ে অর্জন করা হয়।

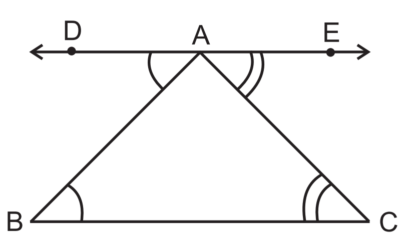
(iv) গাণিতিক ভাবে সত্য বিবৃতির অনুক্রমকে যুক্তিসঙ্গাতভাবে শুদ্ধক্রমে সাজিয়ে যখন আমরা কোনো সিদ্ধান্তে উপনিত হই, সেটাই যেন প্রামাণ্য বিষয় অর্থাৎ, উপপাদ্যের বক্তব্য হয়।

উপরোক্ত উপাদান সমূহ বোঝার জন্য আমরা A1.1 উপপাদ্য এবং তার প্রমাণকে বিশ্লেষণ করব। তোমরা অধ্যায় 6-এ ইতিমধ্যে এই উপপাদ্যটিকে অধ্যয়ন করেছ। কিন্তু প্রথমেই জ্যামিতিক প্রমাণ সম্পর্কে কিছু মন্তব্য করা উচিত। উপপাদ্য প্রমাণের জন্য আমরা প্রায়ই চিত্রের সাহায্য নিই এবং এটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। যাই হোক প্রমাণ করার সময় প্রতিটি বিবৃতি শুধু যুক্তির সাহায্যে স্থাপন করতে হবে। ছাত্র-ছাত্রীদের প্রায়ই মন্তব্য করতে শোনা যায়, "ঐ কোণ দুটো সমান, কারণ চিত্রে তাদরে সমান দেখাচ্ছে" অথবা "ঐ কোণটি নিশ্চয়ই 90°", কারণ, কোণ উৎপন্নকারী বাহু দুটো দেখতে পরস্পর লম্ব"। কিন্তু, সাবধান ! তুমি যা দেখ, তা দেখে প্রতারিত হবে না (চিত্র A1.3 মনে রাখবে) ।

চলো আমরা A1.1 নং উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করি।

উপপাদ্য A1.1 : একটি ত্রিভুজের অন্ত:কোণগুলোর সমষ্টি 180° ।

প্রমাণ : মনে করো যেকোনো একটি ত্রিভুজে (A1.4 নং চিত্র) আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে—
$\angle$ ABC + $\angle$ BCA + $\angle$ CAB = 180° .... (1)



চিত্র A 1.4

A বিন্দুগামী BC এর সমান্তরাল করে DE রেখা আঁকো। (2)

DE রেখা BC এর সমান্তরাল এবং AB ছেদক।

সুতরাং, $\angle$ DAB এবং $\angle$ ABC একান্তর কোণ। তাই অধ্যায় 6-এ 6.2 নং উপপাদ্য অনুসারে এই কোণদ্বয় সমান, অর্থাৎ, $\angle DAB = \angle ABC$ (3)

একইভাবে, $\angle CAE = \angle ACB$ (4)

সুতরাং, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ (5)

কিন্তু, $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$, কারন এরা একটি সরল কোণ গঠন করে। (6)

অতএব, $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ । (7)

এখন আমরা প্রমাণের প্রতিটি ধাপের উপর মন্তব্য করবো।

ধাপ-1 : আমাদের উপপাদ্যটি ত্রিভুজের একটি ধর্ম সম্পর্কিত। তাই আমরা একটি ত্রিভুজ দিয়ে শুরু করলাম।

ধাপ- 2 : উপপাদ্যটি প্রমাণ করার মূল ধারণাটি হচ্ছে— কিভাবে অগ্রসর হতে হবে তা বোঝা এবং স্বজ্ঞাতে অগ্রসর হওয়া। জ্যামিতিক প্রমাণে প্রায়ই অঙ্কনের আবশ্যক হয়।

ধাপ- 3 এবং 4 : ইতিপূর্বে প্রমাণিত 6.2 নং উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা জানি, দুটি সমান্তরাল রেখা যদি অপর একটি সরলরেখা দ্বারা ছেদিত হয়, তবে একান্তর কোণগুলো সমান হয়" পূর্বে প্রমাণিত এই উপপাদ্য ব্যবহার করে এবং DE রেখাটি BC এর সমান্তরাল বলে, সিদ্ধান্তে আসা যায় যে,

$\angle DAE = \angle ABC$ এবং $\angle CAE = \angle ACB$

ধাপ 5 : এখানে আমরা ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ (৫ম অধ্যায়) ব্যবহার করব। এই স্বতঃসিদ্ধ অনুযায়ী যদি সমান সমান কোণের সাথে সমান কোণ যোগ করা হয়, তবে সমষ্টিদ্বয় সমান। আমরা পাই

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE$ ।

অর্থাৎ, ত্রিভুজটির অন্ত:কোণগুলোর সমষ্টি, সরল রেখার উপরিস্থ কোণগুলির সমষ্টির সমান।

ধাপ 6 : অধ্যায় 6-এ রৈখিক যুগল স্বতঃসিদ্ধ হতে আমরা জানি একটি সরলরেখার একই দিকের কোণগুলোর সমষ্টি 180°। এই স্বতঃসিদ্ধ ব্যবহার করে পাই $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$.

ধাপ 7 : ইউক্লিডের স্বত:সিদ্ধ অনুযায়ী, "যে সব বস্তু একই বস্তুর সাথে সমান হয়, তারা পরস্পর সমান"। এই স্বত:সিদ্ধ ব্যবহার করে আমরা বলতে পারি

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$ ।

লক্ষ করো যে, 7 নং ধাপটিই আমাদের প্রামাণ্য বিষয়।

এখন আমরা বিশ্লেষণ ছাড়া উপপাদ্য A1.2 ও A1.3 উপপাদ্য প্রমাণ করব।

উপপাদ্য A1.2 : দুটি যুগ্ম সংখ্যার গুণফল একটি যুগ্ম সংখ্যা।

প্রমাণ : ধরি x এবং y দুটো যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা ।

আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে xy একটি যুগ্ম সংখ্যা।

যেহেতু x ও y যুগ্ম, এগুলো 2 দ্বারা বিভাজ্য, তাই x ও y কে লেখা যায় $x = 2m$, $y = 2n$ এখানে m ও n কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা, তাহলে $xy = 4\,mn$, যেহেতু $4\,mn$, 2 দ্বারা বিভাজ্য, তাই xy, 2 দ্বারা বিভাজ্য

সুতরাং, xy যুগ্ম।

উপপাদ্য A1.3 : যে কোনো তিনটি ক্রমিক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল 16 দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ : যদি n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ তিনটি ক্রমিক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যা। আমাদের প্রমাণ করতে হবে, $2n(2n + 2)(2n + 4)$ সংখ্যাটি 16 দ্বারা বিভাজ্য।

এখন $2n(2n + 2)(2n + 4) = 2n \times 2(n + 1) \times 2(n + 2)$

$= 2 \times 2 \times 2n(n + 1)(n + 2) = 8n(n + 1)(n + 2).$

এখন আমাদের দুটি ক্ষেত্র আছে। n যুগ্ম বা অযুগ্ম ।

মনেকরি n যুগ্ম : তবে আমরা লিখতে পারি $n = 2m$, যেখানে m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

তবে, $2n(2n + 2)(2n + 4) = 8n(n + 1)(n + 2) = 16m(2m + 1)(2m + 2)$।

সুতরাং, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 দ্বারা বিভাজ্য।

এইবার ধরি n অযুগ্ম: তাহলে $n + 1$ যুগ্ম এবং আমরা লিখতে পারি, $n + 1 = 2r$ যেখানে r একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

তাহলে আমরা পাই,
$$\begin{aligned} 2n(2n + 2)(2n + 4) &= 8n(n + 1)(n + 2) \\ &= 8(2r - 1) \times 2r \times (2r + 1) \\ &= 16r(2r - 1)(2r + 1) \end{aligned}$$

সুতরাং, $2n(2n + 2)(2n + 4)$, 16 দ্বারা বিভাজ্য।

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রেই আমরা দেখিয়েছি যে তিনটি পরপর যুগ্ম সংখ্যার গুণফল, 16 দ্বারা বিভাজ্য।

গণিতজ্ঞরা কীভাবে ফল (result) আবিস্কার করেন ও কী কঠিন পদ্ধতিতে প্রমাণ লেখা হয়— এই দুই পদ্ধতির মধ্যে যে পার্থক্য তার উপর কিছু মন্তব্য করে, এই অধ্যায়ের পরিসমাপ্তি ঘটাব। উপরে উল্লেখ করা হয়েছে যে প্রতিটি প্রমাণের রয়েছে একটি মূল স্বজ্ঞাত ধারণা (অনেক ক্ষেত্রে 1 এর বেশী) স্বত:লব্ধ জ্ঞান যেকোনও গণিতজ্ঞের চিন্তা ও ফল (result) আবিস্কারের মূল চাবিকাঠি। প্রায়ই উপপাদ্য প্রমাণের বিষয়টি গণিতজ্ঞের মনে তালগোল পাকিয়ে দেয়। শুদ্ধ সমাধান বা প্রমাণ করার আগে একজন গণিতজ্ঞ প্রায়ই বিভিন্ন উপায়ে পরীক্ষা-নিরীক্ষা, উদাহরণ এবং যুক্তি সঙ্গত বিভিন্ন পথ অনুসরণ করেন। এই সমস্ত সৃজনশীল চিন্তাভাবনার পরেই, সমস্ত যুক্তিগুলোকে একত্রিত করা হয়, সঠিক প্রমাণের জন্য।

এখানে, বিখ্যাত ভারতীয় গণিতজ্ঞ শ্রীনিবাস রামানুজনের কথা উল্লেখ করা খুব প্রয়োজন। তিনি অতি উচ্চমানের স্বতঃলব্ধ জ্ঞানের দ্বারা অনেক গাণিতিক বিবৃতি দিয়েছিলেন, যাদের তিনি

সত্য বলে দাবি করেছিলেন, পরবর্তীকালে এই বিবৃতির অনেক গুলোই সত্য বলে প্রমাণিত হয়েছে এবং বিখ্যাত উপপাদ্য হিসাবে পরিচিত হয়েছে। যাইহোক, এখনও বিশ্বের অনেক গণিতজ্ঞরা উনার এই বিবৃতিগুলোকে সত্য (বা মিথ্যা) প্রমাণ করার চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছেন।

শ্রীনিবাস রামানুজন
(1887–1920)
চিত্র. **A1.5**

অনুশীলনী A1.4

1. নিম্নোক্ত বিবৃতিগুলোকে মিথ্যা প্রমাণের জন্য বিপরীত উদাহরণ দাও:

(i) যদি দুটো ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

(ii) কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সমান হলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র।

(iii) কোনো চতুর্ভুজের কোণগুলো সমান হলে, চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

(iii) a ও b দুটি অখন্ড সংখ্যার ক্ষেত্রে $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ ।

(v) যেকোনো সমগ্রসংখ্যা n এর জন্য $2n^2 + 11$ একটি মৌলিক সংখ্যা।

(vi) সকল ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা n এর জন্য $n^2 - n + 41$ একটি মৌলিক সংখ্যা।

2. তোমার প্রিয় যেকোনো একটি প্রমাণকে নিয়ে A1.5 অনুচ্ছেদের মত ধাপে ধাপে (কী দেওয়া হয়েছে, কী প্রমাণিত হল, কোনো উপপাদ্য এবং স্বত:সিদ্ধ ব্যবহার করা হয়েছে ইত্যাদি) বিশ্লেষণ করো।

3. প্রমাণ করো যে, দুটি অযুগ্ম সংখ্যার যোগফল একটি যুগ্ম সংখ্যা।

4. প্রমাণ করো যে, দুটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল এখটি অযুগ্ম সংখ্যা।

5. প্রমাণ করো যে, যে কোনো তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার যোগফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

6. প্রমান করো যে, $y = 2x$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত রেখাটির উপর অসংখ্য বিন্দু আছে। (ইঙ্গিত: $(n, 2n)$ বিন্দুটি বিবেচনা করো, যেখানে n যেকোনো অখন্ড সংখ্যা)

7. তোমার হয়ত এমন কোনো বন্ধু আছে যে তোমাকে যেকোনো একটি সংখ্যা ভাবতে এবং পরে এই সংখ্যাটির সাথে অনেক প্রক্রিয়া করতে বলত। তোমার আসল সংখ্যাটি না জেনেই, কোন সংখ্যা দ্বারা তোমার সম্পূর্ণ প্রক্রিয়াটি শেষ হত, তা তোমাকে বলে দিত। এখানে দুটো উদাহরণ দেওয়া হল। এগুলো কীভাবে সত্য হয় পরীক্ষা করো:

(i) একটি সংখ্যা পছন্দ করো, সংখ্যাটিকে দ্বিগুণ করো। নয় যোগ করো। তোমার আসল সংখ্যাটি যোগ করো। তিন দ্বারা ভাগ করো। চার যোগ করো। তোমার আসল সংখ্যাটি বিয়োগ করো। তোমার হাতে রইল সাত (7)।

(i) তিন অঙ্কের যেকোনো একটি সংখ্যা লিখ (উদাহরণস্বরূপ 425) । এই অঙ্কগুলোকে একই ক্রমে পুনরায় লিখে সংখ্যাটিকে ছয় অঙ্ক বিশিষ্ট করো (যেমন 425425) । তোমার এই নতুন সংখ্যাটি 7, 11, এবং 13 দ্বারা বিভাজ্য।

A1.6 সারসংক্ষেপ (Summary) :

এই পরিশিষ্টে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছ:

1. গণিতে কোনো বিবৃতি শুধুমাত্র তখনই গ্রহনীয় হবে যদি এটি সর্বদা সত্য বা সর্বদা মিথ্যা হয়।
2. একটি গাণিতিক বিবৃতি অসত্য প্রমাণ করতে একটি মাত্র বিপরীত উদাহরণই যথেষ্ট।
3. স্বতঃসিদ্ধগুলো হল এমন ধরণের উক্তি যেগুলোকে প্রমাণ ছাড়াই সত্য বলে মেনে নেওয়া যায়।
4. অনুমান হল একটি উক্তি যাকে আমরা গাণিতিক অনুভূতির সাহায্যে সত্য বলে বিশ্বাস করি, কিন্তু এটিকে এখনও সত্য বলে প্রমাণিত হয়নি।
5. যে সমস্ত গাণিতিক বিবৃতি সত্য বলে প্রমাণিত, তাকে উপপাদ্য বলে।
6. গাণিতিক বিবৃতি প্রমাণের যুক্তিপূর্ণ উপায় হল— অবরোহী যুক্তির ব্যবহার।
7. একটি প্রমাণ হল গাণিতিক বিবৃতিগুলোর ধারাবাহিক অনুক্রম। প্রমাণ করার সময় ব্যবহৃত প্রত্যেকটি বিবৃতি যুক্তিযুক্ত ভাবে পূর্ববর্তী কোনো জ্ঞাত বিবৃতি বা পূর্বে প্রমাণিত উপপাদ্য বা স্বতঃসিদ্ধ বা প্রকল্প থেকে অর্জন করা হয়।

পরিশিষ্ট - 2

গাণিতিক মডেলিং এর পরিচয় (INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELLING)

A2.1 ভূমিকা (Introduction)

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে তোমাদের চারপাশে বাস্তব জগতের সাথে সম্পর্কযুক্ত সমস্যার সমাধান করেছ। উদাহরণস্বরূপ, তোমরা সূত্র প্রয়োগের মাধ্যমে সরল সুদের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করেছ। এখানে সূত্রটি (বা সমীকরণটি) সুদ এবং অপর তিনটি রাশি যেমন, মূলধন, সুদের হার এবং সময় এই তিনটির মাঝে সম্পর্ক বোঝায়। এই সূত্রটি **গাণিতিক মডেলের** একটি উদাহরণ। **গাণিতিক মডেলিং** হল একটি গাণিতিক সম্পর্ক যা বাস্তব জীবনের পরিস্থিতিকে বিবৃত করে।

গাণিতিক মডেলগুলো বাস্তব জীবনের বহু সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ব্যাবহৃত হয়ে থাকে। যেমন—

একটি উপগ্রহ উৎক্ষেপণে।

মৌসুমী বায়ু আগমনের পূর্বাভাসে।

যানবাহনজনিত দূষণে।

বড়ো শহরগুলোতে যানজট হ্রাসে।

এ অধ্যায়ে, আমরা তোমাদেরকে গাণিতিক মডেল প্রস্তুতির পদ্ধতিগুলো সম্পর্কে পরিচিত করব, যাকে বলা হয় **গাণিতিক মডেলিং**। বাস্তব জগতের সমস্যাকে গাণিতিক মডেলিং-এর মাধ্যমে গণিত সমস্যার সমতুল্য করে প্রকাশ করা হয়। তারপর আমরা এই গাণিতিক সমস্যার সমাধান করি এবং এই সমাধানকে বাস্তব জগতের সমস্যার সাথে মিল রেখে ব্যাখ্যা করে থাকি। এর পর উক্ত সমাধান বাস্তব জগতের সমস্যায় কতটুকু প্রযোজ্য তা আমরা পর্যবেক্ষণ করি। সুতরাং গাণিতিক মডেলিং এর সাথে সম্পর্কিত স্তরগুলো হল সূত্রকরণ, সমাধান, ব্যাখ্যা এবং বৈধতা যাচাই।

A2.1 বিভাগে বর্ণনামূলক সমস্যা সমাধানে তোমরা যে পদ্ধতি ব্যবহার করেছ সেদিকটা লক্ষ রেখে আমরা শুরু করব। তোমরা আগের শ্রেণিগুলোতে যেসব বিবরণমূলক সমস্যাগুলোর সমাধান করেছ তাদেরই অনুরূপ বর্ণনামূলক কিছু সমস্যা নিয়ে এখানে আমরা আলোচনা করব। পরে আমরা দেখতে পাব বিবৃতিমূলক সমস্যা সমাধানে যেসব ধাপ ব্যবহৃত হয়েছে তাদের কয়েকটি গাণিতিক মডেলিং এর ক্ষেত্রেও ব্যবহৃত হয়।

পরবর্তী বিভাগ A2.3 তে আমরা কিছু সরল মডেলিং সম্পর্কে আলোচনা করব।

A2.4 বিভাগে গাণিতিক মডেলিং এর ব্যাপকতা, এর সুবিধা এবং সীমাবদ্ধতা নিয়ে আলোচনা করব।

A2.2 বিবৃতিমূলক সমস্যার পর্যালোচনা (Review of Word Problems)

এ পর্যায়ে কিছু বিবৃতিমূলক সমস্যা নিয়ে আমরা আলোচনা করব যেগুলোর অনুরূপ তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিগুলোতে সমাধান করেছ।

উদাহরণ 1 : আমি গাড়ি দিয়ে 48 লিটার পেট্রোলে 432 কিমি অতিক্রম করলাম। গাড়ি করে আমাকে 180 কিলোমিটার দূরে একটি জায়গায় যেতে হবে। তাতে আমার কী পরিমাণ পেট্রোল দরকার হবে?

সমাধান 1: আমরা এ সমস্যা সমাধানের সাথে যুক্ত ধাপগুলোর তালিকা তৈরি করব।

ধাপ 1 : সূত্রকরণ (**Formulation**) তোমরা জান যে, বেশি দূরত্ব অতিক্রম করলে বেশি পেট্রোল লাগে। অর্থাৎ প্রয়োজনীয় পেট্রোলের পরিমাণ আমাদের ভ্রমণে অতিক্রান্ত দূরত্বের সহিত প্রত্যক্ষ ভেদে আছে।

432 কিমি ভ্রমণে পেট্রোলের দরকার হয় = 48 লিটার

180 কিমি ভ্রমণে পেট্রোলের দরকার হবে = ?

গাণিতিক বিবরণ (Mathematical Description):

ধরি

x = আমার অতিক্রান্ত দূরত্ব

y = আমার প্রয়োজনীয় পেট্রোলের পরিমাণ

y, x এর সাথে প্রত্যক্ষ ভেদে আছে।

সুতরাং, $y = kx$ যেখানে k একটি ধ্রুবক ।

সুতরাং,

48 লিটার পেট্রোল দিয়ে আমি 432 কিলোমিটার দূরত্ব ভ্রমণ করতে পারি।

সুতরাং, $y = 48, x = 432.$

অতএব, $k = \frac{y}{x} = \frac{48}{432} = \frac{1}{9}.$

যেহেতু, $y = kx,$

অতএব, $$y = \frac{1}{9}x \qquad (1)$$

সমীকরণ বা সূত্র (1) প্রয়োজনীয় পেট্রোল এবং ভ্রমণ করা দূরত্বের সম্পর্ক বর্ণনা করে।

ধাপ 2 : সমাধান : আমরা 180 কিলোমিটার দূরত্ব ভ্রমণে প্রয়োজনীয় পেট্রোলের পরিমাণ নির্ণয় করতে চাই। সুতরাং, আমাদের y এর মান নির্ণয় করতে হবে যখন $x = 180$ হয়, (1) নং সমীকরণে $x = 180$ বসিয়ে পাই

$$y = \frac{180}{9} = 20.$$

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা: যেহেতু $y = 20$, অতএব 180 কিলোমিটার ভ্রমণ করতে আমাদের 20 লিটার পেট্রোলের প্রয়োজন।

তোমাদের মনে হতে পারে— যে সূত্র (1), সকল ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা সম্ভব হবে কি না? উদাহরণস্বরূপ, মনে করো 432 কিমি রাস্তা পাহাড় পর্বতের মধ্য দিয়ে এবং 180 কিমি রাস্তা সমতলের উপর দিয়ে অতিক্রম করছে। উপরোক্ত প্রথম রাস্তা বরাবর গাড়িতে দ্রুত হারে পেট্রোল খরচ হয়, তাই একই হারে 180 কিমি রাস্তায় পেট্রোল খরচ হয় না, যেখানে পেট্রোল খরচের হার কম। সুতরাং উপরে উল্লিখিত সূত্র তখনই ব্যাবহৃত হবে যদি দুটি ভ্রমণের ক্ষেত্রে সমহারে পেট্রোল খরচ হয় অথবা উপরোক্ত পরিস্থিতির সামান্য পার্থক্য হলে, গাড়িতে পেট্রোল খরচের পরিমাণের ও কিছুটা পার্থক্য হবে। একমাত্র যে সকল ক্ষেত্রে ভ্রমণে অতিক্রান্ত দূরত্ব ও পেট্রোলের পরিমান প্রত্যক্ষ ভেদে থাকে। সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে আমরা এটা ধরে নেব।

উদাহরণ 2 : ধরো সুধীর বছরে 8% সরল সুদের হারে 15,000 টাকা বিনিয়োগ করল। এটা থেকে প্রাপ্ত সুদসহ 19,000 টাকা দামের একটি ওয়াশিং মেশিন সে কিনতে চায়। কত সময় 15,000 টাকা খাটালে সে ওয়াশিং মেশিনটি কিনতে পারবে?

সমাধান : ধাপ 1 : সমস্যাটির সূত্রীকরণ : এখানে আমাদের মূলধন এবং সুদের হার জানা আছে। ওয়াশিং মেশিন কেনার জন্য সুধীরের 15,000 টাকার সাথে আরও যে পরিমাণ টাকার প্রয়োজন তা আসবে সুদ থেকে। এখন আমাদের সময় নির্ণয় করতে হবে।

গাণিতিক বিবরণ: সরল সুদ নির্ণয়ের সূত্রটি হল, $\mathrm{I} = \frac{Pnr}{100}$

যেখানে, P = মূলধন,

n = বছরের সংখ্যা,

r % = সুদের হার,

I = অর্জিত সুদ।

এখানে, মূলধন = 15,000 টাকা

ওয়াশিং মেশিন কেনার জন্য সুধীরের দরকার = 19,000 টাকা

সুতরাং, সুদ থেকে পেতে হবে = (19,000 – 15,000) টাকা = 4,000 টাকা

যে সময়ের জন্য টাকা জমা রাখা হয় = n

8% হার সুদে 15,000 টাকার n বছরের সুদ = I

তাহলে, $$\mathrm{I} = \frac{15000 \times n \times 8}{100}$$

সুতরাং, $\mathrm{I} = 1200n$ (1)

এটি সময় ও সুদের মধ্যবর্তী সম্পর্ক ব্যক্ত করে, যদি 15000 টাকা খাটানো হয় বার্ষিক 8%. হার সুদে।

4000 টাকা সুদ পাওয়ার জন্য আমাদের সময় বের করতে হবে। (1) নং-এ $\mathrm{I} = 4000$ বসিয়ে পাই

$$4000 = 1200n \qquad (2)$$

ধাপ 2 : সমস্যাটির সমাধান : (2) নং সমীকরণকে সমাধান করে পাই

$$n = \frac{4000}{1200} = 3\frac{1}{3}.$$

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা : যেহেতু $n = 3\frac{1}{3}$ এবং এক বছরের এক-তৃতীয়াংশ হল 4 মাস, সুতরাং 3 বছর 4 মাস পর সুধীর ওয়াশিং মেশিনটি ক্রয় করতে পারবে।

উপরের উদাহরণে যে বিষয়টি সত্য হিসেবে ধরতে হবে তা কি তোমরা অনুমান করতে পার? সুদ নির্ণয়ে আমাদের ধরে নিতে হবে, প্রদত্ত সময়ান্তরে সুদের হার একই থাকবে। অপরপক্ষে $\mathrm{I} = \frac{Pnr}{100}$ সূত্রটি প্রযোজ্য হবে না। আরও একটি অনুমান আমাদেরকে করতে হবে, যে সময়ের মধ্যে সুধীর টাকা সংগ্রহ করবে সে সময়ের মধ্যে ওয়াশিং মেশিনের দাম বাড়বে না।

উদাহরণ 3 : স্রোতের প্রতিকূলে যাত্রা করে একটি মোটরচালিত নৌকা নদীতীরে অবস্থিত দুটি শহরের মধ্যবর্তী দূরত্ব 6 ঘণ্টায় অতিক্রম করে। স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব অতিক্রম করতে এর সময় লাগে 5 ঘণ্টা। যদি স্রোতের বেগ 2 কিমি/ঘণ্টা হয়, তবে স্থির জলে নৌকার বেগ নির্ণয় করো।

সমাধান : ধাপ 1 : সূত্রকরণ: আমরা স্রোতের বেগ এবং দুটি স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব সম্পর্কে জানি। স্থির জলে আমাদের নৌকার বেগ নির্ণয় করতে হবে।

গাণিতিক বিবরণ: ধরো নৌকার বেগ x , সময় t এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব y, তাহলে

$$y = tx \qquad (1)$$

ধরো দুটি স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব d

স্রোতের প্রতিকূলে যেতে নৌকার বেগ

= নৌকার বেগ — স্রোতের বেগ (কারণ নৌকা স্রোতের প্রতিকূলে যাচ্ছে)।

সুতরাং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ = $(x - 2)$ কিমি / ঘণ্টা

স্রোতের প্রতিকূলে 6 ঘন্টায় নির্ধারিত দূরত্ব অতিক্রম করে।

সুতরাং (1) নং থেকে আমরা পাই $d = 6(x - 2)$ (2)

স্রোতের অনুকূলে যাওয়ার সময় স্রোতের বেগ নৌকার বেগের সাথে যোগ করতে হবে।

সুতরাং স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতিবেগ = $(x + 2)$ কিমি/ঘণ্টা

স্রোতের অনুকূলে একই দূরত্ব অতিক্রম করতে নৌকাটির 5 ঘণ্টা সময় লাগে। সুতরাং

$$d = 5(x + 2) \tag{3}$$

(2) নং এবং (3) নং থেকে পাই

$$5(x + 2) = 6(x - 2) \tag{4}$$

ধাপ 2 : সমাধান নির্ণয়:

(4) নং থেকে x এর সমাধান পাই $x = 22$

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা :

যেহেতু $x = 22$, অতএব স্থির জলে নৌকার গতিবেগ 22 কিমি/ঘণ্টা।

উপরের উদাহরণে, আমরা জানি যে নৌকার বেগ সর্বত্র সমান নয়। নদীর তীরবর্তী অঞ্চলে ধীর গতিতে এবং মধ্যবর্তী অঞ্চলে দ্রুতগতিতে প্রবাহিত হয়। নৌকাটি নদীতীর থেকে মাঝ দিকে গতিশীল হয়। যখন নৌকাটি গন্তব্যস্থলে এসে তীরবর্তী হয়, তখন এর গতি কমে যায়। সুতরাং নৌকার বেগ নদীর মধ্যবর্তী অঞ্চল এবং তীরবর্তী অঞ্চলে সামান্য পার্থক্য থাকে। যেহেতু খুব অল্প সময়ে নৌকাটি তীরে এসে পৌছায় সেজন্য গতির এই সামান্য পার্থক্য অতি অল্প সময়ের জন্য নৌকার বেগকে প্রভাবিত করে। সুতরাং গতিবেগের এই সামান্য পার্থক্যকে আমরা অগ্রাহ্য করতে পারি। নদীর গতিবেগ ছাড়া, জল এবং পৃষ্ঠদেশের মধ্যে যে ঘর্ষণ হয় তাও নৌকার প্রকৃত গতিবেগকে প্রভাবিত করে। আমরা ধরে নিতে পারি এর প্রভাবও খুব কম।

সুতরাং, আমরা অনুমান করি যে

1. নৌকা ও নদীর বেগ সর্বদা একই থাকে।
2. নৌকার পৃষ্ঠদেশ ও জলের ঘর্ষণ এবং বাতাসের জন্য ঘর্ষণের প্রভাব খুবই নগণ্য।

উপরে উল্লিখিত অনুমান (প্রকল্প) গুলোর মাধ্যমে আমরা স্থির জলে নৌকার গতিবেগ নির্ণয় করতে পেরেছি।

উপরে বর্ণিত বিবৃতিমূলক সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি যে, একটি বিবৃতিমূলক সমস্যা সমাধান তিনটি ধাপের মাধ্যমে হয়।

1. **সূত্রকরণ :** আমরা সমস্যাটিকে বিশ্লেষণ করি এবং যে বিষয়টির সমস্যাটি সমাধানে অধিকতর প্রভাব তা লক্ষ করি। সে বিষয়গুলো হল **প্রাসঙ্গিক বিষয়।** প্রথম উদাহরণে, প্রাসঙ্গিক বিষয়গুলো হল অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং ব্যাবহৃত পেট্রোল। অন্যান্য বিষয়গুলো যেমন গতিপথের প্রকৃতি, চালানোর বেগ ইত্যাদি আমরা অগ্রাহ্য করি। নতুবা এই সমস্যা সমাধান খুবই কঠিন হত। যে বিষয়গুলোকে আমরা গ্রাহ্য করি না সেগুলো হল **অপ্রাসঙ্গিক বিষয়।**

এক বা একাধিক গাণিতিক সমীকরণের আকারে তখন আমরা সমস্যাটির গাণিতিক প্রকাশ করি।

2. **সমাধান:** ধাপ 1 এ প্রাপ্ত সমীকরণ গুলোর উপযুক্ত পদ্ধতিতে সমাধানের মাধ্যমে এই সমস্যার সমাধান নির্ণয় করি।
3. **ব্যাখ্যা :** আমরা লক্ষ করি ধাপ 2 এ প্রাপ্ত সমাধান প্রকৃত বিবৃতিমূলক সমস্যার সহিত সঙ্গাতিপূর্ণ।

এখানে তোমাদেরকে কয়েকটি অনুশীলনের জন্য দেওয়া হয়েছে। নিম্নলিখিত সমস্যাগুলোর ক্ষেত্রে বিবৃতিমূলক সমস্যা সমাধানে যে তিনটি ধাপ বলা হয়েছে সেগুলো ব্যবহারের মাধ্যমে সমাধান করে তোমাদের বোধগম্যতা যাচাই করতে পারো।

অনুশীলনী A2.1

নিচে প্রদত্ত সমস্যাগুলোর প্রতিটির সমাধানে উল্লিখিত ধাপ 1, 2 এবং 3 এর ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক ও অপ্রাসঙ্গিক বিষয়গুলো স্পষ্ট করে লিখো।

1. মনে করো একটি কোম্পানিতে কিছু সময়ের জন্য একটি কম্পিউটারের প্রয়োজন। কোম্পানি হয় প্রতিমাসে 2000 টাকা দিয়ে একটি কম্পিউটার ভাড়া করতে পারে নতুবা 25000 টাকার বিনিময়ে একটি কম্পিউটার ক্রয় করতে পারে। কোম্পানির যদি দীর্ঘদিনের জন্য কম্পিউটারটিকে ব্যবহার করতে হয় তাহলে এত বেশি ভাড়া দিতে হবে, তার চেয়ে একটি কম্পিউটার ক্রয় করা কোম্পানির পক্ষে লাভজনক হবে। অপরদিকে, ধরো কম্পিউটারটি যদি কোম্পানির শুধু এক মাসের জন্য ব্যবহার করতে হয়ে, তবে কম্পিউটারটি ভাড়া করা লাভজনক হবে। কম্পিউটার ব্যাবহারের প্রয়োজন কত মাসের বেশি হলে কম্পিউটারটি ক্রয় করা কোম্পানির পক্ষে লাভজনক হবে তা নির্ণয় করো।
2. ধরো একটি গাড়ি A স্থান থেকে B স্থানের দিকে 40 কিমি/ঘণ্টা বেগে যাত্রা শুরু করে। একই সময়ে অপর একটি গাড়ি B থেকে A এর দিকে 30 কিমি/ঘণ্টা বেগে রওনা হল। যদি A ও B এর মধ্যবর্তী দূরত্ব 100 কিমি হয়, তবে কত সময় পর গাড়ি দুটি একে অপরকে সাক্ষাৎ করবে?
3. চাঁদ পৃথিবী থেকে প্রায় 3,84,000 কিমি দূরে অবস্থিত এবং পৃথিবীর চতুর্দিকে ওর পরিভ্রমণের কক্ষপথ অনেকটাই বৃত্তাকার। এর কক্ষপথ বরাবর পৃথিবীকে প্রদক্ষিণের গতিবেগ নির্ণয় করো, ধরে নাও এটি নিজ কক্ষপথে 24 ঘণ্টায় পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে। (π=**3.14** ব্যবহার করো)
4. একটি পরিবার জল গরমের চুল্লি (water heater) ব্যাবহার না করলে প্রতিমাসে গড়ে 1000 টাকা বিদ্যুৎ মাসুল দেয়। যে সব মাসে ঐ পরিবারটি চুল্লি ব্যাবহার করে সে সব মাসে গড়ে 1240 টাকা বিদ্যুৎ মাসুল দেয়। চুল্লি ব্যাবহারে প্রতি ঘণ্টায় খরচ 8 টাকা হলে চুল্লিটি গড়ে প্রতিদিন কত ঘণ্টা করে ব্যাবহৃত হয়?

A2.3 কয়েকটি গাণিতিক মডেল (Some Mathematical Models)

এতক্ষণ পর্যন্ত আমাদের আলোচনায় নতুন কিছুই ছিল না। এই বিভাগে আমরা পূর্বে আলোচিত তিনটি ধাপের সাথে নতুন একটি ধাপ যুক্ত করতে যাচ্ছি। এই ধাপকে বলা হয় বৈধতা (*validation*)। বৈধতা মানে কি? চলো আমরা দেখি। বাস্তব জীবনের পরিস্থিতিতে, আমরা এমন কোনো মডেল গ্রহণ

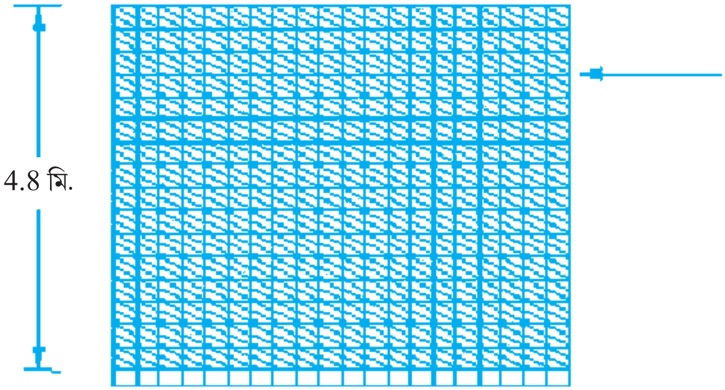
করি না, যার সাথে বাস্তবতার মিল নেই। বাস্তবতার সাপেক্ষে উত্তর যাচাই-এর পদ্ধতি এবং যদি প্রয়োজন হয়, তবে গাণিতিক বিবরণের পরিবর্তন করাকে বৈধতা বলে।

এটি গাণিতিক মডেলের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপ। এই বিভাগে আমরা তোমাদের এই ধাপের সাথে পরিচিত করব।

প্রথমে, চলো আমরা একটি উদাহরণ লক্ষ করি, যেখানে বৈধতার প্রয়োজনে কোনো পরিবর্তনের দরকার হয় না।

উদাহরণ 4 : মনে করো, 6 মি দৈর্ঘ্য এবং 5 মি. প্রস্থ বিশিষ্ট তোমার একটি ঘর আছে। তুমি ঘরের মেঝেটাকে 30 সেমি বাহু বিশিষ্ট বর্গাকার মোজাইক টালি দিয়ে আবৃত করতে চাও। তোমার কয়টি টালির প্রয়োজন হবে? গাণিতিক মডেল গঠনের মাধ্যমে সমস্যাটি সমাধান করো।

সমাধান: সূত্রকরণ: এই সমস্যাটির সমাধানে প্রথমে আমাদের ঘরটির ক্ষেত্রফল এবং টালির ক্ষেত্রফল নিয়ে ভাবতে হবে। টালির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 0.3 মি। যেহেতু ঘরটির দৈর্ঘ্য 6 মি, অতএব ঘরটির দৈর্ঘ বরাবর আমরা একটি সারিতে $\frac{6}{0.3} = 20$ টি টালি বসাতে পারি (চিত্র **A2.1**দেখো)।



চিত্র **A2.1**

যেহেতু ঘরটির প্রস্থ 5 মি, আমরা পাই $\frac{5}{0.3} = 16.67$ সুতরাং প্রস্থ বরাবর আমরা 16টি টালি বসাতে পারি। যেহেতু $16 \times 0.3 = 4.8$, অতএব $5 - 4.8 = 0.2$ মিটার প্রস্থ বরাবর আচ্ছাদন করা যাবে না। অন্য টালি কেটে এই অংশটিকে আচ্ছাদন করতে হবে। প্রস্থ বরাবর অনাচ্ছাদিত 0.2মি, যা 0.3মি দৈর্ঘ্যের টালির অর্ধেক অংশ থেকে বেশি। ফলে 0.3মি টালিকে সমান দুভাগে ভাগ করে উভয় অংশ আচ্ছাদনের কাজে ব্যবহার করা যাবে না।

গাণিতিক বিবরণ: আমরা পাই—

মোট টালির প্রয়োজনীয় সংখ্যা = (দৈর্ঘ্য বরাবর ব্যবহৃত টালির সংখ্যা) × (প্রস্থ বরাবর ব্যবহৃত টালির সংখ্যা) + (অনাচ্ছাদিত অংশে ব্যবহৃত টালির সংখ্যা) .... (1)

সমাধান: যেহেতু আমরা উপরে উল্লেখ করেছি, দৈর্ঘ্য বরাবর টালির সংখ্যা 20 এবং প্রস্থ বরাবর টালির সংখ্যা 16, তাই শেষের সারিতে আরও 20টি টালির প্রয়োজন। (1) নং এ মানগুলো বসিয়ে পাই

$$(20 \times 16) + 20 = 320 + 20 = 340.$$

ব্যাখ্যা: মেঝেটি ঢাকতে আমাদের 340 টি টালি দরকার।

বৈধতা: বাস্তব ক্ষেত্রে, টালি কাটতে কিছু টালি নষ্ট হয়ে যেতে পারে ভেবে রাজমিস্ত্রি তোমাকে প্রয়োজনের অতিরিক্ত কিছু টালির কথা বলতে পারে। অবশ্য রাজমিস্ত্রির দক্ষতার উপর টালির সংখ্যা নির্ভর করবে। কিন্তু তাই বলে আমাদের (1) নং সমীকরণটির পরিবর্তনের প্রয়োজন নেই। এটি তোমাকে প্রয়োজনীয় টালি সংখ্যা সম্বন্ধে মোটামোটি একটি ধারণা দেবে। অতএব এখানেই আমরা শেষ করতে পারি।

চলো আমরা এখন অন্য একটি পরিস্থিতি পর্যবেক্ষণ করি।

উদাহরণ 5 : রাষ্ট্রসংঘের 191 টি দেশ, 2000 সালে একটি ঘোষণাপত্রে স্বাক্ষর করেছিল। 2015 সালের মধ্যে কিছু নির্দিষ্ট উন্নয়নমূলক লক্ষ্যে পৌছানোর জন্য এই ঘোষণাপত্রে দেশগুলো একমত হয়েছিল। এগুলোকে সহস্রাব্দের বিকাশমূলক লক্ষ্য *(millennium development goals)* বলা হয়। এদের মধ্যে একটি লক্ষ হল লিঙ্গা সমতাকে আরও বিকাশসাধন করা। এই লক্ষ্যে পৌছানোর একটি নির্দেশক হচ্ছে প্রাথমিক, মাধ্যমিক এবং তৃতীয় পর্যায়ের শিক্ষায় ছেলেমেয়েদের অনুপাত। এই অনুপাতকে বাড়িয়ে সমতা আনার লক্ষ্যে ভারতবর্ষও ঘোষণাপত্রে স্বাক্ষর করে অঙ্গীকারবন্ধ হয়। প্রাথমিক বিদ্যালয়গুলোতে বালিকাদের অর্ন্তভূক্তির একটি শতকরা রাশিতথ্য সারণি A2.1 এ দেওয়া হল।

সারণী A2.1

সাল	অন্তর্ভুক্তিকরণ (%)
1991-92	41.9
1992-93	42.6
1993-94	42.7
1994-95	42.9
1995-96	43.1
1996-97	43.2
1997-98	43.5
1998-99	43.5
1999-2000	43.6*
2000-01	43.7*
2001-02	44.1*

উৎস: শিক্ষাগত রাশি বিজ্ঞান, শিক্ষা বিভাগের ওয়েবপেজ, GOI

* মূল রাশিতথ্য নির্দেশ করে।

প্রদত্ত তথ্য ব্যবহার করে কোন্ ক্ষেত্রে বালিকাদের অন্তর্ভক্তিকরণের হার বৃদ্ধি পেয়েছে তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা করো এবং কোন্ সালে বালিকাদের অন্তর্ভূক্তিকরণ 50% এ পৌঁছোবে তা নির্ণয় করো।

সমাধান: চলো আমরা প্রথমে প্রদত্ত সমস্যাটিকে গাণিতিক সমস্যায় রূপান্তরিত করি।

ধাপ 1 : সূত্রকরণ: সারণি A2.1 তে 1991-92 এবং 1992-93 ইত্যাদি সালগুলোতে অন্তর্ভূক্তিকরণ বোঝাচ্ছে। যেহেতু ছাত্রছাত্রীরা বছরের শুরুতেই ভর্তি হয় সেজন্য বছরগুলোকে আমরা 1991, 1992 ইত্যাদি রূপে নিতে পারি। চলো আমরা ধরে নিই সারণি A2.1 এ প্রাথমিক বিদ্যালয়ে বালিকাদের শতকরা হার ক্রমাগত সমহারে বাড়বে। সুতরাং এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট কোনো বছরের চেয়ে বছরের সংখ্যাগুলো অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ। (অনুরূপ পরিস্থিতির বর্ণনায়, ধরা যাক 1500 টাকার 8% হার সুদে 3 বছরের অর্থাৎ 1999 থেকে 2002 সাল অথবা 2001 থেকে 2004 সাল তা আমাদের মুখ্য বিষয় নয়। এখানে বছরগুলোতে সুদের হার হল সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ বিবেচ্য বিষয়)। এখানেও আমরা 1991 সনের অন্তর্ভুক্তিকরণের সাথে পরবর্তী বছরগুলোর তুলনা করে দেখব কী হারে তা বৃদ্ধি পেয়েছে। চলো আমরা 1991 সালকে 0 (শূন্য) বছর এবং 1992 কে 1 লিখি যেহেতু 1991 থেকে 1992 হতে 1 বছর অতিক্রম হয়। একই রকম ভাবে আমরা 1993 এর জায়গায় 2, 1994-এর জায়গায় 3 ইত্যাদি লিখতে পারি। সুতরাং সারণি A2.1 এখন সারণি A2.2-এর মতো হবে।

সারণী A2.2

সাল	অন্তর্ভুক্তিকরণ (%)
0	41.9
1	42.6
2	42.7
3	42.9
4	43.1
5	43.2
6	43.5
7	43.5
8	43.6
9	43.7
10	44.1

নিচের সারণিতে অন্তর্ভুক্তিকরণের বৃদ্ধি দেওয়া হল—

সারণি A2.3

সাল	অন্তর্ভুক্তিকরণ (%)	বৃদ্ধি
0	41.9	0
1	42.6	0.7
2	42.7	0.1
3	42.9	0.2
4	43.1	0.2
5	43.2	0.1
6	43.5	0.3
7	43.5	0
8	43.6	0.1
9	43.7	0.1
10	44.1	0.4

1991 সাল থেকে 1992 সাল পর্যন্ত এই একবছরে অন্তর্ভুক্তিকরণ হয়েছে 41.9% থেকে 42.6% অর্থাৎ বৃদ্ধি পেয়েছে 0.7%। দ্বিতীয় বছর শেষে শতকরা হারের পরিবর্তন 42.6% থেকে 42.7% হয়েছে অর্থাৎ 0.1% বৃদ্ধি পেয়েছে। উপরের সারণি থেকে আমরা বছরের সংখ্যা ও শতকরা হারের মধ্যবর্তী কোনো নির্দিষ্ট সম্পর্ক পাই না। কিন্তু এই বৃদ্ধির হার মোটামোটি স্থির। কেবল প্রথম সাল ও দশম সালের মধ্যে একটি ব্যাবধান লক্ষ করা যায়। এই মানগুলোর গড়মান হল—

$$\frac{0.7 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0 + 0.1 + 0.1 + 0.4}{10} = 0.22$$

চলো আমরা ধরে নিই অন্তর্ভুক্তিকরণ স্থিরভাবে শতকরা 0.22 হারে বৃদ্ধি পায়।

গাণিতিক বিবরণ: আমরা ধরে নিয়েছিলাম অন্তর্ভুক্তিকরণ স্থিরভাবে বছরে 0.22% হারে বৃদ্ধি পায়।

সুতরাং, প্রথম সালে অন্তর্ভুক্তিকরণের শতকরা হার = 41.9 + 0.22

দ্বিতীয় সালে অন্তর্ভুক্তিকরণের শতকরা হার = 41.9 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 2 × 0.22

তৃতীয় সালে অন্তর্ভুক্তিকরণের শতকরা হার = 41.9 + 0.22 + 0.22 + 0.22 = 41.9 + 3 × 0.22

সুতরাং, n তম সালে অন্তর্ভুক্তিকরণের শতকরা হার= $41.9 + 0.22n$, যেখানে $n \geq 1$. (1)

এখন, অন্তর্ভূক্তিকরণ 50% এ পৌছুঁতে প্রয়োজনীয় বছরের সংখ্যা আমাদেরকে নির্ণয় করতে হবে। সুতরাং, আমরা সূত্র বা সমীকরণ থেকে n এর মান নির্ণয় করব

$$50 = 41.9 + 0.22n \qquad (2)$$

ধাপ 2: সমাধান : (2) নং এর সমাধান করে, আমরা পাই—

$$n = \frac{50 - 41.9}{0.22} = \frac{8.1}{0.22} = 36.8$$

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা: যেহেতু বছরের সংখ্যা অখণ্ড মানে হয়, সুতরাং আমরা পরবর্তী অখণ্ডসংখ্যা 37 কে নেব। অতএব, অন্তর্ভূক্তিকরণ 50% এ গিয়ে পৌছুঁবে 1991 + 37 = 2028 সালে।

বিবৃতিমূলক সমস্যার ক্ষেত্রে, আমরা সাধারণত এখানেই শেষ করব। কিন্তু, যেহেতু আমরা বাস্তব পরিস্থিতির সমস্যা নিয়ে অনুধাবন করছি, আমাদেরকে দেখতে হবে বাস্তব পরিস্থিতির সাথে এই মান কতটুকু গ্রাহ্য।

ধাপ 4 : বৈধতা: চলো আমরা বাস্তবতার সাথে সূত্র (2) এর মিল কতটুকু যাঁচাই করি। চলো আমরা বিভিন্ন সালের জ্ঞাত ফলাফলগুলোকে সূত্র (2)-এর প্রয়োগে নির্ণয় করে এদের মধ্যে পার্থক্য নিরূপণ করি। মানগুলো সারণি A2.4 এ দেওয়া হল

সারণি A2.4

সাল	অন্তর্ভুক্তিকরণ (%)	(২) থেকে প্রাপ্ত মান (%)	পার্থক্য (%)
0	41.9	41.90	0
1	42.6	42.12	0.48
2	42.7	42.34	0.36
3	42.9	42.56	0.34
4	43.1	42.78	0.32
5	43.2	43.00	0.20
6	43.5	43.22	0.28
7	43.5	43.44	0.06
8	43.6	43.66	–0.06
9	43.7	43.88	–0.18
10	44.1	44.10	0.00

তোমরা দেখছ যে, (2) নং সূত্র থেকে প্রাপ্ত মানগুলোর সাথে প্রকৃত মানগুলোর পার্থক্য 0.3% বা এমন কি 0.5% এর কম। যেহেতু প্রতি বছর বৃদ্ধির হার 1% থেকে 2%, ফলে সময়ের পার্থক্য 3 থেকে 5 বছর হতে পারে। আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি যে এই পার্থক্য গ্রহণযোগ্য এবং এখানেই আমরা শেষ করতে পারি।

এক্ষেত্রে, (2) নং সমীকরণ হল আমাদের গাণিতিক মডেল।

মনে করো, আমরা মেনে নিলাম যে এখানে ত্রুটি অনেক বেশি এবং এই মডেলকে আমাদের উন্নতি সাধন করতে হবে। চলো আমরা তা করি।

ধাপ 1: পুন:সূত্রকরণ : আমরা এখনও মনে করতে পারি যে মানগুলো সমহারে 0.22% করে বৃদ্ধি পায়। কিন্তু এই ত্রুটি হ্রাসের জন্য আমাদের একটি সংশোধক ফ্যাক্টর যুক্ত করতে হবে। তার জন্য আমাদের সব পার্থক্যগুলোর গড়মান নির্ণয় করতে হবে। এটি হল

$$\frac{0 + 0.48 + 0.36 + 0.34 + 0.32 + 0.2 + 0.28 + 0.06 - 0.06 - 0.18 + 0}{10}$$

এখন আমরা ত্রুটির গড়মান নিয়ে আমাদের সূত্রকে এ মান দ্বারা সংশোধন করব।

সংশোধিত গাণিতিক বিবৃতি: চলো আমরা এখন ত্রুটির গড়মানের সাথে (2) নং এর অন্তর্ভূক্তি করণের শতকরা হারে যোগ করি। সুতরাং, আমাদের সংশোধিত সূত্র হল:

n তম বছরে অন্তর্ভূক্তিকরণের শতকরা হার $= 41.9 + 0.22n + 0.18 = 42.08 + 0.22n$

যেখানে $n > 1$ (3)

আমরা সমীকরণ (2)-এরও যথাযথ পরিবর্তন করব। n -এর জন্য নূতন সমীকরণ হল:

$$50 = 42.08 + 0.22n \quad (4)$$

ধাপ 2 : পরিবর্তিত সমাধান: n-এর জন্য সমীকরণ(4) এর সমাধান করে পাই—

$$n = \frac{50 - 42.08}{0.22} = \frac{7.92}{0.22} = 36$$

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা: যেহেতু $n = 36$, প্রাথমিক বিদ্যালয়গুলোতে বালিকাদের অন্তর্ভূক্তি 50%-এ পৌঁছুবে $1991 + 36 = 2027$ সালে।

ধাপ 4 : বৈধতা: চলো আমরা আরও একবার (4) নং সূত্র প্রয়োগে প্রাপ্ত মানগুলোর সাথে প্রকৃত মানগুলোর তুলনা করি। সারণি A2.5-তে এর তুলনা করা হল -

সারণি **A2.5**

সাল	অন্তর্ভুক্তিকরণ (%)	(2) থেকে প্রাপ্ত মান সমূহ	মানগুলোর অন্তর	(4) থেকে প্রাপ্ত মানগুলো	মানগুলোর অন্তর
0	41.9	41.90	0	41.9	0
1	42.6	42.12	0.48	42.3	0.3
2	42.7	42.34	0.36	42.52	0.18
3	42.9	42.56	0.34	42.74	0.16
4	43.1	42.78	0.32	42.96	0.14
5	43.2	43.00	0.2	43.18	0.02
6	43.5	43.22	0.28	43.4	0.1
7	43.5	43.44	0.06	43.62	– 0.12
8	43.6	43.66	– 0.06	43.84	– 0.24
9	43.7	43.88	– 0.18	44.06	– 0.36
10	44.1	44.10	0	44.28	– 0.18

তোমরা দেখেছ যে, (2) নং সূত্র থেকে প্রাপ্ত মানগুলোর চেয়ে (4) নং সূত্র ব্যাবহারে প্রাপ্ত মানগুলো প্রকৃত মানের অনেকটাই কাছাকাছি। এক্ষেত্রে ত্রুটির গড়মান হল শূন্য (0)।

আমরা, আমাদের প্রক্রিয়া এখানেই শেষ করব। সুতরাং সমীকরণ (4) হল আমাদের গাণিতিক বিবরণ যা বছরগুলো এবং বালিকাদের মোট অর্ন্তভূক্তিকরণের সাথে শতকরা অন্তর্ভুক্তিকরণের সম্পর্ক প্রকাশ করে। আমরা একটি গাণিতিক মডেল গঠন করব যা বৃদ্ধিকে বর্ণনা করে।

উপরোক্ত পরিস্থিতির জন্য আমরা যে পদ্ধতি অনুসরণ করি তাকে গাণিতিক মডেলিং বলা হয়।

আমরা ইতিপূর্বে আমাদের গাণিতিক সরঞ্জামের সাহায্যে একটি গাণিতিক মডেল তৈরি করার চেষ্টা করেছি। আমাদের কাছে প্রদত্ত তথ্য থেকে পূর্বাভাস গঠনের আরও উত্তম সরঞ্জাম আছে। কিন্তু এগুলো এই কোর্সের পরিধির বাইরে। এরূপ মডেল তৈরি করার আমাদের লক্ষ হল মডেলিং এর প্রক্রিয়া সম্পর্কে ব্যাখ্যা করা, এই স্তরে সঠিক পূর্বাভাস তৈরী করা নয়।

আমরা এযাবৎ যা আলোচনা করেছি, তোমরা নিশ্চই তোমাদের বুদ্ধিমত্তা যাচাই করার জন্য কিছু বাস্তব জীবন সম্পর্কিত মডেল তৈরি করতে পছন্দ করবে। এখানে তোমাদের চর্চা করার জন্য একটি অনুশীলনী দেওয়া হল।

অনুশীলনী A2.2

1. শুরু থেকে অলিম্পিকের 400 মি দৌড় প্রতিযোগিতায় স্বর্ণপদক বিজয়ীদের নেওয়া সময় নিচের সারণিতে দেওয়া হল। সময় এবং সাল সম্পর্কিত করে একটি গাণিতিক মডেল তৈরি করো। এটিকে ব্যবহার করে পরের অলিম্পিকে সময় হিসেব করো।

সারণি A2.6

সাল	সময় (সেকেন্ডে)
1964	52.01
1968	52.03
1972	51.08
1976	49.28
1980	48.88
1984	48.83
1988	48.65
1992	48.83
1996	48.25
2000	49.11
2004	49.41

A2.4 মডেলিং এর পদ্ধতি, এর সুবিধা এবং সীমাবদ্ধতা

গাণিতিক মডেলিং এর ধারণা অঙ্কনের মাধ্যমে আমাদের আলোচনা শেষ করব যা পূর্বে আলোচিত উদাহরণে দেখানো হয়েছে। পূর্ববর্তী পর্যায়গুলোর প্রেক্ষাপটে গাণিতিক মডেল সম্পর্কিত যে ধাপগুলো জড়িত তার একটি সংক্ষিপ্ত আলোকপাত আমরা করতে পারি।

ধাপ 1: সূত্রকরণ : আমরা পূর্বে A2.2 বিভাগের উদাহরণ 1 এর সূত্রকরণ অংশ এবং A2.3 বিভাগের গাণিতিক মডেলের সূত্রকরণ আলোচনা করেছি। তোমরা নিশ্চয়ই এদের মধ্যে পার্থক্য লক্ষ্য করেছ। উদাহণ 1 এর প্রাপ্ত তথ্যগুলো তৎক্ষণাৎ ব্যাবহার করা যায়। কিন্তু A2.3 তে দেওয়া মডেলে সেরকমটা নয়। উপরন্তু একটি গাণিতিক বিবরণ খুঁজতে আমাদের কিছুটা সময়ের দরকার হয়। প্রথম সূত্র আমরা পর্যবেক্ষণ করেছি এবং দেখেছি তা দ্বিতীয় সূত্রের মত এত উত্তম নয়। এটি সাধারণত প্রায়ই সত্য হয়। অর্থাৎ বাস্তব জীবনের মডেল যখন আমরা তৈরি করি তখন প্রথম মডেলটির পুনঃপরীক্ষা এবং সংশোধনের প্রয়োজন হয়ে পড়ে। বাস্তব জীবনের কোনো সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সূত্রকরণ প্রক্রিয়ায় আমাদের যথেষ্ট সময়ের প্রয়োজন হয়। উদাহরণস্বরূপ, নিউটনের গতিসূত্র তিনটির ক্ষেত্রে গতির গাণিতিক বিবরণের যথেষ্ট উল্লেখ আছে। কিন্তু নিউটন অনেক তথ্যাবলী সংগ্রহ এবং পূর্বসুরী বিজ্ঞানীদের কার্যাবলী অধ্যয়ণ করে এই সিদ্ধান্তগুলোতে উপনীত হন।

নিম্নলিখিত তিনটি ধাপে সূত্রকরণ যুক্ত:

(i) সমস্যার বিবৃতকরণ : প্রায়ই সমস্যাটি অস্পষ্টরূপে বিবৃত হয়। উদাহরণস্বরূপ, বালক ও বালিকাদের অর্ন্তভুক্তিকরণ যে সমান তা নিশ্চিত করাই মুখ্য উদ্দেশ্য। এর মানে হল, বিদ্যালয়মুখী ছেলেমেয়েদের মোট ভর্তিকরণের 50% ছেলে এবং 50% মেয়ে হওয়া কাম্য এটাকে বোঝায়। বিদ্যালয়মুখী শিশুদের যেন 50% মেয়ে হয় তা সুনিশ্চিত করা, এর অপর একটি উপায়। এই সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা দ্বিতীয় উপায়টিকে প্রয়োগ করেছি।

(ii) প্রাসঙ্গিক বিষয়গুলোর সনাক্তকরণ: স্থির করতে হবে কোন রাশিগুলো এবং সম্পর্কগুলো গুরুত্বপূর্ণ এবং কোন রাশিগুলো গুরুত্বহীন এবং উপেক্ষা করা যেতে পারে। উদাহরণস্বরূপ, আমাদের সমস্যা প্রাথমিক স্তরে অর্ন্তভুক্তিকরণে, পূর্ববর্তী সালে মেয়েদের ভর্তিকরণের শতকরা হার পরবর্তী বছর মেয়েদের ভর্তিকরণের শতকরা হারকে প্রভাবিত করে। এ কারণে, বেশি থেকে বেশি বালিকাদের ভর্তিকরণে অভিভাবক-অভিভাবিকাদের অনুপ্রাণিত করবে, যেন তাদের মেয়েরা বিদ্যালয়ে ভর্তি হতে পারে। কিন্তু এ বিষয়টিকে আমরা অগ্রাহ্য করি। কারণ এর গুরুত্ব তখনই থাকবে যদি ভর্তিকরণ একটি নির্দিষ্ট হার অতিক্রম করে। উপরন্তু এ বিষয়টিকে যুক্ত করলে আমাদের মডেলটি জটিলতর হতে পারে।

(iii) গাণিতিক বিবরণ: এখন মনে করো সমস্যাটি সম্পর্কে আমাদের ধারণা স্পষ্ট এবং কোন বিষয়গুলো অধিকতর প্রাসঙ্গিক সেটা পরিষ্কার। সুতরাং আমরা ধারণার সাথে সম্পর্কিত গাণিতিক সমীকরণ, লেখচিত্র বা অন্যান্য গ্রহণযোগ্য গাণিতিক বিবরণ যা বিষয়কে প্রভাবিত করে তাদের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করবো। যদি এটি একটি সমীকরণ হয়, তবে প্রতিটি গুরুত্বপূর্ণ ধারণাকে একটি চলকের মাধ্যমে আমাদের গাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ করতে হবে।

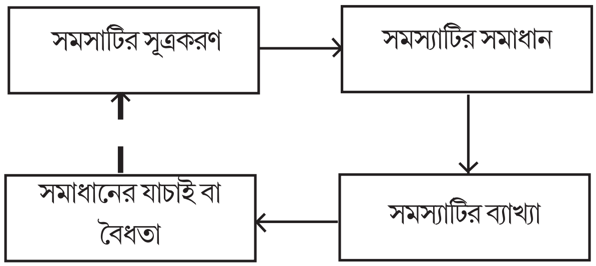
ধাপ 2 : সমাধান নির্ণয়: গাণিতিক সূত্রকরণ সমস্যা সমাধান দেয় না। আমাদেরকে সমস্যাটির গাণিতিক সাম্যের সমাধান করতে হবে। এখানে তোমাদের গাণিতিক জ্ঞান প্রয়োজনে আসবে।

ধাপ 3 : সমাধানের ব্যাখ্যা: গাণিতিক সমাধান হল মডেলটিতে ব্যাবহৃত কিছু চলকের মান। আমাদেরকে বাস্তব সমস্যায় ফিরে গিয়ে এই মানগুলো সমস্যার সাথে যাচাই করতে হবে।

ধাপ 4 : সমাধানের বৈধতা: আমরা A 2.3 তে দেখেছি যে সমাধানের পর আমাদের পর্যবেক্ষণ করে দেখতে হয় বাস্তবতার সহিত সামঞ্জস্যপূর্ণ কিনা। যদি এটি সামঞ্জস্যপূর্ণ হয় তবেই মডেলটি গ্রাহ্য হবে। যদি গাণিতিক সমাধান সামঞ্জস্যপূর্ণ না হয় তবে আমাদের সূত্রকরণ ধাপে আবার ফিরে যেতে হবে এবং মডেলটির বিকাশ সাধনের চেষ্টা করতে হবে।

প্রক্রিয়াটির এই ধাপে বিবরণমূলক সমস্যার সমাধান এবং গাণিতিক মডেলিং-এর মধ্যে বড়ো ব্যাবধান রয়েছে। এটি মডেলিং-এর একটি গুরুত্বপূর্ণ ধাপ যা বিবৃতিমূলক সমস্যায় পাওয়া যায় না। অবশ্য কিছু বাস্তব পরিস্থিতিতে এটা সম্ভব যে, আমাদের উত্তরগুলোর বৈধতার দরকার হয় না কারণ সমস্যাটি সহজ হলে সঠিক পথে আমরা শুদ্ধ সমাধান পাই। প্রথম গাণিতিক মডেলে অর্থাৎ A2.3 তে এরূপ ছিল।

নিচের চিত্র A2.2 তে যে ধাপ গুলো ক্রমান্বয়ে গাণিতিক মডেলের পর্যালোচনা তার একটি নমুনা দেওয়া হল। **ডটেড তীর চিহ্ন** দিয়ে বৈধতা ধাপ থেকে সূত্রকরণের ধাপ নির্দেশিত হল। কেননা এই স্তরের প্রয়োজন পুনরায় নাও হতে পারে।



চিত্র A2.2

তোমরা গাণিতিক মডেলের বিভিন্ন স্তর নিয়ে অধ্যয়ণ করেছ। চলো এখন আমরা এর কিছু ধারণা নিয়ে আলোচনা করব।

গাণিতিক মডেলের প্রকৃত লক্ষ হল বাস্তব জগতের সমস্যা সম্পর্কে প্রয়োজনীয় তথ্যাদি গাণিতিক সমস্যায় রূপান্তরকরণের মাধ্যমে লাভ করা। এটা তখনই প্রয়োজনীয় হয়ে পড়ে, যখন অপর বিভিন্ন উপায়, যেমন প্রত্যক্ষ পর্যবেক্ষণ বা পরীক্ষণের মাধ্যমে তথ্যাদি সংগ্রহ করা ব্যয় সাপেক্ষ বা অসম্ভব হয়ে পড়ে।

তোমাদের কাছে এটা আশ্চর্যের মনে হবে যে, কেন আমরা গাণিতিক মডেল নিয়ে থাকি। চল আমরা গাণিতিক **মডেলের কিছু সুবিধা** অনুধাবন করি। ধরো, আমরা মথুরা শোধানাগার থেকে নিস্কাশিত অপরিশোধিত বর্জ্য তাজমহলের উপর কীভাবে প্রভাব বিস্তার করছে তা নিয়ে অধ্যয়ন করতে চাই। আমরা তাজমহলের উপর প্রত্যক্ষরূপে পরীক্ষা চালাতে পারবনা কারণ এটি নিরাপদ নাও হতে পারে। অবশ্য আমরা তাজমহলের একটি ছোট নমুনা তৈরি করে পরীক্ষাকার্য চালাতে পারি। কিন্তু এর জন্য আমাদের দরকার বিশেষ সুযোগ সুবিধা যা ব্যয়সাপেক্ষও হবে। এসব ক্ষেত্রেই গাণিতিক মডেলের বিশেষ উপযোগিতা।

আবার, ধরো আমরা জানতে চাই, পাঁচ বছর পর কয়টি প্রাথমিক বিদ্যালয়ের প্রয়োজন হবে? এক্ষেত্রে এই সমস্যার সমাধান আমরা কেবলমাত্র গাণিতিক মডেল ব্যাবহারের মাধ্যেমে করতে পারি। অনুরূপে, বিজ্ঞানীরা বহু ঘটনার অস্তিত্ব শুধুমাত্র গাণিতিক মডেলের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করেন।

তোমরা A2.3 বিভাগে দেখেছো যে, আমরা দ্বিতীয় উদাহরণে আরও উত্তম পদ্ধতি প্রয়োগ করতে পারতাম। কিন্তু গাণিতিক সরঞ্জাম নেই বলে তা আমরা করিনি। এরূপ ঘটনা আমাদের বাস্তব জীবনেও হতে পারে। গাণিতিক সরঞ্জামের অপ্রতুলতার দরুন প্রায়শই আমাদেরকে সম্ভাব্য উত্তর দিয়েই সন্তুষ্ট থাকতে হয়। উদাহরণস্বরূপ, মডেলিং এ ব্যাবহৃত আদর্শ সমীকরণ এতই জটিল যে, এর সঠিক সমাধান নির্ণয় করার প্রয়োজনীয় গাণিতিক সরঞ্জামের অভাব।

তোমাদের হয়তো কৌতুহল হচ্ছে যে, কোন স্তর পর্যন্ত আমাদের গাণিতিক মডেলের বিকাশ সাধন করা উচিত। এটা করার জন্য বিভিন্ন বিষয়গুলোকে আমাদের বিচারাধীনে আনতে হবে। এটা করতে গিয়ে গাণিতিক সমীকরণে আমরা অনেক চলক যুক্ত করি। ফলে এটি একটি জটিল মডেল হয়ে পড়বে, যা প্রয়োগ করা কষ্টসাধ্য হবে। একটি মডেল খুবই সরল ব্যাবহারযোগ্য হওয়া উচিত। একটি উত্তম মডেল দুই ধরনের বিষয়ের সমতা রক্ষা করে:

1. সঠিকতা অর্থাৎ এটি বাস্তবতার কতটুকু সান্নিধ্যে।
2. ব্যবহারের সারল্য।

উদাহরণস্বরূপ, নিউটনের গতিসূত্রগুলো খুবই সরল, কিন্তু ভৌতিক অবস্থার মডেল তৈরির ক্ষেত্রে এগুলো খুব প্রভাবশালী।

তাহলে, গাণিতিক মডেল কি আমাদের সব সমস্যার উত্তর হতে পারে? পুরোপুরি নয়! এর কিছু সীমাবদ্ধতা আছে।

এভাবে, আমাদের মনে রাখতে হবে যে মডেল কেবলমাত্র বাস্তব সমস্যার ***একটি সরলীকরণ মাত্র*** কিন্তু এ দুটি এক নয়। এটি অনেকটা একটি দেশ এবং মানচিত্রের মধ্যবর্তী যা ভৌগোলিক বৈশিষ্ট্যগুলোকে বর্ণনা করে। আমরা মানচিত্র থেকে কোনো স্থানের সমুদ্রপৃষ্ঠ থেকে এর উচ্চতা নির্ণয় করতে পারি, কিন্তু ওখানকার লোকেদের বৈশিষ্ট্য বের করা যায় না। সুতরাং, কোনো একটি মডেল যে উদ্দেশ্যে তৈরি করা হয় ওটাকে সেভাবেই ব্যাবহার করা উচিত। মডেলটির প্রস্তুতিতে যে সকল বিষয়গুলো আমরা অগ্রাহ্য করেছি তা আমাদের মনে রাখতে হবে। মডেলটি যেখানে প্রযোজ্য হবে তার সীমাবদ্ধতায় থেকে সেটাকে প্রয়োগ করতে হবে। পরবর্তী শ্রেণিতে এ ধারনার কিছুটা বিশদ আলোচনা করব।

অনুশীলনী A2.3

1. বিবৃতিমূলক সমস্যার সমাধান যা তোমরা পাঠ্যপুস্তকে অধ্যয়ন করেছো তা গাণিতিক মডেলের পদ্ধতি হতে কীভাবে পৃথক।

2. ধরো, তুমি চৌরাস্তার ট্রাফিক জ্যাংশন এ যানবাহনগুলোর অপেক্ষমান সময় কমাতে চাও। নিচের কোন বিষয়গুলো গুরুত্বপূর্ণ এবং কোনগুলো গুরুত্বহীন?

(i) পেট্রোলের দাম।

(ii) চারটি ভিন্নরাস্তায় কী হারে যানবাহন চলাচল করে?

(iii) ধীরগতি সম্পন্ন যানবাহন যেমন সাইকেল, রিক্সা ইত্যাদি এবং দ্রুতগতি সম্পন্ন যানবাহন যেমন গাড়ি, মটর সাইকেল ইত্যাদির অনুপাত।

A2.5 সারসংক্ষেপ

এই পরিশিষ্টে তোমরা নিম্নলিখিত বিষয়গুলো অধ্যয়ন করেছো:

1. বিবৃতিমূলক সমস্যা সমাধানের সাথে জড়িত ধাপগুলো।

2. কয়েকটি গাণিতিক মডেলের প্রস্তুতিকরণ।

3. গাণিতিক মডেলিং-এর সাথে যুক্ত ধাপগুলো নিচের ছকে দেওয়া হল

> **1. সূত্রকরণ:**
>
> (i) প্রশ্নের বিবৃতকরণ
>
> (ii) প্রাসঙ্গিক বিষয়গুলোর সনাক্তকরণ
>
> (iii) গাণিতিক বিবরণ।
>
> **2. সমাধান নির্ণয়।**
>
> **3. বাস্তব জগতের সমস্যার সাথে সংগতি রেখে সমাধানগুলো ব্যাখ্যা করা**
>
> **4. যে মডেলগুলো অধ্যয়ন করা হয়েছে সেগুলো কতটুকু প্রযোজ্য হবে তার পরীক্ষণ / বৈধকরণ**

4. গাণিতিক মডেলের লক্ষ, সুবিধা এবং সীমাবদ্ধতা।

উত্তরমালা / ইঙ্গিত (ANSWERS/HINTS)

অনুশীলনী 1.1

1. হ্যাঁ, $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$ ইত্যাদি, হর q কে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হিসাবেও নেওয়া যেতে পারে।

2. 3 এবং 4 এর মধ্যবর্তী অসংখ্য মূলদ সংখ্যা হতে পারে। একটি উপায় হল $3 = \frac{21}{6+1}$, $4 = \frac{28}{6+1}$, তাহলে 6 টি সংখ্যা হল $\frac{22}{7}, \frac{23}{7}, \frac{24}{7}, \frac{25}{7}, \frac{26}{7}, \frac{27}{7}$

3. $\frac{3}{5} = \frac{30}{50}, \frac{4}{5} = \frac{40}{50}$ সুতরাং 5 টি মূলদ সংখ্যা হল $\frac{31}{50}, \frac{32}{50}, \frac{33}{50}, \frac{34}{50}, \frac{35}{50}$

4. (i) সত্য, যেহেতু সমগ্র সংখ্যার সংগ্রহতে স্বাভাবিক সংখ্যা অন্তর্ভুক্ত।

   (ii) অসত্য, উদাহরণস্বরূপ -2 একটি সমগ্র সংখ্যা নয়।

   (iii) অসত্য, উদাহরণস্বরূপ $\frac{1}{2}$ একটি মূলদ সংখ্যা কিন্তু সমগ্র সংখ্যা নয়।

অনুশীলনী 1.2

1. (i) সত্য, যেহেতু বাস্তব সংখ্যার সংগ্রহ সংগঠিত হয় মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা দ্বারা।

   (ii) অসত্য, কোনোও স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল ঋণাত্মক সংখ্যা হতে পারে না।

   (iii) অসত্য, উদাহরণস্বরূপ, 2 একটি বাস্তব সংখ্যা কিন্তু অমূলদ নয়।

2. না, উদাহরণস্বরূপ $\sqrt{4=2}$ হল একটি মূলদ সংখ্যা।

3. চিত্র 1.8 এর মত পদ্ধতিটি পুনরায় কয়েকবার কর। প্রথমে পাবে $\sqrt{4}$ এবং তারপর. $\sqrt{5}$

অনুশীলনী 1.3

1. (i) 0.36, সসীম। (ii) $0.\overline{09}$, অসীম আবৃত্ত।
   (iii) 4.125, সসীম। (iv) $0.\overline{230769}$, অসীম আবৃত্ত।
   (v) $0.\overline{18}$ অসীম আবৃত্ত। (vi) 0.8225 সসীম।

2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{285714}$ $\frac{3}{7} = 3 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{428571}$ $\frac{4}{7} = 4 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{571428}$
   $\frac{5}{7} = 5 \times \frac{1}{7} = 0.\overline{714285}$ $\frac{6}{7} = 6 \times \frac{1}{7} = 0\overline{857142}$

3. (i) $\frac{2}{3}$ [ধরো, $x = 0.666\ldots$ সুতরাং $10x = 6.666\ldots$ বা, $10x = 6 + x$ বা, $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$]
   (ii) $\frac{43}{90}$ (iii) $\frac{1}{999}$

4. 1 [ধরো $x = 0.9999\ldots$ সুতরাং $10x = 9.999\ldots$ বা, $10x = 9 + x$ বা, $x = 1$]
5. $0.\overline{0588235294117647}$
6. q এর মৌলিক উৎপাদক হচ্ছে কেবল 2 এর ঘাত বা 5 এর ঘাত বা উভয়ই।
7. 0.01001000100001..., 0.202002000200002..., 0.003000300003...
8. 0.75075007500075000075..., 0.767076700767000767..., 0.808008000800008...
9. (i) এবং (v) অমূলদ; (ii), (iii) এবং (iv) মূলদ।

অনুশীলনী 1.4

1. 1.4 ______________ অংশে 2.665 এর মত অগ্রসর হও।
2. উদাহরণ 11 অনুসারে অগ্রসর হও।

অনুশীলনী 1.5

1. (i) অমূলদ (ii) মূলদ (iii) মূলদ (iv) অমূলদ
   (v) অমূলদ
2. (i) $6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$ (ii) 6 (iii) $7 + 2\sqrt{10}$ (iv) 3
3. এখানে কোনও বিরোধিতা নেই। মনে রাখবে যে যখন তুমি স্কেল বা অন্য কোনও মাপক দিয়ে দৈর্ঘ্য পরিমাপ করবে তখন তুমি কেবল আসন্ন মূলদ মান পাবে। কাজেই c অথবা d অমূলদ হবে কিনা তা তুমি নাও অনুভব করতে পারো।

4. চিত্র 1.17 দেখো।

5. (i) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ (ii) $\sqrt{7+\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ (iv) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{3}$

অনুশীলনী 1.6

1. (i) 8 (ii) 2 (iii) 5 **2.** i) 27 (ii) 4 (iii) 8 (iv) $\frac{1}{5}\left[(125)^{-\frac{1}{3}} = (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{-1}\right]$

3. (i) $2^{\frac{13}{15}}$ (ii) 3^{-21} (iii) $11^{\frac{1}{4}}$ (iv) $56^{\frac{1}{2}}$

অনুশীলনী 2.1

1. (i) এবং (ii) একচল বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা (v) তিনচল বিশিষ্ট বহুপদ রাশিমালা, (iii) এবং (iv) বহুপদ রাশিমালা নয়, কারণ প্রত্যেকটি চলকের সূচক সমগ্র সংখ্যা নয়।

2. (i) 1 (ii) –1 (iii) $\frac{\pi}{2}$ (iv) 0

3. $3x^{35} - 4$; $\sqrt{2}\,y^{100}$ (ভিন্ন সহগ বিশিষ্ট তুমি আরও কয়েকটি বহুপদ রাশি লিখতে পার।)

4. (i) 3 (ii) 2 (iii) 1 (iv) 0

5. (i) দ্বিঘাত (ii) ত্রিঘাত (iii) দ্বিঘাত (iv) রৈখিক

(v) রৈখিক (vi) দ্বিঘাত (vii) ত্রিঘাত

অনুশীলনী 2.2

1. (i) 3 (ii) –6 (iii) –3

2. (i) 1, 1, 3 (ii) 2, 4, 4 (iii) 0, 1, 8 (iv) –1, 0, 3

3. (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) হ্যাঁ (iv) হ্যাঁ

(v) হ্যাঁ (vi) হ্যাঁ

(vii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ হল শূন্য, কিন্তু $\frac{2}{\sqrt{3}}$ বহুপদ রাশিটির শূন্য নয় (viii) না

4. (i) –5 (ii) 5 (iii) $\frac{-5}{2}$ (iv) $\frac{2}{3}$

(v) 0 (vi) 0 (vii) $-\frac{d}{c}$

অনুশীলনী 2.3

1. (i) 0 (ii) $\frac{27}{8}$ (iii) 1 (iv) $-\pi^3+3\pi^2-3\pi+1$ (v) $-\frac{27}{8}$

2. $5a$

3. না, যেহেতু ভাগশেষ 0 (শূন্য) নয়।

অনুশীলনী 2.4

1. $(x+1)$ হল (i) এর একটি উৎপাদক, কিন্তু (ii), (iii) এবং (iv) এর উৎপাদক নয়।

2. (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) হ্যাঁ

3. (i) -2 (ii) $-\left(2+\sqrt{2}\right)$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\frac{3}{2}$

4. (i) $(3x-1)(4x-1)$ (ii) $(x+3)(2x+1)$ (iii) $(2x+3)(3x-2)$ (iv) $(x+1)(3x-4)$

5. (i) $(x-2)(x-1)(x+1)$ (ii) $(x+1)(x+1)(x-5)$

(iii) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (iv) $(y-1)(y+1)(2y+1)$

অনুশীলনী 2.5

1. (i) $x^2+14x+40$ (ii) $x^2-2x-80$ (iii) $9x^2-3x-20$

(iv) $y^4-\frac{9}{4}$ (v) $9-4x^2$

2. (i) 11021 (ii) 9120 (iii) 9984

3. (i) $(3x+y)(3x+y)$ (ii) $(2y-1)(2y-1)$ (iii) $\left(x+\frac{y}{10}\right)\left(x-\frac{y}{10}\right)$

4. (i) $x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8xz$

(ii) $4x^2+y^2+z^2-4xy-2yz+4xz$

(iii) $4x^2+9y^2+4z^2-12xy+12yz-8xz$

(iv) $9a^2+49b^2+c^2-42ab+14bc-6ac$

(v) $4x^2+25y^2+9z^2-20xy-30yz+12xz$

(vi) $\frac{a^2}{16}+\frac{b^2}{4}+1-\frac{ab}{4}-b+\frac{a}{2}$

5. (i) $(2x+3y-4z)(2x+3y-4z)$ (ii) $\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)\left(-\sqrt{2}\,x+y+2\sqrt{2}\,z\right)$

6. (i) $8x^3+12x^2+6x+1$ (ii) $8a^3-27b^3-36a^2b+54ab^2$

(iii) $\frac{27}{8}x^3 + \frac{27}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4xy^2}{3}$

7. (i) 970299 (ii) 1061208 (iii) 994011992

8. (i) $(2a+b)(2a+b)(2a+b)$ (ii) $(2a-b)(2a-b)(2a-b)$

(iii) $(3-5a)(3-5a)(3-5a)$ (iv) $(4a-3b)(4a-3b)(4a-3b)$

(v) $\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)\left(3p-\frac{1}{6}\right)$

10. (i) $(3y+5z)(9y^2+25z^2-15yz)$ (ii) $(4m-7n)(16m^2+49n^2+28mn)$

11. $(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3xz)$

12. ডানপক্ষ সরল করো।

13. অভেদ VIII তে $x+y+z=0$ বসাও।

14. (i) -1260; ধরো $a=-12, b=7, c=5$, এখানে $a+b+c=0$. প্রশ্ন 13 এ প্রদত্ত ফল ব্যবহার করো।

(ii) 16380

15. (i) একটি সম্ভাব্য উত্তর হল : দৈর্ঘ্য $=5a-3$, প্রস্থ $=5a-4$

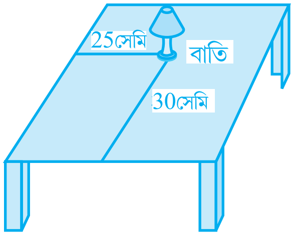
(ii) একটি সম্ভাব্য উত্তর হল : দৈর্ঘ্য $=7y-3$, প্রস্থ $=5y+4$

16. (i) একটি সম্ভাব্য উত্তর হল : $3, x$ এবং $x-4$.

(ii) একটি সম্ভাব্য উত্তর হল : $4k, 3y+5$ এবং $y-1$.

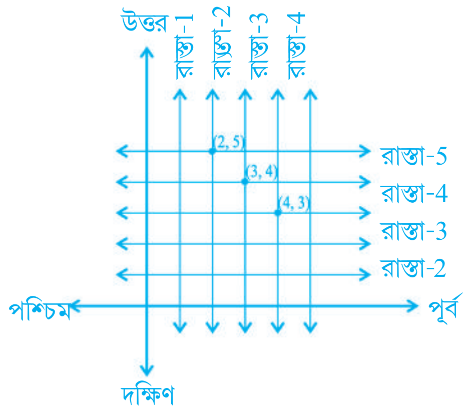
অনুশীলনী 3.1

1. বাতিটিকে একটি বিন্দু এবং টেবিলটিকে সমতল হিসেবে ধরে নাও। টেবিলের যে কোন দুটি পরস্পর লম্ব প্রান্ত বেছে নাও। বৃহত্তর প্রান্ত থেকে বাতির দূরত্ব পরিমাপ কর, ধরে নাও 25 সেমি। আবার, ক্ষুদ্রতর প্রান্ত থেকে বাতির দূরত্ব পরিমাপ কর এবং ধরে নাও এটি 30 সেমি। তোমাদের স্থির করা ক্রমের উপর নির্ভর করে তোমরা বাতির অবস্থান লিখতে পারো $(30, 25)$ অথবা $(25, 30)$।



চিত্র 1

2. নিম্নে প্রদত্ত রাস্তা পরিকল্পনার চিত্র দেখানো হল—



উপরের চিত্রে পরস্পরছেদী রাস্তাগুলো চিহ্নিত করা হয়েছে। এদেরকে অদ্বিতীয় হিসাবে পাওয়া যাবে কারণ আমরা দুটি নির্দেশ রেখা ব্যবহার করে তাদেরকে চিহ্নিত করেছি বলে।

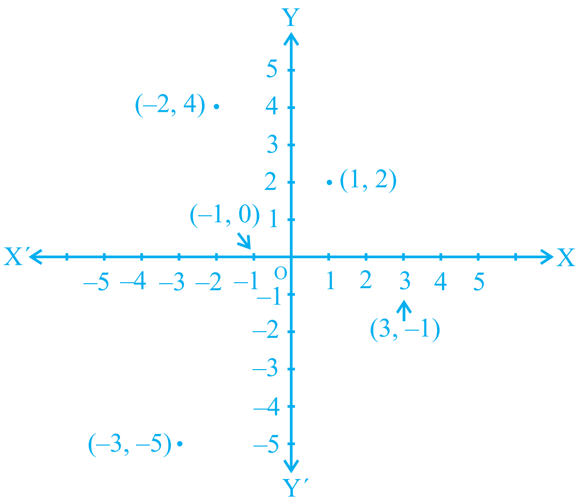
অনুশীলনী 3.2

1. (i) x - অক্ষ এবং y - অক্ষ (ii) পাদ (iii) মূল বিন্দু

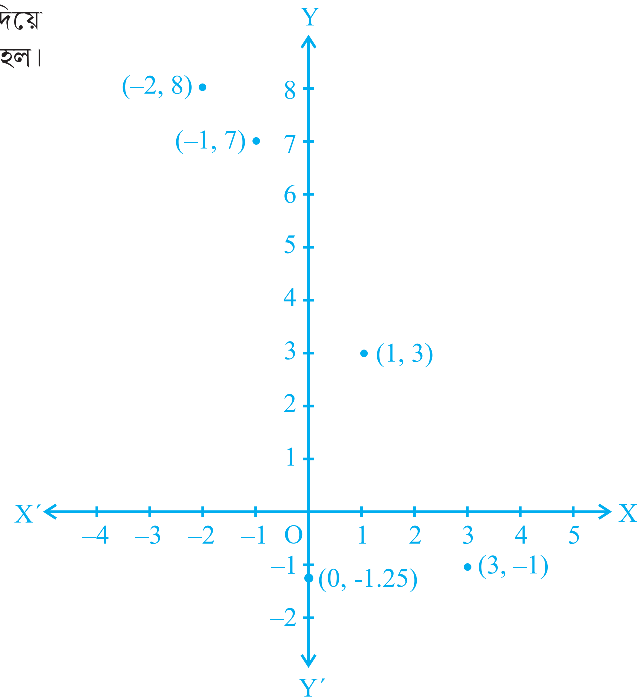
2. (i) $(-5, 2)$ (ii) $(5, -5)$ (iii) E (iv) G (v) 6 (vi) -3 (vii) $(0, 5)$ (viii) $(-3, 0)$

অনুশীলনী 3.3

1. $(-2, 4)$ বিন্দুটি দ্বিতীয় পাদে, $(3, -1)$ বিন্দুটি চতুর্থ পাদে, $(-1, 0)$ বিন্দুটি ঋণাত্মক x-অক্ষে, $(1, 2)$ বিন্দুটি প্রথম পাদে এবং $(-3, -5)$ বিন্দুটি তৃতীয় পাদে অবস্থান করে। বিন্দুগুলোর অবস্থান পাশের চিত্রে দেখানো হল।



2. পাশের চিত্রে ডট্ চিহ্ন দিয়ে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হল।



অনুশীলনী 4.1

1. $x - 2y = 0$

2. (i) $2x + 3y - 9.3\overline{5} = 0; a = 2, b = 3, c = -9.3\overline{5}$

(ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0; a = 1, b = \frac{-1}{5}, c = -10$

(iii) $-2x + 3y - 6 = 0; a = -2, b = 3, c = -6$

(iv) $1.x - 3y + 0 = 0; a = 1, b = -3, c = 0$

(v) $2x + 5y + 0 = 0; a = 2, b = 5, c = 0$

(vi) $3x + 0.y + 2 = 0; a = 3, b = 0, c = 2$

(vii) $0.x + 1.y - 2 = 0; a = 0, b = 1, c = -2$

(viii) $-2x + 0.y + 5 = 0; a = -2, b = 0, c = 5$

অনুশীলনী 4.2

1. (iii), কারণ x এর প্রত্যেকটি মানের জন্য y এর অনুরূপ মান থাকবে এবং বিপরীতক্রমে একই হবে।

2. (i) $(0, 7), (1, 5), (2, 3), (4, -1)$

(ii) $(1, 9-\pi), (0, 9), (-1, 9+\pi), \left(\dfrac{9}{\pi}, 0\right)$

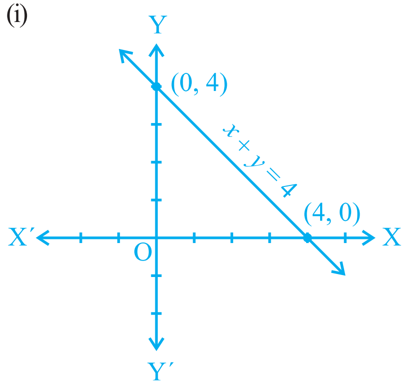
(iii) $(0, 0), (4, 1), (-4, 1), \left(2, \dfrac{1}{2}\right)$

3. (i) না (ii) না (iii) হ্যাঁ (iv) না (v) না

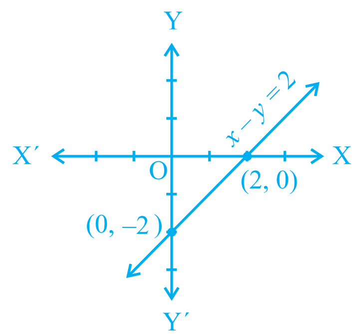
4. 7

অনুশীলনী 4.3

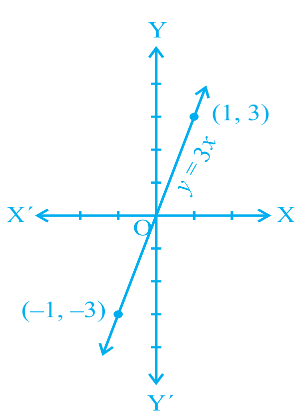
1. (i)



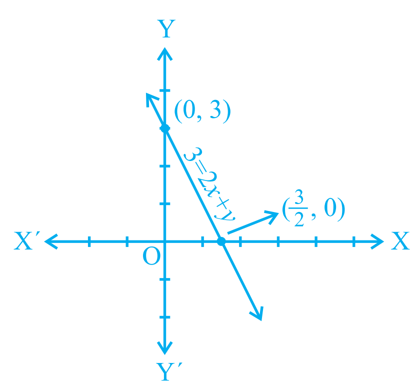
(ii)



(iii)

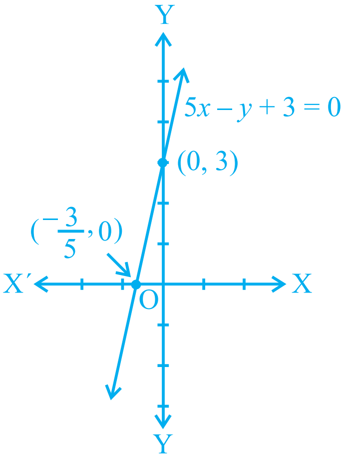


(iv)



2. $7x - y = 0$ এবং $x + y = 16$ এরূপ অসংখ্য সমীকরণ লেখা যায় (একটি বিন্দু দিয়ে যেহেতু রেখা অঙ্কন করা যায়)।

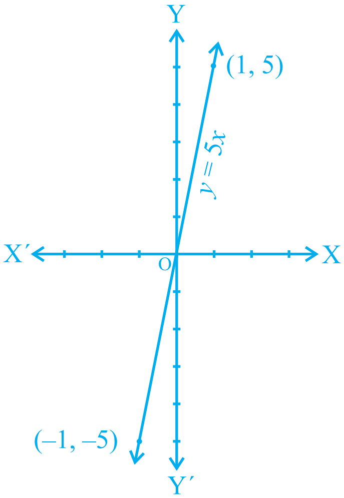
3. $\frac{5}{3}$ **4.** $5x - y + 3 = 0$



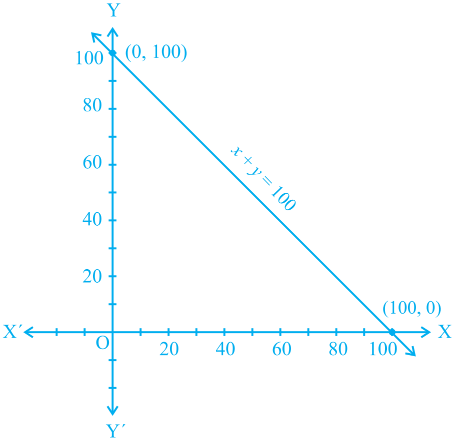
5. 4.6 নং চিত্রের জন্য, সমীকরণ $x + y = 0$ এবং 4.7 নং চিত্রের জন্য সমীকরণ, $y = -x + 2$. হবে।

6. ধরা হল দূরত্ব $= x$ এবং কাজের পরিমাণ $= y$, অতএব, প্রশ্ন অনুযায়ী, নির্ণেয় সমীকরণটি হবে $y = 5x$।

(i) 10 একক (ii) 0 একক



7. $x + y = 100$



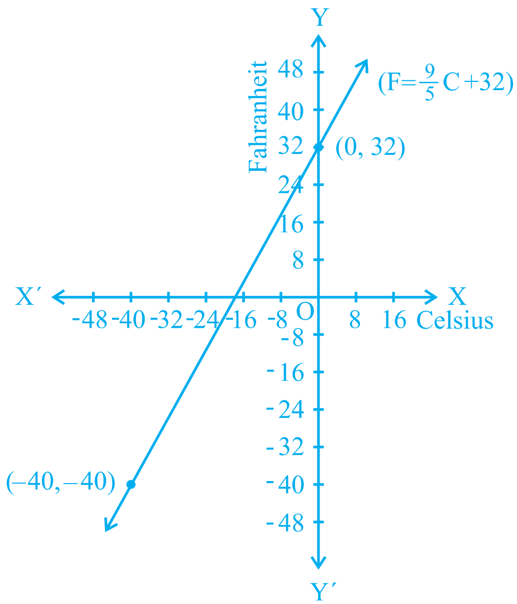
8. (i) পাশের চিত্রটি দেখ

(ii) 86° F

(iii) 35° C

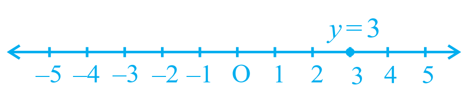
(iv) 32° F, –17.8° C (প্রায়)

(v) হ্যাঁ, – 40° (F এবং C উভয়েই)

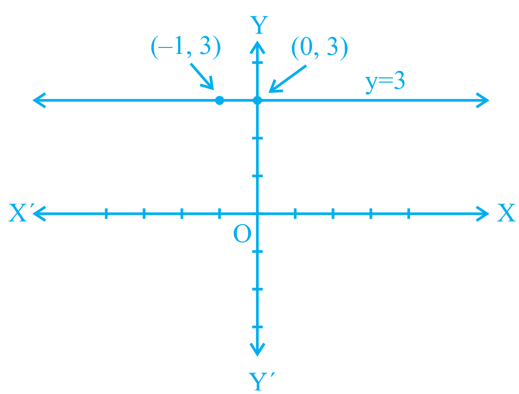


অনুশীলনী 4.4

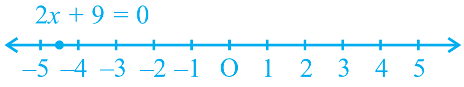
1. (i)



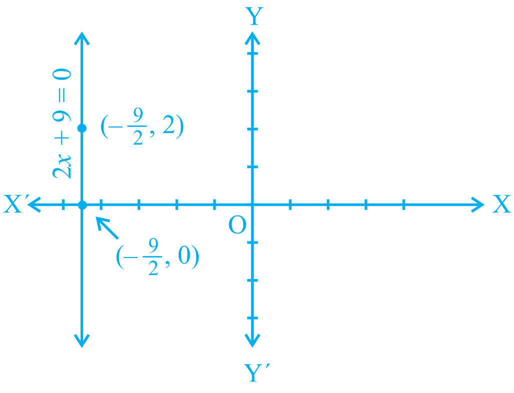
(ii)



2. (i)



(ii)



অনুশীলনী 5.1

1. (i) মিথ্যা। কারণ এটি ছাত্রছাত্রীরা এঁকে দেখতে পারে।

(ii) মিথ্যা। কারণ এটি স্বতঃসিদ্ধ 5.1. এর বিরোধিতা করে।

(iii) সত্য । (স্বীকার্য 2 এর মতে)

(iv) সত্য। কারণ, একটি বৃত্তকে অপর আর একটি বৃত্তের ওপর উপরিপাতন করলে, বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় এবং পরিধিদ্বয় সমপাতিত হয় এবং ব্যাসার্ধদ্বয় পরস্পর সমন হয়।

(v) সত্য। ইউক্লিডের প্রথম স্বতঃসিদ্ধ মতে।

3. ব্যাখ্যা করা যায় না এমন অনেক পদের তালিকা শিক্ষার্থীরা তৈরি করবে। এগুলো সংগত। কারণ এগুলো দুটো বিভিন্ন অবস্থার সাথে সম্পর্কিত এগুলো হল—(i) C বিন্দুটি A এবং B বিন্দুদ্বয়গামী রেখার মধ্যে অবস্থিত। (ii) A এবং B বিন্দুদ্বয়গামী রেখার ওপর, C বিন্দুটি অবস্থিত নাও হতে পারে। এ স্বীকার্যগুলো, ইউক্লিডের স্বীকার্যগুলো মেনে চলতে নাও হতে পারে। যাই হোক, এগুলো 5.1 নং স্বতঃসিদ্ধটি মেনে চলে।

4. $AC = BC$

সুতরাং, $AC + AC = BC + AC$ (উভয়পক্ষে AC যোগ করা হল)

অর্থাৎ, $2AC = AB$ (AB এর সাথে BC + AC সমাপতিত)

সুতরাং, $AC = \frac{1}{2} AB$

5. ধরে নাও AB -এর দুটি মধ্যবিন্দু C এবং D । এখন তোমাদের দেখাতে হবে C এবং D দুটি বিন্দু অভিন্ন।

6. $AC = BD$ (প্রদত্ত) (1)

$AC = AB + BC$ (B বিন্দুটি A এবং C এর মধ্যে অবস্থিত) (2)

$BD = BC + CD$ (C বিন্দুটি B এবং D এর মধ্যে অবস্থিত) (3)

এখন (2) এবং (3), (1) নং -এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$AB + BC = BC + CD$

সুতরাং, $AB = CD$ (উভয়পক্ষ থেকে BC বিয়োগ করে)

7. কারণ, এই স্বতঃসিদ্ধটি বিশ্বের যে কোন জায়গায় সকলের দ্বারা স্বীকৃত।

অনুশীলনী 5.2

1. যে কোন সূত্রকরণ যা শিক্ষার্থীরা শ্রেণীকক্ষে দেবে, এর যথার্থতা বিচার করা হবে আলোচনার মাধ্যমে।

2. যদি একটি সরলরেখা l , অন্য দুটো সরলরেখা m এবং n এর ওপর পতিত হয় তাহলে l রেখাটির একই পার্শ্বে থাকা অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের মাপের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয় তবে ইউক্লিডের পঞ্চম স্বীকার্য অনুযায়ী রেখাগুলো l এর ঐ পার্শ্বে মিলিত হবে না। তোমরা আরও জানো যে l এর অপর পার্শ্বস্থ কোণদ্বয়ের মাপের সমষ্টিও দুইসমকোণের সমান হবে। অর্থাৎ m এবং n সরলরেখাদ্বয়কে l এর উভয়দিকে ইচ্ছামতো বর্ধিত করলেও রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। অতএব রেখাদ্বয় m এবং n সমান্তরাল হবে।

অনুশীলনী 6.1

1. $30°, 250°$ **2.** $126°$ **4.** একটি বিন্দুতে থাকা কোণগুলোর মাপের সমষ্টি $= 360°$

5. $\angle QOS = \angle SOR + \angle ROQ$ এবং $\angle POS = \angle POR - \angle SOR$. **6.** $122°, 302°$

অনুশীলনী 6.2

1. $130°, 130°$ **2.** $126°$ **3.** $126°, 36°, 54°$ **4.** $60°$ **5.** $50°, 77°$

6. আপতন কোণ = প্রতিফলন কোণ। B বিন্দুতে $BE \perp PQ$ এবং C বিন্দুতে $CF \perp RS$ অঙ্কন করতে হবে।

অনুশীলনী 6.3

1. $65°$ **2.** $32°, 121°$ **3.** $92°$ **4.** $60°$ **5.** $37°, 53°$

6. ΔPQRএর কোণত্রয়ের সমষ্টি = ΔQTR এর কোণত্রয়ের সমষ্টি

এবং $\angle PRS = \angle QPR + \angle PQR$.

অনুশীলনী 7.1

1. তারা সমান হবে। **6.** $\angle BAC = \angle DAE$

অনুশীলনী 7.2

6. $\angle BCD = \angle BCA + \angle DCA = \angle B + \angle D$ **7.** প্রতিটি কোণ $45°$

অনুশীলনী 7.3

3. **(ii)** এর ক্ষেত্রে (i) থেকে পাই $\angle ABM = \angle PQN$

অনুশীলনী 7.4

4. BD সংযোগ করে $\angle B > \angle D$ দেখাবে এবং AC সংযোগ করে $\angle A > \angle C$ দেখাবে।

5. $\angle Q + \angle QPS > \angle R + \angle RPS$, ইত্যাদি।

অনুশীলনী 8.1

1. $36°, 60°, 108°$ এবং $156°$.

6. (i) ΔDAC এবং ΔBCA থেকে $\angle DAC = \angle BCA$ এবং $\angle ACD = \angle CAB$ ইত্যাদি দেখাবে।

(ii) উপপাদ্য 8.4 ব্যবহার করে দেখাও $\angle BAC = \angle BCA$

অনুশীলনী 8.2

2. দেখাও PQRS একটি সামান্তরিক। আরও দেখাও $PQ \parallel AC$ এবং $PS \parallel BD$ । তাহলে $\angle P = 90°$.

5. AECF একটি সামান্তরিক। তাহলে $AF \parallel CE$ ইত্যাদি।

অনুশীলনী 9.1

1. (i) ভূমি DC, DC এবং AB এর সমান্তরাল। (iii) ভূমি QR, QR এবং PS এর সমান্তরাল।

(v) ভূমি AD , AD এবং BQ এর সমান্তরাল।

অনুশীলনী 9.2

1. 12.8 সেমি **2.** EG সংযোগ করো ; উদাহরণ 2 এর ফলাফল ব্যবহার করো।

6. Δ APQ ত্রিভুজাকৃতির ভূমিতে গম এবং অপর দুটো ত্রিভুজাকৃতির ভূমিতে ডাল অথবা Δ APQ ত্রিভুজাকৃতির ভূমিতে ডাল এবং বাকি দুটো ত্রিভুজাকৃতির জমিতে গম চাষ করতেহবে।

অনুশীলনী 9.3

4. $CM \perp AB$ এবং $DN \perp AB$ অঙ্কন করে $CM = DN$ দেখাতে হবে। **12.** উদাহরণ 4 দেখো।

অনুশীলনী 9.4 (ঐচ্ছিক)

7. উদাহরণ 3 ব্যবহার বারবার করে প্রদত্ত প্রশ্নটি সমাধান করতে হবে।

অনুশীলনী 10.1

1. (i) ভেতরে (ii) বাইরে (iii) ব্যাস

(iv) অর্ধবৃত্ত (v) জ্যা (vi) তিনটি

2. (i) সত্য (ii) মিথ্যা (iii) মিথ্যা

(iv) সত্য (v) মিথ্যা (vi) সত্য

অনুশীলনী 10.2

1. সর্বসম বৃত্তের ব্যাসার্ধ ধরে নিয়ে ঠিক 10.1 উপপাদ্যের মত প্রমাণ করো।

2. ত্রিভুজের সর্বসমতার বাহু-কোণ-বাহু (SAS) স্বীকার্যটি অনুসরণ করে প্রমাণ করো।

অনুশীলনী 10.3

1. প্রতিজোড়া বৃত্তের সাধারণ বিন্দু সংখ্যা হতে পারে— 0, 1, 2; 2 টি।

2. উদাহরণ 1 -কে অনুসরণ করো।

3. O, O′ কেন্দ্র দুটিকে সাধারণ জ্যা AB এর মধ্যবিন্দু M এর সঙ্গো সংযুক্ত করো। তারপর প্রমাণ করো যে, $\angle \text{OMA} = 90°$ এবং $\angle \text{O'MA} = 90°$.

অনুশীলন 10.4

1. 6 সেমি। প্রথমেই প্রমাণ করো যে কেন্দ্রদ্বয় সংযোজককারী রেখা ছোট বৃত্তটির ব্যাসার্ধের উপর লম্ব এবং পরে দেখাও যে সাধারণ জ্যাটি ছোট বৃত্তটির ব্যাস।

2. যদি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB এবং CD সমান জ্যা দুটি E বিন্দুতে ছেদ করে, OM এবং ON যথাক্রমে AB ও CD -র উপর লম্ব টানা হয় এবং OE যুক্ত করে, তবে দেখাও যে OME এবং ONE ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

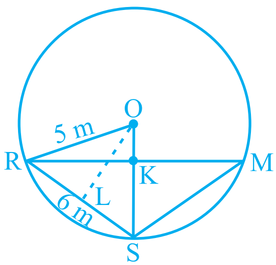
3. 2 নং উদাহরণ অনুসারে করো **4.** AD এর উপর OM লম্ব আঁকো।

5. রেশমা, সালমা এবং মনদীপ এর অবস্থান যথাক্রমে R, S এবং M দিয়ে বুঝাও। মনে করো, KR = x মি. (চিত্র দেখো)

Δ ORS এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}x \times 5$,

আবার Δ ORS এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \times \text{RS} \times \text{OL} = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 4.$

x নির্ণয় করো এবং তা থেকে RM ।



6. পিথাগোরাসের উপপাদ্য ও সমবাহু ত্রিভুজের ধর্ম প্রয়োগ করো।

অনুশীলনী 10.5

1. $45°$ 2. $150°, 30°$ 3. $10°$

4. $80°$ 5. $110°$ 6. $\angle BCD = 80°$ এবং $\angle ECD = 50°$

8. CD (AB || CD এবং AB < CD) -এর উপর AM এবং BN লম্ব আঁকো। দেখাও যে, $\Delta AMD \cong \Delta BNC$ । যা থেকে পাওয়া যায় $\angle C = \angle D$ । সুতরাং, $\angle A + \angle C = 180°$.

অনুশীলনী 10.6 (ঐচ্ছিক)

2. মনে করো বৃত্তটির কেন্দ্র O, তাহলে উভয় জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একই হবে এবং এটি O বিন্দু দিয়ে যাবে মনে করো ব্যাসার্ধ r, তাহলে $r^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (6 - x)^2$, যেখানে x হল কেন্দ্র O থেকে 11 সেমি দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট জ্যা পর্যন্ত লম্বটির দৈর্ঘ্য। এ থেকে পাওয়া যায়, $x=1$ । সুতরাং, $r = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ সেমি। 3. 3 সেমি।

4. মনে করো $\angle AOC = x$ এবং $\angle DOE = y$. $\angle AOD = z$. তাহলে $\angle EOC = z$ এবং $x + y + 2z = 360°$.

$\angle ODB = \angle OAD + \angle DOA = 90° - \frac{1}{2}z + z = 90° + \frac{1}{2}z$. এবং $\angle OEB = 90° + \frac{1}{2}z$

8. $\angle ABE = \angle ADE$, $\angle ADF = \angle ACF = \frac{1}{2}\angle C$.

সুতরাং, $\angle EDF = \angle ABE + \angle ADF = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

9. 10.2 অনুশীলনীর 1 নং প্রশ্ন ও 10.8 নং উপপাদ্যের সাহায্য নাও।

10. মনে করো, $\angle A$ -এর সমদ্বিখণ্ডকটি ΔABC এর পরিবৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। DC এবং DB সংযুক্ত করো। তাহলে,

$\angle BCD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle A$ এবং $\angle DBC = \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A$. সুতরাং, $\angle BCD = \angle DBC$ অথবা $DB = DC$ । অতএব D বিন্দুটি BC এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকবে।

অনুশীলনী 12.1

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, 900,3 সেমি ^{2} 2. 1650000 টাকা 3. $20\sqrt{2}$ মি^{2}

4. $21\sqrt{11}$ সেমি^{2} 5. 9000 সেমি^{2} 6. $9\sqrt{15}\ cm^2$ সেমি^{2}

অনুশীলনী 12.2

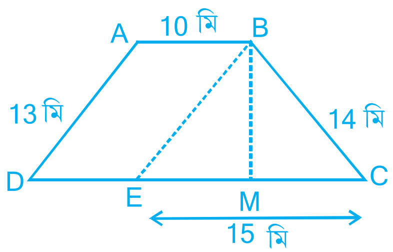
1. 65.5 মি^{2} (প্রায়) 2. 15.2 সেমি^{2} (প্রায়) 3. 19.4 সেমি^{2} (প্রায়)

4. 12 সেমি 5. 48 মি^{2} 6. $1000\sqrt{6}$ সেমি^{2}, $1000\sqrt{6}$ সেমি^{2}

7. প্রথম রঙের কাগজের ক্ষেত্রফল= দ্বিতীয় রঙের কাগজের ক্ষেত্রফল= 256 সেমি^{2} এবং তৃতীয় রঙের কাগজের ক্ষেত্রফল= 17.92 সেমি^{2}

8. ` 705.60 টাকা 9. 196 মি^{2}

[চিত্রটি দেখো, Δ BEC এর ক্ষেত্রফল = 84 মি^{2}, নির্ণয় কর, তারপর BM এর উচ্চতা নির্ণয় করো।]



অনুশীলনী 13.1

1. (i) 5.45 মি^{2} (ii) 109 টাকা 2. 555 টাকা 3. 6 মি 4. 100 টি ইট

5. (i) ঘনক আকার বাক্সটির পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 40 সেমি^{2} অধিক।

(ii) আয়তঘনক আকার বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 10 সেমি^{2} অধিক।

6. (i) কাচের ক্ষেত্রফল 4250 সেমি^{2} (ii) ট্যাপের দৈর্ঘ্য 320 সেমি [সবকয়টি ধারের সমষ্টি নির্ণয় করো। 12 টি ধারের মধ্যে 4 টি দৈর্ঘ্য, 4 টি প্রস্থ এবং 4 টি উচ্চতা]।

7. ` 2184 টাকা 8. 47 মি^{2}

অনুশীলনী 13.2

1. 2 সেমি 2. 7.48 মি^{2} 3. (i) 968 সেমি^{2} (ii) 1064.8 সেমি^{2} (iii) 2038.08 সেমি^{2}

[একটি পাইপের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (ভেতরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + বাইরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুটি ভূমিতলের ক্ষেত্রফল)। প্রতিটি ভূমির ক্ষেত্রফল π $(R^2 - r^2)$, এখানে R = বাইরের ব্যাসার্ধ এবং r = ভেতরের ব্যাসার্ধ]

4. 1584 মি^{2} 5. ` 68.75 টাকা 6. 1 মি

7. (i) 110 মি^{2} (ii) ` 4400 টাকা 8. 4.4 মি^{2}

9. (i) 59.4 মি^{2} (ii) 95.04 মি^{2}

[ধরে নাও মোট ইস্পাতের ক্ষেত্রফল x মি^{2}। যেহেতু ব্যবহৃত ইস্পাতের $\frac{1}{12}$ অংশ অপচয় হয়,

পেট্রোল ট্যাংকটিতে ব্যবহৃত ইস্পাতের পরিমাণ x এর $\frac{11}{12}$ অংশ। এর অর্থ হল ব্যবহৃত প্রকৃত ইস্পাতের পরিমাণ $= \frac{12}{11} \times 87.12$ মি^{2}]

10. 2200 সেমি^{2} ; চোঙটির উচ্চতা $(30 + 2.5 + 2.5)$ সেমি বলে গ্রহণ করতে হবে।

11. 7920 সেমি^{2}

অনুশীলনী 13.3

1. 165 সেমি^{2} **2.** 1244.57 মি^{2} **3.** (i) 7 সেমি (ii) 462 সেমি^{2}

4. (i) 26 মি (ii) ₹ 137280 টাকা **5.** 63 মি **6.** ₹ 1155 টাকা

7. 5500 সেমি^{2} **8.** ₹ 384.34 টাকা (প্রায়)

অনুশীলনী 13.4

1. (i) 1386 সেমি^{2} (ii) 394.24 সেমি^{2} (iii) 2464 সেমি^{2}

2. (i) 616 সেমি^{2} (ii) 1386 সেমি^{2} (iii) 38.5 মি^{2}

3. 942 সেমি^{2} **4.** $1:4$ **5.** ₹ 27.72 টাকা

6. 3.5 সেমি **7.** $1:16$ **8.** 173.25 সেমি^{2}

9. (i) $4\pi r^2$ (ii) $4\pi r^2$ (iii) $1:1$

অনুশীলনী 13.5

1. 180 সেমি^{3} **2.** 135000 লিটার **3.** 4.75 মি **4.** ₹ 4320 টাকা **5.** 2 মি

6. 3 দিন **7.** 16000 **8.** 6 সেমি, $4:1$ **9.** 4000 মি^{3}

অনুশীলনী 13.6

1. 34.65 লিটার

2. 3.432 কিগ্রা [একটি পাইপের আয়তন $= \pi h \times (R^2 - r^2)$, এখানে R হল বহিঃব্যাসার্ধ এবং r হল অন্ত ব্যাসার্ধ] ।

3. চোঙটির আয়তন 85 সেমি^{3} অধিক।

4. (i) 3 সেমি (ii) 141.3 সেমি^{3}

5. (i) 110 মি^{2} (ii) 1.75 মি (iii) 96.25 কিলোলিটার

6. 0.4708 মি^{2}

7. কাঠের আয়তন = 5.28 সেমি^{3}, গ্রাফাইটের আয়তন = 0.11 সেমি^{3}।

8. 38500 সেমি^{3} অথবা 38.5 লিটার স্যুপ।

অনুশীলনী 13.7

1. (i) 264 সেমি^{3} (ii) 154 সেমি^{3} **2.** (i) 1.232 লি (ii) $\frac{11}{35}$ লি

3. 10 সেমি **4.** 8 সেমি **5.** 38.5 কিলোলিটার

6. (i) 48 সেমি (ii) 50 সেমি (iii) 2200 সেমি^{2} **7.** 100π সেমি^{3} **8.** 240π সেমি^{3}; 5 : 12

9. 86.625x মি^{3}, 99.825 মি^{2}

অনুশীলনী 13.8

1. (i) $1437\frac{1}{3}$ সেমি^{3} (ii) 1.05 মি^{3} (প্রায়)

2. (i) $11498\frac{2}{3}$ সেমি^{3} (ii) 0.004851 মি^{3} **3.** 345.39 গ্রাম (প্রায়) **4.** $\frac{1}{64}$

5. 0.303 লি (প্রায়) **6.** 0.06348 মি^{3} (প্রায়)

7. $179\frac{2}{3}$ সেমি^{3} **8.** (i) 249.48 মি^{2} (ii) 523.9 মি^{3} (প্রায়) **9.** (i) $3r$ (ii) 1 : 9

10. 22.46 মিমি^{3} (প্রায়)

অনুশীলনী 13.9 (ঐচ্ছিক)

1. ` 6275 টাকা

2. ` 2784.32 টাকা (প্রায়) [রূপালি রং-এর খরচ হিসাব করার সময় গোলকের অবলম্বনের অংশটি বাদ দেওয়ার কথা মনে রাখতে হবে]। **3.** 43.75%

অনুশীলনী 14.1

1. আমাদের দৈনন্দিন জীবন থেকে আহরণ করতে পারা পাঁচটি রাশিতথ্য —

(i) আমাদের শ্রেণির ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা।

(ii) আমাদের বিদ্যালয়ের বৈদ্যুতিক পাখার সংখ্যা।

(iii) গত দুবছরে আমাদের ঘরের ইলেকট্রিক বিল।

(iv) দূরদর্শন বা খবর কাগজ থেকে পাওয়া কোনও নির্বাচনের ফলাফল।

(v) শিক্ষামূলক সমীক্ষা থেকে পাওয়া 'সাক্ষরতার হার' বিষয়ক তথ্য।

[উপরোক্ত উত্তরগুলো ছাড়াও অন্যান্য অনেক উত্তর হতে পারে]

2. প্রাথমিক রাশিতথ্য; (i), (ii) এবং (iii) গৌণ রাশিতথ্য; (iv) এবং (v)

অনুশীলনী 14.2

1.

রক্তের গ্রুপ	ছাত্রসংখ্যা
A	9
B	6
O	12
AB	3
মোট	30

সর্বাধিক প্রাপ্ত গ্রুপ – O, বিরল গ্রুপ– AB

2.

দূরত্ব (কিমি)	গণনা চিহ্ন	পরিসংখ্যা
0 - 5	卌	5
5 - 10	卌 卌 |	11
10 - 15	卌 卌 |	11
15 - 20	卌 ||||	9
20 - 25	|	1
25 - 30	|	1
30 - 35	||	2
মোট		40

3. (i)

আপেক্ষিক আর্দ্রতা (%)	পরিসংখ্যা
84 - 86	1
86 - 88	1
88 - 90	2
90 - 92	2
92 - 94	7
94 - 96	6
96 - 98	7
98 - 100	4
মোট	30

(ii) যেহেতু আপেক্ষিক আর্দ্রতা অধিক তাই, ধারণা করা যায় যে এই তথ্যরাশি বর্ষাকালে সংগ্রহ করা হয়েছে।

(iii) বিস্তার = 99.2 – 84.9 = 14.3

4. (i)

উচ্চতা (সেমি)	পরিসংখ্যা
150 - 155	12
155 - 160	9
160 - 165	14
165 - 170	10
170 - 175	5
মোট	50

(ii) উপরের সারণি থেকে একটি মন্তব্য করা যায় যে 50% ছাত্রছাত্রীর উচ্চতা 165 সেমি এর কম।

5. (i)

সালফার ডাইঅক্সাইডের ঘনত্ব (ppm)	পরিসংখ্যা
0.00 - 0.04	4
0.04 - 0.08	9
0.08 - 0.12	9
0.12 - 0.16	2
0.16 - 0.20	4
0.20 - 0.24	2
মোট	30

(ii) 8 দিন ধরে সালফার ডাই অক্সাইডের ঘনত্বের মান ছিল 0.11 ppm এর অধিক।

6.

হেডের সংখ্যা	পরিসংখ্যা
0	6
1	10
2	9
3	5
মোট	30

7. (i)

অঙ্ক	পরিসংখ্যা
0	2
1	5
2	5
3	8
4	4
5	5
6	4
7	4
8	5
9	8
মোট	50

(ii) সর্বাধিক সংখ্যক পরিসংখ্যা পাওয়া অঙ্কগুলো হলো 3 এবং 9; সর্বাপেক্ষা কম পরিসংখ্যা পাওয়া অঙ্কটি হলো 0।

8. (i)

সময় (ঘণ্টা)	পরিসংখ্যা
0 - 5	10
5 - 10	13
10 - 15	5
15 - 20	2
মোট	30

(ii) 2 জন শিশু।

9.

ব্যাটারির আয়ুষ্কাল (বৎসরে)	পরিসংখ্যা
2.0 - 2.5	2
2.5 - 3.0	6
3.0 - 3.5	14
3.5 - 4.0	11
4.0 - 4.5	4
4.5 - 5.0	3
মোট	40

অনুশীলনী 14.3

1. (ii) প্রজনন স্বাস্থ্যজনিত অবস্থা

3. (ii) দল A **4.** (ii) পরিসংখ্যা বহুভুজ (iii) না **5.** (ii) 184

8.

বয়স (বছরে)	পরিসংখ্যা	প্রস্থ	আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
1 - 2	5	1	$\frac{5}{1} \times 1 = 5$
2 - 3	3	1	$\frac{3}{1} \times 1 = 3$
3 - 5	6	2	$\frac{6}{2} \times 1 = 3$
5 - 7	12	2	$\frac{12}{2} \times 1 = 6$
7 - 10	9	3	$\frac{9}{3} \times 1 = 3$
10 - 15	10	5	$\frac{10}{5} \times 1 = 2$
15 - 17	4	2	$\frac{4}{2} \times 1 = 2$

এ দৈর্ঘ্যগুলোর সাহায্যে তোমরা নিজেরা স্তম্ভলেখ আঁকতে পারবে।

9. (i)

চিঠির সংখ্যা	পরিসংখ্যা	শ্রেণি দৈর্ঘ্য	আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য
1 - 4	6	3	$\frac{6}{3} \times 2 = 4$
4 - 6	30	2	$\frac{30}{2} \times 2 = 30$
6 - 8	44	2	$\frac{44}{2} \times 2 = 44$
8 - 12	16	4	$\frac{16}{4} \times 2 = 8$
12 - 20	4	8	$\frac{4}{8} \times 2 = 1$

এখন, স্তম্ভ লেখটি আঁকো।

(ii) 6 - 8

অনুশীলনী 14.4

1. গড়মান $= 2.8$; মধ্যমা $= 3$; সংখ্যাগুরু মান $= 3$
2. গড়মান $= 54.8$; মধ্যমা $= 52$; সংখ্যাগুরু মান $= 52$
3. $x = 62$ **4.** 14
5. 60 জন কর্মীর গড় বেতন হল 5083.33 টাকা।

অনুশীলনী 15.1

1. $\frac{24}{30}$ অর্থাৎ $\frac{4}{5}$ **2.** i) $\frac{19}{60}$ (ii) $\frac{407}{750}$ (iii) $\frac{211}{1500}$ **3.** $\frac{3}{20}$ **4.** $\frac{9}{25}$

5. (i) $\frac{29}{2400}$ (ii) $\frac{579}{2400}$ (iii) $\frac{1}{240}$ (iv) $\frac{1}{96}$ (v) $\frac{1031}{1200}$

6. (i) $\frac{7}{90}$ (ii) $\frac{23}{90}$

7. (i) $\frac{27}{40}$ (ii) $\frac{13}{40}$ **8.** (i) $\frac{9}{40}$ (ii) $\frac{31}{40}$ (iii) 0 **11.** $\frac{7}{11}$ **12.** $\frac{1}{15}$ **13.** $\frac{1}{10}$

অনুশীলনী A1.1

1. (i) মিথ্যা। 12 মাসে 1 বছর।

(ii) অস্পষ্ট। কোনো একটি বছরে দীপাবলি শুক্রবারে হতেও পারে আবার নাও হতে পারে।

(iii) অস্পষ্ট। বছরের কোনও একটি সময়ে মাগাদির উষ্ণতা 26° C হতে পারে।

(iv) সর্বদা সত্য।

(v) মিথ্যা। কুকুর উড়তে পারে না।

(vi) অস্পষ্ট। একটি লিপইয়ারে ফেব্রুয়ারি মাস 29 দিনের হয়।

2. (i) মিথ্যা। চতুর্ভুজের অন্তঃকোণগুলোর সমষ্টি 360°।

(ii) সত্য (iii) সত্য (iv) সত্য (v) মিথ্যা, উদাহরণস্বরূপ, $7 + 5 = 12$, ইহা অযুগ্ম সংখ্যা নয়।

3. (i) 2 থেকে বড় সকল মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম। (ii) কোনও স্বাভাবিক সংখ্যার দ্বিগুণ সবসময়ই একটি যুগ্ম সংখ্যা। (iii) যে কোনও $x > 1, 3x + 1 > 4$. (iv) যে কোনও $x \geq 0, x^3 \geq 0$.

(v) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একটি মধ্যমা, কোণের সমদ্বিখণ্ডকও বটে।

অনুশীলনী A1.2

1. (i) মানুষেরা মেরুদণ্ডী। (ii) না, দীনেশ যে কোনো জনকে দিয়ে তার চুল কাটাতে পারে। (iii) গুলাগের জিহ্বা লাল। (iv) আমরা সিদ্ধান্ত করতে পারি যে নর্দমা আগামীকাল পরিষ্কার হবে। (v) কোনো জন্তুর লেজ থাকলেই যে সেটি কুকুর হবে এমনটা নয়। যেমন— মহিষ, বানর, বেড়াল ইত্যাদিরও লেজ আছে কিন্তু এরা কুকুর নয়।

2. তোমাকে 8 এবং B উল্টাতে হবে। যদি B-র ও পিঠের সংখ্যাটি যুগ্ম, তবে নিয়মটি খাটলো না। একইভাবে 8 এর ও পিঠের অক্ষরটি যদি ব্যঞ্জন হয় তবে, নিয়মটি বিঘ্নিত হবে।

অনুশীলনী A1.3

1. সম্ভাব্য তিনটি অনুমান—

   (i) যে কোনও তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল একটি যুগ্ম সংখ্যা। (ii) যে কোনও তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল 4 দ্বারা বিভাজ্য। (iii) যে কোনও তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার গুণফল 6 দ্বারা বিভাজ্য।

2. 4 নং লাইন : $1\ 3\ 3\ 1 = 11^3$; 5 নং লাইন : $1\ 4\ 6\ 4\ 1 = 11^4$; 4 নং এবং 5 নং লাইনের ক্ষেত্রে অনুমানটি সত্য; না, কারণ $11^5 \neq 15101051$.

3. $T_4 + T_5 = 25 = 5^2$; $T_{n-1} + T_n = n^2$.

4. $111111^2 = 12345654321$; $1111111^2 = 1234567654321$

5. শিক্ষার্থীদের নিজস্ব উত্তর। উদাহরণস্বরূপ ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ।

অনুশীলনী A1.4

1. (i) তোমরা একই মাপের কোণ কিন্তু ভিন্নমাপের বাহুযুক্ত যে কোনও দুটি ত্রিভুজ নিতে পারো।

   (ii) একটি রম্বসের চারটি বাহু সমান কিন্তু বর্গক্ষেত্র নাও হতে পারে।

   (iii) একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি কোণ সমান কিন্তু বর্গক্ষেত্র নাও হতে পারে।

   (iv) $a = 3$ এবং $b = 4$ এর জন্য বিবৃতিটি সত্য নয়।

   (v) $n = 11$ এর জন্য $2n^2 + 11 = 253$, যাহা মৌলিক নয়।

   (vi) $n = 41$ এর জন্য $n^2 - n + 41$ মৌলিক সংখ্যা নয়।

2. শিক্ষার্থীদের নিজস্ব উত্তর।

3. ধরে নাও, x এবং y দুটো অযুগ্ম সংখ্যা। তাহলে $x = 2m + 1$, m একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $y = 2n + 1$, n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

   $x + y = 2\ (m + n + 1)$ । সুতরাং, $x + y$ সংখ্যাটি 2 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ যুগ্ম।

4. 3 নং প্রশ্ন দেখো। $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2\ (2mn + m + n) + 1$ ।

   সুতরাং $x\,y$, 2 দ্বারা বিভাজ্য নয় অর্থাৎ অযুগ্ম।

5. ধরে নাও $2n$, $2n + 2$ এবং $2n + 4$ তিনটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যা। তাহলে এদের সমষ্টি $= 6(n + 1)$, যা 6 দ্বারা বিভাজ্য।

7. (i) মনে করো তোমার প্রকৃত সংখ্যাটি n। তাহলে আমরা নিম্নলিখিত প্রক্রিয়াগুলো সম্পন্ন করতে পারি:

$$n \to 2n \to 2n+9 \to 2n+9+n = 3n+9 \to \frac{3n+9}{3} = n+3 \to n+3+4 = n+7 \to n+7-n = 7.$$

(ii) লক্ষ করো : $7 \times 11 \times 13 = 1001$. যে কোনো একটি তিন অঙ্কের সংখ্যা যেমন abc নাও। তাহলে $abc \times 1001 = abcabc$. সুতরাং, এই ছয় অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যাটি $(abcabc)$ 7, 11 এবং 13 দ্বারা বিভাজ্য।

অনুশীলনী A2.1

1. ধাপ 1: সূত্রবন্ধকরণ (**Formulation**) :

প্রাসঙ্গিক বিষয়গুলো হল যে সময়ের জন্য কম্পিউটার ভাড়া করা হল এবং দুধরনের দাম আমাদের দেওয়া হল। আমরা ধরে নিই কম্পিউটার ক্রয় অথবা ভাড়া করার ক্ষেত্রে কোনও গুরুত্বপূর্ণ পরিবর্তন হয় নি। সুতরাং, এক্ষেত্রে যে-কোনো ধরনের পরিবর্তনকে আমরা অপ্রাসঙ্গিক বলে ধরে নেব। বিভিন্ন ধরনের কম্পিউটার বা তার উৎপাদনকে আমরা এক্ষেত্রে সমান বলে ধরব অর্থাৎ এই পরিবর্তনগুলোও অপ্রাসঙ্গিক।

x মাসের জন্য কম্পিউটার ভাড়া করার খরচ $2000x$ টাকা। যদি এটি কম্পিউটারের ক্রমমূল্যের থেকে বেশি হয়, তাহলে একটি কম্পিউটার ক্রয় করাই লাভজনক হবে। সুতরাং সমীকরণটি হল –

$$2000x = 25000 \qquad (1)$$

ধাপ 2 : **সমাধান :** (1) নং সমাধান করে পাই, $x = \frac{25000}{2000} = 12.5$

ধাপ 3 : **ব্যাখ্যা :** যেহেতু 12.5 মাস পরে একটি কম্পিউটারের ভাড়া তার মূল্য থেকেও বেশি হবে, সুতরাং, তুমি যদি 12. মাসের বেশি সময় একটি কম্পিউটার ব্যবহার কর তবে তা ক্রয় করাই লাভজনক হবে।

2. ধাপ 1: সূত্রকরণ (**Formulation**) : আমরা ধরে নিই গাড়িগুলো অপরিবর্তনীয় গতিতে ভ্রমণ করে। সুতরাং, গতির ক্ষেত্রে যে কোনও ধরনের পরিবর্তন অপ্রাঙ্গিক হবে। যদি গাড়িগুলো x ঘণ্টা পরে মিলিত হয়, তাহলে প্রথম গাড়ি A থেকে $40x$ কিমি. এবং দ্বিতীয় গাড়ি $30x$ কিমি. দূরত্ব অতিক্রম করবে। সুতরাং, A থেকে দূরত্ব হবে $(100 - 30x)$ কিমি.। সুতরাং, সমীকরণটি হবে, $40x = 100 - 30x$, অর্থাৎ, $70x = 100$.

ধাপ 2 : **সমাধান** : সমীকরণটি সমাধান করে পাই $x = \frac{100}{70}$

Sধাপ 3 : **ব্যাখ্যা :** $\frac{100}{70}$ = 1.4 ঘণ্টা (প্রায়) সুতরাং, গাড়িগুলো 1.4 ঘণ্টা পরে মিলিত হবে।

3. ধাপ 1 : সূত্রবন্ধকরণ (**Formulation**) : যে গতিতে চন্দ্র পৃথিবীর চারদিকে পরিভ্রমণ করে তা হল—

$$\frac{\text{কক্ষপথের দৈর্ঘ্য}}{\text{সময়}}$$

ধাপ 2 : সমাধান : যেহেতু কক্ষপথটি বৃত্তাকার, তাহলে দৈর্ঘ্য হবে $2 \times \pi \times 384000$ কিমি. $= 2411520$ কিমি.।

চন্দ্র একপাক ঘুরতে সময়ে নেয় 24 ঘণ্টা।

সুতরাং, গতিবেগ $= \dfrac{2411520}{24} = 100480$ কিমি./ঘণ্টা।

ধাপ 3 : ব্যাখ্যা : গতিবেগ হল 100480 কিমি./ঘণ্টা।

4. সূত্রবন্ধকরণ **(Formulation) :** ধরে নেওয়া হল বিলে (*bill*) পার্থক্য দেখা যায় তা কেবল জল গরম করার চুল্লি ব্যবহার করার জন্য।

ধর, জল গরম করার চুল্লি গড়ে x ঘণ্টা ব্যবহার করা হয়।

প্রত্যেক মাসে জল গরম করার চুল্লির ব্যবহারের জন্য বিলের পার্থক্য = 1240 – 1000 টাকা = 240 টাকা।

1 ঘণ্টায় জল গরম করার চুল্লি ব্যবহারের জন্য খরচ = 8 টাকা

সুতরাং, 30 দিনে জল গরম করার চুল্লি ব্যবহারের খরচ $= 8 \times 30 \times x$

আবার, 30 দিনে জল গরম করার চুল্লি ব্যবহারের খরচ = জল গরম করার চুল্লি ব্যবহারের জন্য বিলের পার্থক্য।

সুতরাং, $240x = 240$

সমাধান : এই সমীকরণ থেকে পাই $x = 1$.

ব্যাখ্যা : যেহেতু $x = 1$, গড় হিসাবে প্রতিদিন 1 ঘণ্টা করে জল গরম করার চুল্লি ব্যবহৃত হয়।

অনুশীলনী A2.2

1. আমরা এখানে কোন নির্দিষ্ট সমাধান নিয়ে আলোচনা করব না। আমরা শেষ উদাহরণে যে পদ্ধতি ব্যবহার করেছি, তা তুমি ব্যবহার করতে পারো অথবা অন্য যে কোন পদ্ধতি তুমি যা উপযুক্ত বলে মনে কর, তা ব্যবহার করতে পারো।

অনুশীলনী A2.3

1. আমরা পূর্বেই উল্লেখ করেছি যে সূত্রবন্ধকরণ প্রক্রিয়া বাস্তব জীবনের পরিস্থিতিতে অত্যন্ত প্রযোজ্য। বর্ণনামূলক সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা তার বৈধতা বা ন্যায্যতা নিরূপণ করি না। তাছাড়া বর্ণনামূলক সমস্যায় আমরা শুদ্ধ উত্তর পাই। এটি বাস্তব জীবনের পরিস্থিতিতে কার্যকর না হতেও পারে।

2. গুরুত্বপূর্ণ বিষয়গুলো হল— (ii) এবং (iii) । এখানে যদিও (i) গুরুত্বপূর্ণ বিষয় নয় তথাপি বিক্রি হওয়া গাড়ির সংখ্যার উপর এর প্রভাব বিদ্যমান।